γεωμετρικαί· τοσούτῳ δὲ ἀκριβέστερον, ὅσῳ ἄν τις λάβοι ἀκριβέστερον τὰς τῶν δε τῶν τόξων δυνάμεις.

Β΄. Ἐμφαινέτω σ γωνίαν ὁποιανοῦν, ἡ τὸ ταύτην μετροῦν τόξον, οὗ ἡ ἀκτὶς = ι· Καμπύλη οὖν, ἣν παρίστησιν ἡ ἐξίσωσις $\sigma = \upsilon . \Lambda . \frac{\upsilon}{\alpha}$ καλεῖται σπεῖρα λογαριθμική· ἐφ' ἧς (χ. Β. 160) αἱ περὶ τὸ Κ γωνίαι σ, ἡ τὰ τόξα τῆς περιφερείας, ἧς ἀκτὶς = ι, ἀνάλογα ὄντα ταῖς γωνίαις σ, εἰσὶν ἀνάλογα τοῖς λογαρίθμοις τῶν ἀκτίνων υ· ἐὰν τοίνυν ὑποτεθῇ υ = ι = α, ἡ ἐξίσωσις γίνεται σ = λ. υ· ὑποτιθεμένων ἄρα τῶν γωνιῶν σ, ἡ τῶν περὶ ὧν εἰρήκαμεν τόξων, ἐν προόδῳ ἀριθμητικῇ, αἱ συστοιχοῦσαι αὐταῖς ἀκτῖνες (ἃς ἐμφαινέτωσαν αἱ ΚΑ, Κν, ΚΒ κτ) ἔσονται ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ· ἐὰν δὲ ΚΑ ἐμφαίνῃ τὴν ἀκτῖνα (ἡ ὑποτίθεται = ι) τοῦ γεννήτορος κύκλου, κατάδηλον ὡς ἐπ' αὐτῆς δυνατόν ἐστι λαβεῖν ἄπειρα μέρη κατὰ γεωμετρικὴν φθίνουσαν πρόοδον· ὥστε ἡ καμπύλη ἀπείρους ποιήσει περιόδους περὶ τὸ σημεῖον Κ, ἕως ἂν αὐτοῦ τοῦ σημείου ἐφίκηται· δυνατὸν δὲ ὑποθεῖναι τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, Κμ, κτ. κ᾽ κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξουσαν.

332. Ἐναρίθμιος δὲ φέρεται καμπύλαις ταῖς ὑπερβατικαῖς ᾗ ἡ Κυκλοειδής, ἧς ἡ ἐπὶ τῶν τεχνῶν ἐφαρμογὴ ἐγνώρισε ταύτην ἅπασιν ἐν τοῖς νῦν χρόνοις· ἐὰν κύκλος ὁ ΒΔΕ (χ. 161) ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ περικυλιωθῇ, ἀρχόμενος ἐκ τοῦ Α, τὸ αὐτοῦ σημεῖον Ζ, ὃ ἦν ἐν ἀρχῇ κατὰ τὸ Α, ἐν τέλει δὲ εὕρηται κατὰ τὸ Γ, ἐν ταύτῃ τῇ περικυλίσει καταγράψει καμπύλην τὴν ΑΔΓ, ἥτις ἀκούει Κυκλοειδής· ᾗ ἡ μὲν ΒΔ εὐθεῖα ἄξων

αὐτῆς καλεῖται· ἡ δὲ ΑΓ, βάσις· ὁ δὲ ΒΔΕ κύκλος, γεννήτωρ κύκλος.

Τοίγαρῦν α΄. ἡ ΑΓ ἴση ἐςὶ τῇ ὅλῃ περιφερείᾳ τῦ γεννήτορος κύκλυ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ αὐτῦ ἡμιπεριφερείᾳ· β΄. ὑπόδειγμα ἁπλύςατον τῆς κυκλοειδῦς ἐςιν ἡ περιαγωγὴ τῦ τῆς ἁμάξης τροχῦ, περιφερομένυ ὁλοχερῶς ἐπί τι ἐπίπεδον· γ΄. ἵν' ἐπὶ ἐπιπέδυ τῦ ΑΓ κυκλοειδὴς καταγραφῇ, κατακλιθήτω τὸ τῦ ΒΕΔ κύκλυ ἐπίπεδον ἐπὶ τὸ δεδομένον ἐπίπεδον, καὶ τῇ περιφερείᾳ αὐτῦ προσηλώθω ἧλος σμικρὸς ἐξ' ὕλης ςερεᾶς, οἷα καταγράφειν σημεῖα ἐπὶ τῦ ὑποκειμένυ ἐπιπέδυ, καὶ κινηθήτω ὁ κύκλος ἐπὶ τῦ ἐπιπέδυ, ἐπακυμβῶν κανόνι, ἵνα μὴ ἡ κίνησις αὐτῦ διαςραφῇ· καὶ δὴ ἐκ τῆς ὀχοχερῦς τῦ κύκλυ περιαγωγῆς γραφήσεται ἐκ τῦ μικρῦ ἥλυ ἡ κυκλοειδής.

333. Τ'ποτεθείσθω ἤδη ὁ γεννήτωρ κύκλος ΒΕΔ ἐν τῇ θέσει ΖΜ, καὶ ἤχθω ἡ ΖΟΡ παράλληλος τῇ ΑΒ· σαφὲς ὖν ὅτι τὸ τόξον ΖΙΜ ἔςιν ἴσον τῷ τόξῳ ΟΒχ (Γεωμ. 169)· καὶ ἔτι τόξον τὸ ΖΙΜ ἴσον ἐςὶ τῇ εὐθείᾳ ΑΜ, ἧς τοῖς σημείοις ἐκ διαδοχῆς ἐφηρμόσθησαν τὰ σημεῖα τῦ ΖΙΜ· ἄρα ΟΒχ = ΑΜ· ἄρα καὶ ΔΟ = ΜΒ (ἐπεὶ τὸ ὅλον τόξον ΒΟΔ = ΑΒ)· ἀλλὰ ΜΒ = ΖΟ (καὶ γὰρ ΖΜ = ΟΒ (Γεωμ. 47)), καὶ ἐν δυσὶ παραλλήλαις κείμεναι· ἄρα τὸ ΖΟΜΒ ἔςι παραλληλόγραμμον· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΖΟ ἴση ἐςὶ τῷ τόξῳ ΔΟ.

Ἐπεὶ δὲ ΟΡ ἔςιν ἡμίτονον τῦ ΔΟ τόξυ (Γεωμ. 482), ἡ ὅλη εὐθεῖα ΖΟΡ ἔςαι ἴση τῷ ἀθροίσματι τῦ τόξυ ΔΟ, καὶ τῦ ἐν αὐτῷ ἡμιτόνυ.

„Τυτέςιν ἰδιότης γενικὴ τῆς κυκλοειδῦς ἐςι, τεταγμένην πᾶσαν τὴν ΖΡ ἰσῦσθαι τῷ κατὰ τὸν γεννήτορα κύκλον ἐπὶ τῦ ἄξονος γεγραμμένον τόξῳ, ἀπολαμβανο-

,, μένῳ ὑπό τε τῆς τεταγμένης, καὶ τῆς κορυφῆς Δ, συνά-
,, μα τῷ ἡμιτόνῳ ΟΡ τοῦ δε τοῦ τόξου.

Ἔςω οὖν υ τεταγμένη ἡ ΖΡ, καὶ χ τὸ ἐναπολαμβανόμενον τόξον ΔΟ· θηρευθήσεται οὖν ἐντεῦθεν υ = χ + ημ. χ, ἐξίσωσις τῆς κυκλοειδοῦς.

334. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πᾶσα εὐθεῖα ΕΞ παράλληλος τῇ ΒΓ, περιεχομένη ὑπὸ τῆς καμπύλης καὶ τοῦ γεννήτορος κύκλου ΒΔΕ, ἴσοῦται τῷ τόξῳ ΔνΕ, τῷ ταύτῃ ἀντιςοιχοῦντι· καὶ γὰρ υ = ΡΞ = χ (= ΔνΕ) + ἡμ. χ (= ΡΕ)· ἄρα ΕΞ = ΔνΕ.

335. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ τῆς κυκλοειδοῦς καθ' ἓν δεδομένον σημεῖον Ξ ἁπτομένη ΠΞ παράλληλός ἐςι τῇ χορδῇ ΔΕ, τῇ ἀπολαμβανομένῃ ὑπὸ τῆς κορυφῆς Δ τῆς κυκλοειδοῦς καὶ τοῦ κατὰ τὸν γεννήτορα κύκλον σημείου Ε, τοῦ ἀντιςοιχοῦντος τῷ τῆς ἀφῆς σημείῳ Ξ.

ΔΕΙΞΙΣ α΄. Ἤχθω ΕΞ παράλληλος τῇ ΒΓ· φημὶ οὖν ὡς ΕΞ ἴση ἐςὶ τῷ ΕΠ μέρει τῆς τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Ε ἁπτομένης, τῷ ὑπὸ τοῦ Ε καὶ τοῦ σημείου, καθ' ὃ συναντᾷ τῇ ΠΞ ἁπτομένῃ, ἀπολαμβανομένῳ· ἔςω γὰρ ἑτέρα παράλληλος τῇ ΕΞ ἀπείρως ἐγγὺς ἡ Στ· τὰ οὖν τόξα ΞΣ, Ετ ἐκληφθῆναι δύνανται ὡς εὐθεῖαι, καὶ ὡς μέρη ἐλάχιςα τῶν ἁπτομένων ΠΕ, ΠΞ· ἐκ δὲ δὴ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΠΕΞ, ΠτΣ πρόεισιν ΕΞ : τΣ :: ΕΠ : τΠ· ἄρα ΕΞ — τΣ : ΕΞ :: ΕΠ — τΠ : ΕΠ· ἀλλὰ ΕΞ — τΣ = ΔΕ — Δτ (ἢ τΕ) (334) καὶ ΕΠ — τΠ = τΕ· ἄρα τΕ : ΕΞ :: τΕ : ΕΠ, ἢ τΕ : τΕ :: ΕΞ : ΕΠ· ἄρα α΄. ΕΞ = ΕΠ· β΄. ἐκ τούτου ἡ ΔΕ παράλληλός ἐςι τῇ ΠΞ.

Ἐν γὰρ τῷ τριγώνῳ ΠΕΞ ἔςιν ἡ ὑπὸ Π = Ξ διὰ τὰς ὑπ' αὐτὰς ὑποτεινούσας ἴσας πλευράς, ὡς ἤδη δέδεικται· ἄρα Σ = Π (Γεωμ. 132), καὶ ἡ ἐκτὸς γωνία ΠΕν

ἴσοῦται ταῖς γωνίαις Π + ξ (216), ἤ = 2Π· ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΠΕυ μέτρον ἔχει τὸ τόξον $\frac{ΕΔυ}{2}$ (Γεωμ. 184) ἤ τὸ ΔτΕ· ἡ δὲ γωνία ΠΕΔ ἔχει μέτρον τὸ τόξον $\frac{ΔτΕ}{2}$· ἄρα ἡ ὑπὸ ΠΕυ = 2 ΠΕΔ· ἄρα 2 Π = 2 ΠΕΔ καὶ Π = 1 ΠΕΔ· ἄρα ἡ ἁπτομένη Πξ παράλληλός ἐστι τῇ χορδῇ ΔΕ (Γεωμ. 137) Ο. Ε. Δ.

336. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵνα τοίνυν ἁπτομένη ἀχθῇ καθ' ἓν δεδομένον σημεῖον ξ, γενέσθω παράλληλος ἡ Εξ τῇ ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ χορδὴ ΔΕ, καὶ διὰ τοῦ ξ διήχθω αὐτῇ παράλληλος ἡ ξΠ, ἥτις ἔσται ἡ ἐπιταχθεῖσα ἁπτομένη.

337. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἡ ἡμιπεριφέρεια τοῦ γενήτορος κύκλου ΔΒ κληθῇ α, ἡ δὲ ἡμίσεια βάσις ΒΑ = β, καὶ ΔΟ = χ, καὶ ΟΖ = υ· δῆλον ἐκ τῶν εἰρημένων (332, 335), ὡς ἔσται α : β :: χ : υ, ὅθεν αυ = βχ, ἐξίσωσις ἑτέρα τῆς κυκλοειδοῦς· ἐὰν δὲ γένηται $α^μ : β^ν :: χ^μ : υ^ν$, εὑρεθήσεται $α^μ υ^ν = β^ν χ^μ$, ἐξίσωσις γενικὴ παντὸς γένους κυκλοειδοῦς.

338. Ἐὰν νῆμα τὸ ΒΑΕ (χ. 162) ἰσόμηκες καμπύλῃ τῇ ΒΑΕ, ἐφηρμοσμένον αὐτῇ, ἀποχωρίζηται ἐπ' αὐτῆς, τὸ πέρας αὐτοῦ Ε καταγράψει γραμμὴν τὴν ΕΓΘ, ἥτις καλεῖται ἐξειλιγμένη, ἡ δὲ ΒΑΕ ἐνειλιγμένη ἀκύει.

Ἄρα α'. πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, καθ' ἃς φέρεται ἐκχωριζόμενον τὸ νῆμα (καλοῦνται δὲ φιλοῦσαι ἡμιδιάμετροι), ἁπτόμεναί εἰσι τῆς ἐνειλιγμένης ΒΑΕ· διὰ γὰρ τὴν καμπὴν ἡ καμπύλη ΒΑΕ οὐδὲν ἄλλο κοινὸν τῇ ΑΓ εὐθείᾳ σημεῖον ἔχει, ἢ τὸ Α.

β΄. Κάθετος ἡ ΜΓ ἐπὶ τοῦ πέρατος τῆς φιλούσης ἡμιδιαμέτρου ἐστὶ προδήλως ἁπτομένη τῆς ἐξειλιγμένης· εἴγε ἁπτομένη ἐν γένει ἐστὶν ἡ φορὰ, ἣν φέρεται τὸ γεννητικὸν σημεῖον ἐν τῷ ἀπογεννᾶν τὴν καμπύλην πρὸς ἕν τι δεδομένον σημεῖον αὐτῆς τῆς καμπύλης· ἀλλὰ ΜΓ ἐστὶ προδήλως φορὰ, ἣν φέρεται τὸ γεννητικὸν σημεῖον Ε πρὸς τὸ σημεῖον Γ· ἐντεῦθεν ἄρα πᾶσαι αἱ τῆς ἐξειλιγμένης ἁπτόμεναι ΜΓ κάθετοί εἰσι ταῖς τῆς ἐνειλιγμένης ἁπτομένης ΑΓ, καὶ τἀνάπαλιν.

γ΄. Πᾶσα φιλοῦσα ἡμιδιάμετρος ἴση ἐστὶ τῷ τόξῳ ΑΕ, ἀφ' οὗ ἀποχωρίζεται.

339. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ ἐξειλιγμένη ΒΖ ἐστὶν ἡμικυκλοειδὴς, ἐξισουμένη τῇ ἐνειλιγμένῃ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΓ (χ. 163).

ΔΕΙΞΙΣ α΄. Εἰλήφθω φιλοῦσα ἡμιδιάμετρος Ρρ ἡ καὶ τῆς ΒΓ ἁπτομένη, καὶ ἤχθω ΡΟ παράλληλος τῇ ΒΕ· ἡ τοίνυν χορδὴ ΒΟ παράλληλος ἔσεται τῇ Ρρ (*)· ἄρα ἡ ὑπὸ Βνρ = ΟΒν (Γεωμ. 133)· γραφέντος οὖν ἐπὶ τῆς καθέτου νΤ = ΕΖ = ΕΓ ὡς ἐπὶ διαμέτρου, κύκλου τοῦ νρΤ, ἔσται τὸ τόξον νρ = ΒΟ· καὶ γὰρ ἡ γωνία Βνρ μετρεῖται τῷ τόξῳ $\frac{\nu\rho}{2}$ (Γεωμ. 134)· ἡ δὲ γωνία ΟΒν μετρεῖται τῷ τόξῳ $\frac{\text{ΒΟ}}{2}$· ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ Βνρ = ΟΒν, ὡς ἤδη ἐφάνη· ἄρα $\frac{\nu\rho}{2} = \frac{\text{ΒΟ}}{2}$· ἄρα νρ = ΒΟ.

(*) Τὸ γὰρ Β κορυφή ἐστι τῆς ἡμικυκλοειδοῦς ΒΡΓ, καὶ Ρρ ἔστιν αὐτῆς ἁπτομένη, καὶ ΒΟ ἔστι χορδὴ, ἐναπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς κορυφῆς Β, καὶ τοῦ κατὰ τὸν γεννήτορα κύκλου σημείου Ο, ὃ συζοιχεῖ τῷ τῆς ἁφῆς σημείῳ Ρ· ἄρα (335) ΒΟ παράλληλός ἐστι τῇ Ρρ.

β'. Παρὰ ταῦτα, ἐπεὶ ΟΡ παράλληλος τῇ Βν (ἐκ κατασκευῆς) καὶ ΒΟ τῇ Ρν παράλληλος (335), ἄρα Βν = ΟΡ (Γεωμ. 236) = τῷ τόξῳ ΒΟ (334) = τῷ τόξῳ νρ (ἀνωτ. α'.)· γραφέντος δὲ ἐπὶ τῆς ΕΖ τοῦ κύκλου ΕβΖ, καὶ ἀχθείσης ρβ παραλλήλου τῇ Βν, ἔσονται ἴσα τὰ τόξα νρ, βΕ (Γεωμ. 169)· ἄρα τοῦ Βν ἰσουμένου τῷ τόξῳ νρ, καὶ ἑπομένως τῷ βΕ, νΕ ἰσωθήσεται τῷ τόξῳ βΖ (ἐπεὶ ΒνΕ ἰσοῦται τῷ ὅλῳ τόξῳ ΕβΖ, 332)· ἀλλὰ, διὰ τὰς ἴσας χορδὰς νρ, βΕ (Γεωμ. 47) καὶ ἐν δυσὶ παραλλήλαις κειμένας, ἔσται τὸ ρνΒΕ παραλληλόγραμμον· ἄρα ρβ = νΕ = τῷ τόξῳ βΖ, καὶ ρυ = βΖ σὺν τῷ βυ, ὅ ἐστι προφανῶς ἡμίτονον τοῦ βΖ τόξου· ἐπεὶ ἄρα, γενομένης ρυ = υ, καὶ τοῦ τόξου βΖ = χ, ἔσται υ = χ + ἡμ. χ, ἐξίσωσις τῆς κυκλοειδοῦς (333)· τὸ ἄρα σημεῖον ρ τοῦ κύκλου ρΤν ἐπαυήκει ἀναμφιβόλως τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ, ἧς ἐστι γεννήτωρ ὁ ΕβΖ κύκλος.

Φημὶ δὴ τέλος, ὡς πρὸς τῷ ρ ἐστὶν ἡ ἡμιδιάμετρος ρΡ κάθετος τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ, τῇ ἀπογεννηθείσῃ ὑπὸ κύκλου γεννήτορος τοῦ ΕβΖ· καὶ γὰρ ἀχθείσης τῆς ρΤ παραλλήλου τῇ χορδῇ βΖ, ρΤ ἔσται ἁπτομένη τῆς καμπύλης κατὰ τὸ ρ (335)· ἀλλ' ἐκ τῶν παραλλήλων ρν, βΕ, καὶ ρΤ, βΖ, ἡ ὑπὸ Τρν = τῇ ὀρθῇ (Γεωμ. 180) ΖβΕ· ἄρα ρΤ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τοῦ ρ τῇ ἁπτομένῃ ρΤ, καὶ δὴ καὶ τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ, κατὰ τὸ ρ, ὅ ἐστιν ἀρχὴ ταύτης τῆς ἁπτομένης.

Τῆς ἡμιδιαμέτρου ἄρα Ρρ πρὸς τὸ δοκοῦν εἰλημμένης, δυνατὸν εἰπεῖν ἐν γένει, ὡς ἅπασαι αἱ ἡμιδιάμετροι τῆς ἐνειλιγμένης εἰσὶ κάθετοι τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ· ἔσονται ἄρα κάθετοι καὶ τῇ ζητουμένῃ ἐξειλιγμένῃ· καὶ γὰρ ἡ ἑκάστης ἡμιδιαμέτρου φορὰ Ρρ ἐστι προδήλως κάθετος τῇ

φορᾷ τοῦ πέρατος ρ ἐν ἑκάςῳ καταλειπομένῳ ἴχνει εἰς ςοιχεῖον τῆς ἐξειλιγμένης (338)· παρὰ δὲ ταῦτα, δύω καμπύλαι, κοινὸν ἔχουσι σημεῖον τὸ Β, ἃ δύνανται ἔχειν κοινὰς τὰς καθέτους (*)· τῆς ἄρα ἐξειλιγμένης ΒΓ κοινὸν ἐχούσης σημεῖον τὸ Β τῇ ἡμικυκλοειδεῖ ΒΖ τῇ ὡς παρὰ τοῦ κύκλου ἀπογεννηθείσῃ, ΒΖ ἔςαι καμπύλη ἐξειλιγμένη τῆς ΒΓ· ἄρα ἡ ἐξειλιγμένη ἁπάσης ἡμικυκλοειδοῦς ἔςιν ἑτέρα ἡμικυκλοειδὴς, ἀκριβῶς ἴση τῇ ἐνειλιγμένῃ. Ο. Ε. Δ.

340. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Η' χορδὴ ρν = ΒΟ (Γεωμ. 47), ἡ διὰ τὸ ΒΟΡν παραλληλόγραμμον, ἡ χορδὴ ΒΟ = Ρν· ἔςιν ἄρα Ρρ = 2ΒΟ . Ρρ = τῷ τόξῳ ΒΡ· ἄρα ΒΡ = 2ΒΟ, τουτέςιν ἐν γένει „πᾶν τόξον κυκλοειδοῦς „τὸ ΒΡ διπλῶν ἐςι τῆς ἀντιςοιχούσης ΒΟ χορδῆς τοῦ γεν„νήτορος κύκλου· ἄρα ὅλη ἡ ἡμικυκλοειδὴς, ἔχουσα χορδὴν „ἀντιςοιχον τῇ διαμέτρῳ ΖΕ τοῦ γεννήτορος κύκλου, ἔσε„ται διπλῆ ταύτης τῆς διαμέτρου· ἄρα ὅλη ἡ κυκλοει„δὴς ΒΖΘ ἴση ἐςὶ τῇ τετραπλῇ διαμέτρῳ τοῦ γεννήτο„ρος κύκλου."

341. ΠΟΡΙΣΑΑ Β΄. Ἐὰν ὦσι δύω ἀντίθετοι ἴσαι κυκλοειδεῖς ΤΒ = ΓΘ, ἡ ἐκκρεμὲς σῶμα, προσδεδεμένον τῷ Ζ πέρατι τοῦ νήματος ΓΖ, ἀπολικνῆται ἐκ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Θ, διαδραμεῖται προδήλως ἐς μὲν τὸ Ζ ἐξειλιγμένην ΒΖ· εἶτα ἐνειλισσόμενον τῇ ΓΘ, διαδραμεῖται τὴν ΘΖ ἐξειλιγμένην τῆς ΓΘ· τὸ ἄρα ἐκκρεμὲς Ζ διανύσει τὴν ὅλην κυκλοειδῆ ΒΖΘ.

(*) Γνα γὰρ ὦσι δύω διάφοροι καμπύλαι, ἐπάναγκες τὰ δύω γεννητικὰ αὐτῶν σημεῖα, ἀποχωρήσαντα τοῦ κοινοῦ σημείου Β, κατὰ διαφόρους κινηθῆναι φορᾶς· ὅθεν ἡ θατέρα κάθετος ἐκ ἔτι ἔσεται τοῦτο ἡ θατέρα.

342. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰ ἄρα τὸ ὡρολογίου τινὸς ἐκκρεμὲς ἠδύνατο ἐφαρμόζεσθαι μεθ' ἑκάστην ἀναλίκνησιν ἐπὶ τῶν τόξων ΓΘ, ΓΒ τῶν κυκλοειδῶν, σφαιρίδιον τὸ προσδεδεμένον τῷ αὐτοῦ πέρατι Ζ καταγράψει τὴν κυκλοειδῆ ΘΖΒ· ἀλλὰ γὰρ, ὡς ἐν τῇ Φυσικῇ δειχθήσεται, αἱ ἀναλικνήσεις ἐκκρεμοῦς, κυκλοειδῆ καταγράφοντος, εἰσὶν ἰσόχρονοι, τουτέστιν ἴσον διαρκοῦσιν, ὅσῳ ἂν μείζους, ἢ ἐλάττους, γένωνται· τοῦτο δὲ ἀνακεκάλυπται πρὸς τῷ τέλει τοῦ 17 αἰῶνος ὑπὸ τοῦ περικλεοῦς Οὐγενίου· καὶ ἐδόκει γενέσθαι ἤδη ἡ τελειότης τῶν ὡρολογίων· ἀλλ' ἡ δυσχέρεια τοῦ ἀκριβῶς ἐφαρμόζεσθαι τοῖς κυκλοειδέσι τόξοις τὰ μεταλλικὰ νήματα, αἱ διάφοροι ὑψώσεις, αἱ ἐν καιροῖς ποικίλοις φωραθεῖσαι, τὸ ἐπικαμπὲς μέρος τοῦ ἐκκρεμοῦς, ὃ τοῖς τόξοις ἐφηρμόζετο, ἀπέδειξαν κυκλικὰς τὰς ἀναλικνήσεις.

Ἀλλὰ ἐ τούτων οὕτως ἐχόντων, τόξον μέντοι κύκλου τοῦ ΕΒΖ τὸ Ζ, ὃ εἴη τριῶν, ἢ τεσσάρων, μοιρῶν, συμπίπτει ὡς πρὸς αἴσθησιν τῇ κυκλοειδεῖ ΒΖΘ· καθισταμένου ἄρα ἅλις ἐπιμήκους τοῦ ἐκκρεμοῦς τῶν ὡρολογίων, οἱ αἱ ἀναλικνήσεις εἶεν φυσικῶς κυκλικαὶ, ἔσονται αἱ ἀναλικνήσεις αὗται ὡς πρὸς αἴσθησιν ἰσόχρονοι, ὡς λίαν σμικραί· κατὰ τοῦτον ἄρα τὸν τρόπον ἱκανῶς ἐτελειοποιήθησαν τὰ ὡρολόγια· ἐ οὕτως ἄρα καμπύλη εὑρεθεῖσα τὸ κατ' ἀρχὰς ἐκ μόνης ἁπλῆς περιεργείας ἐ διατριβῆς, ὡς καταγραφομένη ἐκ τῶν τροχῶν τῶν ἁμαξῶν, καθάπερ ἤδη εἴρηται, τέχνας πρὸς τελειότητα ἀποβλέπειν παραίτιος ἐγένετο. Ἀλλὰ περὶ τούτων ἐροῦμεν ἐ ἐν τῇ Μηχανικῇ.

ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΩΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΘΕΩΡΟΥΜΕΝΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΟΣ.

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τοῦ Λογισμοῦ τῶν Ἀπειροσῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ τοῦ, ὅπως τὰ ἀπειροσὰ εὑρίσκονται.

1. Ἐὰν ποσότης ἡ χ μέρει ἑαυτῆς ἀπειροσῷ αὐξηθῇ, ἢ εἶτα ἡ χ πρὸς τὴν οὕτως αὐξηθεῖσαν χ παραβληθῇ, ἡ παράθεσις αὕτη ἐκτεθήσεται οὕτω $\chi : \chi + \frac{\chi}{\infty}$.

Σαφὲς οὖν ἐστιν, ὡς ἡ διαφορὰ τῆς πρώτης καταστάσεως τῆς χ πρὸς τὴν δευτέραν ἐστὶ $\frac{\chi}{\infty}$· ταύτην δὲ τὴν διαφορὰν ἐξέστω σημῆναι διὰ $\delta\chi$, ἔκθεσις, ἣν ἀπαγγελοῦμεν οὕτως: ἡ διαφορὰ τῆς ἁπλῆς ποσότητος χ, ἣ διαφέρει ἑαυτῆς, ἀπειροσῷ τινι μέρει προσαυξηθείσης· α΄. οὐν οὐκ ἐκληπτέον ταύτην τὴν ἔκθεσιν ὡς $\delta \times \chi$ (Συμ. Λογ. 11)· ἀλλὰ μόνον ὡς διαφορὰν τῆς χ, ἣ διαφέρει τῆς χ, ἀπειροσὸν ἐπαυξηθείσης· β΄. τὴν χ ἥκιστα νομιστέον ἄγνωστον, ἀλλὰ μόνον ποσότητα εὐμετάβλητον (Συμ. Λογ. 3)· γ΄. ἡ ἔκθεσις αὕτη $\delta\chi$ κληθῆναι δύναται ἀπειροσὸν μέρος τῆς χ, ἢ ἁπλῶς ἀπειροσὸν, τοῦ ὑστατικοῦ ἐξυπακουομένου.

2. Ἐὰν δὲ ἡ ποσότης χ μειωθῇ μέρει ἑαυτῆς ἀπειροστῷ, γενήσεται πάντως $\chi - \frac{\chi}{\infty}$· ἔστω ὖν $- \frac{\chi}{\infty} = -$ δχ· εἴτ' ὖν ἀπειροστὸν τῆς χ λειπτικόν.

3. Αὔξονται δὲ ὅτως, ἢ μειοῦνται, μόναι αἱ μεταβληταὶ ποσότητες, οἷαί εἰσιν ἐν ταῖς καμπύλαις αἱ τεταγμέναι, αἱ ἀποτετμημέναι κτ., ἃς ὡ διὰ τῶν ὑστέρων γραμμάτων τοῦ Ἀλφαβήτου σημαίνουσιν, οἷον χ, υ, ψ, ω· αὐξομειώσεων δὲ ἀνεπίδεκτοι διατελοῦσιν αἱ ἄτρεπτοι ποσότητες, οἷοί εἰσιν οἱ ἄξονες, αἱ διάμετροι κτ., ἃς ὡ διὰ τῶν πρώτων γραμμάτων, α, β, γ, κτ. ἐμφαίνουσι.

4. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἀπειροστὸν τῆς ποσότητος χ ἔστιν, ᾧ διαφέρει ἑαυτῆς αὐξηθείσης, ἢ μειωθείσης, ἐλαχίστῳ τινὶ μεγέθει.

5. Πᾶσα μεταβλητὴ ποσότης, θεωρεῖσθαι ἔχουσα ὡς ἐξ ἀπείρων ἰσαλλήλων μερῶν συνεστηκυῖα, εἰς αὐτὰ ταῦτα ὡς εἰς στοιχεῖα ἀναλύεσθαι ἔχει.

6. ΟΡΙΣΜΟΣ. Λογισμὸς τῶν ἀπειροστῶν ἀκούει ὁ τρόπος, καθ' ὃν, ποσοτήτων μεταβλητῶν δοθεισῶν, εὑρίσκονται ταῦτα τὰ αὐτῶν ἀπειροστὰ μέρη, ἢ στοιχεῖα.

7. Ὅταν ὖν ποσότης μεταβλητὴ χ, υ, ψ, ἄμοιρος ἢ δείκτου, ὡ συνεργοῦ, ληφθήσεται αὐτῆς τὸ ἀπειροστὸν, γράφουσι δχ, δυ, δψ, ἐὰν ἐλαχίστῳ μεγέθει προσαύξηται· ἐὰν δὲ μειῶται, — δχ, — δυ, — δψ.

8. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ τὸ ἀπειροστὸν δχ ποσότητός τινος τῆς χ μέρος ἐλάχιστόν ἐστιν αὐτῆς τῆς ποσότητος· α΄. ὁ ποσότητος τρεπτῆς πρὸς τὸ κατ' αὐτὴν ἀπειροστὸν λόγος δι' ἑδενὸς ἀριθμοῦ δηλωθῆναι δύναται· β΄. τὸ ἀπειροστὸν δχ ὡς ἀπειροστὸν τῆς χ μέρος, πρὸς αὐτὴν παραβαλλόμενον, ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ο (Συμβ. Λογ. 530).

9. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Διάφορα μέντοι ἀπειροστὰ δχ, δυ ἀλλήλοις παραβληθῆναι δύνανται, ὡς καὶ αὐτῶν ὅλαι ποσότητες χ, υ πρὸς ἀλλήλας παραθετέαι ὑπάρχουσιν· ὁ λόγος ἂν τῶν δχ, δυ ἔσται πεπερασμένος, καὶ ὁ αὐτὸς τῷ τῶν χ, υ· ἐὰν γὰρ ἡ χ = 2υ, καὶ δχ = 2δυ· καὶ ὅλως ἔσται δχ : δυ :: χ : υ (Συμ. Λογ. 234).

10. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἡ ποιοτὰ δὲ ἐκληπτέον τὸ ἀπειροστὸν ὡς φύσει ὑφεστώτι ποσὸν πραγματικῶς, εἴτ' ἂν φυσικῶς· ἔστι γὰρ ἀληθῶς πρᾶγμα τὸ πεπερασμένον καὶ ὡρισμένον· ὑποτίθεται δὲ κατ' ἐπίνοιαν ποσόντι δι' ἀπείρου ἀριθμοῦ διῃρημένον· ἄλλως τε τὰς ἐκφράσεις, ἄπειρον, ἀπειροστὸν, ἐν τῇ μαθηματικῇ ἐκληπτέον ὡς ὅρους χρεωστικούς.

11. ΘΕΩΡΗΜΑ Ποσότητος ἁπλῆς, ἐκτιθεμένης δι' ἑνὸς γράμματος καὶ δι' ἑνὸς συνεργοῦ, οἵα ἡ πχ, ἀπειροστόν ἐστι τὸ δχ × π, εἴτ' ἂν πδχ.

ΔΕΙΞΙΣ. Καὶ γὰρ, ἐὰν μόνη ἡ χ αὐξηθῇ μέρει ἑαυτῆς ἀπειροστῷ, παρέξει δχ· ἡ δὲ 2χ αὐξηθεῖσα ὡσαύτως, παρέξει 2δχ, ἡ δὲ 3χ, 3δχ, καὶ ἐν γένει πχ παρέξει πδχ.

12. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Ποσότητος ἁπλῆς δείκτου εὐμοιρούσης, οἵα ἡ χ^{ν}, εὑρεῖν τὸ ἀπειροστόν.

ΛΥΣΙΣ. α'. Πεπολλαπλασιάσθω αὕτη ἡ ποσότης χ ἐπὶ τὸν αὐτῆς δείκτην ν· ὅθεν ἔσται νχ· β'. τεθείσθω τῷ χ ἐπὶ τοῦ δε τοῦ γινομένου δείκτης ὁ πρὶν, ἠλαττωμένος μονάδι, οἷον $\nu - 1$· γ'. τὸ ἄτω γεγονὸς $\nu\chi^{\nu-1}$ πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ δχ, ἀπειροστὸν τῆς χ· καὶ ὅτως ὅλον τὸ $\nu\chi^{\nu-1}$ δχ ἔσται ἀπειροστὸν τῆς χ^{ν}· ὅτω δὲ ἀπειροστὸν τῆς χ^2, ἔσται τὸ $2\chi^{2-1}$ δχ = 2χδχ τῆς δὲ χ^3, τὸ $3\chi^{3-1}$ δχ = $3\chi^2$δχ καὶ ὅτως ἑξῆς.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν χ, ἀπειροσῷ μεγέθει αὐξομένη, γένηται $\chi + \frac{\chi}{\infty}$, ἢ $\chi + \delta\chi$ (1), ἡ χ^2 μετὰ ταύτης τῆς αὐξήσεως ἔσται $\overline{\chi+\delta\chi} \times \overline{\chi+\delta\chi} = \chi^2 + 2\chi\delta\chi + \delta\chi^2$· ἀλλὰ $\delta\chi^2$ γινόμενόν ἐστι τῆς $\delta\chi$ ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιασθείσης, καὶ ἑπομένως ἀπειροσὸν δευτεροταγὲς (Συμβ. Λογ. 527), καὶ ἴσα καὶ μηδενὶ ἐκλεπτέον· ἀπειροσὸν ἄρα ἔσται τοῦ χ^2, τὸ $2\delta\chi\delta\chi$· ὅπερ ταὐτόν ἐστι τῷ $2\chi^{2-1}\delta\chi$.

13. Ὡσαύτως ἐπὶ τοῦ κατὰ τὴν χ^3 ποσότητα ἀπειροσοῦ, τὸ γινόμενον ὑπὸ $\overline{\chi+\delta\chi} \times \overline{\chi+\delta\chi} \times \overline{\chi+\delta\chi} = \overline{\chi+\delta\chi}^3 = \chi^3 + 3\chi^2\delta\chi + 3\chi\delta\chi^2 + \delta\chi^3$ (Συμβ. Λογ. 95)· ἀλλ' ἐπεὶ τὸ δευτεροταγὲς $3\chi\delta\chi^2 = 0$, καὶ τὸ τριτοταγὲς $\delta\chi^3 = 0$, καταλείπεται τῆς χ^3 ἀπειροσὸν, τὸ $3\chi^2\delta\chi = 3\chi^{3-1}\delta\chi$.

14. Συναχθήσεται δὲ ὡσαύτως, ἀπειροσὸν μὲν τῆς χ^4 τὸ $4\chi^{4-1}\delta\chi = 4\chi^3\delta\chi$, ἐν γένει δὲ τῆς χ^n, τὸ $n\chi^{n-1}\delta\chi$.

15. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ῥιζικὴ ἢ ἡ ἁπλῆ ποσότης, οἵα ἡ $\sqrt[n]{\chi}$, ἁ. τρεπτέον αὐτὴν εἰς $\chi^{\frac{1}{n}}$, ἐξαλείφοντας τὸ σύμβολον (Συμβ. Λογ. 148)· β'. ἐκ τῶν ἤδη εἰρημένων ἀπειροσὸν τῆς $\chi^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\chi}$, ἔσται τὸ $\frac{1}{n}\chi^{\frac{1}{n}-1}\delta\chi$· τῆς δὲ $\sqrt{\chi} = \chi^{\frac{1}{2}}$ ἐστὶ τὸ $\frac{1}{2}\chi^{\frac{1}{2}-1}\delta\chi = \frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}}\delta\chi$ τῆς δὲ $\sqrt[3]{\chi} = \chi^{\frac{1}{3}}$, τὸ $\frac{1}{3}\chi^{\frac{1}{3}-1}\delta\chi = \frac{1}{3}\chi^{-\frac{2}{3}}\delta\chi$· τῆς δὲ $\sqrt[n]{\chi^9} = \chi^{\frac{9}{n}}$, τὸ $\frac{9}{n}\chi^{\frac{9}{n}-1}\delta\chi$.

16. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὸ ἀπειροστὸν τοῦ ὑπὸ δύω τρεπτῶν παραγόντων γινομένου χυ.

ΛΥΣΙΣ. Πεπολλαπλασιάσθω ὁ πρῶτος παράγων χ ἐπὶ τὸ τοῦ δευτέρου ἀπειροστὸν· καὶ εἶτα ὁ δεύτερος υ ἐπὶ τὸ τοῦ πρώτου· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύω γινομένων $2\delta\upsilon + \upsilon\delta\chi$ ἔσεται τὸ ἀπειροστὸν τῆς χυ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν χ μὲν αὐξηθὲν γένηται $\chi + \delta\chi$, τὸ δὲ, $\upsilon + \delta\upsilon$, τὸ γινόμενον υχ ἔσεται $\overline{\chi + \delta\chi} \times \overline{\upsilon + \delta\chi} = \chi\upsilon + \upsilon\delta\chi + \chi\delta\upsilon + \delta\chi \times \delta\upsilon$· ἀλλὰ $\delta\chi \times \delta\upsilon$, γινόμενον ὑπὸ δύω ἀπειροστῶν, ἀπειροστόν ἐστι δευτεροταγὲς (Συμβ. Λογ. 527)· καὶ μεδὲν πρὸς τὰ πρωτοταγῆ $\chi\delta\upsilon$, $\upsilon\delta\chi$ (Συμβ. Λογ. 528), καὶ χυ ἔστιν ἡ δοθεῖσα ποσότης· καταλείπεται ἄρα τῆς χυ ἀπειροστὸν τὸ $\chi\delta\upsilon + \upsilon\delta\chi$.

Τὸ τῆς $\chi^3\upsilon^2$ ἀπειροστὸν ἔσται $\chi^3 \times 2\upsilon\delta\upsilon + \upsilon^2 \times 3\chi^2\delta\chi = 2\chi^3\upsilon\delta\upsilon + 3\chi^2\upsilon^2\delta\chi$.

17. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ ἀπειροστὸν τοῦ ὑπὸ τριῶν τρεπτῶν παραγόντων γινομένου χυψ, εὑρεθήσεται, ἐὰν ἕκαστον γινόμενον ὑπὸ δύω παραγόντων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ ἀπειροστὸν τοῦ τρίτου παράγοντος, καὶ εἰς ἓν συναφθῶσιν ἅπαντα τὰ γινόμενα· ὅτως ὂν τοῦ χυψ ἀπειροστὸν ἔσται τὸ $\chi\upsilon\delta\psi + \chi\psi\delta\upsilon + \upsilon\psi\delta\chi$, καὶ γὰρ $\overline{\chi + \delta\chi} \times \overline{\upsilon + \delta\upsilon} \times \overline{\psi + \delta\psi} = \chi\upsilon\delta\chi + \chi\psi\delta\upsilon + \upsilon\psi\delta\chi$, ἀλογιζομένων ἀμέλει τῶν ἡττοταγῶν ἀπειροστῶν.

18. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐὰν γινομένῳ τινὶ τῷ πχυ ἐνυπάρχῃ ποσὸν ἄτρεπτον τὸ π, πεπολλαπλασιάσθω πχ ἐπὶ τὸ ἀπειροστὸν τῆς υ, εἶτα υ ἐπὶ τὸ τῆς πχ· ὅθεν ἔσται $\pi\chi\delta\upsilon + \upsilon\pi\delta\chi$· τοῦ γὰρ πχ γινομένου $\pi\chi + \pi\delta\chi$ (11), καὶ υ, $\upsilon + \delta\upsilon$, ἔσται $\overline{\pi\chi + \pi\chi\delta\chi} \times \overline{\upsilon + \delta\upsilon} = \pi\chi\upsilon = \pi\chi\upsilon + \upsilon\pi\delta\chi + \pi\chi\delta\upsilon + \pi\delta\chi\delta\upsilon$· ὅθεν ἀπορριπτέον μέν ἐστι

πάντως ὡς δευτεροταγὲς τὸ πδχδυ, ἀφαιρετέον δὲ τὸ ἐν ἀρχῇ πχυ.

19. Ἐν γένει δὲ πρὸς εὕρεσιν ἀπειροστῆ ποσότητος τῆς π ἀντεισακτέον ἀντὶ τῶν τρεπτῶν, χ, υ κτ, ἐξ ὧν σύγκειται αὕτη, τας ποσότητας χ+δχ, υ+δυ, κτ· καὶ δὴ πορισθήσεται ποσότης ἄλλη, ἥτις κληθήτω Π· τῆς ὧν π ἀφαιρετέον τὴν π, ἵνα γένοιτο Π — π, ταύτης δὲ τῆς ποσότητος ἀποκοπτέον τὰς πρὸς ἄλλας ὅρας μηδὲν γινομένας· τὸ δὲ κατάλοιπον ἔσται τὸ ζητούμενον ἀπειροστὸν δπ, ἐλεύθερον τῶν ἀχρήστων ὅρων· ἔστω π = χυ· ἀντικατασταθέντος ὧν χ+δχ ἀντὶ χ, καὶ υ+δυ ἀντὶ υ, πορισθήσεται Π = χυ + υδχ + χδυ + δχδυ, καὶ Π — π ἔσται χυ + υδχ + χδυ + δχδυ — χυ = υδχ + χδυ, παροραμένου τοῦ δευτεροταγοῦς δχδυ.

Ἐὰν δὲ ταῖς τρεπταῖς συνεζευγμέναι ὦσι καὶ ἄτρεπτοι, οἷον α+χ, καὶ βγ+χχ, ἐν τῇ τῶν ἀπειροστῶν λήψει, αἱ ἄτρεπτοι, ἐπείπερ ἀπειροστῶν ἀμοιροῦσι (3), παραλείπονται· οἷον τῆς μὲν α+χ ἀπειροστόν ἐστι τὸ δχ τοῦ α παροραμένου, τῆς δὲ βγ, τὸ 2χδχ.

20. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τοῦ πλάσματος $\frac{υ}{χ}$ τὸ ἀπειροστὸν εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπεὶ $\frac{υ}{χ} = υ \times \frac{1}{χ}$, καὶ $\frac{1}{χ} = χ^{-1}$ (Συμβ. Λογ. 149) ἄρα $\frac{υ}{χ} = υχ^{-1}$· τοῦ δὲ $υχ^{-1}$ ληφθέντος τοῦ ἀπειροστοῦ (16), ἔσται $υδ(χ^{-1}) + χ^{-1}δυ$, καὶ ἑπομένως (12) $δ(υχ^{-1}) = -υχ^{-2}δχ + χ^{-1}δυ$. Ο. Ε. Π.

21. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αὕτη δὲ ἡ ποσότης δι' ἀναγωγῆς γίνεται $-\frac{\upsilon\delta\chi}{\chi^2}+\frac{\delta\upsilon}{\chi}=\frac{\chi\delta\upsilon-\upsilon\delta\chi}{\chi^2}$, τοῦτ' ἔστι ,,τὸ παντὸς κλάσματος $\left(\frac{\upsilon}{\chi}\right)$ ἀπειροστὸν ἰσοῦται ,,τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τοῦ κατὰ τὸν ἀριθ- ,,μητὴν ἀπειροστοῦ, πλὴν τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ, ,,καὶ τοῦ κατὰ τὸν παρονομαστὴν ἀπειροστοῦ, διῃρημένῳ διὰ ,,τοῦ ἀπὸ τοῦ παρονομαστοῦ τετραγώνου" καὶ οὗτός ἐστιν ὁ κοινῇ ἀποδιδόμενος κανὼν εἰς εὕρεσιν τῶν κατὰ τὰ κλάσματα ἀπειροστῶν.

22. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Εἰ λαβεῖν προκέοιτο τὸ ἀπειροστὸν τοῦ $\alpha\chi^3\upsilon^2$, θεωρητέον τὸ πρῶτον χ^3 καὶ υ^2 ὡς δύω ἁπλᾶς τρεπτὰς ποσότητας· καὶ δὴ εὑρεθήσεται (16, 19) $\delta(\alpha\chi^3\upsilon^2)=\alpha\chi^3\delta(\upsilon^2)+\alpha\upsilon^2\delta(\chi^3)$· ἐξῆς δὲ (12) $\delta(\alpha\chi^3\upsilon^2)=2\alpha\chi^3\upsilon\delta\upsilon+3\alpha\upsilon^2\chi^2\delta\chi$, καὶ ἐν γένει $\delta(\alpha\chi^\mu\upsilon^\nu)=\alpha\chi^\mu\delta(\upsilon^\nu)+\alpha\upsilon^\nu\delta(\chi^\mu)=\nu\alpha\chi^\mu\upsilon^{\nu-1}\delta\upsilon+\mu\alpha\upsilon^\nu\chi^{\mu-1}\delta\chi$.

23. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Εἰ δὲ προκέοιτο λαβεῖν τὸ ἀπειροστὸν ποσότητος πολυωνύμου, ἧς χωρὶς ἕκαστον μέρος ὑψῶτο εἰς ἕνα τινὰ βαθμόν, εἰλήφθω χωρὶς ἑκάστου ὅρου τὸ ἀπειροστόν· ἔτω $\delta(\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\gamma\chi\upsilon)=3\alpha\chi^2\delta\chi^2\delta\chi+\gamma\chi\delta\upsilon+\gamma\upsilon\delta\chi$· ὡσαύτως $\delta\left(\alpha\chi^2+\beta\chi+\frac{\gamma\upsilon}{\chi^2}\right)=\delta(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma\chi^{-2}\upsilon)=2\alpha\chi\delta\chi+\beta\delta\chi-2\gamma\chi^{-3}\upsilon\delta\chi+\gamma\chi^{-2}\delta\upsilon$· ὁμοίως $\delta(\chi^3\upsilon+\alpha\upsilon^2+\beta3)=3\chi^2\upsilon\delta\chi+\chi^3\delta\upsilon+2\alpha\upsilon\delta\upsilon$, τοῦ $\beta3$ ὡς ποσότητος ἀτρέπτου ἀπειροστὸν οὐδὲν ὅλως ἔχοντος (19).

24. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Ποσότητος πολυωνύμου εἰς βαθμὸν ὑψωμένης εὑρεῖν τὸ ἀπειροστὸν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω τοιάδε ποσότης ἡ $(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)^5$· θεωρείσθω ὖν αὕτη, ὡς εἰ ἦν μία μόνη τρεπτὴ, ἧς εἰλήφθω τὸ ἀπειροστὸν κατὰ τὸν ἀποδοθέντα κανόνα (12)· τοιγαρῦν ἔσται $\delta(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)^5 = 5(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)^4 \times \delta(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2) = 5(\alpha+\beta\chi+\gamma\chi^2)^4 \times (\beta\delta\chi+2\gamma\chi\delta\chi)$· ὡσαύτως $\delta(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}} \times \delta(\alpha+\beta\chi^2) = \frac{5}{3}(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}} \times 2\beta\chi\delta\chi = \frac{10}{3}\beta\chi\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}}$. Ο. Ε. Π.

25. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἐὰν δὲ πολυώνυμος ὖσα ἡ ποσότης συγκέηται ἢ ἐκ διαφόρων ποιητῶν, θεωρητέον ἕκαστον ποιητὴν ὡς ἁπλῦν ποσὸν τρεπτὸν, ἢ χρηστέον τῷ ἀποδοθέντι κανόνι (16)· ὖτω τὴν $\chi^3(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}$ ἐκδεκτέον ὡς σύνθετον ἐκ δύω ποιητῶν χ^3 ἢ $(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}$· ἢ δὴ ἔσται $\delta(\chi^3(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}) = (\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}\delta(\chi^3)+\chi^3\delta(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}}$, ὅπερ ἐκ τῶν ἤδη ἐκτεθειμένων κανόνων γίνεται $3\chi^2\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{5}{3}} + \frac{10}{3}\beta\chi^4\delta\chi(\alpha+\beta\chi^2)^{\frac{2}{3}}$. ὡσαύτως $\delta\left(\frac{(\chi+\alpha)^3}{(\chi+\beta)^2}\right) = \delta((\chi+\alpha^3)\times(\chi+\beta)^{-2}) = (\chi+\alpha)^3\delta(\chi+\beta)^{-2} + (\chi+\beta)^{-2}\delta(\chi+\alpha)^3$, ταὐτὸν εἰπεῖν $= -2(\chi+\alpha)^3(\chi+\beta)^{-3}\delta\chi + 3(\chi+\beta)^{-2}(\chi+\alpha)^2\delta\chi$, ὅπερ τρέπεται εἰς $-\frac{2(\chi+\alpha)^3\delta\chi}{(\chi+\beta)^3}$

$+\frac{3(\chi+\alpha)^2\,\delta\chi}{(\chi+\beta)^2}$, καὶ ἀνάγεται εἰς

$$\frac{(\chi+3\beta-2\alpha)(\chi+\alpha)^2\delta\chi}{(\chi+\beta)^3}.$$

ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἐὰν δὲ ῥιζικὰ πολυώνυμα προκέωνται εἰς τὸ εὑρεῖν αὐτῶν τὰ ἀπειροσά, ἐκ τῶν (15) καὶ τῶν ἤδη ἐκτεθειμένων κανόνων ἐπιτηδευθήσεται αὐτῶν ἡ εὕρεσις· ἔστω $\delta(\sqrt{\alpha\alpha-\chi\chi}) = \delta(\alpha\alpha-\chi\chi)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}}\,\delta(\alpha\alpha-\chi\chi) = -\chi\delta\chi\,(\alpha\alpha-\chi\chi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\chi\,\delta\chi}{\sqrt{\alpha\alpha-\chi\chi}}$· καὶ ἐὰν γένει $\delta(\chi^{\mu}\sqrt[\pi]{(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\pi}}) = \delta[\chi^{\mu}(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\frac{\pi}{\pi}}] = \chi^{\mu}\,\delta(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\frac{\pi}{\pi}} + (\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\frac{\pi}{\pi}}\,\delta(\chi^{\mu}) = \frac{\pi\nu\beta}{\pi}\chi^{\mu+\nu-1}\,\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\frac{\pi}{\pi}-1} + \mu\chi^{\nu-1}\,\delta\chi\,(\alpha+\beta\chi^{\nu})^{\frac{\pi}{\pi}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἀπειροσῶν δευτέρων, τρίτων κτ.

26. Παρὰ τὰ ἤδη θεωρηθέντα ἡμῖν, ἃ καλεῖται πρῶτα ἀπειροσά, εἰς θεωρίαν ὑπάγονται καὶ δεύτερα, καὶ τρίτα κτ. προτάττωσι δὲ τῆς τρεπτῆς ποσότητος δύω μὲν δ, εἰ περὶ δευτέρα, τρία δὲ, εἰ περὶ τρίτα, λόγος γίνεται, καὶ ἑξῆς ὁμοίως· ἔστω ddχ ἐμφαίνει τῆς χ τὸ δεύτερον ἀπειροσόν.

27. Τῶν ἀπειροσῶν τὰ δεύτερα ἀνασκοπῶσιν ἐκλη-πτέον τὰς τρεπτὰς ποσότητας κατὰ βαθμὸς ἀνίσους, ὧν μέντοι ἡ διαφορὰ ἀπειροσήτις τυγγάνει, παρατιθεμένη αὐτοῖς τοῖς αὐξήμασιν· ὕτω ddx ἀπειροσή ἐσι, τῇ dx παραβαλλομένη· ὡσαύτως ἐν τοῖς τρίτοις dddx, ἡ d^3x (ἑκατέρως γὰρ σημαίνεται) ἀπειροσήτις ἐσὶ, τῇ ddx παρατιθεμένη, καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

28. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Εἰς δήλωσιν τοῦ ἀπὸ dx τετραγώνου γραπτέον πάντως $(dx)^2$· ἁπλούσερον μέντοι ἐκθετέον dx^2, ὃ ἤκισα δήπου δηλοῖ τὸ τοῦ x^2 ἀπειροσὸν, ὅπερ εἰώθαμεν σημεῖον ὕτω· $d(x^2)$· ἰσέον δὲ ὡς καίτοι ddx, καὶ dx^2 ἀπειροσὰ δευτεροταγῆ ἐμφαίνουσιν· οὐκ ἔσι μέντοι $ddx = dx^2$· τὸ μὲν γὰρ ddx ἔσιν ἀπειροσὸν δεύτερον τοῦ x· τὸ δὲ dx^2 ἔσι τὸ ἀπὸ dx τετράγωνον.

29. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Β΄. Ἵνα δὲ διορισθείη τὸ δεύτερον ἀπειροσὸν, ὅ,τι δήποτ' ἐσὶ φυσικῶς, θεωρητέον τὴν τρεπτὴν ποσότητα ἐν τρισὶν ἀλληλοδιαδόχοις προσεχεσάταις κατασάσεσι, καὶ ληπτέον τὸ ἀπειροσὸν τῆς δευτέρας, ᾧ διαφέρει τῆς πρώτης, καὶ τὸ τῆς τρίτης, ᾧ διαφέρει τῆς δευτέρας· καὶ τελευταῖον τὴν διαφορὰν, ἣ τοῦ πρώτου διαφέρει τὸ δεύτερον ἀπειροσόν· ὕτω πρώτη μὲν κατάσασις τῆς x, ἔσι x· δευτέρα δὲ αὐξηθεῖσα τῷ dx ἔσι $x + dx$· αὕτη δὲ πάλιν προσηυξήσθω τῇ ποσότητι $dx + d(dx)$· τοιγαροῦν αἱ τρεῖς ἀλληλοδιάδοχοι τῆς x κατασάσεις εἰσὶ, x, $x + dx$, $x + 2dx + d(dx)$· ἔσιν ἄρα ἡ τῆς δευτέρας ὑπὲρ τὴν πρώτην διαφορὰ dx· ἡ δὲ τῆς τρίτης ὑπὲρ τὴν δευτέραν, $dx + d(dx)$· τέλος δὲ ἡ διαφορὰ τῶν δύω τούτων ἀπειροσῶν, εἴτ' οὖν τῆς x τὸ δεύτερον ἀπειροσὸν, ἔσι $d(dx)$· ἄρα $ddx = d(dx)$· ἵν' οὖν τὰ δεύτερα εὑρίσκωμεν ἀπειροσὰ, ἐπάναγ-

κες λαμβάνειν τῶν πρώτων ἀπειροστῶν τὰ ἀπειροστὰ κατὰ τὰς προαποδοθέντας κανόνας.

30. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὰ δεύτερα ἀπειροστὰ τῆς χυ ποσότητος.

ΛΥΣΙΣ. Τὰ μὲν πρῶτα ταύτης εἰσὶ (16) χδυ + υδχ· τούτων ὧν αὖθις εἰλήφθω τὰ ἀπειροστὰ, ὡς εἴπερ χ ᾗ δχ, υ ᾗ δυ εἶεν ἁπλῶς ποσότητες τρεπταί· ἑκατέρου ὧν ὅρου, ὡς ἐκ δύω ποιητῶν παραγομένου, δύω παρέχοντος ὅρους (16), τὰ ἀμφοτέρων ἀπειροστὰ ἔσονται χδδυ + δυδχ + δυδχ + υδδχ, εἴτ' ὧν χδδυ + 2δυδχ + υδδχ.

31. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὡσαύτως τὸ δεύτερον ἀπειροστὸν τοῦ χ^2 εὑρεθήσεται λαμβάνουσι πρῶτον τὸ πρῶτον αὐτοῦ ἀπειροστὸν 2χδχ· ἑξῆς δὲ τούτου, ἐκληφθέντων τοῦτε χ ᾗ τοῦ δχ, ὡς εἰ ἦσαν ποσὰ τρεπτά, κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον τὸ ἀπειροστὸν 2χδδχ + 2δχ^2· ὡσαύτως δδ($\alpha\chi^\mu$) = δ($\mu\alpha\chi^{\mu-1}$ δχ) = $\mu\cdot(\mu-1)\,\alpha\chi^{\mu-2}\delta\chi^2 + \mu\alpha\chi^{\mu-1}$ δδχ (*)· εἰ δὲ προκείοιτο εὑρεῖν τὰ ἀπειροστὰ ποσοτήτων, αἷς ἔνεστι πρῶτα ἀπειροστά· εἴτ' ἐξ ἀπρίβους, εἴτε ᾗ μή, προελθόντα πράξεως, τῇ αὐτῇ αὖθις χρηστέον μεθόδῳ· ὅ-τω δ(χδυ) = χδδυ + δχδυ· ὡσαύτως δ($\frac{\delta\upsilon}{\chi}$) = δ

(*) Εὐλόγως ἄντις ἐνταῦθα διαπορήσειεν· εὑρισκομένων γὰρ τῶν πρώτων ἀπειροστῶν, παροράται αἱ ἀπειροστοὶ δευτεροταγεῖς ποσότητες· ἀλλ' ἐπείπερ ᾗ τὰ δεύτερα δευτεροταγεῖς εἰσιν ἀπειροστοὶ ποσότητες, μὴ, παροράντες ταῦτα ἐν τῇ ἐκτιμήσει τῶν πρώτων, τὰ δεύτερα ἐλλείποντα ἀπεργασώμεθα; ὁ μὰ Δία· τὸ γὰρ παροραθὲν δευτεροταγὲς ἀπειροστὸν ἐν τῇ λήψεσι τῶν δευτέρων συνεισενεγκεῖν δύναται ἀπειροστὸν τριτοταγὲς, ὅπερ παρατιθέμενον τῷ δευτέρῳ, ἐπείπερ τοῦτ' ἔστιν ἀπειροστὸν δευτεροταγὲς, παροράται, ἴσον τῷ μηδενὶ ἐκλαμβανόμενον.

$(\chi^{-1}\delta\upsilon) = -\chi^{-2}\delta\chi\delta\upsilon + \chi^{-1}\delta\delta\upsilon$· ὡσαύτως

$\delta\left(\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}\right) = \delta(\delta\chi\delta\upsilon^{-1}) = \delta\delta\chi\delta\upsilon^{-1} - \delta\chi\delta\upsilon^{-2}\delta\delta\upsilon =$

$\frac{\delta\delta\chi}{\delta\upsilon} - \frac{\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\upsilon^2}$.

32. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Συχνάκις τοῖς λογισμοῖς, οἷς εἰσέρχονται πολλαὶ τρεπταὶ, συμβαίνει ὑποτίθεσθαι ἄτρεπτον τὸ πρῶτον ἀπειροσὸν μιᾶς τῶν τρεπτῶν ποσοτήτων· τυτὶ δὲ συγχωρηθὲν (ἀεὶ γάρ τις ἔχει ἐκδέξασθαι ἕν τῶν πρώτων ἀπειροσῶν ὡς ὅρον μόνιμον παραθέσει πρὸς τ' ἄλλα πρῶτα) ἁπλυσέρυς ἀπεργάζεται τὺς λογισμύς· οἱ γὰρ, οἷς συμπέπλεκται τὸ ταύτης τῆς τρεπτῆς δεύτερον ἀπειροσὸν, ὅροι τῦ λογισμῦ ἐξαφανίζονται· τῦ γὰρ δχ ἀτρέπτυ ὑποτεθέντος, ἔςαι $\delta\delta\chi = 0$, ὅπερ σβέννυσι πάντας τὺς ὅρυς, οἷς ἐνυπάρχει τὸ $\delta\delta\chi$··· δεῖ δὲ προσοχῆς ἐνταύτῃ τῇ περιπτώσει, ἵνα μηδὲν λαμβάνηται ἀπειροσὸν τῦ δχ (εἴτ' ἓν τῆς ὡς ἀτρέπτυ λαμβανομένης ποσότητος), ἐνθ' ἂν ἀπαντᾷ ὁ ὅρος ὗτος, τοιγαρῦν τὸ ἀπειροσὸν τῦ $\frac{\delta\chi}{\delta\upsilon}$, τῦ μὲν δχ ἀτρέπτυ ὑποτεθέντος, εἴτ' ἓν τὸ τῦ $\delta(\delta\chi\delta\upsilon^{-1})$, ἔςι $-\delta\chi\delta\upsilon^{-2}\delta\delta\upsilon$, εἴτ' ἓν $-\frac{\delta\chi\delta\delta\upsilon}{\delta\upsilon^2}$, τῦ δὲ δυ ἀτρέπτυ ληφθέντος, ἔςι $\frac{\delta\delta\chi}{\delta\upsilon}$.

33. ΣΧΟΛΙΟΝ. Καὶ τὰ τρίτα δὲ, ὥσπερ τάτε πρῶτα καὶ δεύτερα, εὑρίσκονται, ἐκλαμβανομένων ἀμέλει τῶν τε πρώτων, καὶ δευτέρων οἷα ἁπλῶς τρεπτῶν ποσοτήτων· ὡσαύτως δὲ ἐπιτηδευθήσεται καὶ τῶν ἔτι ὑπερτέρων

ἀπειροστῶν ἡ εὕρεσις· παρατηρητέον μέντοι, ἵν' ἐν τῇ διελεύσει ἀπὸ τῶν πρώτων ἐπὶ τὰ δεύτερα, ἑνὸς ἅπαξ ἀπειροστοῦ ὡς ἀτρέπτου ληφθέντος, διατηρῆται ὡσαύτως ἄτρεπτον διὰ πασῶν ἐφεξῆς τῶν πράξεων.

34. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τ'πεθέμεθα μὲν ἐν τοῖς φθάσασι πάσας τὰς τρεπτὰς χ, υ, κτ ἅμα αὐξήσας, εἴτ' ἐν τῆς χ γινομένης χ + δχ, τὴν υ ἀποτελεῖσθαι υ + δυ, ᾗ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὡσαύτως· συμβαίνει μέντοι τινῶν αὐξομένων, τὰς ἄλλας μειοῦσθαι· τηνικαῦτα τοίνυν μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἀπειροστῶν ἀπονέμειν ἀνάγκη τὸ σύμβολον — τῇ μειουμένῃ ποσότητι· ἢ γοῦν δυνάμεθα ἐᾶν τὰ ἀπειροστά, οἷα προῆλθον ἐκ τῶν ἀποδεδομένων κανόνων· ἐφαρμόζοντες μέντοι ταῦτα ζητήματί τινι, λαμβάνειν ὀφείλομεν λειπτικῶς τὴν ποσότητα, ᾗ ἔνεστι τὸ τῆς μειουμένης τρεπτῆς ποσότητος ἀπειροστόν· εἰ γὰρ ἡ υ μεῖται τῇ ποσότητι κ, ἐν δὲ τῷ λαμβάνειν αὐτῆς τὸ ἀπειροστὸν ὑποτεθῇ υ γινομένη υ + δυ· ἔστιν ἄρα υ — κ = υ + δυ, εἴτ' ἐν — κ = δυ, ἢ γοῦν κ = — δυ· ὅτως ἐν παντα χοῦ τηνικαῦτα τεθήσεται — δυ ἀντὶ + δυ· ἐν τοῖς ἐφεξῆς δὲ ὀψόμεθα τούτου παραδείγματα· ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν δευτέρων ἀπειροστῶν· τοῦ γὰρ πρώτου ἀπειροστοῦ μειουμένου, τὸ μὲν δεύτερον, ὡς ἔθος, ληψόμεθα, ἐν δὲ τῇ ἐφαρμογῇ ζητήματός τινος χρησόμεθα τῷ — δ δχ ἀντι + δ δχ.