Θ καὶ τὸ Ο (318)· ἀλλὰ μὴν ΔΒ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ο· ἄρα ΔΠ δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ΔΘ = ΘΠ· ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΛΝ, ΚΟΜ πρόεισι ΚΛ : ΚΟ :: ΛΝ : ΟΜ, ἢ η : συνημ. β :: ἡμ. α : ΟΜ = $\frac{\text{ἡμ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta}{\eta}$· ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ τρίγωνα ΚΛΝ, ΔΘΟ ὅμοια, ὡς ἔχοντα ἐκ κατασκευῆς ἁπάσας τὰς πλευρὰς καθέτους ἀλλήλαις (220. Πορ. Γ), ἄρα ΚΛ : ΚΝ :: ΔΟ : ΘΔ, εἶτ' οὖν η : συνημ. α :: ἡμ. β : ΘΔ = $\frac{\text{ημ. } \beta \times \text{συνημ. } \alpha}{\eta}$· ἀλλὰ ΔΞ = ΟΜ + ΔΘ = ΞΘ + ΘΔ, καὶ Βχ = ΘΞ — ΠΞ = ΔΞ — ΔΘ· ἄρα ΔΞ, εἴτ' ἂν ἡμ (α + β) = $\frac{\text{ἡμ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta + \text{ἡμ. } \beta \times \text{συνημ. } \alpha}{\eta}$· καὶ Βχ = ημ (α — β) = $\frac{\text{ημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta - \text{ημ. } \beta \times \text{συνημ. } \alpha}{\eta}$· τουτέστι „τὸ ἡ-„μίτονον τοῦ ἀθροίσματος δύω τόξων α, β (ὑποτιθεμένου „α > β) ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ α καὶ „τοῦ συνημιτόνου τοῦ β σὺν τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου β καὶ τοῦ „συνημιτόνου τοῦ α, συνάμα διαιρεθεῖσι διὰ τῆς ἀκτῖνος· τὸ „δὲ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων ἴσον ἐστὶ τῷ „γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ α, καὶ τοῦ συνημιτόνου τοῦ β, „πλὴν τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ β καὶ τοῦ συνημιτό-„νου τοῦ α, διαιρεθεῖσι διὰ τῆς ἀκτῖνος."

508. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Δοθέντων τῶν συνημιτόνων δύω τόξων α καὶ β, εὑρεῖν τὸ συνημίτονον ΚΞ τοῦ αὐτῶν ἀθροίσματος, καὶ τὸ συνημίτονον Κχ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τὰς παραλλήλους ΔΞ, ΟΜ, αἱ εὐθεῖαι ΔΒ, Ξχ ἀναλόγως τέτμηνται κατὰ τὸ Ο καὶ Μ (314)· ἀλλ' ἡ ΔΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ο, ἄρα καὶ ἡ Ξχ κατὰ τὸ Μ· τούτου δὲ τεθέντος, ἐπεί περ τὰ τρίγωνα ΚΛΝ, ΚΟΜ εἰσὶν ὅμοια (318)· ἄρα ΚΛ : ΚΟ :: ΚΝ : ΚΜ, εἴτ' ἂν η : συνημ. β :: συνημ. α : ΚΜ = $\frac{\text{συνημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta}{\eta}$· ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΛΝ, ΔΘΛ (220 Πόρ. Γ.)· πρόεισι ΚΛ : ΛΝ :: ΔΟ : ΘΟ = ΞΜ = Μχ, εἴτ' ἂν η : ἡμ. α :: ἡμ. β : ΞΜ = $\frac{\text{ἡμ. } \alpha \times \text{ἡμ. } \beta}{\eta}$· ἄρα ΚΞ = ΚΜ — ΞΜ = $\frac{\text{συνημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta - \text{ἡμ. } \alpha \times \text{ἡμ. } \beta}{\eta}$, καὶ Κχ = ΚΜ + Μχ = $\frac{\text{συνημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta + \text{ἡμ. } \alpha \times \text{ἡμ. } \beta}{\eta}$, τοῦτ' „ἔστι, τὸ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος δύω τόξων ἴσον ἐστὶ „τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν συνημιτόνων τῶν αὐτῶν τόξων „πλὴν τοῦ γινομένου ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰ ἡμιτόνων· τὸ δὲ „τῆς διαφορᾶς, τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν συνημιτόνων τῶν „αὐτῶν τόξων σὺν τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰ ἡμι„τόνων, διαιρεθεῖσιν ἄπασι διὰ τῆς ἀκτῖνος."

509. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων δύω γωνιῶν α καὶ β, ἔστι πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν, ὥσπερ ἡ ἁπτομένη τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν αὐτῶν γωνιῶν πρὸς τὴν τῆς ἡμιδιαφορᾶς.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπείπερ αἱ ὑποτείνουσαι τὰς γωνίας πλευραὶ εἰσὶν, ὡς τὰ ἡμίτονα τῶν αὐτῶν (496), δῆλον τὸ θεώρημα ἐκ τῶν δεικθέντων (499)· ἔστιν ἄρα ἡμ. α +

ἡμ. β : ἡμ. α — ἡμ. β :: ἀπ. $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$: ἀπ. $\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

510. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔστιν ἄρα καὶ συνημ. α + συνημ. β : συνημ. α — συνημ. β :: συναπ. $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$: συναπ. $\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

τὰ γὰρ συνημίτονα εἰσὶν ἡμίτονα τῶν κατὰ τὰ παραπληρώματα γωνιῶν (489)· ἄρα, κατὰ τὸ θεώρημα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων τῶν κατὰ τὰ παραπληρώματα γωνιῶν ἐστι πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν, ὥσπερ ἡ ἁπτομένη τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν κατὰ τὰ παραπληρώματα γωνιῶν πρὸς τὴν ἁπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν αὐτῶν.

511. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Βουλομένοις δ' εὑρεῖν τὴν τέμνουσαν διὰ τοῦ συνημιτόνου καὶ τῆς ἀκτῖνος, πορισθήσεται ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΚΔ, ΝΚΑ· ἔστι γὰρ (ὑποτεθείσης τῆς ὑπὸ ΒΚΑ = α) συνημ. α : ΒΚ = η :: ΚΑ = η : ΚΝ = τεμ. α = $\frac{\eta^2}{\text{συνημ. } \alpha}$· δῆλον δὲ καὶ ὅτι ΚΝ = τεμ. α = $\sqrt{(\eta^2 + \text{ἀπ.}^2\ \alpha)}$ καὶ ΚΜ = συντ. α = $\sqrt{(\eta^2 + \text{συντ.}^2\ \alpha)}$.

512. ΘΕΩΡΗΜΑ. Το ἡμίτονον ἁπάσης γωνίας τῆς α, ἔστι πρὸς τὸ ἄθροισμα τῆς ἀκτῖνος καὶ τοῦ συνημιτόνου τῆς αὐτῆς γωνίας, ὥσπερ ἡ ἁπτομένη τῆς ἡμισείας γωνίας α πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω γωνία ΑΚΠ = α· ἐκκεῖσθω ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ΑΒΠ = $\frac{\alpha}{2}$ (178), καὶ ἀχθείσης διὰ τοῦ κέντρου Κ τῷ ΚΝ παραλλήλως τῇ ΒΠ, ἔσται ἡ γωνία ΝΚΑ = ΠΒΑ (45) = $\frac{\alpha}{2}$, καὶ ΑΝ ἔσται ἁπτ. $\frac{\alpha}{2}$· ἀλλ' ἐκ τῶν ὀρθογωνίων ὁμοίων τριγώνων ΒΠΔ (180) ΝΚΑ (151) ἔστι

ΠΔ : ΔΒ : : ΝΑ : ΚΑ, εἴτ' ἂν ἡμ. α : η + συνημ. α : : ἀπτ. $\frac{\alpha}{2}$: η· ἄρα η + συνημ. α = $\frac{\eta \times \text{συνημ. } \alpha}{\text{ἀπτ. } \frac{\alpha}{2}}$

513. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπείπερ ἡ ὑπὸ ΑΠΔ γωνία μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ τόξου ΑΖ, καὶ ΑΖ = ΑΠ, ὁ τὸ ἥμισυ μετρεῖ τὴν ὑπὸ ΝΚΑ γωνίαν, δῆλον ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΝΑΚ, ΠΔΑ εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ΠΔ : ΑΔ : : ΚΑ : ΑΝ, τοῦτ' ἔστιν· ἡμ. α : η — συνημ. α : : η : ἀπ. $\frac{\alpha}{2}$· ἐκεῖν Η — συνημ. α = $\frac{\text{ἡμ. } \alpha}{\eta}$· ἀπ. $\frac{\alpha}{2}$, καὶ (διαιρέσει δήπου τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ τῆς προευρημένης (512))

$$\frac{\text{Η — συνημ. } \alpha}{\text{Η + συνημ. } \alpha} = \frac{\text{ἀπ.}^2 \frac{\alpha}{2}}{\eta^2} \cdot \text{ἄρα } \eta^2 \cdot \left(\frac{\text{Η — συνημ. } \alpha}{\text{Η + συνημ. } \alpha}\right) =$$

$$(\text{ἀπτ.})^2 \tfrac{1}{2}\alpha \cdot \text{ἀλλὰ } (\text{συναπ.})^2 = \frac{\eta^4}{(\text{ἀπ.})^2} \ (501) \cdot \text{ἄρα } (\text{συναπ.})^2$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha = \eta^2 \cdot \left(\frac{\text{Η + συνημ. } \alpha}{\text{Η — συνημ. } \alpha}\right) \ (^*).$$

Εἴδομεν ἤδη (512) ὡς ἔστιν ἡμ. α : η + συνημ. α : :

(*) Ἐπεὶ γὰρ ἁπλῶς $(\text{συναπ.})^2 = \frac{\eta^4}{(\text{ἀπτ.})^2}$· ἄρα (συν. απ.)^2 $\frac{1}{2}\alpha$ ἔστιν ἴση τῷ η^4 διαιρημένῳ διὰ $(\text{ἀπτ.})^2$ $\frac{1}{2}\alpha$, ἔστι δὲ $(\text{ἀπτ.})^2$ $\frac{1}{2}\alpha$ = ΗΗ $\left(\frac{\eta \text{ — συνημ. } \alpha}{\eta \text{ + συνημ. } \alpha}\right)$· ἄρα $(\text{ἀπτ.})^2$ $\frac{1}{2}\alpha$ = $\eta^4 : \text{ΗΗ} \cdot \left(\frac{\eta \text{ — συνημ. } \alpha}{\eta \text{ + συνημ. } \alpha}\right) = \text{Η}^4 : \frac{\text{ΗΗ. } (\eta \text{ — συνημ. } \alpha)}{\eta \text{ + συνημ. } \alpha}$

$$= \text{Η}^4 \times \frac{\eta \text{ + συνημ. } \alpha}{\text{ΗΗ. } (\eta \text{ — συνημ. } \alpha)} = \text{Η}^2 \left(\frac{\text{Η . συνημ. } \alpha}{\eta \text{ — συνημ. } \alpha}\right).$$

$\acute{\alpha}\pi. \frac{\alpha}{2} : \eta$· $\acute{\alpha}\lambda\grave{\alpha}$ (49.5)· $\acute{\alpha}\pi. \frac{\alpha}{2} : \eta :: H : \sigma\upsilon\nu\alpha\pi. \frac{\alpha}{2}$· $\ddot{\alpha}\rho\alpha$ $\acute{\eta}\mu. \alpha : H + \sigma\upsilon\nu\eta\mu. \alpha :: H : \sigma\upsilon\nu\alpha\pi. \frac{\alpha}{2}$· $\grave{\varepsilon}\grave{\alpha}\nu$ $\bar{\upsilon}\nu$ $\gamma\acute{\varepsilon}\nu\eta\tau\alpha\iota$ $\tau\grave{o}$ $\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa\grave{o}\nu$ $\tau\varepsilon\tau\alpha\rho\tau\eta\mu\acute{o}\rho\iota o\nu = \nu$, $\pi\rho o\kappa\acute{\upsilon}\psi\varepsilon\iota$ $\sigma\upsilon\nu\alpha\pi. \frac{\alpha}{2} = \acute{\alpha}\pi. \left(\nu - \frac{\alpha}{2}\right) = \acute{\alpha}\pi. \left(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu - \alpha}{2}\right) = \acute{\alpha}\pi. \left(\frac{\nu + \pi}{2}\right)$· $\acute{\upsilon}\pi o\tau\varepsilon\vartheta\varepsilon\acute{\nu}\tau o\varsigma$ $\acute{\alpha}\mu\acute{\varepsilon}\lambda\varepsilon\iota$ $\nu - \alpha = \pi$· $\ddot{\varepsilon}\varsigma\iota$ $\delta\grave{\varepsilon}$ $\kappa\grave{\alpha}\iota$ $\acute{\eta}\mu. \alpha = \sigma\upsilon\nu\eta\mu. \pi$, $\kappa\grave{\alpha}\iota$ $\acute{\eta}\mu. \pi = \sigma\upsilon\nu\eta\mu. \alpha$· $\ddot{\alpha}\rho\alpha$ $\acute{\eta}$ $\grave{\alpha}\nu\alpha\lambo\gamma\acute{\iota}\alpha$ $\acute{\eta}\mu. \alpha : H + \sigma\upsilon\nu\eta\mu. \alpha :: H : \sigma\upsilon\nu\alpha\pi. \frac{\alpha}{2}$ $\gamma\varepsilon\nu\acute{\eta}\sigma\varepsilon\tau\alpha\iota$ $\sigma\upsilon\nu\eta\mu. \pi : H + \acute{\eta}\mu. \pi :: H : \acute{\alpha}\pi. \left(\frac{\nu + \pi}{2}\right)$· $\ddot{\varepsilon}\varsigma\iota$ $\delta\grave{\varepsilon}$ $\kappa\grave{\alpha}\iota$ $\acute{\eta}\mu. \alpha : H - \sigma\upsilon\nu\eta\mu. \alpha :: H : \acute{\alpha}\pi. \frac{\alpha}{2} :: \sigma\upsilon\nu\eta\mu. \frac{\alpha}{2} : H$· $\ddot{\alpha}\rho\alpha$, $\grave{\varepsilon}\pi\varepsilon\grave{\iota}$ $\sigma\upsilon\nu\alpha\pi. \frac{\alpha}{2} = \acute{\alpha}\pi. \left(\nu - \frac{\alpha}{2}\right) = \acute{\alpha}\pi\tau. \left(\frac{\nu}{2} + \frac{\nu - \alpha}{2}\right) = \acute{\alpha}\pi\tau. \left(\frac{\nu + \pi}{2}\right)$, $\kappa\grave{\alpha}\iota$ $\acute{\eta}\mu. \alpha = \sigma\upsilon\nu\eta\mu. \pi$, $\kappa\grave{\alpha}\iota$ $\acute{\eta}\mu. \pi = \sigma\upsilon\nu\eta\mu. \alpha$· $\grave{\varepsilon}\kappa$ $\tau\acute{o}\tau\omega\nu$ $\pi o\rho\iota\sigma\vartheta\acute{\eta}\sigma\varepsilon\tau\alpha\iota$ $\sigma\upsilon\nu\eta\mu. \pi : H - \acute{\eta}\mu. \pi :: \acute{\alpha}\pi. \left(\frac{\nu + \pi}{2}\right) ; H$· $\ddot{\alpha}\rho\alpha$ $H + \acute{\eta}\mu. \pi = \frac{\sigma\upsilon\nu\eta\mu. \pi. \acute{\alpha}\pi. \left(\frac{\nu + \pi}{2}\right)}{H}$, $H - \acute{\eta}\mu. \pi = \frac{\sigma\upsilon\nu\eta\mu. \pi. H}{\acute{\alpha}\pi \left(\frac{\nu + \pi}{2}\right)}$,

$$\frac{H + \acute{\eta}\mu. \pi}{H - \acute{\eta}\mu. \pi} = \frac{(\acute{\alpha}\pi.)^2 \left(\frac{\nu + \pi}{2}\right)}{H^2},$$

$\kappa\alpha\grave{\iota}$ $\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\upsilon\tau\alpha\acute{\iota}o\nu$

$$\frac{H^2 (H + \acute{\eta}\mu. \pi)}{H - \acute{\eta}\mu. \pi} = (\acute{\alpha}\pi\tau.)^2 \left(\frac{\nu + \pi}{2}\right).$$

514. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων οἵτε πίνακες τῶν τε ἡμιτόνων, καὶ συνημιτόνων, καὶ ἀπτομένων, καὶ συναπτομένων, κατασκευάζονται, καὶ ἅπαν τριγωνομετρικὸν πρόβλημα, καθάπερ ὀψόμεθα ἐν τῷ ἐφεξῆς κεφαλαίῳ, λύσιμον ἀποκαθίσταται· ἡμιτόνου γὰρ γωνίας = 30° δοθέντος (495), εὑρεθήσεται ῥᾳδίως τὸ γωνίας = 15° (506), ἐξῆς δὲ τὸ 7° $\frac{1}{2}$, εἶτα τὸ 3° $\frac{1}{4}$, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως, τὰ ἡμίση θηρωμένοις μέχρι δωδεκάτης πράξεως, καθ' ἣν εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον γωνίας = 52'' 44''' 3'''' $\frac{3}{4}$· ἐπεὶ δὲ τὰ βραχυτάτων τόξων ἡμίτονα αὐτοῖς τοῖς τόξοις συμπίπτουσι, καὶ εἰσὶν αὐτοῖς ἀνάλογα κατὰ τὸ ἀκόλουθον, εὑρεθήσεται τὸ γωνίας = 1' ἐκ τῆς ἀναλογίας „ὥσπερ γωνία = 52'' 44''' 3'''' $\frac{3}{4}$ πρὸς τὸ ἡμίτονον αὐτῆς, οὕτω γωνία = 1' πρὸς τὸ ζητούμενον αὐτῆς ἡμίτονον“· τούτου δὲ εὑρεθέντος ἀπόνως ἐκπορίζεται τὸ γωνίας = 2' (504)· ἐξῆς δὲ ὑποτεθέντων β = 1', καὶ α = 2', εὑρεθήσεται καὶ τὸ τῆς 3' (507)· τούτου δὲ ὑποτεθέντος = α, καὶ β = 1' εὑρεθήσεται καὶ τὸ τῆς 4', καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως μέχρι τοῦ γωνίας = 30°· εὑρεθέντος δὲ τοῦ γωνίας = 30° ἡμιτόνου, ἵν' εὑρεθείη τὸ γωνίας μείζονος, φέρ' εἰπεῖν, τῆς = 35°, γενέσθω α = 30°, καὶ β = 5°· εἰς δ' εὕρεσιν τοῦ γωνίας = 30° 1', γενέσθω 30° = α, καὶ 1' = β, καὶ οὕτως ἐξῆς ἕως τοῦ γωνίας = 60°· τούτου δὲ ἅπαξ γνωσθέντος, τὰ ἕως 90° θηρευθήσεται, τιθεμένου α = 60°, καὶ β = 1°, = 2°, = 3°. κτλ.· ἡμιτόνων δὲ γωνίαις προσανηκόντων μείζοσιν, ἢ 90°, ἐπεὶ ταυτίζεται τοῖς τῶν αὐτοῖς ἀναπληρωμάτων (491), εὐμαρεστάτη ἡ εὕρεσις· ἡμίτονον γὰρ γωνίας = 100° ταυτόν ἐστι καὶ γωνίας = 80°· ἀταλαιπώρως δὲ καὶ τὰ συνημίτονα πορίζονται, τῶν ἡμιτόνων γινωσκομένων· τὸ γὰρ συνη-

μίτονον ἴσῦται τῇ τετραγωνείῳ ῥίζῃ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ τὸ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος τετράγωνον ὑπερεκπίπτει τῦ ἀπὸ τῦ ἡμιτόνυ (505)· ἐπεὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα (κ. 2) ΚΔΒ, ΚΑΝ εἰσὶν ὅμοια· ἐντεῦθεν ἄρα ΚΔ : ΔΒ :: ΚΑ : ΑΝ, εἴτ' ὖν συνημ. : ἡμ. :: Η : ἀπ.· γινωσκομένων ὖν τῦ τε ἡμιτόνυ καὶ τῦ συνημιτόνυ γωνίας τινὸς, εὐχερῶς εὑρεθήσεται ἡ αὐτῆς ἀπτομένη· ἐκ δὲ τῆς ἀναλογίας (501) απ : Η :: Η : συναπ. ῥαδίως πορισθήσεται καὶ ἡ συναπτομένη· ἐὰν ὖν ὑποτεθῇ ἡ ἀκτὶς = 10000000000, τὸ γωνίας = 30° ἡμίτονον ἔσται = 5000000000· ἐκ δὲ τῶν προειρημένων εὑρεθήσονται οἱ τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα καὶ ἀπτομένας, τόξων τῶν τε μειζόνων καὶ τῶν ἐλαττόνων ἢ 30°, ἐκδηλῦντες ἀριθμοί· τὰς δὲ ἀριθμὰς εὑρόντες, ζητῦμεν τὰς αὐτῶν λογαρίθμυς ἐν τοῖς πίναξιν· οἷς καὶ μόνοις χρώμεθα ἀντὶ τῶν ἡμιτόνων, συνημιτόνων κτλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἐπιλύσεως τῶν κατὰ τὰ τρίγωνα προβλημάτων.

515. Προϋποτεθειμένων τῶν πινάκων, οἳ περιέχυσι τὰ ἡμίτονα, ἀπτομένας, συνημίτονα, συναπτομένας (514), διὰ τῶν προτεθέντων θεωρημάτων ἐπιλύειν δυνάμεθα ἅπαν ἐπὶ τριγώνυ γινόμενον πρόβλημα, ὅ ἐστι τριῶν διδομένων, ἐν οἷς καὶ μία πλευρὰ, τὰ ἄλλα τρία εὑρίσκειν.

516. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Τριγώνυ τῦ ΒΓΕ δύω γωνιῶν δοθεισῶν τῶν Β, Γ, καὶ τῆς ΒΓ πλευρᾶς, εὑρεῖν τὰ ἄλλα (κ. 9).

ΛΥΣΙΣ. Η' τρίτη γωνία Ε πορίζεται, ἐὰν ἀφαιρεθῇ Β + Γ ἀπὸ 180° (210)· εἰς δὲ εὕρεσιν τῆς ΒΓ πλευρᾶς χρησέον τῇ μεθόδῳ τῶν τριῶν. Τὸ γὰρ ἡμίτονον τῆς Γ γωνίας, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ γνωστὴ πλευρὰ ΒΕ, ἐστὶ πρὸς αὐτὴν τὴν γνωστὴν πλευράν, ὡς τὸ ἡμίτονον τῆς Ε γωνίας, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ ΒΓ πρὸς αὐτὴν τὴν ΒΓ, ἣν ζητοῦμεν (496)· ἔστω οὖν Β = 100°, καὶ Γ = 15°· ἐκεῖνον Ε ἔστι = 180° — 115° = 65°· ἔστω δὲ καὶ ΒΕ = 20 ὀργυιαῖς· ζητείσθω εἶτα ἐν τοῖς πίναξι τὸ ἡμίτονον τῆς Γ γωνίας = 15°, καὶ τὸ τῆς Ε = 65°, καὶ σχηματισθήτω ἡ μέθοδος τῶν τριῶν οὕτω· 2588190 : 20 :: 9063078 : χ = 70 $\frac{8860}{2588190}$, δύναμις τῆς ΒΓ πλευρᾶς.

Βουλόμενοι δὲ εὑρεῖν τὴν ΓΕ πλευρὰν, τιθεμεν τρίτον ὅρον τῆς ἀναλογίας τὸ ἡμίτονον τῆς Β γωνίας, ὑφ' ἣν αὕτη ὑποτείνει· ταύτης δὲ τῆς γωνίας ἀμβλείας οὔσης, τὸ αὐτῆς ἡμίτονον τὸ αὐτὸ ἔσται τοῦ αὐτῆς ἀναπληρώματος (491), εἴτ' οὖν τῆς 80°· ἐντεῦθεν οὖν 2588190 : 20 : : 9848077 : χ = 26 + $\frac{8121100}{2588190}$ = ΓΕ.

517. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Των ἡμιτόνων ἐκτιθεμένων δι' ἀριθμῶν μεγάλων, ἡ μέθοδος τῶν τριῶν λίαν ἐπίπονος γίνεται· ἀνθ' ὅτου δὴ ζητήσαντες οἱ Μαθηματικοὶ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων πασῶν τῶν γωνιῶν τοῦ κυκλικοῦ τεταρτημορίου, ἔθεντο πρὸ ἑκάστου ἡμιτόνου τὸν οἰκεῖον αὐτοῦ λογάριθμον, εἰς ἓν τεῦχος συνάψαντες τοὺς πίνακας τῶν ἡμιτόνων, καὶ τοὺς λογαρίθμους τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· ἀντὶ οὖν ἡμιτόνων καὶ πλευρῶν τιθέντες τοὺς αὐτῶν λογαρίθμους, τὴν γεωμετρικὴν εἰς ἀριθμητικὴν τῶν τριῶν μέθοδον μεταποιοῦμεν, καὶ τοῦ προκύψαντος λογαρίθμου ἐν τοῖς πίναξι τὸ ἀντίστοιχον ἡμίτονον, ἢ τὴν πλευρὰν, ἣν ζητοῦμεν, εὑρίσκομεν.

Οὕτως ἡ προεκτεθεῖσα τῶν τριῶν γεωμετρικὴ μέθοδος (516) γενήσεται 9,4129962 · 1,3010300 : 9,9572757 · χ· τῶν μέσων ὧν συναφθέντων, καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος ἀφαιρεθέντος τοῦ γνωστοῦ ἄκρου, τὸ κατάλοιπον χ = 1,8453095, ἔστι λογάριθμος, ὃς ἐν τοῖς πίναξιν ἀντιστοιχεῖ τῷ 70 καί τινι πρὸς, ὅς ἐστι δύναμις ἐγγίζουσα τῇ ΒΓ πλευρᾷ.

518. Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐμφαίνων τὴν ἐγνωσμένην πλευρὰν περιέχῃ ὀργυιὰς καὶ πόδας, πάντα ἀνήχθωσαν εἰς πόδας, καὶ εἰλήφθω τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ὁ λογάριθμος εἰς ἐκτέλεσιν τῆς ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν μεθόδου.

519. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐν τῇ ἀριθμητικῇ τῶν τριῶν μεθόδῳ, ἀντὶ τῶν λογαριθμῶν τῶν ἡμιτόνων, καὶ τῶν πλευρῶν, σημειούσθωσαν χάριν συντομίας αὐταὶ αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραί· ἕτως ὧν ἐκτεθήσεται ἡ ἐν (517) ἀριθμητικὴ ἀναλογία Γ· ΒΕ : Ε· ΒΓ.

520. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Γ΄. Τοῦ ὁλικοῦ ἡμιτόνου, εἴτ' ὢν τοῦ γωνίας ὀρθῆς, ὄντος = 10000000000 (486), ὁ αὐτοῦ λογάριθμος ἔστι 10 ὡς ὁλοχερής (Συμβ. Λογ. 322)· ἐὰν ὦν λογαριθμῷ προσθεῖναι δέῃ τὸν λογάριθμον τῆς ὀρθῆς γωνίας, ἀπόχρη συνάψαι 1 ταῖς δεκάσι τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ λογαριθμου ἐκείνου, ἐὰν ὑπερέχῃ τὸν 10, ἢ προθεῖναι πρὸς ἀριστερὰν 1, ἐὰν ᾖ τοῦ 10 ἥττων· ἐὰν δὲ ἀφελεῖν δέῃ, ἀποκεκόφθω 1 τῶν τοῦ χαρακτηριστικοῦ δεκάδων. Τὸ ἑξῆς ὑπόδειγμα διαλευκανεῖ τὸ λεγόμενον.

521. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τριγώνου ὀρθογωνίου (χ.10) τοῦ ΑΔΖ δοθείσης τῆς πλευρᾶς ΔΖ = 30 ὀργυιαῖς, καὶ τῆς γωνίας Ζ = 40°, εὑρεῖν τὰ λοιπά.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ γωνία Α = 90° — 40° = 50° (212)· εἰς εὕρεσιν δὲ τῆς βάσεως ΑΖ (496, 519) γενέσθω Α· ΔΖ.

: Δ · ΑΖ · δὶ ἀριθμῶν δέ · 9,884254 · 1,477121 : 10 · χ · τὸ τῶν μέσων ἄθροισμα ἐςὶν 11,477121 (520), ἓ ἀφαιρεθέντος τȣ̃ γνωςȣ̃ ἄκρȣ λειφθήσεται χ = 1,592867 λογάριθμος ἐγγίζων τῷ 39, ἐκδηλȣ̃ντι τὴν ζητȣμένην βάσιν · ȣ̃σης δὲ τῆς ΑΖ = 39 ὀργυιαῖς, γινωσκομένης τε τῆς γωνίας Ζ, εὑρεθήσεται ἡ τὴν Ζ ὑποτείνȣσα πλευρὰ ΑΔ διὰ τῆς ἀναλογίας τῆς ἀριθμητικῆς Δ · ΑΖ : Ζ · ΑΔ (496, 516).

522. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τριγώνȣ δοθεισῶν δύω πλευρῶν, ȣ̃ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας, εὑρεῖν τὰ λοιπά.

ΛΥΣΙΣ. Ἤτοι ἐςὶν ΑΠ = ΑΓ (χ. 11), ȣ̃ γνωςῆς ȣ̃σης τῆς Α, ἔςαι (206) ἑκατέρα τῶν Π, Γ, = $\frac{180^\circ - A}{2}$ (210) · γνωςῆς ἓν ȣ̃σης τῆς γωνίας Π, εὑρεθήσεται ἡ ΠΓ πλευρὰ δὶ ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν μεθόδȣ (519) Π · ΑΓ : Α · ΠΓ · ἢ εἰσὶν ἄνισοι αἱ δοθεῖσαι ΑΟ, ΖΟ (χ. 8) · κἀντεῦθεν ἥδε γεννήσεται ἡ μέθοδος τῶν τριῶν · „τὸ ἄθροισμα τῶν δύω δοθεισῶν πλευρῶν ἐςι „πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν, ὡς ἡ ἀπτομένη τȣ̃ ἡμιαθροί„σματος τῶν γωνιῶν, ὑφ' ἃς αἱ πλευραὶ ὑποτείνȣσι, πρὸς „τὴν ἀπτομένην τῆς αὐτῶν ἡμιδιαφορᾶς.

Γνωςῶν ἓν ȣ̃σῶν τῶν δύω πλευρῶν, ῥᾷςα εὑρίσκεται τό,τε ἄθροισμα αὐτῶν, ȣ̃ ἡ διαφορὰ, ἅπερ συνίςησι τȣ̀ς δύω προτέρȣς τῆς ἀναλογίας ὅρȣς · δυνατὸν δὲ εὑρεῖν ȣ̃ τὸν τρίτον · ȣ̃ γὰρ Α + Ζ = 180° — Ο · ἐκεῖν τρίτος ὅρος ἔςαι ἡ ἀπτομένη τῆς $\frac{180^\circ - O}{2}$, ἣ εὑρίσκεται ἐν τοῖς πίναξι τῶν ἡμιτόνων · ὁ δὲ τέταρτος ὅρος χ τῆς πράξεως διεκπερανθείσης ἀποδώσει τὴν ἀπτομένην τῆς ἡ-

μιδιαφορᾶς τῶν γωνιῶν τῶν δε· εὑρόντες ὖν ἐν τοῖς πίναξι διὰ τῆς ἁπτομένης ταύτης τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν δε τῶν γωνιῶν, ἕξομεν τὴν ἐλάττονα γωνίαν Α ἴσην τῷ ἡμιαθροίσματι πλὴν τῆς ἡμιδιαφορᾶς (Συμβ. Λογ. 442).

Τέλος δὲ ἐκ τῆς ἀναλογίας Α : ΖΟ : : Ο : ΑΖ (496, 519) εὑρεθήσεται ἡ τρίτη πλευρὰ ΑΖ.

Ἔςω ΓΑ = ΑΠ, καὶ Α = 142°· ὑκῶν Π = Γ = 19°· ἔςω δὲ καὶ ΑΓ = 12 ὀργυιαῖς· ἔςι δὲ τοῦ μὲν 19° λογάριθμος 1,5126, τοῦ δὲ ἀριθμοῦ 12 ὁ 1,0791· τοῦ δὲ 142° ὁ αὐτὸς ὢν τῷ τοῦ 38° (491), ἔςιν 1,7893· τοιγαρῦν ἡ μέθοδος διατεθήσεται ὕτω·

1,5126 · 1,0791 : 1,7893 : χ = ΠΓ,

ὑκῶν λογάριθμος πρόειςιν ὁ 1,3558 ἀριθμῷ ἀντιςοίχων ἐγγύς κυ τῷ 23, ὃς παρίςησιν, ὅσων ὀργυιῶν ἐςιν ἡ ΠΓ.

	1,0791
	1,7893
	2,8684
	1,5126
	1,3558

523. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Δύω πλευρῶν δοθειςῶν καὶ μιᾶς γωνίας, ὑφ' ἣν ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν ὑποτείνει, εὑρεῖν τὰ λοιπὰ, γινωσκομένου μέντοι, εἰ ἡ γωνία, ὑφ' ἣν ἑτέρα πλευρὰ ὑποτείνει, ὀξεῖά ἐςιν, ἢ ἀμβλεῖα.

ΛΥΣΙΣ. Ἤτοι γάρ εἰσιν ἴσαι αἱ δοθεῖσαι, οἷον ΑΠ = ΑΓ (χ. 11), καὶ γινωσκομένης τῆς Γ, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ ΑΠ, γνωσθήσεται καὶ ἡ Π (204), καὶ δὴ καὶ ἡ Α (210)· γνωσθήσεται δὲ καὶ ἡ ΠΓ ἐκ τῆς μεθόδου Γ . ΑΠ : Α . ΠΓ· ἢ ἄνισοι, καὶ τηνικαῦτα, γνωςῶν ὑςῶν τῶν ΑΟ, ΟΖ (χ. 8) καὶ τῆς Α γωνίας, ἔςαι ΖΟ . Α : ΑΟ . Ζ· ὁ ὖν τέταρτος ὅρος, εἴτ' ὖν τὸ λογαριθμικὸν ἡμίτονον τῆς Ζ, ἐπίσης δύναται εἶναι γωνίας ὀξείας τε καὶ ἀμβλείας (491)· ἐπάναγκες ὖν εἰδέναι τὴν Ζ, εἰ ἔςιν ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα, ἵνα δυνηθῶμεν συναγαγεῖν τὴν τῆς Ο δύναμιν· ἁπασῶν δὲ

τέλος τῶν γωνιῶν γνωσθεισῶν ἀπολυφθήσεται ἡ δύναμις τῆς ΑΖ διὰ Α . ΟΖ : Ο . ΑΖ

524. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Τριγώνου τῶν τριῶν πλευρῶν δοθεισῶν, εὑρεῖν τὰς γωνίας.

ΛΥΣΙΣ. Ἤτοι ἰσάλληλοί εἰσιν ἅπασαι αἱ πλευραὶ, καὶ ἑκάστη γωνία ἔσται $= \frac{180^\circ}{3}$ (205, 210)· ἢ δύω μόνον εἰσὶν ἴσαι ΑΠ = ΑΓ, καὶ ἡ ἐκ τῆς Α γωνίας ἀχθεῖσα τῇ ΠΓ κάθετος δίχα τεμεῖ τὴν ΠΓ (217)· ἄρα ΠΘ = ΘΖ· ἀλλὰ τοῦ καινοῦ τριγώνου ΑΘΠ γινώσκονται, δύω μὲν πλευραὶ ΑΠ, ΠΘ, μία δὲ γωνία ἡ Θ· ἐκεῖν ΑΠ . Θ : ΠΘ . Α· ὅθεν πρόεισιν ἡ δύναμις τῆς Α γωνίας τοῦ ΑΠΘ τριγώνου, ἧς τὸ διπλοῦν ἐστιν ἡ Α γωνία τοῦ ΑΠΓ τριγώνου· ταύτης δὲ τῆς γωνίας γνωσθείσης, ἡ λοιπὴ ᾗ ἄρα ζητηθήσεται (522).

Ἢ τελευταῖον αἱ τρεῖς πλευραὶ ΒΓ, ΒΕ, ΓΕ (χ. 9) εἰσὶν ἄνισοι· καὶ δὴ α΄. ἔστι ΓΕ : ΓΤ : : ΓΟ : ΓΗ (500)· β΄. διὰ τῆς τῶν τριῶν μεθόδου εὑρεθείσης ἐν ἀριθμοῖς τῆς ΓΗ, τὸ μὲν μεῖζον τμῆμα ΓΔ ἔσται $= \frac{ΓΕ}{2} + \frac{ΓΗ}{2}$, τὸ δ' ἔλαττον ΔΕ $= \frac{ΓΕ}{2} - \frac{ΓΗ}{2}$ (Συμβ. Λογ. 442)· γ΄. Τριγώνου τοῦ ΗΔΕ γινωσκομένων τῶν δύω πλευρῶν ΒΕ, ΔΕ, καὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας Δ, εὐχερῶς εὑρεθήσεται καὶ ἡ Ε γωνία (523)· ὡσαύτως τριγώνου τοῦ ΒΓΔ γνωσῶν ὄντων τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ τῆς Δ γωνίας, εὑρεθήσεται καὶ ἡ Γ· τοῦ δ' ὁλικοῦ τριγώνου ΒΓΕ γνωσῶν ὄντων τῶν δύω γωνιῶν Γ, Ε, ἔσται γνωστὴ καὶ ἡ τρίτη Β (210).

525. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς΄. Τριγώνου παντὸς ΒΓΕ, τριῶν δοθέντων, ἐν οἷς ἐστι καὶ μία πλευρὰ, εὑρεῖν τὴν αὐτοῦ ἐπιφάνειαν.

ΛΥΣΙΣ. Εὑρεθεισῶν τῶν τε γωνιῶν αὐτῶ καὶ πλευρῶν (516, 522, 523, 524), ζητηθήτω ἡ δύναμις τῆς καθέτου ΒΔ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας Δ.ΒΓ : Γ.ΒΔ, καὶ πεπολλαπλασιάσθω ἡ ΓΕ βάσις ἐπὶ τὸ ἥμισυ ταύτης τῆς εὑρεθείσης καθέτου (288).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΚΤΟΝ.

Ἐν ᾧ ὁ Συμβολικὸς Λογισμὸς τῇ στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ προσεφαρμόζεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ γεωμετρικῆς κατασκευῆς τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων.

Ἡν μὲν ἀκόλουθον ἐφεξῆς τὰ περὶ τῆς σφαιρικῆς τριγωνομετρίας ὑποσυνάψαι, καθὰ καὶ ἄλλοις ἔθος Γεωμέτραις· ἐπεὶ δ' ἡμῖν ἔδοξεν ἐν τῇ φυσικωτέρᾳ Μαθηματικῇ τῆς Ἀστρονομίας, ὡς ἐκείνη τὰ μάλιστα συντελοῦσαν, προτάξαθαι, φέρ' ἴδωμεν διὰ βραχέων ἐνταῦθα τὴν τοῦ Συμβολικοῦ Λογισμοῦ πρὸς τὴν στοιχειώδη Γεωμετρίαν συνάφειαν, εἴτ' οὖν, ὡς λέγειν εἰώθασι, τὴν ἐκείνου ταύτῃ προσεφάρμοσιν· καὶ πρῶτον ὅπως ποσὰ γραμματικὰ γεωμετρικῶς κατασκευάζεται.

526. Αἱ γραμμαὶ, καὶ αἱ ἐπιφάνειαι, καὶ τὰ στερεὰ, ποσότητες ἔσται, τὰς αὐτὰς μὲν ἐπιδέχονταὶ πράξεις, ἃς οἵτε ἀριθμοὶ, καὶ αἱ συμβολικαὶ ποσότητες· τὰ δ' ἐντεῦθεν προϊόντα ἀποτελέσματα διττῶς ἂν ἔχοι μάλιστα ἐκτιμᾶσθαι, ἤτοι δι' ἀριθμῶν, ἢ διὰ γραμμῶν· κἀκείνως μὲν ἑκάστης τῶν δεδομένων ποσοτήτων δι' ἀριθμῶν δηλωθείσης, οὐδὲν ἔργον ὅλως ὑπάρχει ταῖς πράξεσιν· οὐδὲν γὰρ ἄλλο λοιπὸν, ἢ ἀντὶ γραμμάτων ἀριθμητικὰς ἀντικατασῆσαι ποσότητας, καὶ πράξεις, ἃς ἡ διάθεσις τῶν γραμμάτων καὶ τῶν συμβόλων ἐνδείκνυσιν, ἐκπεράναι· οὕτω δὲ, ὡρισμένας τινὰς ἐπάναγκες ἐπιγκῶναι τύπους, οἷς ἂν ἅπαντες ἀναχθεῖεν οἱ ἄλλοι· ἴδωμεν οὖν πρῶτον ὅπως οἱ στοιχειώδεις οὗτοι κατασκευάζονται τύποι· εἶτα δὲ ὅπως οἱ ἄλλοι ἐκείνοις ἐπανάγονται· καλεῖται δὲ τοῦτου κατασκευὴ τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων, ἢ τῶν ταύταις προσεφαρμοζομένων προβλημάτων.

527. Ἐὰν ἡ μὲν εἰς κατασκευὴν προκειμένη ποσότης ἦ λογικὴ, εἴτ' οὖν ῥιζικῶν ποσῶν ἄνευ, αἱ δὲ τοῦ ἀριθμητοῦ διαστάσεις μονάδι τῶν τοῦ παρονομαστοῦ ὑπερέχωσιν, ἡ κατασκευὴ διαπερανθήσεται ἀεὶ τετάρτης ζητουμένης ἀναλόγου τῶν τριῶν δεδομένων εὐθειῶν.

528. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Προκειμένης οὖν εἰς κατασκευὴν τῆς ποσότητος $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, ἐφ' ἧς α, β, γ γνωστὰς εὐθείας ἐμφαίνουσιν, ἤχθωσαν εὐθεῖαι ἀπέραντοι (χ. 12) αἱ ΑΨ, ΑΧ, γωνίαν τυχοῦσαν περιέχουσαι, καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας αὐτῶν τῆς ΑΧ εἰλήφθω ἡ ΑΒ ἴση τῇ ἐμφαινομένῃ τῷ γ, καὶ ἡ ΑΔ ἴση ἑτέρᾳ τῶν α, β, τῇ α φέρ' εἰπεῖν· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ΑΨ εἰλήφθω ἡ ΑΓ ἴση τῇ β· καὶ ἐπεζευκέτω τὰ πέρατα Β, Γ τῆς πρώτης, καὶ τῆς τρί-

της ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἡ ἤχθω διὰ τοῦ Δ πέρατος τῆς δευτέρας ἡ ΔΕ παράλληλος παρὰ τὴν ΒΓ, ἥτις διορίσει ἐπὶ τῆς ΑΨ τὴν ΑΕ ἴσην τῇ δυνάμει τοῦ τύπου $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$· καὶ γὰρ (318) ἐκ τῶν παραλλήλων ΔΕ, ἡ ΒΓ πρόεισιν ἡ ἀναλογία ΑΒ : ΑΔ :: ΑΓ : ΑΕ, τοῦτ' ἔστιν $\gamma : \alpha :: \beta :$ ΑΕ· ἄρα ΑΕ $= \frac{\alpha\beta}{\gamma}$· δηλοῖ δὲ τοῦτο, εὑρεῖν τετάρτην ἀνάλογον εὐθεῖαν τριῶν δοθεισῶν. κατασκευασθήσεται ἄρα ὁ τύπος $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$ χρησαμένοις μεθόδῳ τῇ ἐκτεθείσῃ (319).

529. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα προκέηται εἰς κατασκευὴν ὁ τύπος $\frac{\alpha\alpha}{\gamma}$, τὸ ζήτημα συμπεριπεσεῖται τῷ ἤδη ἐκτεθέντι (528)· τηνικαῦτα γὰρ ἡ εὐθεῖα β ἐξισοῦται τῇ α.

530. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Κείσθω κατασκευάσαι γεωμετρικῶς τὴν Συμβολικὴν ποσότητα $\frac{\alpha\beta+\beta\delta}{\gamma+\delta}$· ἐπεὶ ἦν $\frac{\alpha\beta+\beta\delta}{\gamma+\delta} = \frac{(\alpha+\delta)\times\beta}{\gamma+\delta}$ (Συμβ. Λογ. 68. α΄.), λαμβανομένης τῆς $\alpha+\delta$ ὡς μιᾶς εὐθείας ἐμφαινομένης ὑπὸ μ, ἡ τῆς $\gamma+\delta$ ἀντὶ μιᾶς ἄλλης δηλουμένης ὑπὸ ν, τρέψεται ὁ τύπος εἰς $\frac{\mu\beta}{\nu}$, ὃς γεωμετρικῶς κατασκευασθήσεται κατὰ τὸν ἐκτεθέντα (528).

531. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἐὰν ᾖ $\frac{\alpha\alpha-\beta\beta}{\gamma}$, ἐπεὶ ταυτίζεται τῇ $\alpha\alpha-\beta\beta$ τῇ $(\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta)$, ὡς ἔ-

ει δῆλον ἐκτελουμένου τοῦ σεσημειωμένου πολλαπλασιασμοῦ, παρεξάωω ἡ ποσότης $\frac{\alpha\alpha - \beta\beta}{\gamma}$ ὑπὸ σχήματι τοιῷδε $\frac{(\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta)}{\gamma}$, καὶ ζητηθήτω τετάρτη ἀνάλογος τῶν γ, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ (319).

532. ΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ΄. Ἐὰν προκέηται εἰς κατασκευὴν ἡ ποσότης $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon}$, ἐπείπερ ὑπάρχει $\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon} = \frac{\alpha\beta}{\delta} \times \frac{\gamma}{\varepsilon}$, κατεσκευάωω πρῶτον ὁ τύπος $\frac{\alpha\beta}{\delta}$ (528), καὶ ἡ ἐκ τῆς κατασκευῆς προκύψασα τετάρτη ἀνάλογος κληθήτω μ· ἐκεῖν ἔσαι $\frac{\alpha\beta}{\delta} \times \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{\mu\gamma}{\varepsilon}$, ἥτις κατασκευαωθήσεται καὶ αὐτὴ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

533. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα κατασκευαωθῇ ἡ ποσότης $\frac{\alpha^2\beta}{\gamma^2}$, πρῶτον αὐτὴν παρεξαθῆναι δεῖ ἔτως $\frac{\alpha^2}{\gamma} \times \frac{\beta}{\gamma}$· εἶτα κατασκευαωθῆναι τὴν $\frac{\alpha^2}{\gamma}$· τελευταῖον δὲ τῆς κατ' αὐτὴν δυνάμεως διὰ μ δηλωθείσης, κατασκευαωθῆναι τὴν ποσότητα $\frac{\mu\beta}{\gamma}$.

534. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀναλύειν ὖν χρὴ τὴν προκειμένην ποσότητα εἰς μέρη, ὧν ἕκαστον ἂν ἰσοδυναμοίη τῷ τύπῳ $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, ἢ $\frac{\alpha^2}{\gamma}$· κἂν τοῦτο τὰ πολλὰ δυσχερὲς εἶναι δοκῇ, διὰ μέντοι μεταμορφώσεων εὐτυχῶς διανύεται.

535. ΠΟΔΕΙΓΜΑ Ε΄. Κείωω κατασκευάσαι

γεωμετρικῶς τὴν ποσότητα $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\gamma^2}$· ὑποτεθείσθω οὖν πρὸς τὸ δοκεῖν $\beta^3 = \alpha^2\mu$, καὶ $\gamma^2 = \alpha\nu$· ἄρα τηνικαῦτα $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\gamma^2} = \frac{\alpha^3+\alpha^2\mu}{\alpha^2+\alpha\nu}$ (Συμβ. Λογ. 70) $= \frac{\alpha^2+\alpha\mu}{\alpha+\nu} = \frac{(\alpha+\mu).\alpha}{\alpha+\nu}$ (Συμβ. Λογ. 68. ά.), ἥτις εὐμαρῶς κατασκευάζεται (531), εἰ μόνον γνωσθεῖεν τὰ μ, ν· γινώσκεται δὲ ταῦτα ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\beta^3 = \alpha^2\mu$ καὶ $\gamma^2 = \alpha\nu$· ὅθεν $\mu = \frac{\beta^3}{\alpha^2}$, καὶ $\nu = \frac{\gamma^2}{\alpha}$, ἃ ῥᾳδίως κατασκευάζεται (529, 533).

536. ΣΧΟΛΙΟΝ. Συμβαίνει ἐνίοτε τὰς ποσότητας ὕτω σχηματίζεσθαι, ὡς ἀχρήστως πάμπαν δοκεῖν τὰς μεταμορφώσεις· γίνεται δὲ τοῦτο ὅταν μὴ ἡ ὁμογενὴς ἡ ποσότης, τοῦτ' ἔστιν ὅταν ἕκαστος τῶν τοῦ ἀριθμητοῦ, ἢ τοῦ παρονομαστοῦ, ὅρων μὴ συγκέηται ἐξ ἴσων ποιητῶν, ὅταν ἤ, φέρε εἰπεῖν, τοιάδε $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\gamma^2+\beta}$· παρατηρητέον μέντοι, ὅτι οὐδέποτε τοιόνδε ποσὸν προέρχεται, πλὴν ὅταν ἐπὶ λογισμοῦ διὰ τὸ ἁπλούστερον ποσά τινα μονάδι ἴσα ἐκλαμβάνωνται· ἔτω φέρε εἰπεῖν ὁ τύπος $\frac{\alpha^3+\beta^2\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}$, ὑποτεθέντος $\beta = 1$, τρέψεται εἰς τὸν $\frac{\alpha^3+\gamma}{\alpha^2+\gamma^2}$· ἐπεὶ μέντοι ἀδύνατον ἐγχειρῆσαι τῇ κατασκευῇ, τὰ, ἐξ ὧν ἔσται ἡ κατασκευή, ἀγνοοῦντας στοιχεῖα, γινώσκεται ἀείποτε ἡ μονάδι ἴση ὑποτεθεῖσα ποσότης· ἐξέσται ἄρα ἀεὶ ταύτην ἀντικαθισᾶν ἀντὶ τῆς μονάδος· κωλύει δὲ τὸ τοιοῦτον οὐδέν· ἐπεὶ γὰρ

τὰς διαστάσεις ἑκάστου ὅρου τοῦτε ἀριθμητοῦ, καὶ τοῦ παρονομαστοῦ χρὴ ἴσας ἀεὶ εἶναι (δυνατὸν ἄλλως διαφέρειν τοὺς ἑκείνου τῶν τούτου ὅρων), ἀντεισακτέον ἑκάστῳ ὅρῳ βαθμὸν τῆς μονάδι ἰσωθείσης εὐθείας πρὸς ἀναπλήρωσιν τοῦ τῶν διαστάσεων ἀριθμοῦ· οὕτως εἰ κατασκευάσαι προκείοιτο $\frac{\alpha^3+\beta+\gamma^2}{\alpha+\beta^2}$, ὑποτιθέντες τὴν μονάδι ἰσωθεῖσαν εὐθεῖαν εἶναι δ, γράψομεν $\frac{\alpha^3+\beta\delta^2+\gamma^2\delta}{\alpha\delta+\beta^2}$· εἰς κατασκευὴν δὲ ταύτης θῶμεν $\beta^2=\delta\mu$, $\gamma^2=\delta\nu$, καὶ $\alpha^3=\delta^2\pi$· ὅθεν ἡ προτεθεῖσα ποσότης μεταπεσεῖται εἰς τὴν $\frac{\delta^2\pi+\beta\delta^2+\delta^2\nu}{\alpha\delta+\delta\mu}$ $=\frac{\delta\pi+\beta\delta+\delta\nu}{\alpha+\mu}=\frac{(\pi+\beta+\nu)\delta}{\alpha+\mu}$, ἥτις εὐμαρῶς κατασκευάζεται προκατασκευασθεισῶν τῶν δυνάμεων μ, ν, π, εἴτ' ἂν $\mu=\frac{\beta^2}{\delta}$, $\nu=\frac{\gamma^2}{\delta}$, $\pi=\frac{\alpha^3}{\delta^2}$, αἱ καὶ αὐταὶ εὐμαρῶς κατασκευάζονται (528, 533).

537. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Ἐν ἁπάσαις ταῖς ἄρτι ἐκτεθειμέναις κατασκευαῖς, ὁ ἀριθμὸς τῶν ποιητῶν, εἴτ' ἂν τῶν διαστάσεων ἑκάστου τῶν κατὰ τὸν ἀριθμητὴν ὅρων, ὑποτέθειται μονάδι ὑπερέχειν τῶν κατὰ τὸν παρονομαστήν· δυνατὸν δὲ ὑπερέχειν αὐτῶν δυσὶν, ἢ καὶ τρισὶ, μονάσι, πλείοσιν ἀλλ' ἂν ὁδαμῶς, εἰ μὴ εὐθεῖά τις ἰσῶτο μονάδι, ἢ ποιηταί τινες ἀριθμὲς ἐμφαίνοιεν.

538. Ὁ ταν αἱ διαστάσεις τοῦ ἀριθμητοῦ τῆς προκειμένης ποσότητος ὑπερέχωσι τὰς τοῦ παρονομαστοῦ δυσὶ μονάσιν, ἡ ποσότης παρίστησιν ἐπιφάνειαν, ἧς δυνατὸν ἀεὶ τὴν κατασκευὴν εἰς τὴν παραλληλογράμμου, ἢ καὶ τετραγώνου μεταβαλεῖν.

539. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἐὰν εἰς κατασκευὴν προκέηται τὸ ποσὸν $\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta}{\alpha+\gamma}$, ἐκληπτέον αὐτὸ ὡς $\alpha \times \frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha+\gamma}$. ἀλλαμὴν $\frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha+\gamma}$ εὐχερῶς κατασκευάζεται (528), ἐκλαμβανόμενον ὡς $\alpha \times \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}$. ἄρα, τῆς ἐνεστῶσης ἐξιούσης δυνάμεως κληθείσης μ, ἔσται $\alpha \times \frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{\alpha+\gamma} = \alpha\mu$· ἐὰν ἂν γένηται α μὲν ὕψος, μ δὲ βάσις παραλληλογράμμου, ἔσται αμ τοῦ παραλληλογράμμου ἡ ἐπιφάνεια· τοὐναντίον ἄρα τὴν ἐπιφάνειαν ταύτην ἐμφαίνει τὸ $\alpha\mu = \frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta}{\alpha+\gamma}$.

540. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ὡσαύτως κατασκευασθήσεται καὶ τὸ ποσὸν $\frac{\alpha^3 + \beta\gamma^2 + \delta^3}{\alpha+\gamma}$, ὑποτεθέντος $\beta\gamma = \alpha\mu$, καὶ $\delta^2 = \alpha\nu$· τηνικαῦτα γὰρ ὁ τύπος γενήσεται $\frac{\alpha^3 + \alpha\mu\gamma + \alpha\nu\delta}{\alpha+\gamma} = \alpha\left(\frac{\alpha^2 + \mu\gamma + \nu\delta}{\alpha+\gamma}\right)$· ἀλλ' ὁ ποιητὴς $\frac{\alpha^2 + \mu\gamma + \nu\delta}{\alpha+\gamma}$ κατασκευάζεται εὐχερῶς ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων (528), ὡσαύτως καὶ αἱ δυνάμεις τοῦ μ, καὶ ν· εὑρεθείσης ἂν τῆς τοῦ ποιητοῦ τούτου δυνάμεως, καὶ δηλωθείσης διὰ π, οὐδὲν ἄλλο λοιπόν, ἢ κατασκευάσαι τὸ $\alpha \times \pi$, τοῦτ' ἔστι συστῆσαι παραλληλόγραμμον, οὗ ὕψος μὲν εἴη τὸ α, βάσις δὲ ἡ π.

541. Τελευταῖον δὲ, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν τοῦ ἀριθμητοῦ διαστάσεων τρισὶν ὑπερέχῃ τὰς τοῦ παρονομαστοῦ, ἡ πο-

σότης ἐμφαίνει στερεὸν, ὃ τὴν κατασκευὴν ἀεὶ τρέπειν ἔξεσιν εἰς τὴν παραλληλεπίπεδον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐὰν προκέηται εἰς κατασκευὴν ἡ ποσότης $\frac{\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2}{\alpha+\gamma}$, ἐκληπτέον αὐτὴν ὡς $\alpha\beta\times\frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha+\gamma}$ κατασκευασθείσης δὲ κατὰ τὰ προειρημένα (528) τῆς ποσότητος $\frac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha+\gamma}$, ἐὰν ἡ ἐντεῦθεν προκύψασα γραμμὴ κληθῇ μ, τὸ ζήτημα ἀναχθήσεται εἰς τὸ κατασκευάσαι τὸ ποσὸν $\alpha\beta\times\mu$· ἀλλαμὴν $\alpha\beta$ ἐμφαίνει, ὡς εἴδομεν (540), παραλληλόγραμμον· ἐὰν ἄρα ἐπινοηθῇ παραλληλεπίπεδον, ὃ βάσις μὲν εἴη τὸ εἰρημένον παραλληλόγραμμον, ὕψος δὲ ἡ εὐθεῖα μ, ἡ τοῦ παραλληλεπιπέδου στερεότης ἐκδηλωθήσεται διὰ $\alpha\beta\times\mu=\frac{\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2}{\alpha+\gamma}$.

542. Καὶ τὰ μὲν εἰρημένα ἱκανά εἰσι πρὸς κατασκευὴν ἁπάσης ῥητῆς ποσότητος· ἴδωμεν δὲ ἤδη τῶν ῥιζικῶν ποσοτήτων τὰς δευτεροβαθμίους.

Δυνατὸν ὖν ταύτας κατασκευάζειν, ἤτοι διὰ μέσης ἀναλόγου δυεῖν εὐθειῶν δεδομένων, ἢ διὰ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τριγώνου ὀρθογωνίου, ἢ τελευταῖον διὰ τῆς ἑτέρας τῶν δυεῖν λοιπῶν πλευρῶν τριγώνου ὀρθογωνίου.

543. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Κείσθω κατασκευάσαι τὸ ῥιζικὸν $\sqrt{\alpha\beta}$· ἤχθω τοίνυν εὐθεῖα (κ. 13) ἀπέρατος ἡ ΑΒ, ἐφ' ἧς εἰλήφθω ΑΓ $=\alpha$, καὶ ΓΒ $=\beta$· ἐπὶ δὲ τῆς ὅλης ΑΒ, ὡς διαμέτρου, γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἐκ τοῦ Δ ἐκκείσθω κάθετος τῇ ΑΒ ἡ ΔΓ τελευτῶσα πρὸς τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Γ, ἥτις ἔστι ἡ δύναμις τοῦ ῥιζικοῦ $\sqrt{\alpha\beta}$, τοῦτ' ἔστιν εἰς εὕρεσιν τῆς δυνάμεως τοῦ ῥιζικοῦ ποσοῦ $\sqrt{\alpha\beta}$ ἐκζητέον μέσην ἀνάλογον τῶν δυεῖν

εὐθειῶν τῶν δὶ α, β ἐκδηλωμένων (347)· ἔστι γὰρ ΑΓ : ΓΔ : : ΓΔ : ΓΒ, τοῦτ' ἔστιν α : ΓΔ : : ΓΔ : β (343)· ἄρα $\Gamma\Delta^2 = \alpha\beta$, καὶ $\Gamma\Delta = \sqrt{\alpha\beta}$.

544. ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἐὰν ἡ ποσότης εἰς κατασκευὴν προκειμένη ἡ $\sqrt{(3\alpha\beta + \beta^2)}$, ἐκλεπτέον τὰύτην ὡς $\beta \times \sqrt{(3\alpha + \beta)}$ (Συμπ. Λογ. 167), καὶ εὑρετέον μέσην ἀνάλογον τῶν δυεῖν εὐθειῶν $3\alpha + \beta$, καὶ β.

545. ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἐὰν ἡ $\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta)}$, ἐκλεπτέον αὐτὴν ὡς $\sqrt{(\alpha + \beta)} \times \sqrt{(\alpha - \beta)}$, εἶτ' ἂν $\sqrt{(\alpha + \beta) \times (\alpha - \beta)}$, καὶ εὑρετέον μέσην ἀνάλογον τῶν $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$· ἐὰν δὲ ἡ $\sqrt{(\alpha^2 + \beta\gamma)}$, γενέσθω $\beta\gamma = \alpha\mu$· ἔσται ἂν ἡ ποσότης $\sqrt{(\alpha^2 + \alpha\mu)} = \sqrt{(\alpha + \mu)} \times \alpha$· εὑρεθήσεται ἄρα μέση ἀνάλογος τῶν $\alpha + \mu$, α προκατασκευασθείσης τῆς δυνάμεως $\mu = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$ (528).

546. ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Δ'. Ἵνα κατασκευασθῇ ἡ $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$, δυνατὸν μὲν ὑποθεῖναι $\beta^2 = \alpha\mu$, καὶ κατασκευάσαι τὴν $\sqrt{(\alpha^2 + \alpha\mu)}$, ὡς ἀνωτέρω (545)· δυνατὸν δὲ καὶ ἄλλως τὰ τῆς κατασκευῆς μετελθεῖν· ἤχθω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ (κ. 14) = α, καὶ ἐκ τοῦ πέρατος αὐτῆς Α ἀχθήτω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ = β· ἔσται ἂν ἡ ἐπιζευχθεῖσα ΒΓ = $\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$· τοῦ γὰρ ΑΒΓ τριγώνου ὀρθογωνίου ὄντος, ἔστι (349) $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$· ἄρα $B\Gamma = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$.

547. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Δυνατὸν δὲ διὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τὴν ποσότητα $\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}$ ἄλλως, ἢ ὡς ἀνωτέρω (545), κατασκευάσαι· ἤχθω γὰρ εὐθεῖα (κ. 15) ἡ ΑΒ = α, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΓΒ, καὶ ἐκ τοῦ Α ἐπεζεύχθω χορδὴ ἡ ΑΓ =

β· τοιγαρῶν ἡ ἐπιζευχθεῖσα ΓΒ ἔσαι $= \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}$· ὀρθογωνίου γὰρ ὄντος τοῦ ΑΓΒ τριγώνου (180) ἔσαι (349) $AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$· ἄρα $B\Gamma^2 = AB^2 - A\Gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$· ἄρα $B\Gamma = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}$.

548. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Δυνατὸν ὡσαύτως κατασκευάσαι καὶ τὴν ποσότητα $\sqrt{(\alpha^2 + \beta\gamma)}$ ἄλλως, ἢ ὡς κατεσκεύασαι (545)· γενέσθω γὰρ $\beta\gamma = \mu^2$, καὶ $\sqrt{(\alpha^2 + \mu^2)}$ κατεσκευάσθω, ὡς καταδέδεικται (546)· ἐξευρεῖν μέντοι χρὴ πρότερον τὴν τοῦ μ δύναμιν, ἥτις πορίζεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\mu^2 = \beta\gamma$· ὅθεν $\mu = \sqrt{\beta\gamma}$· ἔστιν ἄρα ἡ μ μέση ἀνάλογος τῶν $\beta\gamma$ κατασκευαζομένη, ὡς ἀνωτέρω (543) εἴρηται.

549. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Ἐὰν δὲ πλειόνων ἢ δυοῖν ὅρων ὑπάρχῃ περιεκτικὸν τὸ ὑπόρριζον ποσὸν, ἡ κατασκευὴ ἀναχθήσεται ἐπί τινας τῶν προαποδοθεισῶν μεθόδων διὰ μεταμορφώσεων· ἐὰν φέρ' εἰπεῖν ἢ $\sqrt{(\alpha^2 + \beta\gamma + \epsilon\zeta)}$, γενέσθω $\beta\gamma = \alpha\mu$, καὶ $\epsilon\zeta = \alpha\nu$· ὥστε ἡ ποσότης γενήσεται $\sqrt{(\alpha^2 + \alpha\mu + \alpha\nu)} = \alpha \times \sqrt{(\alpha + \mu + \nu)}$, ἥτις κατασκευάζεται, λαμβανομένης μέσης ἀναλόγου τῶν α, $\alpha + \mu + \nu$, προκατασκευασθεισῶν ἀμέλει τῶν δυνάμεων μ, ν, εἴτ' ἔν $\mu = \frac{\beta\gamma}{\gamma}$, καὶ $\nu = \frac{\epsilon\zeta}{\alpha}$· δυνάμεθα μέντοι ποιήσαντες $\beta\gamma = \mu^2$, καὶ $\epsilon\zeta = \nu^2$ κατασκευάσαι τὴν ποσότητα $\sqrt{(\alpha^2 + \mu^2 + \nu^2)}$· ἀλλὰ γὰρ ἐὰν ἡ ὑπόρριζος ποσότης ἢ σειρὰ ποσοτήτων ὑπαρκτικῶν, οἷα, φέρ' εἰπεῖν, ἡ $\sqrt{(\alpha^2 + \eta^2 + \nu^2 + \pi^2, \text{ κτλ})}$, γενέσθω $\sqrt{(\alpha^2 + \mu^2)} = \eta$, καὶ $\sqrt{(\eta^2 + \nu^2)} = \iota$, καὶ $\sqrt{(\iota^2 + \pi^2)} = \kappa$, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως· καὶ ἐπεὶ ἑκάστη τῶν δε τῶν ποσοτήτων διὰ τῆς πρὸ αὐτῆς προσδιορίζεται, ἐκ τῆς ἐσχάτης προκύψει ἡ δύναμις τῆς $\sqrt{(\alpha^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2 + \text{κτλ.})}$· ἵνα δὲ κατασκευασθῶσιν,

ὡς οἷόν τε, ἁπλούστερον αἱ ποσότητες αὗται, ἐκληφθήτω ἑκάστη ὑποτείνουσα ὀρθὴν γωνίαν τριγώνου, ἄλληλαι ἄλλην, ὡς πλευρά· τεθήτω φέρ' εἰπεῖν (σχ. 16.) $AB = \alpha$, καὶ ἐστάσθω κάθετος $A\Gamma = \mu$· ἔστω οὖν ἡ ἐπιζευχθεῖσα $B\Gamma = \eta$· ἐξῆς δ' ἐστάσθω ἐκ τοῦ Γ τῇ ΒΓ κάθετος ἡ $\Gamma\Delta = \nu$· ἡ τοίνυν ἐπιζευγνυμένη ΒΔ ἔστω $= \iota$· ἐκ δὲ τοῦ πέρατος Δ τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθείσης τῆς $\Delta E = \pi$, ἔστω $BE = \kappa = \sqrt{(\alpha^2 + \mu^2 + \nu^2 + \pi^2)}$· ἐὰν δὲ μεταξὺ ὦσι καὶ τετράγωνα λειπτικά, πεπράχθω τὰ εἰρημένα εἰς κατασκευὴν τῆς ποσότητος $\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}$ (547).

550. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Ε'. Ἐὰν προκέηται κατασκευάσαι ποσότητα ἔχουσαν τύπον τοιόνδε $\frac{\alpha\sqrt{(\beta+\gamma)}}{\sqrt{(\delta+\varepsilon)}}$, πολλαπλασιασθεῖσα τόντε ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ $\sqrt{(\delta+\varepsilon)}$, τραπήτω εἰς $\frac{\alpha\sqrt{(\beta+\gamma)(\delta+\varepsilon)}}{\delta+\varepsilon}$, καὶ ζητηθήτω μέση ἀνάλογος τῶν $\beta+\gamma$, καὶ $\delta+\varepsilon$· ταύτης δὲ κληθείσης μ, λοιπὸν ἔσται κατασκευάσαι τὴν ποσότητα $\frac{\alpha\mu}{\delta+\varepsilon}$, ὃ ῥᾳδίως δήπου ἐπιτηδευθήσεται (528).

551. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν γένει δ' εἰπεῖν ἁπλούστατα πολλάκις αἱ συμβολικαὶ ποσότητες κατασκευάζονται διὰ τῶν ἐκτεθειμένων ἀρχῶν· τοῦτο μέντοι ἐκ σκέψεων τινῶν περιγίνεται ἰδιαιτέρων, οἰκείως ἐχουσῶν ἑκάστῳ ζητήματι, καὶ κανόσι περιορισθῆναι οὐκ ἔχει· σημειωτέον μόνον, ὅτι ἡ τῶν ῥιζικῶν ποσῶν κατασκευὴ ἀνάγεται εἰς τὸ εὑρίσκειν τετάρτας ἀναλόγους, καὶ μέσας ἀναλόγους, καὶ τρίγωνα κατασκευάζειν ὀρθογώνια· δυνατὸν ἀλλ' οὐν ἔστ' ὅτε τὰς κατασκευὰς μᾶλλον ἢ ἧττον ἁπλᾶς, καὶ κομψὰς, ἀπεργάζεσθαι, καθ' ἣν ἂν ἑλοίμεθα μέθοδον, εἰς εὕρεσιν τῶν δε τῶν

μέσων ἀναλόγων· διὸ δὴ παρὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν ἐν (347) μεθόδους ἄλλας δισσὰς ἐνταῦθα ὑποςρώσομεν τοῦ εὑρίσκειν μέσην ἀνάλογον δυεῖν εὐθειῶν δεδομένων.

552. ΜΕΘΟΔΟΣ Α΄. Ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας μιᾶς τῶν δυεῖν δεδομένων γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ (κ. 15.), καὶ ληφθέντος τοῦ ΑΔ αὐτῆς μέρους ἴσου ἑατέρᾳ, ἐςάθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΓ· ἐπιζευχθεῖσα δὲ ἡ ΑΓ ἔςαι μέση ἀνάλογος τῶν ΑΒ, ΑΔ· ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΓΒ, τὸ τρίγωνον ΑΓΒ ἔςιν ὀρθογώνιον (180), καὶ ἐκ τοῦ ἀκολούθου ἡ ΑΓ μέση ἐςὶν ἀνάλογος τῆς τε τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης ΑΒ, καὶ τοῦ τμήματος ΑΔ (342).

553. ΜΕΘΟΔΟΣ Β΄. Ἤχθω εὐθεῖα (κ. 17.) ἡ ΑΒ ἴση τῇ μείζονι τῶν δυεῖν δεδομένων εὐθειῶν, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῆς μέρος τὸ ΑΓ τῇ ἐλάσσονι ἴσον, καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ΒΓ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΓΔΒ, καὶ ἤχθω ἡ ἁπτομένη ΑΔ (153), ἥτις ἔςι μέση ἀνάλογος τῶν ΑΒ, ΑΓ (331).

554. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δῆλον ἄρα, ὡς αἱ μὲν ῥηταὶ ποσότητες ἀεὶ δύνανται κατασκευάζεσθαι δι' εὐθειῶν, τῶν δὲ ῥιζικῶν αἱ δευτεροβάθμιοι, διὰ κύκλου καὶ εὐθείας ἀλλήλοις συνερχομένων· αἱ μέντοι καθυπερτέρων βαθμῶν ῥιζικαὶ ποσότητες διὰ τῆς συνδρομῆς παντοίων καμπύλων γραμμῶν, περὶ ὧν ἐν τῇ ὑψηλοτέρᾳ Γεωμετρίᾳ ῥηθήσεται, κατασκευῆς τυγχάνουσι.