ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Γεωμετρικῶν προβλημάτων ἐπίλυσις διὰ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ.

555. Ἡ μέθοδος τοῦ γεωμετρικα προβλήματα διὰ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ ἐπιλύειν ἀνάλυσις γεωμετρικὴ ἤκουσε· προαπαιτοῦνται δ' ἐν ταύτῃ ὡς γνώριμα εἶναι τῆς, περὶ ἧς ζητεῖται, ποσότητος ἰδιότητες, δι' ὧν κατασκευάζεται ἐξίσωσις ἡ τὸ ζήτημα ἐπιλύουσα· οὐχ' ὅπως δὲ, ἃ παρέδομεν ἐν τῷ δευτέρῳ τόμῳ (Συμβ. Λογ. Τμ. Γ.), ἀναγκαῖα ὑπάρχει ἐνταῦθα, ἀλλὰ δὴ καὶ ἄλλα, ἃ προῖοῦσι μᾶλλον καὶ μᾶλλον γνώριμα καταστήσεται.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ὑποδειγμάτων ἀνθαπτέον, ἵν' αὐτοῖς ἄλις προεναστκηθέντες οἱοίποτε γενοίμεθα τὰ περὶ ἐπιλύσεως τῶν ἐν ταῖς καμπύλαις ζητουμένων ἀκριβῶς εἰδέναι.

556. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τῷ δοθέντι (κ. 18.) τριγώνῳ ΕΗΙ, εἴτ' ὖν, ἕ αἵτε πλευραὶ καὶ αἱγωνίαι καὶ τὸ ὕψος ἐγνωσμένα ὑπάρχουσι, τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ ἐγγράψαι.

ΛΥΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα τόδε καλῶς ἐπισήσασιν οὐδὲν βούλεται, ὅτι μὴ ἐπὶ τοῦ ὕψους ΕΖ σημεῖον ὁρίσαι τὸ Θ, ὃ ἕ ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ ΗΙ ἴση εἴη τῇ ΘΖ, εἴτ ὖν διὰ συμβολικῶν ποσοτήτων διορίσαι τὴν ΑΒ εὐθεῖαν = τῇ ΖΘ.

Ἔστω ὖν τὸ μὲν γνωστὸν ὕψος ΕΖ = α, ἡ δὲ γνωστὴ βάσις ΑΙ = β· καὶ ἡ ἄγνωστος ΘΖ = χ· οὐκοῦν ΕΘ = α — χ· ἐπεὶ τοίνυν ΑΒ παράλληλός ἐστι τῇ ΗΙ (318 321)· ἄρα ΕΖ : ΕΘ :: ΖΙ : ΘΒ :: ΗΙ : ΑΒ, εἴτ'

ἐν ΕΖ : ΕΘ : : ΗΙ : ΑΒ, τοῦτ' ἔςιν $\alpha : \alpha - \chi :: \beta :$ ΑΒ, ἄρα ΑΒ $= \frac{\alpha\beta - \beta\chi}{\alpha}$ (Συμβ. λογ. 250.)· ἐπεὶ δὲ ΑΒ δέον εἶναι = ΘΖ, ἔςαι $\frac{\alpha\beta - \beta\chi}{\alpha} = \chi$, ὅθεν διὰ τῶν καταδειχθέντων κανόνων (Συμβ. λογ. 415, κτλ.) $\chi = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

Εἰς κατασκευὴν δὲ ταύτης τῆς ποσότητος, ἐπάναγκες διορίσαι (528) τετάρτην ἀνάλογον ταῖς $\alpha+\beta$, β, α· ἤχθω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΖΟ $= \alpha + \beta =$ ΕΖ + ΗΙ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΟ, καὶ εἰλήφθω ΖΜ = ΗΙ $= \beta$, καὶ παράλληλος τῇ ΕΟ ἤχθω ἡ ΜΘ, ἥτις συμβαλοῦσα τῇ ΕΖ διορίσει τὴν ΘΖ $= \chi$· ἐκ γὰρ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕΖΟ, ΘΖΜ, ἀποφέρεται ΖΟ : ΖΜ : ΖΕ : ΖΘ, εἴτ' οὖν, $\alpha+\beta : \beta :: \alpha :$ ΖΘ $= \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Ο.Ε.Π.

557. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β. Δοθέντων (κ. 19) τῶν ὑψῶν ΑΓ, ΒΔ δύω ῥαβδίων ΑΓ, ΒΔ, ἐπιπέδῳ ἐφιςαμένων, καὶ τοῦ ΑΒ αὐτῶν ἀποσήματος, εὑρεῖν ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον τὸ Ε, ὃ ἴσον ἀπέχοι τοῦτε Γ, καὶ τοῦ Δ.

ΛΥΣΙΣ. Εἰ μὲν ἐξείη ἐπιζεῦξαι εὐθεῖαν τὴν ΓΔ, οὐδὲν ἂν ἔδει ποιῆσαι, ἢ ἐγεῖραι ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΓΔ κάθετον τὴν ΚΕ, προσδιορίσουσαν τὸ σημεῖον Ε (402)· εἰ δ' οὖν· κατάγε μὴν τὸν ἐφεξῆς προσδιορισθήσεται τρόπον.

Ἔςω ΑΓ $= \alpha$, καὶ ΔΒ $= \beta$, καὶ ΑΒ $= \gamma$, καὶ ΑΕ $= \chi$· ἀκοῦν ΒΕ $= \gamma - \chi$, καὶ ΓΕ $= \sqrt{(\alpha\alpha + \chi\chi)}$ (351)· καὶ ΔΕ $= \sqrt{(\beta\beta + (\gamma - \chi)^2)}$· ἀλλὰ ζητεῖται εἶναι ΓΕ = ΔΕ· ἄρα $\sqrt{(\alpha\alpha + \chi\chi)} = \sqrt{(\beta\beta + (\gamma - \chi)^2)}$· ὅθεν τετρα-

γωνιζομένων ἑκατέρου τῶν μελῶν, καὶ τῶν μεταξὺ πρά-
ξεων γινομένων, ἀποφέρεται $\chi = \frac{\gamma\gamma - \alpha\alpha + \beta\beta}{2\gamma} = \frac{1}{2}$
$\gamma - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\gamma}$. ἐντεῦθεν ἡ κατασκευὴ γενήσεται τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Διὰ τοῦ μέσου σημείου Λ τῆς ΑΒ ἤχθω ΙΛΘ παράλληλος τῇ ΑΓ, ἥτις συμβαλεῖ τῇ ΔΖ παραλλήλῳ τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Θ, καὶ εἰλήφθω ΛΙ $= \frac{1}{2}\gamma =$ ΛΑ, καὶ ΛΗ $= \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ ΓΖ, καὶ ΛΟ $= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \beta =$ ΘΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΙΟ, καὶ διὰ τοῦ Η ἤχθω τῇ ΙΟ παράλληλος ἡ ΗΕ, ἥτις συμβαλεῖ τῇ ΑΒ κατὰ τὸ ζητούμενον σημεῖον Ε· καὶ γὰρ ΛΙ : ΛΟ :: ΛΗ : ΛΕ, τουτ' ἔστι $\frac{1}{2}\gamma : \frac{1}{2}(\alpha + \beta) :: \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$: ΛΕ· ἄρα ΛΕ $= \frac{\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \times \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\frac{1}{2}\gamma} = \frac{1}{2}\frac{(\alpha + \beta) \times (\alpha - \beta)}{\gamma}$,
ἀλλὰ ΑΕ = ΑΛ − ΛΕ $= \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\frac{(\alpha + \beta) \times (\alpha - \beta)}{\gamma}$,
ἄρα ΑΕ $= \chi$· Ο Ε Π.

558. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τρίτον δὲ ὑπόδειγμα τοιόνδε ἐφεξῆς ἐκθησόμεθα, ὃ δώσει κατιδεῖν, ὅπως ἐμπεριεκλείειν ἐξισώσεσι καθολικαῖς δυνησόμεθα προβλήματα γεωμετρικά, καὶ ὅπως διὰ διαφόρων προπαρασκευῶν τῶν ἐξισώσεων ἐξέσται καινὰς ἰδιότητας ἀνακαλύπτειν.

559. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τριγώνου τοῦ ΑΒΓ (σχ. 20) δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν, εὑρεῖν τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΓ, καὶ τὴν τέμνουσαν κάθετον ΒΔ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπειδὴ (349) $B\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2$, καὶ $A\Delta^2 + B\Delta^2 = AB^2$, ἐὰν ῥηθῇ ΒΑ $= \upsilon$, καὶ ΓΔ $= \chi$, καὶ ΒΓ $= \alpha$, καὶ ΑΒ $= \beta$, καὶ ΑΓ $= \gamma$, καὶ δὴ ΑΔ = ΑΓ − ΓΔ

$= \gamma - \chi$, ἀποφέρονται δύω ἐξισώσεις, $\chi\chi + \upsilon\upsilon = \alpha\alpha$, καὶ $\gamma\gamma - 2\gamma\chi + \chi\chi + \upsilon\upsilon = \beta\beta$.

Ἐπεὶ δὲ $\chi\chi$ καὶ $\upsilon\upsilon$ ἐν ἑκατέρᾳ ἐξισώσει ὐδένα συνεργὸν ἔχεσιν, ἢ τὴν μονάδα, ἀφηρήσθω ἡ δευτέρα ἀπὸ τῆς πρώτης, καὶ δὴ καταλειφθήσεται $2\gamma\chi - \gamma\gamma = \alpha\alpha - \beta\beta$· ὅθεν $\chi = \frac{\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma}{2\gamma} = \frac{\alpha\alpha - \beta\beta}{2\gamma} + \frac{1}{2}\gamma$, ὃ γράψαι ὕτω δυνάμεθα $\chi = \frac{1}{2}\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\gamma} + \frac{1}{2}\gamma$.

Ἐν τύτῳ ὖν τῷ τύπῳ αἰτίκα σαφὲς, ὡς εἰς ἔυρεσιν τῆς χ ἐπάνγκες (528) τετάρτην λαβεῖν ἀνάλογον πρὸς τὰς γ, $\alpha+\beta$, καὶ $\alpha-\beta$, καὶ ταύτης λαβόντας τὸ ἥμισυ, προσθεῖναι αὐτῷ τὸ $\frac{1}{2}\gamma$, εἴτ' ὖν $\frac{1}{2}$ ΑΓ.

Ἀλλὰ γὰρ ἐκ τῶν αὐτῶν ἐξισώσεων πολλὰ καὶ ἄλλα ἐξέσαι συναγαγεῖν, ὧν ἔνια τοῖς πρωτοπείρων ὀφθαλμοῖς ὑποβαλεῖν ὐχ' ὅπως ἐπωφελὲς ἀλλὰ δὴ καὶ ἀναγκαῖον ἴσμεν ἐσόμενον.

560. Α΄. Ἡ ἐξίσωσις $2\gamma\chi - \gamma\gamma = \alpha\alpha - \beta\beta$ τὰυτὸν δύναται, ὃ καὶ $\gamma \cdot (2\chi - \gamma) = (\alpha+\beta) \cdot (\alpha-\beta)$· ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως σαφὲς προϊέναι ἀναλογίαν τοιάνδε $\gamma : \alpha+\beta :: \alpha-\beta : 2\chi - \gamma$· ἀλλὰ $2\chi - \gamma = \chi - (\gamma - \chi)$· ἄρα ἀντὶ τῶν συμβολικῶν ἐκθέσεων ἀντικατασαθεισῶν τῶν αὐταῖς ἐμφαινομένων εὐθειῶν, ἔσαι ΑΓ : ΒΓ + ΑΓ :: ΒΓ − ΑΓ : ΓΔ − ΑΔ, ὅπερ τὰυτόν ἐσιν ἀκριβῶς τῷ ἀποδειχθέντι (500).

561. Β΄. Ἐὰν κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ τόξον γραφῇ τὸ ΒΟ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ χορδὴ ΒΟ, ἔσαι $\text{ΒΔ}^2 + \text{ΔΟ}^2 = \text{ΒΟ}^2$· ἀλλὰ $\text{ΔΟ} = \text{ΓΟ} - \text{ΓΔ} = \text{ΒΓ} - \text{ΓΔ} = \alpha - \chi$· ἄρα $\text{ΒΟ}^2 = \upsilon\upsilon + \alpha\alpha - 2\alpha\chi + \chi\chi$· εὕρηται δὲ ἀνω-

τέρω (459) $\upsilon\upsilon + \chi\chi = \alpha\alpha$· ἄρα $BO^2 = 2\alpha\alpha - 2\alpha\chi = 2\alpha(\alpha - \chi)$· τεθείσης ὖν ἀντὶ χ τῆς αὐτοῦ δυνάμεως $\frac{\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma}{2\gamma}$, πορισθήσεται $BO^2 = 2\alpha\left(\alpha + \frac{\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\gamma}{2\gamma}\right) = 2\alpha\frac{(2\alpha\gamma - \alpha\alpha - \gamma\gamma + \beta\beta)}{2\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} \times [\beta\beta - (\alpha - \gamma)^2]$, εἴγε $2\alpha\gamma - \alpha\alpha - \gamma\gamma = -(\alpha\alpha - 2\alpha\gamma + \gamma\gamma) = -(\alpha - \gamma)^2$· ἀλλ' ἐκληφθείσης $\alpha - \gamma$ ἀντὶ μιᾶς μόνης ποσότητος, ἀποφέρεται $\beta\beta - (\alpha - \gamma)^2 = (\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma)$· ἄρα $BO^2 = \frac{\alpha}{\gamma}(\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma)$, ὅπερ παρασῆσαι δυνάμεθα διὰ τοῦ δε τοῦ τύπου $BO^2 = \frac{\alpha}{\gamma}(\alpha + \beta + \gamma - 2\gamma)(\alpha + \beta + \gamma - 2\alpha)$· τοιγαρῦν ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν κληθῇ $2\varkappa$, ἔσται $BO^2 = \frac{\alpha}{\gamma}(2\varkappa - 2\gamma)(2\varkappa - 2\alpha) = 4\frac{\alpha}{\gamma}(\varkappa - \gamma)(\varkappa - \alpha)$· ἀλλ' ἐὰν ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἀχθῇ τῇ ΟΒ ἡ ΓΙ, ἔσται (496) ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΓΙΟ ἡ ἀναλογία ΓΟ : ΟΙ : : Η : ἡμ. ΟΓΙ, τουτ' ἔστιν $\alpha : \frac{1}{2}BO :: H : \text{ἡμ. ΟΓΙ}$· ἄρα $\frac{1}{2}BO = \frac{\alpha\,\text{ἡμ. ΟΓΙ}}{H}$, ἢ $BO = \frac{2\alpha\,\text{ἡμ ΟΓΙ}}{H}$, καὶ δὴ $BO^2 = \frac{4\alpha^2\,(\text{ἡμ. ΟΓΙ})^2}{H^2}$· ἐκ δὴ τῶν δύω δυνάμεων τοῦ BO^2 ἀποφέρεται $\frac{4\alpha}{H^2}(\text{ἡμ. ΟΓΙ})^2 = \frac{4\alpha}{\gamma}(\varkappa - \gamma)(\varkappa - \alpha)$· διαιρέσει δὲ διὰ 4α, καὶ ἄρσει τῶν παρονομασῶν, ἔσεται $\alpha\gamma\,(\text{ἡμ. ΟΓΙ})^2 = H^2(\varkappa - \gamma)(\varkappa - \alpha)$· ἐντεῦθεν ἄρα

$\alpha\gamma : (\varkappa - \gamma)(\varkappa - \alpha) :: H^2 : (\text{ἡμ. } O\Gamma I)^2$· ὅθεν ἐκπηγάζει κανὼν ἁπλῆς εἰς θήρευσιν γωνίας ἡσινοσῆν τριγώνε εὐθυγράμμε, ἔ αἱ τρεῖς δέδονται πλευραί· ἀμέλειτοι

„Τῆ ἡμιαθροίσματος τῶν τριῶν πλευρῶν ἀφῃρήσθω „ἄλη μετ' ἄλην ἑκατέρα τῶν τὴν ζητεμένην γωνίαν περιε„χεσῶν πλευρῶν· ὅθεν ἐξίασι δύω κατάλοιπα· ἐξῆς δὲ „γενέσθω ἥδε ἡ ἀναλογία: τὸ γινόμενον ὑπὸ δύω πλευρῶν „τῶν τὴν ζητεμένην γωνίαν περιεχεσῶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν „δύω καταλοίπων γινόμενον, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος τε„τράγωνον πρὸς τέτρατόν τινα ὅρον, ὅς ἔςαι τὸ ἀπὸ τῆ ἡ„μιτόνε τῆς ἡμισείας ζητεμένης γωνίας τετράγωνον."

562. Γ'. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon\upsilon + \chi\chi = \alpha\alpha$ ἀποφέρεται $\upsilon\upsilon = \alpha\alpha - \chi\chi = (\alpha + \chi)(\alpha - \chi)$· ἀντὶ ἄρα τῆ χ ἀντικατεςάσης τῆς αὐτῆ δυνάμεως προκύψει $\upsilon\upsilon =$

$$\left(\alpha + \frac{\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma}{2\gamma}\right)\left(\alpha + \frac{\beta\beta - \alpha\alpha - \gamma\gamma}{2\gamma}\right) =$$

$$\left(\frac{2\alpha\gamma + \alpha\alpha + \gamma\gamma - \beta\beta}{2\gamma}\right) \times \left(\frac{2\alpha\gamma - \alpha\alpha - \gamma\gamma + \beta\beta}{2\gamma}\right)$$

$$= \left(\frac{(\alpha + \gamma)^2 - \beta\beta}{2\gamma}\right) \times \left(\frac{\beta\beta - (\alpha - \gamma)^2}{2\gamma}\right) =$$

$$\frac{(\alpha + \gamma + \beta)(\alpha + \gamma - \beta)}{2\gamma} \times \frac{(\beta + \alpha - \gamma) \times (\beta - \alpha + \gamma)}{2\gamma}$$

ἄρα $4\gamma\gamma\upsilon\upsilon = (\alpha + \gamma + \beta)(\alpha + \gamma - \beta)(\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma)$, ἢ $4\gamma\gamma\upsilon\upsilon = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma - 2\beta)(\alpha + \beta + \gamma - 2\gamma)(\alpha + \beta + \gamma - 2\alpha)$· τεθέντος ἂν $2\varkappa = \alpha + \beta + \gamma$, ἔξομεν $4\gamma\gamma\upsilon\upsilon = 2\varkappa \cdot (2\varkappa - 2\beta)(2\varkappa - 2\gamma)(2\varkappa - 2\alpha)$, ἢ $4\gamma\gamma\upsilon\upsilon = 16\varkappa \cdot (\varkappa - \alpha)(\varkappa - \beta)(\varkappa - \gamma)$· διαιρέσει δὲ διὰ 16 ϗ ἀναγωγῆ, ϗ ἐξαγωγῆ τῆς τετρα-

γωνικῆς ῥίζης, προέρχεται $\frac{\gamma\upsilon}{2} = \sqrt{[\varkappa \cdot (\varkappa - \alpha)\ (\varkappa - \beta)\ (\varkappa - \gamma)]}$· ἀλλὰ $\frac{\gamma\upsilon}{2}$, $= \frac{\text{ΑΓ} \times \text{ΒΔ}}{2}$, ἔσιν ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἄρα „Τριγώνου παντὸς, οὗ δέδονται αἱ τρεῖς „πλευραὶ, ἵν' εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια, τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν „πλευρῶν ἀφαιρετέον ἄλλην μετ' ἄλλην ἑκάστην τῶν τριῶν „πλευρῶν, καὶ πολλαπλασιαστέον τὰ κατάλοιπα ἐπ' ἄλληλά „τε, καὶ ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα, τοῦ δὲ γινομένου ἐξαπτέον ῥί„ζαν τὴν τετραγώνειον."

563. Δ'. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $2\gamma\chi - \gamma\gamma = \alpha\alpha - \beta\beta$ πρόεισι $\beta\beta = \alpha\alpha + \gamma\gamma - 2\gamma\chi$ (χ. 21)· ἐὰν μέντοι ἡ κάθετος ἐκτὸς τῆς βάσεως πίπτῃ, εὑρεθείη ἂν, τηρουμένων τῶν αὐτῶν ὀνομάτων, $\upsilon\upsilon + \chi\chi = \alpha\alpha$, καὶ $\beta\beta = \upsilon\upsilon + \gamma\gamma + 2\gamma\chi + \chi\chi$· ἡ γὰρ ΑΔ, τὸ πρὶν οὖσα $\gamma - \chi$, ἔσι ταυτὸν $\gamma + \chi$· ὑπῶν ἀφαιρεθείσης τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἀπὸ τῆς δευτέρας, πρόεισι $\gamma\gamma + 2\gamma\chi = \beta\beta - \alpha\alpha$, ἢ $\gamma\ (\gamma + 2\chi) = (\beta + \alpha) \times (\beta - \alpha)$· ὅθεν $\gamma : \beta + \alpha :: \beta - \alpha : \gamma + 2\chi$· ἀλλὰ $\gamma + 2\chi = \chi + \gamma + \chi = \text{ΓΔ} + \text{ΑΔ}$· ἄρα καὶ $\text{ΑΓ} : \text{ΑΒ} + \text{ΒΓ} :: \text{ΑΒ} - \text{ΒΓ} : \text{ΓΔ} + \text{ΑΔ}$, ὃ καὶ ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει δείκνυσι τὴν καθολικότητα τῆς ἀποδειχθείσης προτάσεως (500).

564. Ε'. Ἐκ τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως $\gamma\gamma + 2\gamma\chi = \beta\beta - \alpha\alpha$ προκύπτει $\beta\beta = \alpha\alpha + \gamma\gamma + 2\gamma\chi$· ταύτην ὖν τὴν ἐξίσωσιν παρατιθεμένοις πρὸς τὴν $\beta\beta = \alpha\alpha + \gamma\gamma - 2\gamma\chi$, τὴν ἐπὶ τοῦ 20 χήματος, κατάδηλον, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Γ πλευρᾶς ΑΒ τετράγωνον ββ ἔλαττόν ἐσι τοῦ ἀθροίσματος αα + γγ τῶν ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν τετραγώνων τῷ 2γχ· τοὐναντίον δὲ τὸ ἀπὸ

τῆς ὑποτεινούσης τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν (κ. 21) πλευρᾶς ΑΒ τετράγωνον ββ δύναται αα + γγ + 2γχ, τοῦτ' ἔστι μεῖζόν ἐστι τοῦ εἰρημένου ἀθροίσματος τῇ αὐτῇ ποσότητι 2γχ· ἑκάτερα δὲ ταῦτα, ἡμῖν μὲν ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἄχρηστα ἐγένοντο· τῷ δ' Εὐκλείδῃ τὸ μὲν πρῶτον ἡ ΙΓ'. τὸ δὲ δεύτερον ἡ ΙΒ'. καταριθμοῦνται τῶν τοῦ δευτέρου βιβλίου προτάσεων.

565. ς'. Αἱ δύω ἐξισώσεις ββ = αγ + γγ — 2γχ καὶ ββ = αα + γγ + 2γχ δεικνῦσι τὴν τῶν λειπτικῶν πρὸς τὰς ὑπαρκτικὰς ποσότητας ἐναντιότητα· ἐὰν μὲν γὰρ (κ. 20, 21) ἡ κάθετος ΒΔ ἐπὶ τῆς βάσεως πίπτῃ τοῦ τριγώνου, τὸ τμῆμα ΓΔ πρὸς δεξιὰν κεῖται τῆς καθέτου· ἐὰν δ' ἐκτὸς, πρὸς ἀριστερά· ἀλλ' ἐν ταῖς δυσὶν ἐξισώσεσιν ὁ ὅρος 2γχ ἔχει ἀληθῶς σύμβολα ἐναντία· ἄρα τἐναντίον, ὁποῖοι ἂν εἶεν οἱ λογισμοὶ ἐπὶ θατέρου τῶν δύω τριγώνων, ἕξομεν τὰ συμβαίνοντα ταῖς ἀναλόγοις περιπτώσεσι θατέρου, ἀπονέμοντες σύμβολα ἐναντία τοῖς ἐναντίως ἔχουσι θέσεως μέρεσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας· ἀλλ' ἐπὶ τῶν ἤδη εἰρημένων (561, 562)· τὸ ΓΔ τμῆμα ὀδεμίαν ἴχει χώραν· οἱ δύω ἄρα κανόνες ἐκεῖνοι καθόλου ἐπαληθεύουσι παντὶ εὐθυγράμμου τριγώνου εἴδει.

566. ΣΧΟΛΙΟΝ. Καίπερ ἐν γένει τοσούτῳ ῥᾷον τὰ γεωμετρικὰ προβλήματα ἐν ἐξισώσεσι περικλείονται, ὅσῳ περ ἂν πλείους ἴσμεν ἰδιότητας τῶν γραμμῶν· ἐπείπερ ἔμπης αὐτὸς ὁ συμβολικὸς λογισμὸς ἀνιχνεύει τὰς ἰδιότητας ταύτας, ὧν ἐπιδεόμεθα προτάσεων, λίαν εἰσὶν ὀλιγάριθμοι. Τὰ γὰρ „ὅτι τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον ἔχουσι" καὶ „τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετραγώνοις", κρηπὶς ταῦτα ὑφέκηκε τῆς τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ τῇ Γεωμετρίᾳ

πρόσεφαρμόσεως. Ἀλλὰ κατὰ τὴν διάφορον φύσιν τῶν ζητημάτων, ἐξέσται διαφόρως χρήσασθαι ταύταις ταῖς προτάσεσιν· καὶ ἡν μὲν ῥάστη ἡ χρῆσις τῶν ἀναλογιῶν ἐν τῷ ἄρτι διαληφθέντι προβλήματι· ἐξῆς δὲ, ὧν ἐπορισάμεθα πρὸς λογισμὸν τῆς γωνίας διὰ τῶν τριῶν πλευρῶν, καὶ τῆς χορδῆς (σχ. 20) ΒΟ διὰ τοῦ γραφέντος τόξου ΒΟ, καὶ τοῦ τῆς ὑπὸ ΟΓΙ γωνίας ἡμιτόνου, αὐτίκα δυσχερὴς ἐπιεικῶς προσέπιπτεν ἡ κατασκευή· εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλα προβλήματα, ἐφ' οἷς, εἴτε εὐθείας προαγαγεῖν δέοι, ἐς τ' ἂν ἄλλαις συμβάλωσι, εἴτε παραλλήλους πρὸς ἑτέρας, ἢ γωνίαν δεδομένην μεθ' ἑτέρων ποιήσας, δυσχερῶς τὰ τῆς κατασκευῆς ἐπιτηδεύεται· συνελόντι δ' εἰπεῖν ὁ τὴν τυχοῦσαν ἀπαιτεῖ ἀγχίνοιαν καὶ κρίσιν ἐν τῇ αἱρέσει τῶν κατασκευαστικῶν μέσων ἡ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ τῇ Γεωμετρίᾳ προσοικείωσις· ἐπεὶ δὲ τῆς κρίσεως ταύτης διὰ τῆς χρήσεως ἐγκρατεῖς γινόμεθα, φέρε παντοίοις ἄλλοις ὑποδείγμασι τοὺς τὴν ἀνάλυσιν μελετῶντας ἐγγυμνάσωμεν.

567. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Ἀπὸ σημείου τοῦ Α (σχ. 22), οὗ δέδοται ἡ θέσις ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΗΔ, ΔΙ, περιεχούσας γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΗΔΙ, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν, ὅπως τὸ συνισάμενον τρίγωνον ΕΔΘ, ἴσον ᾖ τῷ δοθέντι τετραγώνῳ γγ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τοῦ Α ἤχθω τῇ ΔΗ παράλληλος ἡ ΑΒ, καὶ ἡ ΑΓ ἐκάτω κάθετος τῇ ΔΘ προσχθείσῃ, καὶ ἐκ τοῦ Ε, καθ' ὃ ἡ ΑΕΘ συναντᾷ τῇ ΔΗ κατήχθω κάθετος ἡ ΕΖ· γνωσῶν δὴ γενομένων τῶν ΕΖ, ΔΘ, ἔσται $\frac{ΕΖ \cdot ΔΘ}{2} =$ ΕΔΘ $=$ γγ· καὶ δὴ ἔστω ΔΘ $= \chi$· τὴν δὲ ΕΖ σκεπτέον, εἰ ἄρα διορίσαι δυνάμεθα, εἴτε διὰ τῆς χ, εἴτε διὰ τῶν

ἐν τῷ προβλήματι δεδομένων· ἐπεὶ δὲ γνωστή ἐστιν ἡ θέσις τοῦ Α σημείου, ἐκλεπτέον ὡς γνωστὸν τὸ ἀπόστημα ΒΔ, δι' οὗ δίειστιν ἡ παράλληλος ΑΒ, καὶ δὴ καὶ τὸ τοῦ Α ἀπὸ τῆς ΔΘ προεκβληθείσης ἀπόστημα ΑΓ. Τοιγαροῦν κληθήτω ΒΔ = α, καὶ ΑΓ = β· ἐκ μὲν οὖν τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΘ, ΕΔΘ ἀποφέρεται ΒΘ : ΔΘ :: ΑΘ : ΕΘ· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων καὶ αὐτῶν τριγώνων ΑΓΘ, ΕΖΘ πρόειστν ΑΘ : ΕΘ :: ΑΓ : ΕΖ· ἄρα ΒΘ : ΔΘ :: ΑΓ : ΕΖ, τοῦτ' ἔστιν $\alpha + \chi : \chi :: \beta : EZ = \frac{\beta\chi}{\alpha + \chi}$, ἐπεὶ δὲ ζητεῖται εἶναι ΕΔΘ = γγ, δέον ὑπάρχειν $EZ \times \frac{\Delta\Theta}{2} = \frac{\beta\chi}{\alpha + \chi} \times \frac{\chi}{2} = \gamma\gamma$, εἶτ' οὖν $\frac{\beta\chi\chi}{2\alpha + 2\chi} = \gamma\gamma$, ἤ, ἀφανισμῷ τοῦ παρονομαστοῦ, $\beta\chi\chi = 2\alpha\gamma\gamma + 2\gamma\gamma\chi$.

Ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως ἐπιλυθείσης κατὰ τοὺς κανόνας τῶν δευτεροβαθμίων προβλημάτων (453 κτ.)· προέρχονται δύω δυνάμεις $\chi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta})}$, ὧν ἄχρηστος ἐνταῦθα ἡ τὸ — ἔχουσα.

Εἰς δὲ κατασκευὴν τοῦ προβλήματος μετηνέχθω ἡ ἔκθεσις εἰς τὸν ἐφεξῆς τύπον $\chi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} + 2\alpha)\frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$. τούτου τεθέντος ἤχθω ἀπέραντος εὐθεῖα (κ. 23) ἡ ΠΞ, καὶ ἀπότινος αὐτῆς σημείου τοῦ Γ ἐσάχθω κάθετος ἡ ΑΓ = β, καὶ εἰλήφθων ἐπὶ τῶν ΓΑ καὶ ΓΠ αἱ εὐθεῖαι ΓΟ, ΓΜ ἴσαι ἑκατέρα τῇ τοῦ δοθέντος τετραγώνου πλευρᾷ γ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΜ ἤχθω παρ' αὐτὴν

διὰ τοῦ σημείου Ο παράλληλος ἡ ΟΝ, ἥτις διορίσει τὴν ΓΝ δύναμιν τοῦ $\frac{\gamma\gamma}{\beta}$, εἴγε τῶν τριγώνων ΑΓΜ, ΟΓΝ ὁμοίων ὄντων, ἔστιν ΑΓ : ΟΓ :: ΓΜ : ΓΝ, εἰτ' ὄν $\beta : \gamma :: \gamma : \Gamma N = \frac{\gamma\gamma}{\beta}$· τοιγαροῦν ἡ δύναμις τοῦ χ ἀποβαίνει $\chi = \Gamma N + \sqrt{[(\Gamma N + 2\alpha) \times \Gamma N]}$· ἀλλὰ $\sqrt{[(\Gamma N + 2\alpha) \times \Gamma N]}$ ἐμφαίνει, ὡς δῆλον, μέσην ἀνάλογον πρὸς τὰς ΓΝ καὶ $\Gamma N + 2\alpha$· οὐδὲν ὂν λείπεται ἄλλο, ἢ διορίσαι ταύτην τὴν μέσην ἀνάλογον, καὶ ταύτην προσθεῖναι τῇ ΓΝ· πρὸς δὲ τοῦτο, ἐπὶ τῆς ΝΓ προσχθείσης εἰλήφθω $\Gamma\Xi = 2\alpha$, καὶ ἐπὶ τῆς ΝΞ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΝΤΞ συμβάλλον τῇ ΓΑ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Τ, καὶ ἡ ΝΤ χορδὴ μετηνέχθω ἐκ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ Π· οὐκοῦν ἔσται ΓΠ δύναμις τοῦ χ· καὶ γὰρ ΝΤ ἔστι μέση ἀνάλογος τῶν ΝΓ, ΝΞ (522), εἰτ' ὄν τῶν ΓΝ καὶ $\Gamma N + 2\alpha$· ἄρα ΝΤ, ἡ $\Pi N = \sqrt{[(\Gamma N + 2\alpha) \times \Gamma N]}$· ἄρα $\Gamma\Pi = \Gamma N + \Pi N = \Gamma N + \sqrt{[(\Gamma N + 2\alpha) \times \Gamma N]} = \chi$· τοιγαροῦν μετενεγκόντες τὴν ΓΠ ἐκ τοῦ (χ. 22.) Δ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ εὑρόντες τὸ σημεῖον Θ, δι' αὐτοῦ καὶ διὰ τοῦ Α ἀγαγόντες τὴν ΑΘ, ἕξομεν τὸ τρίγωνον ΕΔΘ = γγ. ΟΕΠ.

568. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Βουλομένοις δὲ εἰδέναι, ὁ δύναται ὁ δεύτερος τύπος τοῦ χ, τοῦτ' ἔστι $\chi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} - \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} + 2\alpha)\frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$, σημειωτέον, ὅτι μὴ διορίσαντες, εἰ περὶ τῆς ὑπὸ ΕΔΘ γωνίας τὸ ζήτημα γίνοιτο, ἢ περὶ τῆς ἐκείνῃ ἴσης $E^1\Delta\Theta^1$ τῆς ὑπὸ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ΘΔ, ΕΔ προσχθεισῶν περιεχομένης (99), ἡ δευτέρα ἐπίλυσις διαπεραινεῖ τὰ αὐτὰ ἐπὶ τῆς $E^1\Delta\Theta^1$ γωνίας, ἃ καὶ ἐπὶ τῆς

ΕΔΘ ἡ πρώτη· καὶ γὰρ πληθείσης χ τῆς ΔΘ', καὶ τῶν αὐτῶν ὀνομάτων τηρηθέντων, ἐπεὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΘ', Ε'ΔΘ', διὰ τας ΑΒ, ΔΕ' παραλήλας, εἰσὶν ὅμοια (135, 99, 218), προέρχεται ΒΘ : ΔΘ' :: ΑΘ' : ΘΕ' καὶ καταγομένης τῆς κατέτου Ε'Ζ' τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΘ', Ε'Ζ'Θ' διδάσιν ΑΘ' : Θ'Ε' :: ΑΓ : Ζ'Ε'· ἄρα ΒΘ' : ΔΘ' :: ΑΓ : Ζ'Ε', τοῦτ' ἔστιν, $\alpha - \chi : \chi :: \beta : Z'E' = \frac{\beta\chi}{\alpha - \chi}$· ἐπεὶ δὲ ζητεῖται εἶναι Θ'Ε'Δ = γγ, ἄρα ἀνάγκη ὑπάρχειν $\frac{\beta\chi}{\alpha - \chi} \times \frac{\chi}{2} = \gamma\gamma$· ὅθεν $\beta\chi\chi = 2\alpha\gamma\gamma - 2\gamma\gamma\chi$, καὶ ἑπομένως $\chi = \frac{-\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta}\right)}$ δυνάμεις τῆς χ παρὰ τοσοῦτον τῶν ἐν τῇ προτέρᾳ περιπτώσει διεγηγοχυῖαι, ὅσον ἐκεῖναι ἀντίθετα σύμβολα τῶν κατὰ ταύτας ἔχεσι· καί γε εἰκότως· ἡ γὰρ χ ποσότης ἐκ τῶν ἀντιθέτων εἴληπται μερῶν· καινὴ αὕτη ἐμπέδωσις τοῦ τὰς λειπτικὰς τῶν ποσοτήτων κατ' ἔννοιαν ἀντίθετον λαμβάνεσθαι ταῖς ὑπαρκτικαῖς (565).

Η' δέ γε ἀποδοθεῖσα ἐπὶ τῆς προτέρας περιπτώσεως κατασκευὴ ἐυχρηστος κἀνταῦθα, εἰ μόνον ἡ ΝΤ (χ. 23) ἐκ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ Κ πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ξ μετενεχθείη· οὕτω γὰρ ἡ ἐκεῖθι ἴσα ΓΠ τοῦ χ δύναμις ἐνταῦθα ἔσεται ΓΚ· ἡ γὰρ δύναμις τοῦ χ, ἡ ταύτῃ τῇ περιπτώσει συνάδουσα, ἔστι $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} + \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta}\right)}$, ἢ $\chi - \frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{\left[\left(\frac{\gamma\gamma}{\beta} + 2\alpha\right) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}\right]}$, τοῦτ' ἔστι χ = − ΓΝ + √[(ΓΝ + 2α) × ΓΝ]· ἐπεὶ δὲ ΝΤ = √[(ΓΝ + 2α) × ΓΝ], ἔξομεν χ = − ΓΝ + ΝΤ = − ΓΝ + ΝΚ = ΓΚ· τοιγαρῆν τὴν ΓΚ ἐκ τοῦ Δ (χ. 22) ἐπὶ τὸ Θ'

μετενεγκόντες, καὶ ἐκ τοῦ Α διὰ τοῦ ἕτως ὁριθέντος σημείου Θ¹ ἀγαγόντες τὴν ΑΘ¹Ε¹, ἕξομεν τὸ τρίγωνον Θ¹ΔΕ¹ ἴσον τῷ τετραγώνῳ γγ· καὶ δὴ αὕτη δευτέρα ὑπάρχει τοῦ προβλήματος ἐπίλυσις.

569. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ τὸ σημεῖον Α κείμενον ἔνερθεν τῆς εὐθείας ΒΘ (χ. 24), ἡ ποιότης β, εἴτ' ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΓ ἔσεται λειπτική, καὶ δὴ ἑκατέρα τῶν δύω προτέρων δυνάμεων τῆς χ ἔσαι $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} - \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta}\right)}$, ἢ $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha\right) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}\right]}$, ἔνθα καταδηλον, ὅτι τὸ πρόβλημα ἀδύνατον εἴη, εἰ $2\alpha < \frac{\gamma\gamma}{\beta}$ ὑπάρχοι· ἐπεὶ τηνικαῦτα ἡ ὑπόῤῥιζος ποιότης ἔσαι λειπτική, καὶ τοῦ χ αἱ δυνάμεις ἀνύπαρκτοι (Συμ. Λογ. 175)· ἀλλὰ τοῦτο μὲν ὡς πρὸς τὴν γωνίαν ΗΔΙ, πρὸς μέντοι τὴν αὐτῇ ἴσην Ε¹ΔΘ¹ ἀφορῶσι, διττῶς ἂν ἐπιλυθείη τὸ πρόβλημα· τοῦτο δὲ ὡς ἂν γένοιτο, κατασκευαστέον τὰς δύω δυνάμεις $\chi = -\frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha\right) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}\right)}$ κατὰ τὸν ἑφεξῆς τρόπον· ὁριθείσης, ὡς ἀνωτέρω, τῆς δυνάμεως ΓΝ τοῦ $\frac{\gamma\gamma}{\beta}$, εἰλήφθω (χ. 25) ΝΞ = 2α, καὶ ἐπ' αὐτῆς ἡμικυκλίου γραφέντος τοῦ ΝΤΞ, ἤχθω ἁπτομένη αὐτοῦ ἡ ΓΤ, καὶ μετηνέχθω ἡ ΓΤ ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Π πρὸς τὸ Ν, καὶ πρὸς τ' ἀντίθετα ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Κ· καὶ δὴ ΝΠ,

ἡ ΝΚ ἔσονται δύω δυνάμεις τῆς χ, αἱ μητηνέχθωσαν (χ. 24) ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Θ καὶ ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Θ¹, καὶ ἐκ τοῦ Α διὰ τῶν σημείων Θ, Θ¹ ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΕΘ, Ε¹Θ¹· ἔσται ὂν ἑκάτερον τῶν ΕΔΘ, Ε¹ΔΘ¹ τριγώνων ἴσον τῷ τετραγώνῳ γγ. Ὅτι δὲ αἱ ΝΠ, ΝΚ (χ. 25) εἰσὶν αἱ δύω δυνάμεις τῆς χ, ἐντεῦθεν δῆλον· ἡ γὰρ ΓΤ (452) μέση ὖσα ἀνάλογος τῶν ΓΝ, ΓΞ ἔστιν $= \sqrt{(\Gamma\Xi \times \Gamma N)}$, ἤ (τιθεμένων ἀντὶ τῶν γραμμῶν τῶν κατ' αὐτὰς δυνάμεων) ΓΤ, ἢ ΓΠ, ἢ ΓΚ $= \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$· ἄρα ΝΠ $= \Gamma N - \Gamma\Pi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} - \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$, καὶ ΝΚ $= \Gamma N + \Gamma\Pi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{[(\frac{\gamma\gamma}{\beta} - 2\alpha) \times \frac{\gamma\gamma}{\beta}]}$· ἀλλ' αἱ δύω αὗται ποσότητες αἱ αὐταί εἰσι ταῖς τοῦ χ δυνάμεσι μετ' ἀντιθέτων συμβόλων· ἄρα μετενεχθεῖσαι ἐκ τοῦ Δ πρὸς τὸ Θ (χ. 24) ἔσονται αἱ δυνάμεις τοῦ χ.

570. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Εἰ δὲ τὸ Α (χ. 26) ἐν αὐτῇ κέοιτο τῇ ὑπὸ ΗΔΙ γωνίᾳ, τηνικαῦτα ΒΔ πιπτούσης ἐπὶ τ' ἀντίθετα τοῖς ἐξ ἀρχῆς, τὸ μὲν α λειπτικὸν, αἱ δὲ ἀρχικαὶ δυνάμεις τοῦ χ γένοιντ' ἂν $\chi = \frac{\gamma\gamma}{\beta} \pm \sqrt{(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} - \frac{2\alpha\gamma\gamma}{\beta})}$, αἵτινες εἰσὶν αἱ αὐταὶ (μετ' ἐναντίων συμβόλων) αἷς πρὸ μικροῦ κατεσκευάσαμεν· σαφὲς ὂν τηνικαῦτα, ὅτι δεῖ τὰ τῆς κατασκευῆς μετελθεῖν ὡς κἀπὶ (χ. 25), ἀλλὰ μετενεγκεῖν τὰς τοῦ χ δυνάμεις ΝΠ, καὶ ΝΚ ἐκ τοῦ Δ

πρὸς τὸ Ι (κ. 26)· ὅθεν ἀναφύονται τὰ δύω τρίγωνα ΔΕΘ, ΔΕ'Θ' ἑκάτερον ὁμολογῶν τῷ ζητήματι.

571. ΣΧΟΛΙΟΝ Δ'. Εἰ δὲ τὸ σημεῖον (κ. 27) Α κέοιτο, ἔνερθεν μὲν τῆς ΒΔ, ἐν αὐτῇ μέντοι τῇ γωνίᾳ ΒΔΕ', τηνικαῦτα ἥτε α καὶ ἡ β ἔσονται λειπτικαί· ὅθεν ἔσεται κ

$$= -\frac{\gamma\gamma}{\beta} + \sqrt{\left(\frac{\gamma^4}{\beta\beta} + \frac{\alpha\alpha\gamma\gamma}{\beta}\right)},$$

αἵτινες ἐπ' ἀκριβὲς εἰσὶ (τοῦ συμβόλου μόνου διαμαχομένου) δυνάμεις, ἃς πρὸ μικροῦ ὑπὲρ τῆς κ ἐθηρευσάμεθα· κατασκευασθήσεται ἄρα καὶ ἐνταῦθα τὸ πρόβλημα ὥσπερ καὶ ἐπὶ (κ. 22)· καὶ δὴ ἡ μὲν ΓΚ ἔσται δύναμις τοῦ κ ὑπαρκτική, ἡ δὲ ΓΠ δύναμις αὐτοῦ λειπτική· κἀκείνη μὲν μετενεχθήσεται ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Θ πρὸς τὸ Β, αὕτη δὲ τἀναντίον ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ το Θ'.

572. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Παρηγάγομεν ἐνταῦθα τὰς παντοίας τῆς ἐπιλύσεως ταύτης περιπτώσεις, ἵνα δείξωμεν, ὅπως ταύτας πάσας μία μόνη ἐξίσωσις περιλαμβάνει, καὶ ὅπως διὰ μόνης μεταλλαγῆς τῶν συμβόλων ἀναπαλύπτονται, καὶ ὅπως αἱ ἐναντίαι τῶν γραμμῶν θέσεις ἐναντίοις διασημαίνονται τοῖς συμβόλοις, καὶ τ' ἀνάπαλιν· λείπεται ἔτι ἐνδεῖξαι ἑνίας τῆς αὐτῆς ἐπιλύσεως χρήσεις.

573. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Σημεῖον δοθέντος τοῦ Α (κ. 28) κειμένου ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τριγώνου δεδομένου τοῦ ΔΗΙ. ἀπ' αὐτοῦ εὐθεῖαν ἀγαγεῖν τὴν ΑΖ, ὅπως διχοῇ τὸ τρίγωνον εἰς δύω μερίδας ΔΕΖ, ΕΖΙΗ, αἳ εἶεν πρὸς ἀλλήλας ἐν λόγῳ ἐγνωσμένῳ μ : ν.

ΛΥΣΙΣ. Τοῦδε ἡ ἐπίλυσις τῇ τοῦ προτέρου ἐμπεριλαμβάνεται· ἐπεὶ γὰρ δέδοται μὲν τὸ τρίγωνον ΔΗΙ, ἔγνωται δὲ ποσημόριον τοῦ ΔΗΙ ὀφείλει εἶναι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἐὰν ζητηθῇ τέταρτος ὅρος ταύτης τῆς ἀναλογίας μ + ν :

μ:: ΔΗΙ, εὑρεθήσεται τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἀλλὰ δυνατὸν ἀεὶ εὑρεῖν τετράγωνον γγ ἴσον ταύτῃ τῇ ἐπιφανείᾳ (362), τὸ ζήτημα ἄρα εἰς τοῦτο ἥκει, ἀγαγεῖν ἀμέλει ἀπὸ τοῦ σημείου Α εὐθεῖαν τὴν ΑΕΖ, ὅπως μετὰ τῶν δύω πλευρῶν ΔΗ, ΔΙ περιέχῃ τρίγωνον τὸ ΔΕΖ ἴσον τῷ τετραγώνῳ γγ, τοῦτ' ἔστιν ἀνάγεται εἰς τὸ πρότερον πρόβλημα (567).

574. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δῆλον ἔτι, ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἀνάγεται καὶ τὸ, πᾶν χῆμα εὐθύγραμμον τεμεῖν δι' εὐθείας, ἀχθείσης ἀφ' οὗτινοσοῦν σημείου (κ. 29) τοῦ Α, εἰς δύω τμήματα ΒΓΖΕ, ΕΖΔΗΚ, ἃ ἔχοιεν πρὸς ἄλληλα τὸν δοθέντα λόγον· γνωστοῦ γὰρ ὄντος τοῦ χήματος ΒΓΔΗΚ, γινώσκονται πᾶσαι αὐτοῦ αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραί· εὐμαρῶς ἄρα γνωσθήσεται τὸ τρίγωνον ΒΛΓ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύω πλευρῶν προεκβεβλημένων τῶν ΚΒ, ΔΓ, ἐπεὶ γινώσκεται ἥτε πλευρὰ ΒΓ, καὶ δύω γωνίαι ΛΒΓ, ΛΓΒ ἀναπληρώματα τῶν δύω γνωστῶν γωνιῶν ΓΒΚ, καὶ ΒΓΖ· ὥστε ὡς γνωστὸν ἐκληπτέον τὸ τρίγωνον ΛΒΓ· ἐπεὶ δὲ τὸ ΕΒΓΖ δεῖ εἶναι μέρος διωρισμένον τῆς ὅλης ἐπιφανείας, καὶ αὐτὸ ὡσαύτως γινώσκεται· τὸ ζήτημα ἄρα ἀνάγεται εἰς τὸ, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τὴν ΑΕΖ, ἥτις ἐν τῇ γωνίᾳ ΚΛΔ τρίγωνον συνίστησιν ἴσον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ· τέλος δ' ἐντεῦθεν ἄντις συνίδοι, ὅπως τὸ χῆμα τόδε εἰς πλείω διέλοι τμήματα, ὧν οἱ λόγοι εἶεν δεδομένοι.

575. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν ποσότητες δεδομέναι, εἰσιοῦσαι εἰς τὴν πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος χρησιμεύουσαν ἐξίσωσιν, τοιαῖδε ὦσιν, ὥστε μεταβαλλομένων τῶν κατ' αὐτὰς συμβόλων τὴν ἐξίσωσιν μηδεμίαν ὑφίστασθαι ἀλλοίωσιν· ἢ μεταβαλλομένης τῆς θέσεως τῆς γραμμῆς, ἢ τῶν γραμμῶν τῶν ζητουμένων ἐν τῷ χήματι, μέτε τὴν θέσιν μήτε τὸ μέγεθος τρέπεσθαι τῶν δοθεισῶν εἰθειῶν, τηνι-

ταῦτα ἐν ταῖς διαφόροις τοῦ χ δυνάμεσιν, εἰ πολλαὶ εἶεν ἐν τῇ ἐξισώσει, εὑρεθήσεται ἀεὶ μία, ἥτις ἐυεπιβόλως ἐπιλύσει τὸ πρόβλημα ἐν περιπτώσει, ἣν ἐμφαίνει ἡ μεταβολή· ἕτως ἐν τῷ ἀρτίως ἡμῖν ἐπιλυθέντι προβλήματι (567) μία τῶν δυνάμεων τοῦ χ ἐπέλυεν ἐυθυβόλως τὸ πρόβλημα τῆς εὐθείας ΑΕΘ ἐμπιπτούσης εἰς τὴν γωνίαν ΗΔΙ· ἀλλ' εἴδομεν ἅμα ὡς ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ χ ἐπέλυε τὸ πρόβλημα ὀυκέτι ἐν τῇ γωνίᾳ ΗΔΙ, ἀλλ' ἐν τῇ κατὰ κορυφὴν αὐτῇ Ζ' Δ Ε'· ὁ δέ γε τούτου λόγος, ὅτι ἐφ' ἑκάστης περιπτώσεως, τὰς αὐτὰς εἰς χρῆσιν ἔχοντας ποσότητας, καὶ τοὺς αὐτοὺς εἰς ἐκτέλεσιν λογισμοὺς, εἰς τὴν αὐτὴν ἐπόναγκες καταντῆσαι ἐξίσωσιν, ἥτις ὀυκ ἔστιν ὅπως ὀυχὶ τὰς αὐτὰς παρέξεται ἐπιλύσεις.

576. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'. Ἐπὶ τῆς φορᾶς τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ σημεῖον εὑρεῖν τὸ Γ (χ. 30.), ὅπως τὸ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Α ἀπόσημα μέσον ἢ ἀνάλογον πρὸς τὸ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Β ἀπόσημα, καὶ τὴν ὅλην εὐθεῖαν ΑΒ.

ΛΥΣΙΣ. Ῥηθήτω α ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ, καὶ χ τὸ ζητούμενον ἀπόσημα ΑΓ· ὀυκοῦν ΒΓ = α — χ· καὶ ἐπεὶ ζητεῖται εἶναι ΑΒ : ΑΓ :: ΑΓ : ΓΒ· εἴτ' οὖν α : χ :: χ : α — χ· ἄρα χχ = αα — αχ, ἢ χχ + αχ = αα, ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος, ἥτις ἐπιλυθεῖσα δίδωσι $\chi = -\frac{1}{2}\alpha \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \alpha\alpha)}$.

Εἰς οὖν κατασκευὴν τῆς πρώτης δυνάμεως $\chi = -\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \alpha\alpha)}$ ἀνάγκη ἐπιζῆσαι τῷ σημείῳ Β τὴν κάθετον $B\Delta = \frac{1}{2}\alpha$· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΑΔ, ἔσται $A\Delta = \sqrt{(B\Delta^2 + AB^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \alpha\alpha)}$· λείπεται τοίνυν ἀφελεῖν ταύτης τῆς εὐθείας τὴν ποσότητα $\frac{1}{2}\alpha$, ὃ δὴ τελεῖται μεταφερομένης τῆς ΔΒ ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ο· τηνικαῦτα οὖν ΑΟ δύναται $\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \alpha\alpha)} - \frac{1}{2}\alpha$, τοῦτ' ἔστιν

ἴση ἔσεται τῷ χ· μετενεχθείσης ἄρα τῆς ΑΟ ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, τὸ σημεῖον Γ, ἐφ' ὃ τελευτᾷ, ἔσεται τὸ ζητούμενον.

Περὶ δὲ τῆς δευτέρας δυνάμεως τοῦ χ, εἴτ' ὂν — $\frac{1}{2}$ α — $\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \alpha\alpha)}$, ἐὰν μετενεχθῇ ΒΔ ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ο' ἐπὶ τῆς ΑΔ προσχθείσης ΑΟ' τηνικαῦτα δυνήσεται $\frac{1}{2}$ α + $\sqrt{(\frac{1}{4}\alpha\alpha + \alpha\alpha)}$· ἐπεὶ ἄρα ἡ δύναμις τοῦ χ ἡ αὐτή ἐστι ποσότης θεωρουμένη λειπτικῶς, μετηνέχθω ΑΟ' ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Γ' ἐπὶ τῆς ΑΒ προσχθείσης ἐπὶ τὰ ἀντίθετα τοῖς προτέροις· καὶ δὴ εὑρεθήσεται δεύτερον σημεῖον Γ, ὡς εἶναι τὴν Γ'Α τῶν ΓΒ, ΑΒ μέσην ἀνάλογον.

577. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τοῦτο δὲ τὸ πρόβλημα περιλαμβάνει καὶ τὴν τῆς εὐθείας κατ' ἄκρον καὶ μέσον λόγον τομήν· ἔτως ἡ ἤδη ἀποδεδομένη κατασκευὴ ταὐτόν πως δύναται τῇ ἀποδοθείσῃ (335)· ἀλλὰ καταφανὲς, ὡς ὁ μὲν Συμβολικὸς ὑπολογισμὸς ἄγει εἰς εὕρεσιν ταύτης τῆς κατασκευῆς· ἡ δὲ Γεωμετρία ὑποτίθησιν ἤδη εὑρημένην αὐτὴν, καὶ μόνον ἐμπεδοῖ αὐτῆς τὴν ἀλήθειαν.

578. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Μικρὸν ἐπισήσασι τῇ, ἣν πεποιεπατήσαμεν, ὁδῷ ἐν τοῖς προεκτεθεῖσι προβλήμασι δῆλον αὐτίκα, ὅτι ἀεὶ μίαν ὡς ἄγνωστον ἐξελάβομεν εὐθεῖαν, ἥτις ἅπαξ γνωσθεῖσα ὑπηρέτησεν ἡμῖν εἰς εὕρεσιν ἁπασῶν τῶν ἄλλων, τηρήσασιν ἀκριβῶς τὰς τοῦ προβλήματος θέσεις· τοῦτο δὴ καὶ πρακτέον ἀείποτε εἶναι φαμέν· ἀλλὰ γὰρ τηρητέον καὶ τόδε· εἰσὶ γὰρ πολλάκις εὐθεῖαι, ὧν ἑκάστη γνωσθεῖσα οὐχ ἧττον διορίσειεν ἁπάσας τὰς ἄλλας· ἀλλ' ἐν ταύταις ἔστι καί τις, ἣ πολὺ συνθετωτέρας τὰς ἐξισώσεις ἀπεργάζεται· εἰς ὃν αἵρεσιν τῆς εὐμαρέστερον ἐπὶ τὸ τέλος ἂν ἀγαγούσης εὐθείας τιθεμεν ἐνταῦθα τάδε τὸν κανόνα.

579. „Ἐὰν μεταξὺ τῶν εὐθειῶν, ἢ τῶν ποσοτή-„των, ὧν ὡς ἄγνωστος ἐκληφθεῖσα ἑκάστη δύναται ἐπίσης „συμβαλεῖν εἰς διορισμὸν ἁπασῶν τῶν ἄλλων, εὑρεθῶσι „δύω τὸν αὐτὸν τρόπον ἑκατέρα χρησιμεύουσα, ὡς εἰς „τὴν αὐτὴν φέρειν ἐξίσωσιν (μετὰ συμβόλων + ἢ —), „τηνικαῦτα δὴ ἡδετέρᾳ τούτων χρηστέον, ἀλλ' ἐκληπτέον „ὡς ἄγνωστον ἄλλην ποσότητα, ἑκατέρας τῶν δυεῖν ἐπί-„σης ἐξηρτημένην" ἐκληπτέον, δὸς εἰπεῖν, τὸ ἡμιάθροισμα, ἢ τὴν ἡμιδιαφορὰν, ἢ τὴν μέσην αὐτῶν ἀνάλογον κτλ. ἀεὶ γὰρ ἀφιξόμεθα εἰς ἐξίσωσιν ἁπλουστέραν, ἢ εἴπερ ἐχρώμεθα ἑκατέρᾳ τῶν δυεῖν ποσοτήτων. Τὸ δ' ἑφεξῆς πρόβλημα πολλὰ ἡμῖν ἐπιδαψιλεύσεται ὑποδείγματα.

580. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'. Ἀπὸ σημείου τοῦ Δ, κειμένου (χ. 31.) ἐν τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΙΑΕ, καὶ ἴσον ἀπέχοντος ἑκατέρας τῶν πλευρῶν ΙΑ, ΑΕ, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τὴν ΔΒ, ὅπως τὸ μέρος ΓΒ, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ἐν τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ΕΑΒ, ἴσον ὑπάρχῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

ΛΥΣΙΣ Α'. Καταχθεισῶν τῶν καθέτων ΔΕ, ΔΙ ἀδιαφόρως ὡς ἄγνωστον δυνάμεθα ἐκλαβεῖν τὴν ΓΕ, ἢ ΑΒ, ΑΓ, ἢ ΙΒ, ΓΔ, ἢ ΔΒ· ἐὰν μὲν οὖν φέρε, ἐκλάβωμεν ὡς ἄγνωστον τὴν ΓΕ, τηνικαῦτα κληθείσης τῆς μὲν ΓΕ, χ, α δὲ ἑκατέρας τῶν δύω ἴσων εὐθειῶν ΔΕ, ΔΙ, ἅσπερ ἐκδεχόμεθα ὡς γνωστὰς, κληθείσης δὲ καὶ τῆς δεδομένης εὐθείας, ἣ δεῖ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ, ἔξομεν $\text{ΑΓ} = \text{ΑΕ} - \text{ΓΕ} = \alpha - \chi$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΕΓ, ΓΑΒ προέρχεται $\text{ΓΕ} : \text{ΔΕ} :: \text{ΑΓ} : \text{ΑΒ}$ τουτ' ἔστι $\chi : \alpha :: \alpha - \chi : \text{ΑΒ} = \frac{\alpha\alpha - \alpha\chi}{\chi}$· ἀλλὰ διὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου (349) ἔστιν $\text{ΑΓ}^2 + \text{ΑΒ}^2 = \text{ΒΓ}^2$· ἀντικαταστάσει ἄρα ἀντὶ τῶν εὐθειῶν τῶν