εχουσῶν πλευρῶν, ἔσται ἡ ταύτην ὑποτείνουσα Γη = $\sqrt{(\eta\Delta^2 + \Delta\Gamma^2)}$ (349).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Ἰχνογραφίας.

607. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. *Πίνακα γεωγραφικὸν σχεδιάσαι.*

ΛΥΣΙΣ. Μετρηθείσης ἀκριβῶς μιᾶς βάσεως (σχ. 44) τῆς ΟΠ, εἰλήφθωσαν πρὸς τῷ Ο διὰ τοῦ γραφομέτρου πᾶσαι αἱ γωνίαι ΖΟΠ, ΕΟΠ, ΔΟΠ, κτ., ἃς συνισῶσι μετὰ τῆς ΟΠ πάντες οἱ ἐκ τῶν Ο, Π ὁρώμενοι τόποι· ὡσαύτως πρὸς τῷ Π εἰλήφθωσαν πᾶσαι αἱ γωνίαι ΖΠΟ, ΕΠΟ, ΔΠΟ, κτ· ἐντεῦθεν οὖν προκύψουσι τρίγωνα τὰ ΠΟΖ, ΠΟΕ, κτ., ἐν οἷς γνωστά εἰσι μία πλευρὰ ἡ ΟΠ, καὶ δύω αἱ πρὸς αὐτῇ γωνίαι Ο, Π· ζητουμένων οὖν καὶ τῶν λοιπῶν ἑκάστου τριγώνου, καὶ ἐπὶ χάρτου συνισταμένων (379) ὁμοίων τούτοις τριγώνων (219), ἐκτεθήσεται ἡ ἑκάστου τόπου θέσις ὡς πρὸς τὴν ΟΠ βάσιν· τὰ αὐτὰ δὲ γενέσθαι δύναται καὶ ὑπὲρ τῶν τόπων τῶν ἔνερθεν τῆς ΟΠ κειμένων.

Εἰς δὲ ὁρισμὸν τῆς θέσεως τοῦ Α τόπου διὰ τὰς ΑΟΠ λίαν ἀμβλείας γωνίας, καὶ διὰ τὰς λίαν ὀξείας ΑΠΟ, αὐτὰς μὲν διὰ τοῦ γραφομέτρου ἤκισα μετροῦμεν, διορίζομεν δὲ ταύτην τὴν θέσιν διὰ τῆς προευρημένης προσεχοῦς πλευρᾶς ΒΟ τοῦ ΒΑΟ τριγώνου, λαμβάνοντες ἐκ μὲν τοῦ Ο τὴν ὑπὸ ΒΟΑ γωνίαν, ἐκ δὲ τοῦ Β τὴν ὑπὸ ΟΒΑ.

Ὁπόταν τόπος ὁ Η παρατηρητέος ᾖ ἐκ δύω ἑτέρων τόπων Τ, Δ, ὧν εἴληπται ἡ θέσις, ὁρᾶν αὐτὸν μὴ

δυνάμενοι ἐκ τῶν Ο, Π, λαμβάνομεν κατὰ τὸ Δ καὶ Τ τὰς γωνίας ΤΔΗ, ΗΤΔ, καὶ ἀγομένης ἐπὶ τοῦ πίνακος τῆς ΔΤ εὐθείας, συνισάθωσαν ἐπ' αὐτὴν αἱ ἐπὶ τῆς γῆς εὑρεθεῖσαι γωνίαι ΤΔΗ, ΗΤΔ, τὸ δὲ σημεῖον τῆς κοινῆς διατομῆς Η ἐμφανεῖ ἐπὶ τοῦ πίνακος τῆς θέσιν τοῦ Η τόπου.

608. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ συχνάκις παροπηδῶσα ταῖς δε ταῖς πράξεσιν ἀπάτη γίνεται μάλισα, ἡνίκ' ἂν ἡ γωνία, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ μετρηθησομένη πλευρὰ, ἢ λίαν ἀμβλεῖα, ἢ λίαν ὀξεῖα· τούτου χάριν ἐπὶ τῆς πράξεως, ὅσον ἔνεσι, φεύγομεν τῶν τοιῶνδε γωνιῶν τὴν καταμέτρησιν.

Δυνατὸν ἔτι θέσθαι (κ. 45) ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ τοῦ πίνακος, ὅσους ἂν βουλώμεθα τόπους, ὁρατοὺς μὲν ἐκ τῶν Ο, Π, ὁρατοὺς μέν τοι ἐκ δύω ἤδη τεθέντων τόπων.

609. Σανίδιον ΑΒ ἔστι μικράτις σανὶς κυκλικὴ, ἢ τετράγωνος, λίαν ὁμαλὴ, ἐφ' ἧς τίθεται κανὼν κινητὸς, ὅμοιος κεδόντι τῷ τοῦ γραφομέτρου, ὃς ἐνταῦθα δρομεὺς ὀνομάζεται, ἐπ' αὐτὸ δὲ χάρτης κολλᾶται τῷ σφαγιστικῷ κηρῷ, ἵν' ἔχοιεν εὐμαρῶς ἄγεσθαι ἐπ' αὐτοῦ αἱ ὧν δεόμεθα εὐθεῖαι.

610. Ἄλλη Μέθοδος. Τῷ σανιδίῳ. Δυνάμεθα εὑρεῖν τὴν θέσιν τῶν τριῶν τόπων Τ, Ζ, Π· ἐκτεθείσθω γὰρ ἡ Οη ἐπὶ τοῦ σανιδίου ἐμφαίνουσα τὴν ΟΗ βάσιν, καὶ περιέχουσα τοσαῦτα μέρη ὅμοια τῆς γεωμετρικῆς κλίμακος, ὁσάκις φέρ' εἰπεῖν ἡ ΟΗ βάσις περιέχει τὰς 100 ὀργυιάς· τεθείσθω δὲ τὸ τοῦ σανιδίου ἐπίπεδον ὁριζοντικῶς ἐπὶ τοῦ ο πέρατος τῆς ΟΗ βάσεως, ὥστε τὴν ἐπὶ τοῦ σανιδίου εὐθεῖαν οΗ διευθύνεσθαι πρὸς τὴν ΟΗ βάσιν· εἶτα ἑνὸς τῶν περάτων τοῦ δρομέως τιθεμένου ἐπὶ τοῦ ο πέρατος τῆς οη εὐθείας, διευθυνέσθω ἐκ διαδοχῆς πρὸς τοὺς τόπους

Τ, Ζ, Π, καὶ ἤχθωσαν πρὸς τὸν δρομέα ἐπὶ χάρτου αἱ εὐθεῖαι ΤΟ, ΖΟ, ΠΟ, αἵτινες γίνονται δο, χο, πο.

Μεταβεβιβάσθω εἶτα τὸ σανίδιον ἐπὶ τοῦ Η, καὶ τεθήτω ὡς καὶ πρότερον, καὶ ἐπιτεθήτω ἓν πέρας τοῦ δρομέως ἐπὶ τοῦ η, καὶ διευθυνθήτω ὁ δρομεὺς ἐκ διαδοχῆς πρὸς τοὺς τόπους Τ, Ζ, Π· αἱ οὖν εὐθεῖαι δη, χη, πη, αἱ κατὰ μῆκος τοῦ δρομέως ἀγόμεναι, τέμνουσαι τὰς ἐκ τοῦ ο ἀχθείσας εὐθείας, παρέξουσι τὰ σημεῖα δ, χ, π, ὧν ἡ θέσις ἡ αὐτὴ ἔσται τῶν τόπων Τ, Ζ, Π· καὶ γὰρ ἕκαστον τῶν ἐπὶ τοῦ σανιδίου τριγώνων, ἔχον δύο γωνίας ο, η, ἴσας ταῖς ἀντικείχαις Ο, Η, ἐν τῷ μεγάλῳ τριγώνῳ ΗΟΤ, τῷ ἐπὶ τῆς γῆς, ἀναγκαίως αὐτῷ ἔσται ὅμοιον.

611. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὁ ἐπαρχίας τινὸς πίναξ, οὐδὲν ἕτερόν ἐστιν, ἡ θέσις ὁριζοντικὴ τῶν κυριωτέρων τόπων αὐτῆς, τουτέστιν ἡ θέσις, ἣν εἶχον ἂν πρὸς ἀλλήλους, εἰ ἦσαν ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ· τούτου δὴ χάριν ἵνα λάβωμεν τὰς γωνίας, αἵτινες παρεχῶσι τὴν θέσιν τῶν διαφόρων τόπων, κατέχειν δεῖ τὸ τοῦ γραφομέτρου ἢ τὸ τοῦ σανιδίου ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ὁρίζοντι· ἐντεῦθεν ἄρα αἱ ὀπτικαὶ ἀκτῖνες, αἱ διὰ τῶν διοπτρῶν παραλλήλως τῷ τοῦ γραφομέτρου, ἢ σανιδίου, ἐπιπέδῳ πρὸς δύο ῥάβδους διαγόμεναι, τμηθήσονται ἐν σημείοις, ἃ δύνανται ἀσφαλῶς θεωρηθῆναι ὡς κείμενα ἐπὶ τῆς ὁριζοντίου θέσεως (604). Τοιγαρῶν, ἵνα τοῦ γραφομέτρου, ἢ τοῦ σανιδίου, παραλλήλως τεθέντος τῷ ὁρίζοντι, ἡ ὀπτικὴ ἀκτὶς ἔμπης διευθύνηται πρὸς τὴν κορυφὴν Α ὄρους τινός, τὴν μᾶλλον ἀπέχουσαν τοῦ ὄμματος διόπτραν δεήσει εἶναι ἄλις ὑψηλήν, καὶ τοσούτῳ μᾶλλον, ὅσῳ μᾶλλον ἀλλήλων ἀποσήσονται.

612. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Χωρίον σχεδιάσαι ἐν ἐπιπέδῳ κείμενον, καὶ ἀπράσιτον ὄν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκτὸς τοῦ (χ. 46) ΟΗΤΠ ἐπιπέδου εἰλήφθω βάσις ἡ ΑΒ, καὶ μετρείσθωσαν διὰ τοῦ γραφομέτρου πᾶσαι αἱ γωνίαι ΤΒΑ, ΠΒΑ, κτ., ὡς ἐν τῷ προεκτεθέντι ὑποδείγματι (607)· εἶτα ἐπὶ τῆς μικρᾶς βάσεως ΑΒ ἐν τῷ χάρτῃ ληφθείσης συνεστάτωσαν τρίγωνα ΑΒΤ, ΑΒΠ, κτ., ὅμοια τοῖς ἐπὶ τῆς γῆς μεγάλοις τριγώνοις ΑΒΤ, ΑΒΠ, κτλ.· ὅθεν ἔσται ἡ θέσις τῶν γωνιῶν Η, Π, Τ, Ο, αἵτινες εἰσὶν ἐπὶ τῆς γῆς· ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν κορυφῶν Η, Π, Τ, Ο δι' εὐθειῶν, προκύψει τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον ΗΠΤΟ.

613. Διὰ τοῦ σανιδίου· Ἤχθω μικρὰ εὐθεῖα (χ. 47) ἐπὶ τοῦ σανιδίου ἡ δΒ, καὶ τιθέσθω τοῦδι τὸ ὄργανον ἐπὶ τοῦ Α ὥστε τὴν δΒ εὐθεῖαν, ἔχουσαν τὸ πέρας αὐτῆς ἐπὶ τοῦ Α, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας εἶναι τῇ ἐπὶ τῆς γῆς βάσει ΑΒ· καὶ διοπτευθήτωσαν αἱ κορυφαὶ Η, Π, Ο, Τ, καὶ ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΗΑ, ΠΑ, ΟΑ, ΤΑ, αἵτινες γίνονται ἐπὶ τοῦ σανιδίου ηδ, πδ, οδ, χδ, ὡς ἀδιόριστοι· τεθείσθω εἶτα τὸ σανίδιον ἐπὶ τοῦ Β πέρατος, τὸ μὲν Β ἔχον ἐπὶ τοῦ Β, τὸ δὲ δ διατεῖνον πρὸς τὸ Α, καὶ ἤχθωσαν παρὰ τὸν δρομέα, ἥκουσαι πρὸς τὰ σημεῖα Η, Π, Ο, Τ, αἱ εὐθεῖαι ΗΒ, ΠΒ, ΟΒ, ΤΒ, αἵτινες τέμνουσαι τὰς προτέρας ἐν τοῖς σημείοις η, π, ο, χ, παρέξουσι τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον.

614. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἵνα χεδιασθῇ ἐπιπεδόντι ὁριζοντικόν, τὸ τοῦ γραφομέτρου, ἢ τοῦ σανιδίου, ἀεὶ δεῖ εἶναι παράλληλον τῷ ὁρίζοντι.

615 ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Χωρίς προσιτοῦ δι' ἐνίων τῶν αὐτοῦ πλευρῶν μόνον, ἃ μὴν δὲ καὶ ἐν τοῖς αὐτοῦ ἐσωτερικοῖς μέρεσιν, εἴτ' ὖν (χ. 48) λίμνης τῆς ΑΒΓΔΕΖ, τὸ ἐπίπεδον χεδιάσαι.

ΛΥΣΙΣ. Μετρηθήτω διὰ τῆς ὀργυιᾶς μία πλευρὰ τῆς λίμνης ἡ ΑΒ· καὶ δὴ ἐπίτε τῆς γῆς ᾗ τοῦ χάρτου μεθοδευέσθω διὰ τοῦ γραφομέτρου, ἢ τοῦ σανιδίου, ὡς εἴπερ αἱ γωνίαι Ζ, Ε, Δ, Γ, ἦσαν τόπων θεατῶν, ὧν πρόκειτο σχεδιάσαι τὸν γεωγραφικὸν πίνακα (607, 610)· ληφθήσης ἓν ὕπτως ἐπὶ τοῦ χάρτου τῆς θέσεως τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, κτλ., ἐπεζεύχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΒΓ, ΓΔ, κτ· ὅθεν προκύψει τὸ ἐπίπεδον τῆς λίμνης.

616. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Χωρίου τοῦ ΑΒΓΔΕΖ (χ. 49) τοῦ ἐπὶ πρανοῦς κειμένου, οὗ τὰ ἔσω ὑπάρχει προσβάσιμα, τὸ ἐπίπεδον σχεδιάσαι.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τοῦ γραφομέτρου ληφθέντος τινὸς ἐσωτερικοῦ σημείου τοῦ Ι, μετρηθήτωσαν αἱ ὑπὸ ΑΙΟ, ΟΙΖ, κτλ. γωνίαι, ᾗ διὰ τῆς ὀργυιᾶς μετρηθήτωσαν αἱ εὐθεῖαι ΙΑ, ΙΟ, κτλ.· ἐκτεθεισῶν δὲ ἐπὶ τοῦ χάρτου τῶνδε τῶν γωνιῶν διὰ τοῦ ἀναγωγέως, ᾗ τῶν εὐθειῶν διὰ τῆς γεωμετρικῆς κλίμακος, ἐπεζεύχθωσαν τὰ πέρατα Α, Ο, κτλ., διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΟ, κτλ., ὅθεν προκύψει τὸ τῆς γῆς ἐπίπεδον.

Τοῦ σανιδίου τεθέντος ἐν τῷ Ι, ᾗ τοῦ δρομέως ἐκ διαδοχῆς διευθυνομένου πρὸς τὰς γωνίας Α, Ο, κτλ., ἤχθωσαν εὐθεῖαι πέρας μὴ ἔχουσαι αἱ ΙΑ, ΙΟ, κτλ., ᾗ ἐκτελεσθήτω ἡ πρᾶξις, ὡς πρότερον.

Ἄλλως. Μετρηθείσης τῆς ΟΖ πλευρᾶς ὡς βάσεως, σχεδιασθήτω τὸ ἐπίπεδον τῆς γῆς, ὡς εἰ ἦσαν ἀπρόσιτα τὰ ἐν αὐτῷ μέρη (615).

617. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Σχεδιάσαι τὸ ὁριζοντικὸν ἐπίπεδον χωρίου κατὰ τοῦ πρανοῦς κειμένου.

ΛΥΣΙΣ. Γενέσθω ἀπολύτως, ὡς εἰ τὸ χωρίον ἦν

ἐπίπεδον, κατεχομένου ἀεὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ γραφομένου, ἢ τοῦ σανιδίου παραλλήλως τῷ ὁρίζοντι (613 κτλ.).

618. Ἵνα μέντοι σχεδιασθῇ τὸ ὁριζοντικὸν ἐπίπεδον ὄρους, εἰλήφθω ἡ θέσις τῶν σημείων, ἃ περιέχουσι τὴν αὐτοῦ ὁριζόντιον περίμετρον, ἢ κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ πίνακα γεωγραφικὸν σχεδιάζειν (607), ἢ ἐκδεξαμένοις τὰς διαφόρους προσόψεις τοῦ ὄρους ὡς ἀπροσίτους (612), καὶ λαβοῦσι τὰ ἰδιαίτερα ἐπίπεδα αὐτῶν τῶν προσόψεων διὰ τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου διαφόρων βάσεων, ἢ ἐκδεξαμένοις ἑκάστην τῶν προσόψεων ὡς χωρίον προσιτὸν διὰ μιᾶς μόνης πλευρᾶς (615), ἢ ἅμα χρησαμένοις ἁπάσαις ταῖς δὲ ταῖς μεθόδοις, καθ' ἣν ἑκάστη πρόσοψις παρίσησι χρῆσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Σύνοψις τῆς ἐχυροποιΐας.

619. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἐπίπεδον ἐπὶ χάρτου δοθὲν κατὰ γῆς σχεδιάσαι, εἴτ' οὖν τὸ ἀκονόνισον ἐπίπεδον (σχ. 50) αβγδεζ.

ΛΥΣΙΣ. α΄. Εἰλήφθω σημεῖον τὸ Ι ἐν τῷ μέσῳ τοῦδε τοῦ ἐπιπέδου, καὶ τεθέντος ἐπ' αὐτὸ ἑνὸς πέρατος τοῦ δρομέως διοπτευθήτωσαν ἐκδιαδοχῆς πᾶσαι αἱ γωνίαι α, β, γ, κτ., καὶ προσηλωθήτωσαν ἐν τῇ γῇ ἐν ταῖς δειχθείσαις φοραῖς αἱ ῥάβδοι Α, Β, Γ, κτλ.

β΄. Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς κλίμακος διὰ τοῦ διαβήτου ἑκάστη εὐθεῖα Ια, Ιβ, κτλ., καὶ ἐὰν ἐπὶ τῆς κλίμακος ἡ Ια = 100 φέρ' εἰπεῖν, γενέσθω ἐπὶ τῆς γῆς ΙΑ = 100 ὀργυιαῖς· τὰυτὸ δὲ γενέσθω καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων εὐθειῶν Ιβ, Ιγ, κτλ.

γ΄. Τέλος δὲ ἐπεζεύχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, κτλ.· τὸ δὲ ΑΒΓΔΕΖ ἔσται σχῆμα ὅμοιον τῷ ἐπὶ τῆς χάρτου δοθέντι· τὰ γὰρ Ιαβ, ΙΑΒ τρίγωνα διὰ τὴν Ι κοινὴν γωνίαν καὶ διὰ τὰς ἀναλόγους πλευρὰς Ια, Ιβ, ΙΑ, ΙΒ, εἰσὶν ὅμοια (337)· ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τρίγωνα.

620. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τῆς ἀριθμῆς τῶν πλευρῶν δοθέντος, καὶ τῆς ἀκτῖνος, κανονικὸν πολύγωνον ἐπὶ τῆς γῆς συστῆσαι, ἐχυροποιίᾳ, ἢ ἄλλῳ τῷ, συντελῆν.

ΛΥΣΙΣ. Κείσθω ἐχυροποιῆσαι (σχ. 51) τὸν τόπον Ι καὶ δὴ περὶ τὸ Ι, ὡς περὶ κέντρον, προκείσθω συστῆσαι ἑξάγωνον κανονικὸν ἐπὶ ἀκτῖνος ΙΑ = 180 ὀργ.

α΄. Ἐν παντὶ ἑξαγώνῳ κανονικῷ ἡ πρὸς τῷ Ι κέντρῳ παντὸς τριγώνου τῆς ΙΑΒ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ δύο πλαγίων ἀκτίνων ΙΑ, ΙΒ, ἔστιν = 60° (396)· ἐκ τοῦ Ι οὖν διοπτευθείσης διὰ τοῦ δρομέως πρὸς τὸ δοκοῦν μιᾶς ἀκτῖνος, ἐμπεπήχθω ῥάβδος κατὰ τὸ Χ· παρεκλιθέντος δὲ τοῦ δρομέως μοίραις 60 ἐμπεπήχθω ἐνταῦθα κατὰ τὴν φορὰν ΙΨ ἄλλη ῥάβδος· ἐκ δὲ τούτου πάλιν παρεκκλίσεως 60 ἄλλων μοιρῶν γινομένης, ἐμπεπήχθω ἄλλη ῥάβδος κατὰ τὴν Ικ φορὰν, καὶ οὕτως ἑφεξῆς.

β΄. Ἐκ δὲ δὴ τοῦ Ι μετρηθεισῶν ἐπὶ τῆς ΙΧ ὀργυιῶν 180, καὶ ἐπὶ τῆς ΙΨ δὲ, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων εὐθειῶν, προκύψουσιν αἱ εὐθεῖαι ΙΑ, ΙΒ, ΙΟ κ. τ. λ., ἐπιζευχθεισῶν δὲ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΟ κ. τ. λ. γενήσεται ἑξάγωνον κανονικὸν τὸ ΑΒΟΔΕΖ, κατεσκευασμένον ἐπ' ἀκτῖνος = 180 ὀργυιῶν κατὰ τὴν ζήτησιν, ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον (249).

Εἰς δὲ κατασκευὴν κανονικοῦ πενταγώνου, παρατηρηθήτω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία παντὸς τριγώνου

τῦ ἐν αὐτῷ ἔςιν = 72° (249)· ταδ' ἄλλα διαπεπράχθω, ὡς ἀνωτέρω.

Τ'πὲρ δὲ τετραγώνυ τελείυ γενέσθω ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ὑπὸ XIZ γωνία = 90°, ἢ = 120° ὑπὲρ τριγώνυ (249), ἢ τὰ λοιπὰ πεπράχθω, ὡς ἢ πρότερον.

Τ'πὲρ δὲ κανονικῦ ἑπταγώνυ, ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία ἔςιν = 50° + 25' + 42'' κ. τ. λ., διὰ τῦ γραφομέτρυ τὰ τῆς πράξεως ὐκ ἂν ἐξακριβωθείη· ταὐτὸν δὲ νοητέον ἢ περὶ παντὸς ἄλλυ κανονικῦ πολυγώνυ, ὗ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία Ι ὐκ ἂν εἴη ἐν ὁλοχερέσι μοίραις ἐκδηλυμένη· ὑπὲρ δὲ ὀκταγώνυ γενέσθω ἡ γωνία = 45, ὑπὲρ ἐννεαγώνυ = 40°, ὑπὲρ δεκαγώνυ = 36° κ. τ. λ. (249).

621. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ε'ὰν δὲ μὴ ἐξῇ ἐκ τῦ μέσυ τῦ ἐχυροποιηθησομένυ τόπυ κατασκευάσαι πολύγωνα, διαπραξόμεθα τὰ ἑξῆς.

α'. Α'ναμνησέον, ὡς ἐν γένει ἑκάςη ἐσωτερικὴ γωνία κανονικῦ πολυγώνου ἴση ἐςὶ δὶς τοσαύταις ὀρθαῖς πλὴν τεσσάρων, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον, διαιρεθείσαις τῷ ἀριθμῷ τῶν πλευρῶν (267)· ἐντεῦθεν τριγώνυ μέν ἐςιν = 60°, τετραγώνυ δὲ = 90°, πενταγώνυ δὲ = 108°, ἑξαγώνυ δὲ = 120°, ἑπταγώνυ δὲ = 128° + 34' κτ., ὀκταγώνυ δὲ = 135° ἢ τὰ ἑξῆς.

β'. Ε'ὰν ὖν ζητῆται κανονικὸν ἑξάγωνον, ςὰς ἐν τῷ σημείῳ A, εἰλημμένῳ περὶ τὸν ἐχυροποιηθησόμενον τόπον, πρόσηλυ ῥαβδίον ἐπὶ τῆς τῦ δρομέως φορᾶς AB· ςρέψας δὲ τὸν δρομέα πρὸς τὸ Z, ἕως ἂν διαδράμῃ μοίρας 120°, πρόσηλυ ἕτερον ῥαβδίον ἐπὶ τὴν AZ φοράν.

Παρατηρῦντι δὲ, ὡς τὸ ἐν ἑξαγώνῳ κανονικῷ τρίγωνον ἔςιν ἰσόπλευρον (251), γενέσθω ἑκάςη πλευρὰ

ΑΒ, ΑΖ ἴση τῇ ἀκτῖνι = 180 ὀργυαῖς· τῶν δὲ δύω πλευρῶν ΑΒ, ΑΖ ὕτως ὁριωθεισῶν, συνεςάτωσαν ἐπὶ τῶν κατ' αὐτὰς περάτων Β, Ζ δύω νέαι γωνίαι ἑκατέρα = 120° διὰ τῶν νέων πλευρῶν ΒΟ, ΖΕ, ὧν ἑκατέρα γενέσθω = 180 ὀργυαῖς, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως· ἐντεῦθεν συςαθήσεται ἐπὶ τῆς γῆς ἑξάγωνον κανονικὸν ἐπὶ τῆς αἰτηθείσης ἀκτῖνος.

Ἐν παντὶ δὲ ἄλλῳ κανονικῷ σχήματι ὁριςέον τριγωνομετρικῶς, ὅσον δεῖ εἶναι τὸ μῆκος ἑκάςης πλευρᾶς, τοῦ τῆς ἀκτῖνος δεδομένου μήκους.

622. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθω κατασκευάσαι κανονικὸν πεντάγωνον ἐπὶ ἀκτῖνος τῆς ΙΑ = 180 ὀργυαῖς· ἐπεὶ οὖν ἡ ἐσωτερικὴ ὑπὸ ΒΑΖ γωνία τοῦ πενταγώνου ἐςὶν = 108° (267), ἡ ὑπὸ ΒΑΙ γωνία τοῦ ΑΒΙ τριγώνου ἡμίσεια αὐτῆς ἔςαι, εἴτ' οὖν 54°, ἡ δὲ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία ΑΙΒ = 72° (249). Τριγώνου οὖν τοῦ ΙΒΑ γνωςῶν ὄντων τῶν τε δύω γωνιῶν Α, Ι καὶ τῆς πλευρᾶς ΙΒ = ΙΑ = 180 ὀργυαῖς, ἡ συνήθης τῶν τριῶν μέθοδος (516) συνημ. Α : ΙΒ : : συνημ. Ι : ΑΒ ἐκδηλώσει τὸ μῆκος, ὃ ἀπονεμηθῆναι δεῖ ἑκάςῃ πλευρᾷ ΑΒ, ΑΖ κ. τ. λ. τοῦ πενταγώνου· τὰ δὲ λοιπὰ, ὡς πρότερον, διαπραχθήσεται.

Ὁ ρ ι σ μ ο ί.

623. Ὑποτεθείσθω τὸ ἡμιεξάγωνον (σχ. 52) ΑΒΓΔ ἥμισυ ἐπιπέδου, ἐν γῇ γενομένης ἐχυροποιίας· τὸ μὲν οὖν ΑΒΓΔ καλεῖται πολύγωνον ἐξωτερικὸν, τὸ δὲ χβΓδ, πολύγωνον ἐσωτερικόν· καὶ γραμμὴ μὲν τῆς βάσεως καλεῖται μία τις πλευρὰ ΒΓ τοῦ ἐξωτερικοῦ πολυγώνου· πύργος δὲ, ὅλον τὸ μέρος ΒΕτκΖ· ἡ

δὲ γραμμὴ ΒΕ, ἡ ΒΖ προπύργιον· ἡ δὲ δύω πύργους διακρίνουσα γραμμὴ κο, χόρτος.

624. Ἡ κΖ γραμμὴ καλεῖται πλευρόν.

625. Γωνία ἠλαττωμένη ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΖ ἡ ὑπὸ τῆς βάσεως ΒΓ καὶ ἑνὸς προπυργίου ΒΖ περιεχομένη, γωνία δὲ πλευρώδης, ἡ ὑπὸ δύω προπυργίων τῶν ΒΕ, ΒΖ περιεχομένη· κέκληται δὲ οὕτως ὡς φρουρουμένη ὑπὸ τῶν δύω προπυργίων Μο, ΠΡ.

626. Γωνία πλευρῶν ἐστιν ἡ Ζκο ἡ ὑπὸ τοῦ πλευροῦ Ζκ καὶ τοῦ χόρτου κο περιεχομένη· γωνία δὲ νώτου, ἡ ΒΖκ ἡ περιεχομένη ὑφ' ἑνὸς προπυργίου τοῦ ΒΖ, καὶ ἑνὸς πλευροῦ τοῦ Ζκ.

627. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Δοθέντος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, καθ' ὃ πρόκειται κατασκευάσαι ἐχυροποιΐαν τινὰ, ἐπὶ χάρτου, λογίσασθαι δὶ αὐτοῦ τὰς γωνίας καὶ τὰς γραμμὰς τῆς ἐπὶ τῆς γῆς κατασκευασθησομένης ἐχυροποιΐας.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἓν ἑξάγωνον τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔ· ἀ. γενέσθω ἡ γραμμὴ τῆς βάσεως ΒΓ = 180 ὀργυιαῖς περίπου ὑπὲρ μετρίας ἐχυροποιΐας· καὶ ἐσάθω κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς ἡ κάθετος ΗΙ, ἥτις ἔστω ἴση τῷ ἑκτημορίῳ τῆς ΒΓ ὑπὲρ ἑξαγώνου, τῷ πεμπτημορίῳ ὑπὲρ πενταγώνου, τῷ ὀκτημορίῳ ὑπὲρ ὀκταγώνου κ.τ.λ.· διὰ δὲ τοῦ Ι διήχθωσαν πέρας μὴ ἔχουσαι αἱ εὐθεῖαι ΒΙο, ΓΙκ.

β'. Τριγώνου ὄν τοῦ ΒΗΙ, γνωστῶν ὄντων τῆς πλευρᾶς ΒΗ = $\frac{180}{2}$ = 90 ὀργυιαῖς, καὶ τῆς ΗΙ = $\frac{180}{6}$ = 30 ὀργυιαῖς, καὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας Η, πρὸς εὕρεσιν τῆς ἠλαττωμένης γωνίας ΗΒΙ φημὶ: τὸ τῶν δύω πλευρῶν ΒΗ, ΗΙ ἄθροισμα 120 ἔστι πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν 60, ὡς ἡ ἁπτομένη τοῦ ἡμιαθροίσματος 45° (212) τῶν δύω γωνιῶν

Β, Ι πρὸς τὴν χ ἁπτομένην τῆς ζητουμένης ἡμιδιαφορᾶς τῶν δὲ τῶν γωνιῶν (499)· ἥτις διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν εὑρίσκεται = 26° + 34′· ἐκεῖν ἔστιν ἡ ἠλαττωμένη γωνία ΗΒΙ = $\frac{22}{2}$° — 26° — 34′ (210) = 18° + 26· ἀφαιρουμένης ὖν τῆς 18° + 26′ ἀπὸ 60° ἡμίσεως τῆς γωνίας Β τοῦ πολυγώνου, ἔσται κατάλοιπον 41° + 34′ ἡμιγωνία πλευρώδης ΖΒβ· ἄρα ὅλη ἡ πλευρώδης γωνία ἔστιν = 83° + 8′ = ΖΒΕ.

γ′. Ἐπιλυθέντος δὲ τοῦ ΒΗΙ τριγώνου εὑρεθήσεται ἁ. ἡ γωνία Ι = 71° + 34′· ἄρα ἡ ΒΙΓ = 143° + 8′· β′. ἡ ΒΙ = 94 ὀργυαῖς + ποδὶ 5.

δ′. Ἀπονεμηθέντος ὖν τῷ προπυργίῳ ΖΒ μήκους περὶ τὰ δύω ἑπτημόρια τῆς ΒΓ, ἡ 51 ὀργ. καὶ ἀχθείσης τῆς ΖΜ, ἡ ΖΙ, ἡ ΜΙ ἴση ἔσται 94 ὀργυαῖς καὶ 5 ποδὶ — 51 ὀργυῶν, εἶτ' ὖν ἴση 43 ὀργυαῖς καὶ 5 ποδί. Τριγώνου ὖν ἰσοσκελοῦς τοῦ ΖΜΙ, γωνία μὲν ἡ Ζ ἴση ἐστὶ τῇ ἡμιηλαττωμένῃ ΖΒΗ (132)· δυνατὸν ἄρα γινωσκομένης καὶ τῆς ΖΙ, τῆς γωνίας Ι = 143° + 8°, τῆς γωνίας Μ = Ζ εὑρεῖν τὴν ΖΜ ἐκ τῆς ἀναλογίας Μ.ΖΙ : Ι.ΖΜ = 83 ὀργυαῖς καὶ ποδὶ 1.

ε′. Γενομένων ΖΟ καὶ Μκ = ΖΜ, καὶ ἀχθέντων τῶν πλευρῶν Μο, Ζκ ἕως τῶν περάτων ο, κ, ναιμὴν καὶ τοῦ χόρτου οκ, ἔσται Ιο = 83 ὀργ. + 1 ποδ. — ΖΙ = 39 ὀργ. + 2 ποδί· ἐκ δὲ δὴ τῶν ὁμοίων ἰσοσκελῶν τριγώνων ΖΜΙ, Ικο ἔστι ΖΙ. ΖΜ : Ιο.κο = 74 ὀργυαῖς + 3 ποδὶ = τῷ χόρτῳ.

ϛ′. Εἰς δὲ εὕρεσιν τῆς Ζκο γωνίας τοῦ πλευροῦ, τριγώνου ἰσοσκελοῦς τοῦ ΖΜκ γινώσκεται ἡ γωνία Μ = Γ (132) = τῇ ἡλαττωμένῃ γωνίᾳ Β = 18° + 26′· ἄρα ἡ ὑπὸ Μκ

Ζ γωνία $= \frac{180^\circ - 18^\circ - 26'}{2}$ (206, 210) $= 80^\circ +$ $47'$· συναφθείσης δὲ τὴν Ικο γωνίας τῇ ἡλαττωμένῃ γωνίᾳ Γ = Β, ἀπολημφθήσεται ἡ γωνία τοῦ πλευροῦ Ζκο $= 99^\circ + 13'$· εὑρεθήσεται δὲ αὐτὸ τὸ πλευρὸν Ζκ ἐπιλυομένου τοῦ τριγώνου ΖκΜ, ᾗ μεθόδῳ γινομένης κ. ΖΜ : Μ . Ζκ = 26 ὀργυαῖς + 3 ποσί· ἐκ δὲ τοῦ Ζκο τριγώνου ἀπολημφθήσεται ἡ γωνία τοῦ νώτου ΒΖκ = κ + ο (216) $= 99^\circ + 13'$ $+ 18^\circ + 26' = 117^\circ + 39'$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ χωρομετρίας.

628. Κείσθωσαν δύω δένδρα (χ. 53) δ, ζ ἐπὶ τῆς κορυφῆς ὄρους τινὸς τοῦ ΘΠ, οὗ τὸ ὑπὲρ τὸν ΗΟ ὁρίζοντα ὕψος ἔστιν ἡμισείας λεύγης· τὰ δὲ δένδρα ἀλλήλων ἀπέχουσιν ὀργυιὰς 3· ἐὰν οὖν ἐπινοηθῶσι κατιόντα κατὰ τὰς φορὰς δΚ, ζΚ τῆς βαρύτητος, συμπεσοῦνται ἐν τῷ τῆς γῆς κέντρῳ Κ· ὑκοῦν τὸ τριῶν ὀργυῶν διάστημα, τὸ ταῦτα ὁρίζον, ὁλοχερῶς ἀφανισθήσεται μετὰ τὸ διαδραμεῖν τὰ δένδρα λεύγας 1433, διὰ τὸ τὴν τῆς γῆς ἀκτῖνα ὅτι ἔγγιστα ἰσοῦσθαι λεύγαις $1432\frac{1}{2}$.

629. Ἐὰν δὲ μόνον κατέλθωσι μέχρι τοῦ ὁρίζοντος ΗΟ, προσπελάσουσιν ἀλλήλοις τῇ ποσότητι, ἥπερ ἡ ΗΟ ἔστιν ἐλάττων τῆς δζ· ἀλλὰ δΚ : ΚΗ :: δζ : ΗΟ, ἢ 1433 : $1432\frac{1}{2}$ :: 3 ὀργυιαὶ : χ· μεθόδου γενομένης τῶν τριῶν ΗΟ ἰσοῦται τῇ δζ — $\frac{1}{955}$ ὀργυιᾶς· ὑκοῦν τὰ δύω δένδρα δ, ζ κατελθόντα μέχρι τοῦ ὁρίζοντος, εἶτ' οὖν δια-

δραμόντα τὸ ἡμισείας λεύγης ὕψος τοῦ ὄρους προσεγγίζουσιν ἀλλήλοις τῷ $\frac{1}{555}$ ὀργυᾶς, ὅπερ οὐδὲ γραμμὴν ὅλην σημαίνουσιν.

630. Ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ τὸ ΘΠ ὄρος ἐπικαλυπτόμενον δένδρεσι, τρεῖς ὀργυὰς ἀπέχουσιν ἀλλήλων, πρὸς ὀρθὰς ἐφεστήκασι τῷ ὁρίζοντι κατὰ τὰς εὐθείας ΔΚ, ΖΚ, ἐπινοηθῶσι δὲ κατιόντα μέχρι τοῦ ὁριζοντικοῦ διαστήματος ΗΟ, ὃ περιλαμβάνει τὸ ὄρος, ἀλλήλοις ἅπαντα προσεγγίζουσι σχεδὸν μιᾷ γραμμῇ.

631. Δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν τοσαῦτα μικροῦ δεῖν ὁιόντε εἶναι φυτεῦσαι δένδρα, τόσους οἰκοδομήσασθαι οἴκους κτλ., ἐπὶ τοῦ ὁριζοντικοῦ διαστήματος ὄρους τινὸς, ὅσα κἀπὶ τῆς ἐπικαμποῦς αὐτοῦ ἐπιφανείας.

632. Ἐντεῦθεν ἄρα χώρας μετροῦντες οἱ Γεωμέτραι τὴν ὁριζοντικὴν αὐτῶν ἐπιφάνειαν μόνον ἐκτιμῶσι, καὶ ταύτην ἀεὶ μετρεῖν εἰώθασι· ἐντεῦθεν ἄρα οὐ χρῶνται τῇ ἐκμετρήσει γῆς ἀνάντους, ἢ κατάντους, ἀλλὰ μόνον ἐν λόγῳ τῆς ὁριζοντικῆς αὐτῆς ἐπιφανείας· καὶ τοῦτ' ἔστιν, ὃ εἴωθεν ἀεὶ καταμετρεῖσθαι.

633. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Καταμετρῆσαι τὴν ὁριζοντικὴν χωρίου ἐπιφάνειαν.

Τῷ σανιδίῳ. Σχεδιάσαντες τὸ ὁριζοντικὸν ἐπίπεδον τοῦ χωρίου (617), λογιούμεθα τὸ ἐμβαδὸν κατὰ τάδε.

Ἔστω τὸ ἐπὶ χάρτου ἐσχεδιασμένον τοῦ χωρίου ἐπίπεδον τὸ ἀκανόνιστον πεντάγωνον (σχ. 54) ΑΟΠΡΧ· α΄. διηρήσθω εἰς τρίγωνα διὰ τῶν κατεσιγμένων ΑΡ, ΑΠ· β΄. εἰλήφθω διὰ τῆς κλίμακος ἡ κατεσιγμένη ΑΡ, ὡς τεθῆναι ἔχουσα εἰς κοινὴν βάσιν τῶν δύω προσεχῶν τριγώνων ΑΡΧ, ΑΡΠ, καὶ ἐπ' αὐτῆς ἠγέρθω ὡς ὕψος τοῦ ΑΧΡ τριγώνου κάθετος ἡ ΧΔ, ἡ δὲ ΠΓ κάθετος, ὡς ὕψος τοῦ

ΑΠΡ τριγώνου· τούτων δὲ τῶν δύω καθέτων τῇ κλίμακι μετρηθεισῶν, ἔσται τὸ μὲν ΑΡΧ τρίγωνον $= \frac{\text{ΑΡ} \times \text{ΔΧ}}{2}$, τὸ δὲ ΑΠΡ $= \frac{\text{ΑΡ} \times \text{ΠΤ}}{2}$ (285, 321).

Τὸ δὲ τρίτον τρίγωνον ΑΠΟ, μετρηθείσης τῇ κλίμακι τῆς ΑΟ βάσεως, καὶ τοῦ Πη ὕψους, ἔσται $= \frac{\text{ΑΟ} \times \text{Πη}}{2}$.

Τὸ δὲ τῶν τριῶν τούτων τριγώνων ἄθροισμα ἐκδηλώσει τὴν ὁλικὴν τοῦ χωρίου ἐπιφάνειαν, ἣν ἔδει μετρῆσαι.

634. ΑΛΛΩΣ. Ἵνα μετρηθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγωνικοῦ χωρίου (χ. 55) ΑΒΓ, μετρηθήτω πρῶτον τῇ ὀργυᾷ ἡ ΑΓ ὡς βάσις· ἐπ' αὐτῆς δὲ προσχθείσης ἠγέρθω κάθετος ἡ ΒΖ ὡς ὕψος, καὶ μετρηθήτω τῇ ὀργυᾷ, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὴν ΑΓ βάσιν· τὸ δὲ τοῦ γινομένου ἥμισυ ἔσται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου (285, 288).

635. Ἐὰν δὲ εὐχερέστερον ᾖ, ὡς βάσιν μὲν λαβεῖν τὴν ΑΒ εὐθεῖαν, ὡς δὲ ὕψος τὴν ΓΔ κάθετον, ἔσται ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια $= \frac{\text{ΑΒ} \times \text{ΓΔ}}{2}$.

636. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἰεὶ δ' ἀναμνησέον ἐπὶ τῆς χωρομετρίας. ὡς εἰ τὸ πρὸς καταμέτρησιν τρίγωνον ΒΓΔ (χ. 56) κεκλιμένον εἴη ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος, ἡ αὐτοῦ μὲν ἐπιφάνεια ἥκιστα, τοῦ δ' ἀντιστοιχοῦντος ΒΓδ ὁριζοντικοῦ τριγώνου, μετρηθήσεται· μετρητέον οὖν τῇ ὀργυᾷ, βάσιν μὲν τὴν ΒΓ, ὕψος δὲ τὸ Γδ, καθ' ὃν προείρηται τρόπον (605)· ταὐτὸν δὲ νοητέον ἐν γένει περὶ πάσης κατάντους ἐπιφανείας.

637. Ἐὰν τὸ πρὸς καταμέτρησιν προκείμενον χω-

ρίον παραλληλόγραμμον ᾖ, μετρητέον διὰ τῆς ὀργυᾶς τὴν βάσιν, καὶ τὸ ὕψος· τὸ δ' ὑπὸ τούτων γινόμενον ἐκδηλώσει τὴν αὐτοῦ ἐπιφάνειαν.

638. Ἐὰν δὲ τὸ καταμετρηθησόμενον χωρίον κανονικὸν ᾖ πολύγωνον, ὃ σπανιώτατα ξυμβαίνει· α΄. δύω κάθετοι, ἐκ τῶν μέσων δύω πλευρῶν συναντηθεῖσαι ἀλλήλαις, ἐμφανοῦσι τὸ αὐτοῦ κέντρον· β΄. διὰ τῆς ὀργυᾶς μία πλευρὰ μετρηθεῖσα πολλαπλασιαωθήτω ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν εἰς εὕρεσιν τῆς τοῦ πολυγώνου περιμέτρου· γ΄. ἐκ τοῦ κέντρου μιᾷ πλευρᾷ καθέτου ἀχθείσης, καὶ τῇ ὀργυᾷ μετρηθείσης, δι' αὐτῆς πολλαπλασιαωθήτω τὸ τῆς περιμέτρου ἥμισυ· ὅθεν θηρευθήσεται ἡ τοῦ πολυγώνου ἐπιφάνεια (297).

639. Ἐν γένει μέντοι, ἐὰν ἡ πρὸς καταμέτρησιν ἐπιφάνεια (χ. 54) μήτε παραλληλόγραμμον ᾖ, μήτε κανονικὸν πολύγωνον, οἷα ἡ ΑΟΠΡΧ, διηρήσθω εἰς τρίγωνα τὰ ΑΠΟ, ΑΠΡ, ΑΡΧ· καὶ διὰ τοῦ γνώμονος, ἢ τοῦ γραφομέτρου, ἠγέρθωσαν κάθετοι, καὶ τῇ ὀργυᾷ μετρηθήτωσαν αἱ ΧΔ, ΠΤ ἐπὶ τὴν κοινὴν τοῖς δυσὶ τριγώνοις ΑΡΧ, ΑΠΡ βάσιν ὡς ὕψη αὐτῶν τῶν τριγώνων, εἶτα ἠγέρθω ἡ Πη κάθετος ὡς ὕψος τοῦ ΑΟΠ τριγώνου (287)· τέλος δὲ πολλαπλασιαωθήτω ἡ ἑκάστου τριγώνου βάσις ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ εὑρεθέντος ὕψους (285).

640. Ὅταν μὲν αἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος ἐκδηλοῦντες ἀριθμοὶ ἀμιγεῖς περιέχωσι ποσότητας, τουτέστιν ὀργυὰς μόνας κτ., ἄπονος ὅλος ὑπάρχει ὁ πολλαπλασιασμός· ἐὰν γὰρ τὸ μὲν ἥμισυ τῆς (χ. 55) ΑΓ βάσεως ᾖ = 12 ὀργυιαῖς· τὸ δὲ ΒΖ ὕψος = 12 ὀργυαῖς, εὐχερῶς πάνυ ἡ ἐπιφάνεια εὑρεθήσεται περιέχουσα 144 τετραγωνικὰς ὀργυάς.

641. Ἡνίκα μέντοι ὁ τὴν βάσιν, ἢ τὸ ὕψος, ἢ ἀμφότερα, ἐκδηλῶν ἀριθμὸς ὑπάρχει συμμιγής, περιέχων ἅμα ὀργυὰς καὶ πόδας, ἢ ὀργυὰς καὶ πόδας καὶ δακτύλους, ὁ τούτων πολλαπλασιασμὸς πολύπλοκός τις καθίσταται.

642. Εὕρηνται δὲ εἰς τοῦτο δύω μέθοδοι γενικαὶ, ἑκατέρα θατέρᾳ εἰς βάσανον συμβάλλουσαι· ἀμφότεραι δὲ τῷ τοῦ μείζονος εἴδους τετραγώνῳ ὑποτιθέασι μέρη τοῦ ἐλάττονος εἴδους, ἐμφαινόμενα τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐκδηλοῦντος, ποσάκις τῷ μείζονι γραμμικῷ εἴδει ἐμπεριέχεται τὸ ἔλαττον γραμμικὸν εἶδος (280)· ὅ-τος δὲ ὁ τῶν μερῶν ἀριθμὸς ἐστιν ὁ ἐνυποτεθεὶς τῇ τετραγωνικῇ ὀργυᾷ, ἢ τῷ τετραγωνικῷ ποδὶ κτ. ἐπὶ τοῦ ὑποτεθέντος πίνακος (Ἀριθμ. 155)· δέδεικται δὲ (280) ὡς τὸ πρᾶγμα ὅτως ὑπάρχειν ὀφείλει (κ. 57)· ἡ γὰρ τετραγωνικὴ ὀργυὰ ΑΗΒΠ περιέχει ἐξ ἀνάγκης 36 πόδας τετραγωνικοὺς, ἐμφαινομένους ὑπὸ τοῦ ἀπὸ 6 τετραγώνου· ὁ δὲ τετραγωνικὸς ποῦς περιέχει ἀναγκαίως (280) δακτύλους τετραγωνικοὺς 144, ὅς ἐστιν ὁ ἀπὸ 12 γραμμικῶν δακτύλων τετράγωνος· ἐντεῦθεν ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ περιέχει ἀναγκαίως δακτύλους τετραγωνικοὺς 144 × 36 = 5184, τετράγωνος ἀπὸ 72, ὃς ἐκδηλοῖ, πόσους ἡ ὀργυὰ περιέχει γραμμικοὺς δακτύλους.

Οὐκοῦν διχῶς ἄντις εὕροι, πόσα φέρ' εἰπεῖν σίγματα τετραγωνικὰ περιέχει ὀργυὰ ἡ τετράγωνος· α΄. ἀναγομένης τῆς γραμμικῆς ὀργυᾶς εἰς σίγματα 10368, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦδε τετραγωνιζομένου· β΄. εἰδότες, ὡς ἡ μὲν τετράγωνος ὀργυὰ περιέχει 36 πόδας τετραγωνικοὺς, τούτων δὲ ἕκαστος 144 δακτύλους τετραγωνικοὺς, τῶν δὲ ἕκαστος, 144 τετραγωνικὰς γραμμὰς, τούτων δὲ ἑκάστη, 144 σίγματα τετραγωνικὰ, πολλαπλασιάζομεν τρὶς

ἐκ διαδοχῆς τὸν 36 ἐπὶ 144, τὸ δὲ ἔσχατον γινόμενον 107495424 ἰσωθήσεται τῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ 10368, ὡς πρότερον εὕρηται· ἐντεῦθεν δῆλον, ὡς οἱ δύω ἤτοι τρόποι ἀμοιβαδὸν ἀλλήλοις εἰς βάσανον συμβάλλουσι.

643. Ἐὰν δὲ γνῶναι βουλώμεθα, ὅτι ἀληθῶς ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ περιέχει τὰ εἰρημένα τετραγωνικὰ σίγματα, ἐννοήσωμεν (χ. 57) τὴν ΠΗ βάσιν οὐχὶ συγκειμένην ἐκ ποδῶν 6, ἀλλ' ἐκ σιγμάτων 10368, ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ΒΠ ὕψος· καὶ δὴ οὕτως ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ, ἀντὶ τοῦ περιέχειν ἓξ παραλληλόγραμμα ἐκ ποδῶν 6 ἕκαστον σύνθετον, περιέξει παραλληλόγραμμα 10368 ἕκαστον ἐκ σιγμάτων τετραγωνικῶν 10368, εἴτ' οὖν περιέξει σίγματα τετραγωνικὰ 10368 × 10368 = 107495424.

644. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπεὶ δὲ τὸ θεωρεῖν εἶδος ἀνωτερον ἐν ἐπιφανείᾳ, διῃρημένον εἰς μέρη εἴδους ἥττονος, ἀεὶ παρέχει πράξεις ἀριθμητικὰς ἅλις μακροσκελεῖς, ἐπενοήσαν οἱ Γεωμέτραι ἐπιτομωτέραν τινὰ μέθοδον, ἐν τῇ πρακτικῇ ἀεὶ πρὸ τῶν ἄλλων αὐτὴν ἐγκρίναντες, ἣν καὶ ἡμῖν σιγῇ παρελθεῖν ἥκιστα ἔδοξεν.

645. Ἐὰν τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς (χ. 58) ΑΒΓΔ τὸ ΔΓ ὕψος μόνον διαιρεθῇ εἰς ἓξ ἰσάλληλα μέρη ΔΖ, ΖΘ, κτ., εἰς ἓξ δηλονότι πόδας, εἰς ποῦς ΔΖ τοῦ ὕψους παρέξει ἓν παραλληλόγραμμον ΑΔεζ, ὃ καλεῖται ποῦς τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, καὶ ἔστι προδήλως τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ΑΒΓΔ τὸ ἑκτημόριον· ἐὰν οὖν βάσις ἡ ΑΔ μιᾶς ἢ πλειόνων ὀργυῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ὕψος ἑνὸς, ἢ πλειόνων ποδῶν, ἢ τ' ἀνάπαλιν, προκύψουσιν ἐντεῦθεν πόδες τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ΑΔ φέρε

μία ὖσα ὀργυά, πολλαπλασιαωθεῖσα ἐπὶ Δη = 3 ποσὶ, παρέξει τρεῖς πόδας τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

646. Ἐὰν ὖν ἐπινοηθῇ εἷς πῦς ὁ ΔΖ διῃρημένος εἰς 12 δακτύλυς, ἕκαστος δάκτυλος, οἷον ὁ Δυ, παρέξει παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔτυ, ὃ ἔςαι $\frac{1}{12}$ τῦ ποδὸς τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ΑΔεΖ· τουτὶ δὲ τὸ παραλληλόγραμμον καλεῖται δάκτυλος τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

Ἐὰν δὲ ληφθῇ ἓν δωδεκατημόριον μόνον τῦ Δυ δακτύλυ, ἡ πολλαπλασιαωθῇ ἐπὶ τὴν ΑΔ ὀργυὰν, τυτὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἔςαι $\frac{1}{12}$ τῦ δακτύλυ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ΑΔτυ· ὃ καλεῖται γραμμὴ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· τέλος δὲ $\frac{1}{12}$ τῦδε τῦ ἐχάτυ ὕψυς, ἡ $\frac{1}{144}$ τῦ δακτύλυ Δυ παρέξει μετὰ τῆς ΑΔ βάσεως παραλληλόγραμμον, ὃ καλεῖται ςίγμα τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

647. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ ά. Τὸ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ςίγμα ἔςι δωδεκατημόριον τῆς γραμμῆς τῆς αὐτῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ἡ δὲ γραμμὴ τῦ δακτύλυ, ὁ δὲ, τῦ ποδὸς· αὐτὸς δὲ, τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, εἰσὶ δωδεκατημόρια.

648. β΄. 1 πῦς ΔΧ, πολλαπλασιαωθεὶς ἐφ' ἕνα πόδα ΔΖ, διδωσι προδήλως $\frac{1}{6}$ τῦ δακτύλυ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ΑΔεΖ, κ.τ.λ. ἡ δὴ τὸ διπλῦν τῦ δακτύλυ ΑΔτυ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, εἴτ' ὖν δύω δακτύλυς τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ἐντεῦθεν ἄρα, ὅταν παρισᾶται γινόμενόν τι ἐκ ποδῶν, τὸ διπλῦν αὐτῦ παρέξει δακτύλους τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, αἳ καταγραφήσονται ἐν τῷ χώρῳ τῶν δακτύλων τύτων.

649. γ΄. 1 πῦς, πολλαπλασιαωθεὶς ἐφ' ἕνα δάκτυλον, παρέξει $\frac{1}{12}$ τῦ γινομένυ ὑπὸ πόδος, ἐφ' ἕνα πολ-

λαπλασιαωθέντος, εἶτ' ὧν $\frac{1}{12}$ τῶν δύω δακτύλων τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, ἢ 2 γραμμὰς τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· ἔχοντες τοίνυν γινόμενόν τι ὑπὸ ποδῶν καὶ δακτύλων, διπλασιάζομεν αὐτὸ καὶ τίθεμεν ἐν τῷ χώρῳ τῶν γραμμῶν τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

650. δ'. 1 δάκτυλος, πολλαπλασιαωθείς ἐφ' ἕνα δάκτυλον, ὀφείλει παρέχειν $\frac{1}{12}$ τοῦ ἤδη προκύψαντος πολλαπλασιασμῷ τοῦ 1 ποδὸς ἐφ' ἕνα δάκτυλον, εἶτ' ὧν τῶν δύω γραμμῶν, ταὐτὸν εἰπεῖν δύω σίγματα τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, ὅταν ὧν ἡ γινόμενόν τι ὑπὸ δακτύλων, καὶ δακτύλων, λαμβάνοντες τὸ διπλοῦν τοῦδε τοῦ γινομένου, τίθεμεν ἐν τῷ χώρῳ τῶν σιγμάτων τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς.

Ἔσωσαν ὧν ἤδη 20 ὀργυαὶ καὶ 5 πόδες καὶ 9 δάκτυλοι βάσεως ἐφ' ᾧ πολλαπλασιαωθῆναι ἐπὶ 6 ὀργυὰς καὶ 4 πόδας καὶ 7 δακτύλους ὕψους.

20	5	9		
6	4	7		
τετραγ. ὀργ.	πόδες τῆς τετ. ὀργ.	δάκ. τῆς τετ. ὀρ.	γραμ. τῆς τετ. ὀρ	σιγ. τῆς τετρ. ὀρ
120	30	54	72	126
	80	40		
		140	70	
141	4	6	8	6

20 Ὀργυαὶ πολλαπλασιαωθεῖσαι ἐπὶ 6 ὀργυὰς διδοῦσιν 120 τετραγωνικὰς ὀργυὰς (283), αἳ γεγράφθωσαν.

5 Πόδ. πολλαπ. ἐπὶ 6 ὀργ. διδοῦσι 30 πόδας τετραγωνικῆς ὀργυᾶς (645), οἳ γεγράφθωσαν.

9 Δάκτυλ. πολλαπ. ἐπὶ 6 ὀργ. διδῦσι 54 δακ. τετρ. ὀργ. (640) οἳ γεγράφθωσαν.

20 Ὀργ. πολλαπ. ἐπὶ 4 πόδ. διδῦσι 80 πόδ. τετρ. ὀργ. (645), οἳ γεγράφθωσαν.

5 Πόδ. πολλαπ. ἐπὶ 4 ποδ. διδῦσιν 20, ὧν τὸ διπλῦν ἐςι 40 δακ. τετραγ. ὀργ. (648), οἳ γεγράφθωσαν.

9 Δάκτ. πολλαπ. ἐπὶ 4 πόδ. διδοῦσι 36, ὧν τὸ διπλῦν ἐςιν 72 γραμ. τετραγ. ὀργ. (649), αἳ γεγράφθωσαν.

20 Ὀργαὶ πολλαπ. ἐπὶ δακ. 7 παρέχυσιν 140 δακτ. τετρ. ὀργ. (646), οἳ γεγράφθωσαν.

5 Πόδες πολλαπ. ἐπὶ 7 δακ. διδῦσι 35, ὧν τὸ διπλῦν 70 γραμαὶ τετραγ. ὀργ. (649), αἳ γεγράφθωσαν.

9 Δάκτ. πολλαπ. ἐπὶ 7 δάκτ. διδῦσιν 63, ὧν τὸ διπλῦν ἐςιν 126 ςίγμ. τῆς τετρ. ὀρ. (650), ἃ γεγράφθωσαν.

Οὐδὲν ὖν λοιπὸν, ἢ συνάψαι ὡς ἔθος (Ἀριθμ. 209) ταύτας τὰς ποσότητας, ἀναμιμνησκομένους μόνον, ὅτι διαιρεῖν δεῖ διὰ 12, ἵνα, τὰ μὲν ςίγματα εἰς γραμμὰς, αἱ δὲ, εἰς δακτύλυς, οἱ δὲ, εἰς πόδας, ἀναχθῶσιν, ἵν' εἰς ὀργὰς δ' ἀναχθῶσιν οἱ πόδες, διὰ 6.

Συνάψει ὖν προκύψυσιν ἐπὶ τῦ προτεθέντος ὑποδείγματος 141 ὀργαὶ τετραγωνικαὶ, ἢ 4 πόδες, ἢ 6 δάκτυλοι, καὶ 8 γραμμαὶ, καὶ 6 ςίγματα τετραγωνικῆς ὀργᾶς.

ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Σαφὲς δὲ, ὅτι ἕκαςον εἶδος ἀναχθήσεται κἀνταῦθα εἰς τὰ μείζονα· ἢ γὰρ 80 πόδες φέρε τῆς τετραγωνικῆς ὀργᾶς συμπληρῦσι 13 ὀργὰς τε-

τραγωνικὰς, καὶ 2 πόδας τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς· καὶ δὴ γραφήσονται, 13 μὲν ὀργυαὶ ἐν τῷ χώρῳ τῶν ὀργυῶν, 2 δὲ πόδες ἐν τῷ οἰκείῳ αὐτῶν χώρῳ.

651. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Τὸ πέρας, πρὸς ὃ ἄγουσι τῶν προεκτεθεισῶν ἑκατέρα μέθοδος (642), διαπισοῖ ἡμᾶς σαφέστερον περὶ τῶν συντιθέντων μερῶν ἐπιφανείας, ὡς τετραγώνου θεωρουμένης, εἴτ' οὖν ὡς ὕσης τετραγώνου ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γραμμικῶν μερῶν, ἃ περιέχει ἡ πλευρὰ ταύτης τῆς ἐπιφανείας· πάρεστι γὰρ ἐντεῦθεν ὁρᾶν ὡς ὁ τετραγωνικὸς ποῦς ὀφείλει περιέχειν δακτύλους τετραγωνικοὺς 144, ὃς ἐστι τετράγωνος ἀπὸ 12 τοῦ ἐκδηλοῦντος, ὅσα περιέχει δακτυλιαῖα μέρη γραμμικὰ ὁπῶς.

Ἡ μέντοι τρίτη μέθοδος, ἐπεὶ τοῖς αὐτοῖς ὀνόμασι καλεῖται τὰ τοῦ ἐν ἐπιφανείᾳ μέτρου μέρη, οἷς καὶ τὰ ὁμώνυμα μέρη τοῦ γραμμικοῦ μέτρου (ἥτε γὰρ τετραγωνικὴ καὶ ἡ γραμμικὴ ὀργυὰ πόδας ἓξ περιέχουσιν ἐνταῦθα, καὶ ὁ ποῦς δὲ ὁ τετράγωνος δακτύλους 12, ὅσους περιέχει καὶ ὁ γραμμικὸς κ. τ. λ.), τῷ κοινωνικῷ βίῳ μᾶλλον παθέστηκε χρήσιμος· ἐργάτηστις, φέρ' εἰπεῖν συνθέμενος ἐπὶ λίτραις 20 ἐργάσασθαι ἑκάστην ὀργυὰν διήνυσεν οἰκοδομῶν 141 ὀργυᾶς, καὶ 4 πόδας, καὶ 6 δακτύλους, καὶ 8 γραμμὰς, καὶ 6 σίγματα· τελέσαι οὖν αὐτῷ ὀφείλω α΄. εἰκοσάκις 141 λίτρας· β΄. $\frac{2}{3}$ τῶν 20 λιτρῶν· γ΄. $\frac{1}{2}$ λίτρας ὑπὲρ ἑνὸς ποδός· δ΄. $\frac{2}{3}$ ὑπὲρ ἑνὸς δακτύλου· ε΄. $\frac{1}{2}$ ὑπὲρ γραμμῆς μιᾶς.

652. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Αὕτη δὲ ἡ τρίτη μέθοδος οὐδὲν ὅλως διεννοοῦσε τῆς τῶν συμμέτρων μερῶν, πλὴν ὅτι ὅυτη τῇ τετραγωνικῇ ὀργυᾷ ὑποτίθησι μέρη ὁμώνυμα τοῖς τῆς κατὰ γραμμὴν ὀργυᾶς, καὶ ὅτι, τῆς ὑποθέσεως ταύτης τηρηθείσης, ὁ λογισμὸς ἐπιτομώτερον ἐκτελεῖται.

653. Ἐὰν εἰδέναι βυλώμεθα πόσοις μέρη τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς, εὑρεθέντα διὰ τῆς τρίτης μεθόδυ, ἰσοδυναμοῦσι τετραγωνικοῖς μέρεσι, συλλογιύμεθα ὕτως· εἷς πῦς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ἰσοδυναμεῖ 36 ποσὶ τετραγωνικοῖς, διαιρεθεῖσι διὰ 6, εἴτ' ὖν 6 ποσὶ τετραγωνικοῖς· εἷς δάκτυλος τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ἴσος ἐςὶ 584 δακτ. τετρ. διαιρεθεῖσι διὰ 72, εἴτ' ὖν ἴσος 72 δακ. τετ. ὁ γὰρ δάκτυλος ἔςιν $\frac{1}{72}$ τῆς ὀργυᾶς· μία δὲ γραμμὴ τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ἴση ἐςὶ τῷ $\frac{46656}{864}$ = 864 γραμμαῖς τετραγωνικαῖς, εἴγε ἡ γραμμὴ ἔςιν = $\frac{1}{864}$ τῆς ὀργυᾶς (Ἀριθμ. 149)· ἓν ςίγμα τῆς τετραγωνικῆς ὀργυᾶς ἔςιν = $\frac{1074954}{1036}$ = 10368 τετραγωνικοῖς ςίγμασιν· ἐπεὶ τὸ ςίγμα ἔςιν = $\frac{1}{1036}$ τῆς ὀργυᾶς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ πρακτικῆς Στερεωμετρίας.

654. Ἐὰν κυβικῆς ὀργυᾶς τῆς ΑΒΓΔΕΖ (χ. 57) τμηθῇ ἡ ὕπερθεν βάσις ΑΟΕΖ, εἴτ' ὖν ἡ τετραγωνικὴ ὀργυὰ, εἰς ἓξ καὶ τριάκοντα τετραγωνικὰς πόδας, εἷς πῦς ὁ ΑΙ τῶν ἐν τῷ ὕψει ΑΒ παράξει ςερεὸν τὸ ΑΙΟτυΕΖ, συγκείμενον ἐκ ποδῶν κυβικῶν ἓξ· ἡ ἄρα κυβικὴ ὀργυὰ περιέξει κυβικὰς πόδας 6 × 36 = 216.

655. Ὡσαύτως, ἐπείπερ ὁ τετραγωνικὸς πῦς ΑδτΡ περιέχει 144 τετραγωνικὰς δακτύλυς, ἕκαςος τῶν δακτύλων Αν, τῶν ἐν ἑνὸς κυβικῦ ποδὸς ὕψει ΑΙ, παράξῃ ςερεὸν τὸ ΑνΛγδΡ 144 κυβικῶν δακτύλων· ὁ κυβικὸς ἄρα πῦς ἔςαι σύνθετος ἐκ κυβικῶν δακτύλων 144 × 12 = 1728· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, ὁ μὲν κυβικὸς δάκτυλος περιέχει κυ-