ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῶν κατὰ τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα κτ. ἀπειροσῶν.

35. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄.** Εὑρεῖν τὸ ἀπειροσὸν τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας, ἢ τοῦ τόξου ψ.

ΛΥΣΙΣ. Γενέσθω ἡ γωνία ψ, ψ+δψ· ἐν δὴ τῇ νικαῦτα ἡμ. (ψ+δψ) — ἡμ· ψ ἔσται τὸ ἀπειροσὸν τοῦ ἡμιτόνου τῆς ψ· ἀλλὰ (Γεωμ. 507)· ἡμιτ. (ψ+δψ) = ἡμ. ψ × συνημ δψ + ἡμ. δψ × ἡμ. ψ, ὑποτιθεμένης τῆς ἀκτῖνος = 1· ἔστι δὲ, τοῦ μὲν ἀπειροσοῦ τόξου δψ ἡμίτονον αὐτὸ τὸ τόξον δψ, αὐτοῦ δὲ τούτου τὸ συνημίτονον ἐδὲν ὅλως διαφέρει τῆς ἀκτῖνος· ἄρα ἡμ. δψ = δψ, ἐν συνημ. δψ = 1· ἄρα ἡμ (ψ+δψ) = ημ. ψ + δψ × συνημ. ψ· ἄρα ἡμ (ψ+δψ) — ἡμ. ψ = δ (ημ. ψ) = δψ × συνημ. ψ, τοῦτ ἔστι „τὸ ἀπειροσὸν ἡμιτόνου γωνίας, „ἢ τόξου, ἔ ἡ ἀκτὶς ὑποτίθεται = 1, εὑρίσκεται, πολλα„πλασιαζομένου τοῦ ἀπειροσοῦ τῆς γωνίας ἐπὶ τὸ συνημίτονον αὐτῆς.“

36. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄.** Εὑρεῖν τὸ ἀπειροσὸν τοῦ συνημιτόνου γωνίας, ἢ τόξου ψ.

ΛΥΣΙΣ. Ἔσται δὴ τὸ ζητούμενον δ (συνημ. ψ) = συνημ (ψ+δψ) — συνημ. ψ = συνημ. ψ × συνημ. δψ — ἡμ. ψ × ἡμ. δψ — συνημ. ψ· ἐν γὰρ (Γεωμ. 508) συνημ. (ψ+δψ) = συνημ. ψ × συνημ. δψ — ἡμ. ψ × ἡμ. δψ· ἐπεὶ ὃν ἡμ. δψ = δψ, ἐν συνημ δψ = 1· ἄρα δ (συνημ. ψ) = συνημ ψ — δψ × ἡμ ψ — συνημ. ψ

$= - \delta\psi \times$ ἡμ. ψ, τοῦτ' ἔστι „τὸ ἀπειροστὸν συνημιτόνου γωνίας, ἧς ἡ ἀκτὶς ὑποτίθεται $= 1$, εὑρίσκεται, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀπειροστοῦ τῆς γωνίας (λειπτικῶς μέντοι λαμβανομένου) ἐπὶ τὸ ἡμίτονον αὐτῆς."

37. ΣΧΟΛΙΟΝ Τῶν ὧν ἐκτεθέντων δυοῖν προβλημάτων, τοῦ μὲν τὴν λύσιν ἐμφαίνει ὁ τύπος δ(ἡμ. ψ) $= \delta\psi \times$ συνημ. ψ· τοῦ δὲ δευτέρου, ὁ δ (συνημ. ψ) $= - \delta\psi \times$ ἡμ. ψ· τούτοις δὲ τοῖς δυσὶ τύποις χειραγωγούμενοι εὑρεῖν δυνάμεθα τὰ ἀπειροστὰ ἁπάσης ποσότητος συγκειμένης ἐξ ἡμιτόνων ἢ συνημιτόνων, παραλαμβάνοντες εἰς τοῦτο ἢ τοὺς προαποδοθέντας κανόνας· οὕτως εἰς εὕρεσιν τοῦ ἀπειροστοῦ τοῦ συνημ. 3ψ, πορισθήσεται δ(συνημ. 3ψ) $= - 3\delta\psi \times$ ἡμ. 3ψ· ὡσαύτως δ(συνημ. $\mu\psi$) (τοῦ μ ἐμφαίνοντος ἀριθμὸν ἄτρεπτον) $= - \mu\delta\psi \times$ ἡμ. $\mu\psi$, ἢ δ(ἡμ. $\mu\psi$) $= \mu\delta\psi \times$ συνημ. $\mu\psi$· ὁμοίως δ(ἡμ. $\psi \times$ συνημ. τ) $=$ συνημ. $\tau \times$ δ (ἡμ ψ) $+$ ημ. $\psi \times$ δ (συνημ. τ) $= \delta\psi \times$ συνημ. $\tau \times$ συνημ. $\psi - \delta\tau \times$ ἡμ. $\psi \times$ ἡμ. τ· ἢ δ(ἡμ. $\psi)^{\mu} = \mu$ (ἡμ. $\psi)^{\mu-1}$ δ (ἡμ. ψ) $= \mu\delta\psi \times$ συνημ. ψ (ἡμ. ψ)$^{\mu-1}$.

38. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Εὑρεῖν τὸ ἀπειροστὸν τῆς ἀπτομένης γωνίας τῆς ψ.

ΛΥΣΙΣ. Τῆς ἀκτῖνος ὑποτιθεμένης $= 1$ ἡ ἀπτομένη τῆς γωνίας ψ ἔσται $\chi \dfrac{\text{ἡμ.}\psi}{\text{συνημ.}\psi}$ (Γεωμ. 502)· ἔσται ἄρα δ$\left(\dfrac{\text{ἡμ.}\psi}{\text{συνημ.}\psi}\right) = ((\text{ἡμ}\ \psi)\ (\text{συνημ.}\ \psi)^{-1}) = \delta\psi \times$ συνημ $\psi = (\text{συνημ.}\ \psi)^{-1} + \delta\psi \times (\text{ημ.}\ \psi)^2 \times (\text{συνημ.}\ \psi)^{-2} = \dfrac{\delta\psi \times \text{συνημ.}\psi}{\text{συνημ.}\psi} + \dfrac{\delta\psi(\text{ἡμ.}\psi)^2}{(\text{συνημ.}\psi)^2} =$

$$\frac{\delta\psi \times (\text{συνημ. } \psi)^2 + \delta\psi \times (\text{ἡμ. } \psi)^2}{(\text{συνημ. } \psi)^2} = \frac{\delta\psi}{(\text{συνημ. } \psi)^2} \cdot \text{ᾧ}$$

γὰρ $(\text{συνημ. } \psi)^2 + (\text{ἡμ. } \psi)^2 = 1$· εἴγε ἡ ἀκτὶς ὑποτείνει ὀρθὴν γωνίαν, τὴν περιεχομένην ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου· τοῦτ' ἔςι „τὸ ἀπειροςὸν ἀ„πτομένης γωνίας, ἧς ἡ ἀκτὶς ὑποτίθεται = 1, ἔςιν ἴσον „τῷ πηλίκῳ τῷ προϊόντι ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀπειροςοῦ „ταύτης τῆς γωνίας, διαιρεθέντος διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ „ἀπὸ τοῦ συνημιτόνου αὐτῆς."

30. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἄρα ἀπειροςὸν ἁπάσης γωνίας ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἀπειροςοῦ τῆς ἀπτομένης αὐτῆς ᾧ τοῦ ἀπὸ τοῦ συνημιτόνου τετραγώνου· ἐπεὶ γὰρ $\delta\left(\frac{\text{ἡμ. } \psi}{\text{συνημ. } \psi}\right)$, εἴτ' ἓν $\delta\ (\text{ἀπ. } \psi) = \frac{\delta\psi}{(\text{συνημ. } \psi)^2}$, ἄρα $\delta\psi = (\text{συνημ. } \psi)^2 \times \delta\ (\text{ἀπ. } \psi)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Τὸ ἀπειροςὸν τῆς συναπτομένης γωνίας τῆς ψ εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ συναπτομένη γωνίας τῆς ψ ἔςι (Γεωμ. 502) $= \frac{\text{συνημ. } \psi}{\text{ἡμ. } \psi}$· ἔςω ἓν συνημ. $\psi = \chi$, ᾧ ἡμ. $\psi = \upsilon$. ἐκεῖν ἔςαι $\delta\left(\frac{\text{συνημ. } \psi}{\text{ἡμ. } \psi}\right) = \delta\left(\frac{\chi}{\upsilon}\right) = \frac{\upsilon\delta\chi - \chi\delta\upsilon}{\upsilon^2}$

$$(20) = \frac{-\delta\psi \times (\text{ημ. } \psi)^2 - \delta\psi \times (\text{συνημ. } \psi)^2}{(\text{ημ. } \psi)^2} =$$

$$\frac{-\delta\psi \times ((\text{ἡμ. } \psi)^2 + (\text{συνημ. } \psi)^2)}{(\text{συνημ. } \psi^2)} = \frac{-\delta\psi}{(\text{συνημ. } \psi)^2},$$

ἐπεὶ, ὃ ᾧ ἀνωτέρω εἴρηται, $(\text{ἡμ. } \psi)^2 + (\text{συνημ. } \psi)^2 = 1$. „Τὸ ἄρα ἀπειροςὸν συναπτομένης γωνίας τινὸς, ἧς ἡ „ἀκτὶς ὑποτίθεται = 1, ἐξισοῦται τῷ πηλίκῳ τοῦ τῆς αὐ-

„τῆς γωνίας ἀπειροστῷ (λειπτικῶς μέντοι λαμβανομένῳ), „διαιρεθέντος διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμιτόνου ταύ„της τῆς γωνίας.“

41. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Τὴν δέ γε χρῆσιν τῶν δε τῶν ἀπειροστῶν τρανῶς εἰσόμεθα προϊόντες ἐπὶ τὰ πρόσθεν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ λογαριθμικῶν ἀπειροστῶν.

42. Λογάριθμοί εἰσιν, ἅπερ εἴρηται ἐν τῷ συμβολικῷ λογισμῷ (313), σειρὰ ἀριθμῶν κατὰ πρόοδόν τινα ἀριθμητικὴν προϊοῦσα, ἧς ἕκαστος ὅρος ἀντιστοιχεῖ ἑκάστῳ ὁμοταγεῖ ὅρῳ σειρᾶς, κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν προϊούσης· ἔστωσαν οὖν υ καὶ υ′ ὅροι προσεχεῖς προόδου γεωμετρικῆς, ἧς, πηλίκον μέν ἐστι π, πρῶτοι δὲ ὅροι οἱ α, α′. ἔστωσαν δὲ ὡς χ, χ′ ὅροι προσεχεῖς προόδου ἀριθμητικῆς, ἧς β, β′ εἰσὶν οἱ δύω ἀρκτικοὶ ὅροι· ὑποτεθείσθωσαν δὲ οἱ χ, χ′ τοὺς αὐτοὺς κατέχειν χώρους ἐν τῇ ἀριθμητικῇ προόδῳ, οὓς ὡς οἱ υ, υ′ ἐν τῇ γεωμετρικῇ· τοιγαροῦν οἱ χ, χ′ εἰσὶ λογάριθμοι τῶν υ, υ′· κατὰ τοίνυν τὴν ἰδιότητα τῆς γεωμετρικῆς προόδου (Συμβ Λογ. 227) ἔστιν υ′ = υπ, ὡς α′ = απ· ἀντικατασταθείσης δὲ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει τῆς τοῦ π δυνάμεως, θηρευομένης ἐκ τῆς δευτέρας, ἔσται $\upsilon' = \frac{\alpha'\upsilon}{\alpha}$, εἴτ' οὖν $\frac{\upsilon'}{\upsilon} = \frac{\alpha'}{\alpha}$· ὑποτεθείσθω ἤδη ἡ τῶν υ′, υ διαφορὰ = ψ, εἴτ' οὖν υ′ = υ + ψ· πορισθήσεται τοίνυν $\frac{\upsilon+\psi}{\psi}$, ἢ $1 + \frac{\psi}{\upsilon} = \frac{\alpha'}{\alpha}$, ὡς ἐπομέ-

γως $\frac{\psi}{\upsilon} = \frac{\alpha'}{\alpha} - 1 = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha}$, καὶ δὴ $\frac{\alpha\psi}{\upsilon} = \alpha' - \alpha$· ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ἰδιότητος ἔστι $\chi' - \chi = \beta' - \beta$ (Συμβ. Λογ. 192).

43. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ πρὸς ἀλλήλας λόγου τῶν δύω τούτων προόδων, ὑποθώμεθα τὴν διαφορὰν $\alpha' - \alpha$ τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς πρώτης λόγον ἔχειν πρὸς τὴν διαφορὰν $\beta' - \beta$ τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς δευτέρας, ὃν ἡ μονὰς πρὸς ἀριθμόν τινα μ, τοῦτ' ἔστιν $\alpha' - \alpha : \beta' - \beta :: 1 : \mu$, ὅθεν $\mu(\alpha' - \alpha) = \beta' - \beta$· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ ἐξάτῃ ἐξισώσει ἀντικαθιστάντες ἀντὶ $\alpha' - \alpha$, καὶ $\beta' - \beta$ τὰς ἀνωτέρω εὑρημένας αὐτῶν δυνάμεις, ἕξομεν $\frac{\mu\alpha\psi}{\upsilon} = \chi' - \chi$, ἐξίσωσιν, ἥτις ἐν γένει παρίσησι τὸν ἁπάσης γεωμετρικῆς προόδου πρὸς πᾶσαν αὐτῇ συστοιχοῦσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον λόγον.

44. Ἐπινοήσωμεν ἤδη ἑκατέρας προόδου τοὺς ὅρους ἀπείρως προσεχεῖς ἀλλήλων· ἔστω ψ, ὃ ἐμφαίνει τὴν διαφορὰν τῶν υ', υ, ἔσεται $= \delta\upsilon$, καὶ $\chi' - \chi$, ὃ δηλοῖ τὴν τῶν χ', χ διαφορὰν, ἔσται $= \delta\chi$· ἐντεῦθεν ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα ἐξίσωσις μεταβάλλει εἰς $\frac{\mu\alpha\delta\upsilon}{\upsilon} = \delta\chi$· τὸ δὲ μ, ὃ παρίσησι τὸν λόγον τῆς διαφορᾶς τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς, οὐδὲν ἧττον ἔσται ἀριθμὸς πεπερασμένος, καί τοι ἀπειροστῶν ὄντων τῶν διαφορῶν· εἴγε δυεῖν ἀπειροστῶν ποσοτήτων ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν περιέχειν δύναται, ὁσάκις καὶ πεπερασμένη πεπερασμένην ποσότητα (ο).

45. Ἡ ἄρα ἐξίσωσις $\frac{\mu\alpha\delta\upsilon}{\upsilon} = \delta\chi$ τραυῶς ἐκδιδάσκει, ὅτι τὸ ἀπειροσὸν δχ λογαριθμε ἀριθμῦ παντὸς, ἐμφαινομένε διὰ υ, ἰσῦται τῷ ἀπειροσῷ δυ τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ, διαιρεθέντι διὰ τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ υ, ϗ πολλαπλασιαθέντι ἐπίτε τὸν πρῶτον ὅρον α τῆς εἰς βάσιν ὑποτεθείσης γεωμετρικῆς προόδε, ϗ τὸν ἀριθμὸν μ, ὃς ἐμφαίνει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἡ διαφορὰ τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδε πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύω πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς· τῦ δὲ ἀριθμῦ μ ὁριωθέντος, ὁ λόγος τῶν δύω προόδων καλεῖται μέτρον (module).

46. Δῆλον ἄρα, ὅτι κατὰ τὴν ὑποτιθεμένην δύναμιν τῦ μ ϗ τῦ πρώτε ὅρε α τῆς γεωμετρικῆς προόδε, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς υ διαφόρες λογαριθμες ἔχειν δύναται· ἀλλὰ γὰρ πάντων, ὡς εἰπεῖν, τῶν λογαριθμικῶν συσημάτων εὐχρηστότερον ὑπάρχει ἐν τοῖς συμβολικοῖς λογισμοῖς, ὅπερ ὁ μὲν πρῶτος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδε ἐςὶ 1, τὸ δὲ μέτρον ϗ αὐτὸ 1· τηνικαῦτα δὲ ἡ γενικὴ πάντων τῶν λογαριθμικῶν συσημάτων ἐξίσωσις $\frac{\mu\alpha\delta\upsilon}{\upsilon} = \delta\chi$ γίνεται $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \delta\chi$.

47. Ἐν ἄρα τῷ λογαριθμικῷ συσήματι, ᾧ χρώμεθα ἐν ταῖς διὰ τῦ συμβολικῦ λογισμῦ πράξεσι, τὸ ἀπειροσὸν δχ τῦ λογαριθμε χ παντὸς ἀριθμῦ τῦ υ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπειροσῷ δυ τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ υ, διαιρεθέντι διὰ τῦ αὐτῦ ἀριθμῦ υ· ϗ αὕτη βάσις οἱονεὶ προκαταβάλλεται, ἐφ' ἣν εὐχερῶς ἐποικοδομεῖται ἡ εὕρεσις ἀπειροσῦ λογαριθμε ἁπάσης συμβολικῆς ποσότητος· ἀλλὰ γὰρ πρὶν ἢ ταύ-

τῃ χρησώμεθα, ἰςέον, Α΄. ὡς οἱ, περὶ ὧν ἐτάχθα ὁ λόγος, λογάριθμοι ὐκ εἰσὶν οἱ ἐν τοῖς κανονίοις· ἄλλοι δὲ, οἷς ἐπώνυμον ὑπερβολικοὶ, περὶ ὧν ἔφθημέν τε εἰπόντες (Υ΄ψ.Γ.201, κτ. ..) καὶ ἐρῦμεν δὲ ἐν τοῖς ἐφεξῆς· ἀπὸ μέντοι τούτων ἐπ' ἐκείνους ὐδυχερὲς μεταβαίνειν, ὡς καὶ τοῦτο ἔγνωμεν καὶ ὀψόμεθα ἐν τοῖς ἐφεξῆς. Β΄. ἐπεὶ ὁ πρῶτος ὅρος β τῆς ἀριθμητικῆς προόδου ὐχ' εὑρίσκεται ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\mu\alpha\delta\upsilon}{\upsilon} = \delta\chi$, αὕτηνε ἡ γενικὴ ἐξίσωσις, καὶ δὴ καὶ ἡ μερικὴ $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \delta\chi$, ἀείποτε μενοῦσιν ἐπικρατοῦσαι, ὅς τις ἂν ᾖ ὁ πρῶτος ὅρος β, τοῦτ' ἔςιν ὁ λογάριθμος τοῦ πρώτου ὅρου α τῆς γεωμετρικῆς προόδου· δυνάμεθα ἄρα διὰ τὸ εὐχερέςερον καὶ ἁπλούςερον ὑποθέσθαι τὸν λογάριθμον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἴσον τῷ μηδενί· ἐπεὶ δὲ τὸν πρῶτον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς προόδου ὑπεθέμεθα ἴσον μονάδι, ἔξομεν ἄρα τὸ μηδενικὸν λογάριθμον τῆς μονάδος· λαμβάνοντες ὖν, τὴν μὲν μονάδα ὡς πρῶτον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς προόδου, τὸ δὲ μηδενικὸν ὡς πρῶτον ὅρον τῆς ἀριθμητικῆς, ἢ ὡς λογάριθμον τῆς μονάδος, ῥᾷςα ἐνταῦθα ἐφαρμόζομεν τοὺς ἀποδοθέντας κανόνας (Συμβ. Λογ. 362)· ἔτως ὖν (τοῦ λ ἐμφαίνοντος λογάριθμον) ἀντὶ λ (αβ) λαβεῖν δυνάμεθα λα + λβ· καὶ λ $\frac{\alpha}{\beta}$ = λα — λβ· καὶ λα$^{\mu}$ = μλα· καὶ λ $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ = λα$^{\frac{\mu}{\nu}}$ = $\frac{\mu}{\nu}$ λα· τούτων τεθέντων.

48. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Λογαρίθμου ἀριθμοῦ δοθέντος, εὑρεῖν αὐτοῦ τὸ ἀπειροσόν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστιν ἐν (47) $\delta\lambda\chi = \frac{\delta\chi}{\chi}$, καὶ $\delta\lambda(\alpha+\chi) = \frac{\delta(\alpha+\chi)}{\alpha+\chi} = \frac{\delta\chi}{\alpha+\chi}$, καὶ $\delta\lambda\left(\frac{\alpha}{\alpha+\chi}\right) = \delta(\lambda\alpha - \lambda(\alpha+\chi)) = -\frac{\delta(\alpha+\chi)}{\alpha+\chi} = -\frac{\delta\chi}{\alpha+\chi}$, ἔνθα δῆλον, ὅτι τὸ τῆς ἀτρέπτου ποσότητος λα ἀπειροστὸν ἔστι μηδέν· ὡσαύτως $\delta\lambda\frac{1}{\chi} = \delta(\lambda 1 - \lambda\chi) = -\frac{\delta\chi}{\chi}$· καὶ $\delta\lambda(\chi^2) = \delta(2\lambda\chi) = \frac{2\delta\chi}{\chi}$· καὶ $\delta\lambda(\chi\upsilon) = \delta(\lambda\chi + \lambda\upsilon) = \frac{\delta\chi}{\chi} + \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$· καὶ $\delta\left(\lambda\frac{\chi}{\upsilon}\right) = \delta(\lambda\chi - \lambda\upsilon) = \frac{\delta\chi}{\chi} - \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$· καὶ $\delta\lambda\left(\frac{\alpha+\chi}{\alpha-\chi}\right) = \delta(\lambda(\alpha+\chi) - \lambda(\alpha-\chi)) = \frac{\delta\chi}{\alpha+\chi} + \frac{\delta\chi}{\alpha-\chi}$· καὶ $\delta(\lambda(\alpha\alpha+\chi\chi)) = \frac{\delta(\alpha\alpha+\chi\chi)}{\alpha\alpha+\chi\chi} = \frac{2\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$· καὶ $\delta\lambda\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)} = \frac{\delta\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}}{\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}} = \frac{\chi\delta\chi}{\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)}} = \frac{\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$, ἢ καὶ οὕτω· $\delta\lambda\sqrt{(\alpha\alpha+\chi\chi)} = \delta(\frac{1}{2}\lambda(\alpha\alpha+\chi\chi)) = \frac{\chi\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$· καὶ $\delta\lambda(\chi^\mu(\alpha+\beta\chi^\nu)^\pi) = \delta(\lambda\chi^\mu + \lambda(\alpha+\beta\chi^\nu)^\pi) = \delta(\mu\lambda\chi + \pi\lambda(\alpha+\beta\chi^\nu)) = \frac{\mu\delta\chi}{\chi} + \frac{\nu\pi\beta\chi^{\nu-1}\delta\chi}{\alpha+\beta\chi^\nu}$.

Τάυτὶ τὰ βραχέα ὑποδείγματα ἱκανὰ, οἶμαι, χειραχωγῆσαι πρὸς εὕρεσιν τȣ̃ ἀπειροςȣ̃ ἁπάσης ἄλλης δεδομένης λογαριθμικῆς ποσότητος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ ἀπειροςῶν τῶν κατὰ τὰς δεικτικὰς ποσότητας.

49. Δεικτικαὶ ἡμῖν ἦκȣσαν αἱ ποσότητες, αἷς δείκτης ἐπιγέγραπται ἄςατος, οἷον γ^{χ}, χ^{υ} κτ· ἀφ' ὧν ȣ̃ καμπύλαι ὡσαύτως προσηγορεύθησαν δεικτικαὶ (Τ'ψ. Γ. 321)· τȣ́των ȣ̃ ἐνταῦθα κείσθω εὑρεῖν τὰ ἀπειροςά.

50. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ποσότητος δεικτικῆς τὸ ἀπειροςὸν ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπ' αὐτῆς τῆς δεικτικῆς ποσότητος ȣ̃ τȣ̃ ἀπειροςȣ̃ τȣ̃ κατ' αὐτὴν λογαριθμȣ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω γὰρ ποσότης δεικτικὴ $\chi^{\upsilon} = \psi$, ȣ̃ τῶν ἑκατέρȣ μέλȣς λογαρίθμων ληφθέντων ἔςαι $\lambda\chi^{\upsilon} = \lambda\psi$, ȣ̃ ἑπομένως $\delta\lambda(\chi^{\upsilon}) = \frac{\delta\psi}{\psi}$ (48)· ἄρα $\delta\psi = \psi\delta\lambda(\chi^{\upsilon})$, εἴτ' ἓν (ἀντικαθιςαμένων ἀντὶ ψ ȣ̃ $\delta\psi$ τῶν κατ' αὐτὰ δυνάμεων) $\delta(\chi^{\upsilon}) = \chi^{\upsilon}\delta\lambda(\chi^{\upsilon})$· Ο. Ε. Δ.

51. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οὐκȣ̃ν $\delta(\chi^{\upsilon}) = \chi^{\upsilon}\delta\lambda(\chi^{\upsilon}) = \chi^{\upsilon}\delta(\upsilon\lambda\chi) = \chi^{\upsilon}(\delta\upsilon\lambda\chi + \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi})$· ὡσαύτως $\delta(\alpha^{\chi} + \upsilon^{\psi}) = \delta(\alpha^{\chi}) + \delta(\upsilon^{\psi}) = \alpha^{\chi}\delta(\lambda\alpha^{\chi}) + \upsilon^{\psi}\delta(\lambda\upsilon^{\psi}) = \alpha^{\chi}\delta(\chi\lambda\alpha) + \upsilon^{\psi}\delta(\psi\lambda\upsilon) = \alpha^{\chi}\delta\chi\lambda\alpha + \upsilon^{\psi}(\delta\psi\lambda\upsilon + \frac{\psi\delta\upsilon}{\upsilon}$· ὡσαύτως $\delta(\alpha\alpha + \chi\chi)^{\chi} = (\alpha\alpha + \chi\chi)^{\chi}\delta\chi(\alpha\alpha$

$+ \chi\chi)^{\chi} = (\alpha\alpha + \chi\chi)^{\chi}\, \delta\,(\chi\lambda(\alpha\alpha+\chi\chi)) = (\alpha\alpha + \chi\chi)^{\chi}\,(\delta\chi\lambda(\alpha\alpha+\chi\chi) + \frac{2\chi^2\delta\chi}{\alpha\alpha+\chi\chi}$· ἡ ἐφεξῆς ὁμοίως.

52. ΣΧΟΛΙΟΝ. Συχνάκις ἐν τῷ λογισμῷ εἰς χρῆσιν λαμβάνεται ἡ δεικτικὴ ποσότης κ^{χ}, τοῦ κ ἀριθμὸν ἐμφαίνοντος, οὗ λογάριθμος ἔστιν = 1· ταύτης οὖν τῆς ποσότητος ἄπειροστὸν ὑπάρχει (50) τὸ $\kappa^{\chi}\delta(\lambda\kappa^{\chi})$, εἴτ' ἐν $\kappa^{\chi}\delta(\chi\lambda\kappa) = \kappa^{\chi}$. $\delta\chi\lambda\kappa$· ἐπεὶ δὲ $\lambda\kappa = 1$ ἐξ ὑποθέσεως, ἡ ἔκθεσις ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον μεταβάλλει, γινομένη $\delta(\kappa^{\chi}) = \delta\chi\kappa^{\chi}$, τοῦτ' ἔστιν „αὕτη ἡ ἰδιωτέρα δεικτικὴ ποσότης ἔχει ἄπειροστὸν τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῆς, „ἡ τοῦ ἀπειροστοῦ τοῦ κατ' αὐτὴν δείκτου."

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Χρῆσις τῶν προεκτεθέντων κανόνων εἰς εὕρεσιν τῶν ἐν ταῖς καμπύλαις γραμμαῖς ἁπτομένων, ὑφαπτομένων, ὑποκαθέτων κτ.

53. Ἵνα δὲ γνωσθῇ ἡ χρῆσις τῶν προαποδεδομένων κανόνων, ἐφαρμοστέον ἂν εἴη τούτοις ὑποδείγμασι γεωμετρικοῖς τε καὶ τοῖς ἐκ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ, ὃ γνωστέον ἡμῖν ἐγένετο ἐκ τῶν προεκτεθεισῶν πραγματειῶν.

54. Ἵνα καμπύλης ἁπάσης τῆς AM (σχ. 164) εἰθεῖαν ἁπτομένην ἄξωμεν, ἐκλεκτέον τὴν καμπύλην ταύτην ἴσα καὶ πολύγωνον, ἐξ ἀπειραριθμῶν ἀπειροστῶν πλευρῶν συγκροτούμενον· μία δὲ τῶν πλευρῶν τῶν δε ἡ

Μμ (ἣν ἐπινοητέον παντὸς δεδομένου ποσοῦ ἐλάσσονα) προαχθεῖσα, καὶ γενομένη ΤΜ, καλεῖται ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης· διορίζεται δὲ αὕτη ἐφ' ἑκάστου σημείου Μ λαμβανομένης τῆς δυνάμεως τῆς κατὰ τὴν ὑφαπτομένην ΠΤ, εἴτ' ὖν τὸ μέρος τῆς γραμμῆς τῶν ἀποτετμημένων, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπότε τῆς τεταγμένης ΠΜ, καὶ τοῦ σημείου Τ, καθ' ὃ ἡ ἁπτομένη προαχθεῖσα ἁπαντᾷ τῇ γραμμῇ τῶν ἀποτετμημένων καὶ αὐτῇ προαχθείσῃ· ἰδὲ δὴ ὅπως ἡ ὑφαπτομένη διορίζεται.

55. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τὴν ὑφαπτομένην ἁπάσης καμπύλης εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἐν γένει καμπύλη ἡ ΑΜ· ἤχθω ὖν τεταγμένως ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ ΠΜ = υ, καὶ ταύτῃ ἀπείρως προσεχῶς ἡ Πμ, καὶ ἤχθω ἡ Μρ = Ππ παράλληλος τῷ ἄξονι ΑΠ· καὶ δὴ ἔστω ΑΠ = χ, καὶ Ππ = Μρ = δχ, καὶ ρμ (εἴτ' ὖν διαφορὰ τῆς πμ ὑπὲρ τὴν ΠΜ) = δυ· τὸ δὲ μέρος Μμ τῆς ἁπτομένης, ἀπειροστὸν ὄν, ἐκληφθῆναι δύναται ὡς συμπεπτωκὸς τῷ συστοίχῳ τῆς καμπύλης μέρει, ὥπερ ἐκλαμβάνεται ἴσον· τῶν ὖν τριγώνων Μρμ, ΤΜΠ ὁμοίων ὄντων, ἔσται ρμ : ρΜ :: ΠΜ : ΠΤ, εἴτ' ὖν δυ : δχ :: υ : ΠΤ = $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$ (Β), τύπος γενικὸς ἁπάσης ὑφαπτομένης· τουτωῖ δὲ εἰσαχθείσης τῆς δυνάμεως τοῦ δχ, εὑρισκομένης ἐκ τῆς κατὰ τὴν προκειμένην καμπύλην ἐξισώσεως, πορισθήσεται ὁ τύπος τῆς ὑφαπτομένης ΠΤ ἐλεύθερος ἀπειροστῶν, ὡς ἐκ τῶν ἐφεξῆς ὑποδειγμάτων δῆλον γενήσεται.

56. Ἔστω ἡ καμπύλη παραβολή, ἧς ἐξίσωσις υ^2 = πχ· ταύτης δὲ ἀπειροστά εἰσι 2υδυ = πδχ, ὅθεν δχ

$= \frac{2\upsilon\delta\upsilon}{\pi}$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἀντὶ $\delta\chi$ ἐν τῷ τύπῳ B, εὑρίσκεται $\frac{2\upsilon^2\delta\upsilon}{\pi\delta\upsilon} = \frac{2\upsilon^2}{\pi} = \frac{2\pi\chi}{\pi} = 2\chi$, εἴγε $\upsilon^2 = \pi\chi$, εἴτ' ἂν ἡ ὑφαπτομένη τῆς παραβολῆς διπλασία ἐςὶ τῆς ἀποτετμημένης, ὅ δήπου καὶ ἐν ταῖς κωνικαῖς τομαῖς δέδεικται (Τψ. Γ. 45).

57. Ἔςω ἡ καμπύλη παραβολὴ παντὸς γένους, ἧς ἐξίσωσις $\alpha^\mu \chi^\nu = \upsilon^{\mu+\nu}$· ταύτης δὲ ἀπειροςά εἰσι ν $\alpha^\mu \chi^{\nu-1}\delta\chi = (\mu+\nu)\,\upsilon^{\mu+\nu-1}\delta\upsilon$· ὅθεν $\delta\chi = \frac{(\mu+\nu)\upsilon^{\mu+\nu-1}\delta\upsilon}{\nu\alpha^\mu\chi^{\nu-1}}$· ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως ἀντικαταςαθείσης ἐν τῷ B τύπῳ, εὑρίσκεται $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{\mu+\nu}{\nu} \times \frac{\upsilon^{\mu+\nu}}{\alpha^\mu\chi^{\nu-1}} = \frac{\mu+\nu}{\nu} \times \frac{\alpha^\mu\chi^\nu}{\alpha^\mu\chi^{\nu-1}}$ (τιθεμένης ἀμέλει τῆς τοῦ $\upsilon^{\mu+\nu}$ δυνάμεως) $= (\frac{\mu+\nu}{\nu}).\chi$· ἐὰν δὲ μ μὲν ᾖ $=3$, ν δὲ $=2$, ἔςαι ΠΤ $= \frac{5\chi}{2}$.

58. Ἡ ἐξίσωσις $\alpha^\mu\chi^\nu = \upsilon^{\mu+\nu}$ γίνεται $\alpha^\mu\chi^{-\nu} = \upsilon^{\mu-\nu}$, ὑποτιθεμένου λειπτικοῦ τοῦ ν· ὡς τηνικαῦτα ἔςαι $\alpha^\mu = \upsilon^{\mu-\nu}\chi^\nu$ (σημείωσ. τοῦ §. 20. τῆς Τψ. Γ) ἐξίσωσις παντὸς γένους ὑπερβολῶν ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις· ἡ δὲ ὑφαπτομένη ΠΤ (χ. 165) ἔςαι $\frac{\mu-\nu}{-\nu} = \frac{M}{-\nu}$ (ὑποτιθεμένου $M = \mu-\nu$)· ἐὰν δὲ ᾖ $M = 1$, ὡς $\nu = 1$, ὡς ἐπὶ τῆς πρωτογενοῦς ὑπερβολῆς, ἔςαι ΠΤ $= -\chi$, εἴτ' ἂν ἡ ὑφαπτομένη ἴση ἔςαι τῇ ἀποτετμημένῃ, διὰ μέν τοι τὸ

— σύμβολον ληπτέον τὴν ὑφαπτομένην ἐκ τῶν ἀντιθέτων μερῶν τῆς ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων· ἐὰν δὲ ἡ M = 7 καὶ ν = 2, ἔσται ΠΤ = $\frac{-7\chi}{2}$· εἰ δ' εἴη M μὲν = 20, ν δὲ = 4, εὑρεθήσεται ΠΤ = — 5χ· καὶ ἐν γένει „ἡ „ὑφαπτομένη τῶν ὑπερβολῶν ἀεί ἐστιν ἴση τῷ γινομένῳ „ὑπὸ τῆς ἀποτετμημένης καὶ τοῦ δείκτου τῆς τεταγμένης, „διαιρεθέντι διὰ τοῦ δείκτου τῆς ἀποτετμημένης, λειπτι„κῶς λαμβανομένου."

59. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εὑρεῖν τὴν ὑφαπτομένην τῆς κυκλοειδοῦς (σχ. 166).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθωσαν προσεχέσται ἀλλήλων αἱ τεταγμέναι ΜΠ, μπ· καὶ ἡ μὲν ΠΤ ἁπτέσθω κατὰ τὸ Π τοῦ γεννήτορος κύκλου, ἡ δὲ ΜΤ τῆς καμπύλης κατὰ τὸ Μ· τὰ τοίνυν τόξα Ππ, Μμ ἐκληφθῆναι δύνανται ὡς μέρη ἀπειροστὰ τῶν ἁπτομένων ΠΤ, μΤ· καὶ ἐὰν ἀχθῇ ἡ Μσ παράλληλος τῇ ΤΠ, τὰ τρίγωνα Μσμ, ΤΜΠ ὅμοια ἔσονται· καὶ δὴ μο : Μσ :: ΜΠ : ΜΤ· ἀλλὰ διὰ τὰς παραλλήλους Ππ, Μσ, καὶ ΜΤ, μσ ἔστιν (ὑποτιθεμένου τοῦ τόξου ΒΠ = χ, καὶ ΠΜ = υ) μσ = δυ, καὶ Ππ = Μσ = δχ· ἄρα δυ : δχ :: υ : ΠΤ = $\frac{\delta\chi\upsilon}{\delta\upsilon}$ = υ, εἴγε δυ = δχ, διὰ τὸ εἶναι υ = χ (Τ'ψ. Γεωμ. 333)· ἐὰν ἄρα ἀπὸ τῆς ἁπτομένης τοῦ γεννήτορος κύκλου ληφθῇ ΠΤ ἴση τῇ τεταγμένῃ υ, ἔσται αὕτη ὑφαπτομένη τῆς κυκλοειδοῦς.

60. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Εὑρεῖν τὴν ὑφαπτομένην τῆς λογαριθμικῆς ΒΜ (σχ. 167).

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης τῆς καμπύλης (Τ'ψ. Γεωμ. 320), ὅταν αἱ ἀποτετμημέναι ΑΠ, Απ, ΑΞ, Αξ, ὦσιν ἐν προσόδῳ ἀριθμητικῇ, αἱ συνοιχεῖσαι τεταγ-

μέναι εἰσὶν ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ, ὥστε τὰς ἀποτετμημένας λογαρίθμους εἶναι τῶν συστοιχουσῶν τεταγμένων· ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ ΠΜ = υ, ἔσται πμ = πΡ + Ρμ = υ + δυ· καὶ ἐὰν ὑποτεθῇ ΞΝ = ψ, ἔσται ξν = ψ + δψ· ἐπεὶ οὖν αἱ ἀποτετμημέναι ΑΠ, Απ, ΑΞ, Αξ ὑποτίθενται ἐν προόδῳ ἀριθμητικῇ, ἔσται (ὑποτιθεμένης τῆς ΑΠ = χ, καὶ Ππ = δχ = Ξξ) υ : υ + δυ :: ψ : ψ + δψ· ἄρα υ : δψ :: ψ : δυ, ὅθεν $\frac{\delta\upsilon}{\upsilon} = \frac{\delta\psi}{\psi}$· ἀλλ' ἡ ὑφαπτομένη ΠΤ = $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ὑφαπτομένη Ξτ = $\frac{\psi\delta\chi}{\delta\psi}$, εἴγε Ξξ = δχ· ἀλλὰ $\frac{\upsilon}{\delta\upsilon} = \frac{\psi}{\delta\psi}$· ἄρα Ξτ = $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$ = ΠΤ, τοῦτ' ἔστιν „αἱ διαφόροις τεταγμέναις ἀντιστοιχοῦσαι ὑφαπτόμεναι „εἰσὶν ἴσαι ἀλλήλαις, εἴτ' οὖν ἡ τῆς λογαριθμικῆς ὑφ„απτομένη ἔστιν ἄτρεπτος."

ΑΛΛΩΣ. Ἐπείπερ αἱ μὲν τεταγμέναι ἀριθμοὺς, αἱ δ' ἀποτετμημέναι λογαρίθμους, ἐμφαίνουσι, τὸν δὲ τῶν ἀριθμῶν πρὸς τοὺς λογαρίθμους λόγον ἐμφαίνει ἡ ἐξίσωσις $\frac{\alpha\mu\delta\upsilon}{\upsilon}$ = δχ (43, 44)· ἡ αὐτὴ ἄρα παρίστησι καὶ τὴν λογαριθμικὴν καμπύλην· ἐντεῦθεν ἄρα προκύψει $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{\alpha\mu}{\upsilon}$, καὶ ἑπομένως ἡ ὑφαπτομένη $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$ γενήσεται $\frac{\alpha\mu\upsilon}{\upsilon}$ = αμ· τοῦτ' ἔστιν „ἡ ὑφαπτομένη ΠΤ ἐφ' ἑκάστου σημείου τῆς λογ„αριθμικῆς ἔστιν ἄτρεπτος, ἰσουμένη τοσάκις τῇ πρώτῃ τε„ταγμένῃ ΑΒ = α, ὁσάκις ἡ μονὰς ἔνεστι τῷ μέτρῳ μ".

61. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Εὑρεῖν τὴν ὑφαπτομένην

τῶν παντὸς γένους σπειρῶν, ὧν ἐξίσωσις ἔστι $\pi^{\nu}\upsilon^{\mu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$ (Τψ. Γεωμ. 331).

ΛΥΣΙΣ. Ἐμφαινέτω ἡ Αν (σχ. 168) πάντα τὰ εἴδη τάυτης τῆς καμπύλης· καὶ ἤχθωσαν ἀπείρως προσεχεῖς αἱ ἀκτῖνες ΚΒ, Κπ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Κ διαστήματι δὲ τῷ Κν γεγράφθω τόξον ἐλάχιστον τὸ μν, καὶ ἤχθω ἀπτομένη ἡ ΝΤ· εὐθεῖα ἂν ἡ ΚΤ, ἡ τῇ ΒΚ κάθετος ἐφιστάμενη, ἔστιν, ἣν ζητοῦμεν, ἡ ὑφαπτομένη· γενέσθω δὲ τόξον τὸ Απ = χ, καὶ τῆς σπείρας ἡ ἀκτὶς Κν = υ, καὶ πΒ = δχ, καὶ Νν = δυ· ἐκ δὲ δὴ τῶν ὁμοίων τομέων ΒΚπ, μΚν πρόεισι

$K\pi = \alpha : K\nu = \upsilon :: \pi B = \delta\chi : \nu\mu = \frac{\upsilon\delta\chi}{\alpha}$· τοῦ δὲ τόξου νμ ἐκληφθέντος ὡς εὐθείας ἀπειροστῆς, καθέτου τῇ ΝΚ = υ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΝΚΤ, Ννμ, ὅμοιά τε ἔσονται, καὶ ταύτην τὴν ἀναλογίαν παρέξονται $N\mu = \delta\upsilon : \nu\mu = \frac{\upsilon\delta\chi}{\alpha} :: NK = \upsilon : KT = \frac{\upsilon\upsilon\delta\chi}{\alpha\delta\upsilon}$· ἀλλ' ἐκ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως $\pi^{\nu} \times \upsilon^{\mu} = \alpha^{\mu} \times \chi^{\nu}$ πρόεισι $\mu\pi^{\nu}\upsilon^{\mu-\nu}\delta\upsilon = \nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu-1} \times \delta\chi$, ὅθεν $\delta\chi = \frac{\mu\pi^{\nu}\upsilon^{\mu-1}\delta\upsilon}{\nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu-1}}$· ἀντικατασταθείσης ἄρα ταύτης τῆς δυνάμεως τοῦ δχ ἐν τῷ τύπῳ τῆς ΚΤ, ποριωθήσεται $KT = \frac{\mu\pi^{\nu}\upsilon^{\mu+1}}{\nu\alpha^{\mu}\ \alpha\chi^{\nu-1}} = \frac{\mu\pi^{\nu}\upsilon^{\mu+1}\ \chi}{\nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu}\alpha}$ (πολλαπλασιαζομένου ἀμέλει τοῦ τε ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ χ) $= \frac{\mu\alpha^{\mu}\chi^{\nu}\upsilon\chi}{\nu\alpha^{\mu}\chi^{\nu}}$ (ἀντικαθιστάμενης τῆς δυνάμεως τοῦ $\pi^{\nu}\upsilon^{\mu}$) $= \frac{\mu\chi\upsilon}{\nu\alpha}$.

Ἐὰν ἦ $\mu = \nu = 1$, ὥσπερ ἐπὶ τῆς Ἀρχιμηδείου ἕλι-

κος, ἧς ἐξίσωσις $\pi\upsilon = \alpha\chi$ (Τ'ψ. Γεωμ. 331), ἔσαι ἡ ὑφαπτομένη $= \frac{\chi\upsilon}{\alpha}$· ἐντεῦθεν ἄρα $\alpha : \chi :: \upsilon :$ ΚΤ· ἐὰν δὲ ἦ $\upsilon = \alpha$, ὃ συμβαίνει ἐπὶ τοῦ σημείου Α, τηνικαῦτα χ ἴσοῦται τῇ περιφερείᾳ τοῦ γεννήτορος κύκλου, καὶ δὴ ΚΤ $= \frac{\chi\alpha}{\alpha} = \chi = \pi$· πορισθείη ἂν ἄρα γεωμετρικῶς γραμμὴ εὐθεῖα ἴση τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ, καὶ δὴ ὁ κύκλος τετραγωνισθήσεται, εἰ δυνατὸν ἦν ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ἁπτομένην τῆς Ἀρχιμηδείου ἕλικος κατὰ τὸ σημεῖον Α.

Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει $\pi^{\nu}\upsilon^{\mu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$ ὑποτεθῇ $\nu = -1$, καὶ $\mu = 1$, εὑρεθήσεται $\frac{\upsilon}{\pi} = \frac{\alpha}{\chi}$, εἶτ' ἓν $\upsilon\chi = \alpha\pi$· ἀντικαταστασθεισῶν ἓν τῶν δυνάμεων τοῦ μ, καὶ ν καὶ $\upsilon\chi$ ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\mu\chi\upsilon}{\nu\alpha}$, εὑρεθήσεται $\text{Κτ} = -\pi$, τοῦτ' ἔστιν „ἐν „ταύτῃ τῇ σπείρᾳ ἡ ὑφαπτομένη ἔστιν ἄτρεπτος, ἰσομένη „τῇ περιφερείᾳ τοῦ γεννήτορος κύκλου, ἢ τῷ τόξῳ π, εἰ „π μέρος τι ἐμφαίνει τῆς κυκλικῆς περιφερείας“· τὸ δὲ σύμβολον ἤκισα κατὰ μέγεθος ἀλλοιοῖ τὴν ὑφαπτομένην.

Εἰς δὲ εὕρεσιν τῆς ὑφαπτομένης ἐν τῇ λογαριθμικῇ σπείρᾳ, ἀναμνησέον, ὡς ἐν αὐτῇ τῆς ὑπὸ ΑΚΒ γωνίας, ἢ τοῦ τόξου ΑΒ $= \chi$, λογαρίθμου ὄντος τῆς συσοίχου ἀκτῖνος ΚΝ (Τ'ψ. Γεωμ. 331), ἔσαι $\chi = \nu . \Lambda \frac{\upsilon}{\pi} = \nu . \Lambda . \upsilon$ (ὑποτιθεμένης $\pi = 1$)· ἄρα $\delta\chi = \nu . \frac{\delta\upsilon}{\upsilon}$ (48), καὶ ΚΤ $= \frac{\upsilon\delta\chi}{\chi\delta\upsilon} = \frac{\nu\upsilon}{\alpha}$· ὅθεν $\alpha : \nu :: \upsilon :$ ΚΤ· ἐὰν δὲ $\nu = 1 = \alpha$, ἔσαι ΚΤ $= \upsilon$.

62. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Οὔσης τῆς ΑΤΝ παραβολῆς (χ. 169), καὶ ἑτέρας καμπύλης δοθείσης τῆς ΑΛΜ, ἧς αἱ τεταγμέναι μέσαι εἶεν ἀνάλογοι τῶν ἀποτετμημένων ΑΠ, καὶ τῶν συζοίχων τεταγμένων ΠΝ ἐν τῇ παραβολῇ, εὑρεῖν τὴν ὑφαπτομένην Πβ ἐν τῇ καμπύλῃ ΑΜ.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἡ ἐν τῇ παραβολῇ τεταγμένη = υ, ἡ δ' ἐν τῇ καμπύλῃ ΑΜ τεταγμένη = ψ, καὶ ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ = χ, καὶ τῆς παραβολῆς παράμετρος = π· καὶ δὴ ἔςαι ΝΡ = Μρ = Ππ = δχ, καὶ νΡ = δυ, καὶ μρ = δψ· ἀπτέωθω δὲ τῆς καμπύλης ΑΜ ἡ Μβ· ἐκ τοίνυν τῶν ὁμοίων τριγώνων μρΜ, ΜΠβ πρόεισι δψ : δχ :: $\psi : \frac{\psi\delta\chi}{\delta\psi} = \Pi\beta$· ἀλλ' ἔςι διὰ τὴν φύσιν τῆς καμπύλης υ : ψ :: ψ : χ, εἴτ' οὖν υχ = ψ², υδχ + χδυ = 2ψδψ, $\delta\psi = \frac{\upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon}{2\psi}$, ἀντικαταςάσει ἄρα ταύτης τῆς τοῦ δψ δυνάμεως ἐν τῷ τύπῳ $\frac{\psi\delta\chi}{\delta\psi}$, πορισθήσεται $\Pi\beta = \frac{2\psi^2\delta\chi}{\upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon}$· ἔςι δὲ ἡ τῆς παραβολῆς ἐξίσωσις υ² = πχ, 2υδυ = πδχ, $\delta\chi = \frac{2\upsilon\delta\upsilon}{\pi}$· ἀντικαταςαθείσης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῷ τύπῳ τῆς Πβ, γενήσεται $\Pi\beta = \frac{4\psi\psi\upsilon\delta\upsilon}{\frac{\pi(2\upsilon\upsilon\delta\upsilon + \pi\chi\delta\upsilon)}{\pi}}$

$= \frac{4\psi\psi\upsilon}{2\upsilon\upsilon + \pi\chi} = \frac{4\upsilon\upsilon\chi}{2\upsilon\upsilon + \upsilon\upsilon \cdot \frac{\pi}{\pi}}$ (ἀντικαθιςαμένης, ἐν μὲν τῷ ἀριθμητῇ τῆς τοῦ ψψ δυνάμεως, ἐν δὲ τῷ παρονομαςῇ

τῆς τε χ) $= \frac{4\chi v^2}{2v^2 + v^2} = \frac{4\chi}{3}$· ἐὰν ἄρα ληφθῇ Αβ $=$ $\frac{4\,\text{ΠΑ}}{3}$, ζητηθήσεται ἡ Πβ ὑφαπτομένη. Ο Ε. Π.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Δῆλον ἄρα, ὅπως ἄντις ποιήσειεν, εἴπερ ἡ καμπύλη ΑΝ εἴη ὑπερβολή, ἢ ἄλλη ἡτισοῦν καμπύλη γεωμετρική.

63. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄.** Ὅταν τοιάδε ᾖ ἡ τῆς καμπύλης ἐξίσωσις, ὥστε τῆς χ αὐξήσης ἐλαττοῦσθαι τὴν υ, τηνικαῦτα ἔσται ἐν τῷ λογισμῷ — δυ, καὶ εἰς εὕρεσιν τῆς ὑφαπτομένης συμβάλλουσα ἀναλογία γενήσεται — δυ : δχ : : υ : ΠΤ $= -\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$· τούτῳ οὖν μόνῳ διοίσει τηνικαῦτα ὁ λογισμὸς, ὅτι ἡ ὑφαπτομένη πεσεῖται πρὸς τ' ἀντίθετα τῆς ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων, ὡς εἴδομεν κἀν (58)· ἀνθ' ὅτου δὴ τὸν τύπον $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$ ληπτέον ἀεὶ εἰς εὕρεσιν τῶν ὑφαπτομένων ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς καμπύλαις· ἐὰν δὲ μειῶνται αἱ τεταγμέναι, ἐκληπτέον λειπτικῶς τὸν τύπον $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon}$, ὅπερ δείκνυσι μετενεκτέον εἶναι τὴν ὑφαπτομένην πρὸς τἀναντία τῆς γενέσεως τῶν χ· ἐὰν, φέρε, ληφθῇ ἡ τοῦ κύκλου ἐξίσωσις, ἡ τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένων περιεκτική, εἴτ' οὖν (Τψ. Γ. 93.) $\upsilon\upsilon = \frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi$, δῆλον, ὅτι τῆς ΚΠ αὐξήσης (χ. 170), ἡ ΠΜ $= \upsilon$ μειοῦται, τοιγαροῦν ἡ ὑφαπτομένη ΠΤ πεσεῖται ἐπὶ τὰ λαιὰ τῆς ΠΜ, τῆς ἀρχῆς Κ τῶν ἀποτετμημένων κειμένης ἐν τοῖς δεξιοῖς· ὁ δὴ καὶ ὁ λογισμὸς βούλεται· τὰ γὰρ τῆς προτεθείσης κυκλικῆς ἐξισώσεως ἀ-

πειροσὰ εἰσὶ $2\upsilon\delta\upsilon = -2\chi\delta\chi$, καὶ ἑπομένως $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{-\upsilon}{\chi}$· ἄρα $\frac{\upsilon\delta\chi}{\delta\upsilon} = \frac{-\upsilon^2}{\chi} = \frac{-(\frac{1}{4}\alpha\alpha - \chi\chi)}{\chi}$. ἔνθα τὸ — ἐθέλει τὴν ὑφαπτομένην κεῖσθαι πρὸς τὰ ἐναντία μέρη, ἢ ἔνθα ἔκειτο διὰ τοῦ +

64. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'. Τὸν γενικὸν τύπον εὑρεῖν τῆς ἁπτομένης ἁπάσης καμπύλης (σχ. 164).

ΛΥΣΙΣ. Πρὸς πλείω εὐμάρειαν ὑποτεθείσθωσαν κάθετοι ἀλλήλαις αἱ χ καὶ αἱ υ· καὶ ἐπεὶ τὸ Μμρ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΤΠΜ, ἔσται ρμ : Μμ :: ΠΜ : ΤΜ· ἐπεὶ δὲ ὀρθογώνιόν ἐστι τὸ Μρμ τρίγωνον, ἔστι $M\mu = \sqrt{((\rho M)^2 + (\rho\mu)^2)} = \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$· ἄρα $\delta\upsilon : \sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}$ :: $\upsilon : TM = \frac{\upsilon\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}}{\delta\upsilon} = \frac{\upsilon\sqrt{(\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2)}}{\sqrt{(\delta\upsilon^2)}} = \upsilon\sqrt{(\frac{\delta\chi^2 + \delta\upsilon^2}{\delta\upsilon^2})} = \upsilon\sqrt{(\frac{\delta\chi^2}{\delta\upsilon^2} + 1)}$· τοιγαροῦν τῶν ἀπειροσῶν ἐξισώσεως καμπύλης δεδομένης λαμβανομένων, καὶ ἀποφερομένης τῆς δυνάμεως τοῦ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$, καὶ τοῦ ἀπ' αὐτῆς τετραγώνου ἀντικαθισαμένου ἐν τῷ γενικῷ τύπῳ τῆς ἁπτομένης, πορισθήσεται ἡ ἁπτομένη περιέχουσα χ καὶ ποσότητας ἀτρέπτους, ὡς ἑκάστῳ ἐφαρμόσαι ὑποδείγμασι τὸν τύπον ἔξεσιν· ἡμῖν δὲ τὰ κυριώτερα ἐκτιθεμένοις, ἰτέον ἐπὶ τὴν εὕρεσιν τῆς ὑποκαθέτου.

65. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ'. Εὑρεῖν τὸν γενικὸν τύπον τῆς ὑποκαθέτου ΠΞ ἁπάσης γεωμετρικῆς καμπύλης, ὀρθῆς ὑποτιθεμένης τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας (σχ. 164).

ΛΥΣΙΣ. Ἐπεὶ τὰ Μρμ, ΜΠΞ τρίγωνα, ἔχοντα