τρίτον· τέμνει δὲ ἡ ὑπερβολὴ τὸν κύκλον καθ' ἕτερον σημεῖον τὸ Π, ὅπερ ἐκτίθησι τὸ τριτημόριον τοῦ τόξου μΠΝ ἀναπληρώματος εἰς 360° τοῦ προτεθέντος τόξου· βουλομένοις γὰρ καὶ τὸ δὲ τὸ τόξον εἰς τρία ἰσάλληλα μέρη διελεῖν, ΔΖ ὑποθεμένοις = χ, καὶ ΖΠ = υ, προκύψει ἡ αὐτὴ τῇ ἄρτι εὑρημένῃ ἐξίσωσις.

313. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐντεῦθεν καταφαίνεται, ὅπως δυνάμεθα εἰς τρεῖς ἴσας γωνίας διελεῖν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν· ἀπόχρη γὰρ διελεῖν τὸ τὴν γωνίαν μετροῦν τόξον· ὅπερ, ἡμῖν μὲν δι' ὑπερβολῆς καὶ κύκλου ἐπιτετήδευται, ἄλλοις δὲ διὰ παραβολῆς καὶ κύκλου, καθὰ καὶ τὸ τῆς εὑρέσεως τῶν μέσων συνεχῶς ἀνάλογον (309) διὰ δύω παραβολῶν ἐπιλύεται, ὡς ἔστιν ἰδεῖν ἐν Γ'. τόμῳ τῶν Μαθηματ. τοῦ Θεοτόκου §. 318, καὶ 322, καὶ ἐν τοῖς ὑπ' Ἀσάνου τοῦ Κεφαλλήνος παρεντεθεῖσι τῷ τοῦ Καίλλου συμβολικῷ λογισμῷ §. 436, 440.

314. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Δοθεισῶν δύω εὐθειῶν α, β καὶ μεταξὺ αὐτῶν συνεχῶς ἀναλόγων ἐμφαινομένων ὑπὸ τοῦ ἀριθοῦ μ, εὑρεῖν τὴν τῆς ν τάξεως· ὑποτεθέντος, φέρ' εἰπεῖν, μ = 10, καὶ ν = 7, εὑρεῖν τὴν μεταξὺ α καὶ β ἑβδόμην τῶν μέσων συνεχῶς ἀναλόγων.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω χ ἡ πρώτη τῶν μέσων ἀναλόγων· καὶ δὴ πορισθήσεται ἡ ἑφεξῆς σειρὰ ∺ $\alpha : \chi : \frac{\chi^2}{\alpha} : \frac{\chi^3}{\alpha^2} : \frac{\chi^4}{\alpha^3} \ldots\ldots \frac{\chi^\nu}{\alpha^{\nu-1}} \ldots\ldots \frac{\chi^\mu}{\alpha^{\mu-1}} : \frac{\chi^{\mu+1}}{\alpha^\mu} = \beta$· ὅπερ, ἐπεὶ οἱ δεῖκται τὰς τάξεις ἐμφαίνουσι τῶν ὅρων, ὁ τῆς ν τάξεως ἔστι $= \frac{\chi^\nu}{\alpha^{\nu-1}}$· ἐποτεθείσθω δὴ ὅτος

$= \psi$· ὑπῶν γενήσεται $\chi^{\mu} = \alpha^{\nu-1}\psi$· ἀλλ' ἐπεὶ $\frac{\chi^{\mu+1}}{\alpha^{\mu}} = \beta$, καὶ $\chi^{\mu+1} = \alpha^{\mu}\beta$, τῶν ῥιζῶν ἐξαχθεισῶν, ἔσται $\chi = \alpha^{\frac{\mu}{\mu+1}}\beta^{\frac{\mu}{\mu+1}}$· ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸν ν ὑψωθείσης βαθμόν, ἔσται $\chi^{\nu} = \alpha^{\frac{\mu\nu}{\mu+1}}\beta^{\frac{\mu\nu}{\mu+1}} = \alpha^{\nu-1}\psi$· ὑπῶν $\psi = \alpha^{\frac{\mu-\nu+1}{\mu+1}}\beta^{\frac{\nu}{\mu+1}}$, τύπος παριστῶν τὴν ζητουμένην μέσην ἀνάλογον.

Ὡς ἂν οὖν εἰς τὴν κατασκευὴν ἀφικώμεθα, ὑψούσθω ἑκάτερον μέλος εἰς τὸν βαθμὸν $\mu+1$, ἵνα γένοιτο $\psi^{\mu+1} = \alpha^{\mu-\nu+1}\beta^{\nu}$· τοῦ δὲ μ περιττοῦ ἀριθμοῦ ὄντος, καὶ ὑποτεθέντος $\psi^2 = \alpha\upsilon$, παριθήσεται $\alpha^{\mu-2\mu+1}\beta^{\nu} = \alpha^{\frac{\mu+1}{2}}\upsilon^{\frac{\mu+1}{2}}$, ὅθεν $\upsilon^{\frac{\mu+1}{2}} = \alpha^{\frac{\mu-2\mu+1}{2}}\beta^{\nu}$· ἐὰν δὲ διὰ ταύτης τῆς ἐξισώσεως εὑρεθῇ ἡ υ, εὑρεθήσεται καὶ ἡ ψ μέση ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ υ· εἰ δὲ $\frac{\mu=1}{2}$ ἀριθμὸς εἴη ἄρτιος τῇ αὐτῇ χρησαμένοις μεθόδῳ, μετήχθω ὁ τύπος εἰς τρίτην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν α, υ τὴν π, ὥσπερ ἐγένετο ὡς πρὸς τὴν υ τρίτην ἀνάλογον τῶν α, ψ, καὶ οὕτως ἑξῆς, μέχρις ἂν ἀφικώμεθα εἰς δείκτην περισσάριθμον· ἀποχρήσει ἄρα κατασκευάσαι τὸν τύπον ὑποτιθεμένου περιττοῦ τοῦ $\mu+1$· πολλαπλασιαθήτω τοίνυν τηνικαῦτα ἐπὶ ψ, ἵνα γένοιτο $\psi^{\mu+2} = \alpha^{\mu-\nu+1}\beta^{\nu}\psi$· καὶ δὴ ὁ δείκτης $\mu+2$ ἔσεται ἄρτιος· γενομένου δὲ $\psi^2 = \alpha\upsilon$, διαιρέσει παριθήσεται $\upsilon^{\frac{\mu+2}{2}} = \alpha^{\frac{\mu-2\nu}{2}}\beta^{\nu}\psi$, τοῦ $\frac{\mu+2}{2}$ ἀριθμοῦ ὑπάρχοντος τῶν ἑλοχερῶν· ἐπὶ ἄξονος οὖν τοῦ ΑΔ (κ. 149)

γεγράφθω παραβολὴ ἡ ΑΒΜ διὰ τῆς ἐξισώσεως τῆς ἤδη εὑρημένης. αἱ τοίνυν ΑΔ ἔσονται = ψ· γεγράφθω εἶτα παραβολὴ ἡ ΑΒΜ διὰ τῆς ἐξισώσεως $\psi^2 = \alpha\upsilon$· τῶν ὧν δύω παραβολῶν τεμνομένων κατὰ τὸ Β, ἀχθείσης ἐντεῦθεν τεταγμένως τῆς ΔΒ, ΑΔ = ψ ἔσαι μέση ἀνάλογος ἡ ζητουμένη, καὶ ΔΒ τρίτη ἀνάλογος ταῖς εὐθείαις α, ψ.

315. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Πολλῶν εὐθειῶν ἐκκειμένων κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν, τῆς πρώτης δοθείσης, εὑρεῖν τὴν δευτέραν, ὅπως ἡ δευτέρα σὺν τῇ ἑκάτῃ ἴση ᾖ ποσότητι δεδομένῃ τῇ β.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω α ἡ πρώτη καὶ χ ἡ δευτέρα· ἡ ἄρα ἑκάτη ἔσαι β — χ· ἡ γὰρ ἑκάτη μετὰ τῆς χ ὑποτίθεται = β· τῆς ὧν α πρώτης ὄσης τῶν ἀναλόγων εὐθειῶν, καὶ χ τῆς δευτέρας, ἡ τρίτη ἔσαι $\frac{\chi^2}{\alpha}$· τηρηθείσης δὲ ἐν τῷ λογισμῷ ταύτης τῆς ἐκθέσεως, ἡ τετάρτη ἀνάλογος περιέξει τὸν τρίτον βαθμὸν τῆς ἀγνώστου· ἵνα δὲ τοῦτο φύγοιμεν, γενέσθω $\frac{\chi^2}{\alpha} = \upsilon$, καὶ τῆς υ ἀντὶ τρίτου ἀναλόγου ληφθείσης, εὑρεθήσεται ἡ τετάρτη διχῶς ἐκτιθεμένη, ἤτοι διὰ τῶν γραμμάτων α, χ, υ, εἴτ' ὧν $\frac{\chi\upsilon}{\alpha}$, ἢ διὰ $\frac{\upsilon^2}{\chi}$· ἐὰν δ' εἶτα γένηται $\upsilon : \frac{\chi\upsilon}{\alpha} :: \frac{\chi\upsilon}{\alpha} : \psi = \frac{\chi\upsilon\upsilon^2}{\upsilon\alpha^2} = \frac{\upsilon^2}{\alpha}$, εἴγε $\upsilon = \frac{\chi^2}{\alpha}$, εὑρεθήσεται ἡ πέμπτη $= \frac{\upsilon^2}{\alpha}$· ἐν τούτοις ὧν τοῖς τύποις ἡ ἄγνωστος οὐκ ἄνεισιν εἰς βαθμὸν τοῦ δευτέρου ὑπέρτερον· ἐὰν δὲ, τηρουμένων τούτων, προαγαγεῖν περαιτέρω βουληθῶμεν τὸν λογισμὸν, τρίτοις καὶ τετάρτοις ἐμ-

πεσούμεθα πάντως βαθμοῖς· ὑκᾶν ἵνα τοῦτο ἐκκλίναιμεν, ὑποτεθείσθω ἡ τετάρτη ἀνάλογος $= \tau$, καὶ δὴ ἡ πέμπτη ἔσεται $= \frac{\tau\chi}{\alpha} = \frac{\tau\upsilon}{\chi} = \frac{\tau^2}{\upsilon}$· τῆς δὲ πέμπτης ὑποτεθείσης $= \psi$, αἱ λοιπαὶ μέχρι τῆς ἐννάτης διοριθήσονται, ὡς ἀνταῦθα καθορῶνται· δυνατὸν δὲ τὸν λογισμὸν ἔτι περαιτέρω προαγαγεῖν, ὑποτιθεμένοις τὴν ἐννάτην $= \sigma$.

Α'.	Β'.	Γ'.	Δ'.	Ε'.	ς'.	Ζ'.	Η'.	Θ'.
α	χ	$\frac{\chi^2}{\alpha}$	.	.				
			.	.				
	υ		$\frac{\chi\upsilon}{\alpha}$	$\frac{\upsilon^2}{\alpha}$				
			$\frac{\upsilon^2}{\chi}$					
			τ	$\frac{\tau\chi}{\alpha}$	$\frac{\tau\upsilon}{\alpha}$			
				$\frac{\tau\upsilon}{\chi}$	$\frac{\tau\tau}{\chi}$			
				$\frac{\tau\tau}{\upsilon}$				
		ψ	$\frac{\chi\psi}{\chi}$	$\frac{\psi\upsilon}{\alpha}$	$\frac{\psi\tau}{\alpha}$	$\frac{\psi\psi}{\alpha}$		
			$\frac{\psi\upsilon}{\chi}$	$\frac{\tau\psi}{\chi}$	$\frac{\psi\psi}{\chi}$			
			$\frac{\psi\tau}{\upsilon}$	$\frac{\psi\psi}{\upsilon}$				
			$\frac{\psi\psi}{\tau}$					

ἴωμεν ἤδη ἐπὶ τὴν κατασκευήν· ἐὰν ὑποτεθῇ ἑχάτη ἡ

πέμπτη ἀνάλογος, εἰλήφθω ἡ ἕκθεσις $\frac{\upsilon^2}{\alpha}$· κατὰ τοίνυν τὴν τοῦ προβλήματος θέσιν ἔστιν $\frac{\upsilon^2}{\alpha} = \beta - \chi$, ἤ. $\upsilon^2 = \alpha(\beta - \chi)$, ἐξίσωσις παραβολῆς, ἧς παράμετρος $= \alpha$· ἐπεὶ δὲ $\frac{\chi^2}{\alpha} = \upsilon$· ἐντεῦθεν ἄρα $\chi^2 = \alpha\upsilon$, ἐξίσωσις ἄλλη παραβολῆς, τὴν αὐτὴν ἐχούσης παράμετρον· εἰλήφθω οὖν παράμετρος ΑΒ $= \alpha$ (χ. 150) καὶ δι' αὐτῆς γεγράφθω παραβολὴ ἡ ΑΔ, ἧς ἀπτέσθω ἡ ΑΠ. καὶ δὴ πορισθήσεται ἡ ἐκ τῆς $\chi^2 = \alpha\upsilon$ ἐξισώσεως παρισαμένη παραβολή· εἰλήφθω εἶτα ΑΚ $= \beta$, καὶ τοῦ Κ τεθέντος ἀντὶ κορυφῆς, γεγράφθω ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΚΑ παραβολὴ ἡ ΚΔ, τὴν αὐτὴν ἔχουσα παράμετρον· αὕτη οὖν τὴν πρώτην κατὰ τὸ Δ διατεμεῖ, καὶ ἀχθείσης τεταγμένως τῆς ΔΠ, ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ $= \chi$ ἔσται ἡ δευτέρα ζητουμένη ἀνάλογος· τῆς γὰρ δευτέρας ὑπαρχούσης χ, ἡ μὲν τρίτη ἔσται $\frac{\chi^2}{\alpha}$, ἡ δὲ πέμπτη $\frac{\chi^4}{\alpha^3} = \beta - \chi$ ἐξ ὑποθέσεως· ὅθεν ἀποφέρεται $\chi^4 = \alpha^3(\beta - \chi)$· ἐὰν οὖν ληφθῇ ἡ τοῦ υ δύναμις ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 = \alpha\upsilon$, καὶ ἀντικατασταθῇ ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon^2 = \alpha \cdot (\beta - \chi)$, προκύψει ἐξίσωσις $\chi^4 = \alpha^3 . (\beta - \chi)$.

Ἐὰν δὲ ἑκτη ὑποτεθῇ ἡ ἕκτη ἀνάλογος, πορισθήσεται $\frac{\tau\tau}{\chi} = \beta - \chi$, ἤ $\tau\tau = \beta\chi - \chi\chi$, ἐξίσωσις κύκλου, οὗ διάμετρος $= \beta$· γεγράφθω οὖν πρῶτον ἡ παραβολὴ ΑΔ (χ. 151) ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 = \alpha\upsilon$, ἣν δίδωσιν ἡ ἀντικατάστασις· αἱ δὲ ἀποτετμημέναι κείσονται ἐπὶ τῆς ἁπτομένης ΑΠ· ἤχθωσαν δὲ αἱ τεταγμέναι ΠΔ $= \upsilon$

κάθετοι τῇ ΑΠ, καὶ γενέσθω παντοχοῦ ΑΒ = α : ΑΠ = χ :: ΔΠ = υ : ΖΠ = τ, καὶ διὰ πάντων τῶν σημείων Ζ διήχθω καμπύλη· εἰλήφθω τελευταῖον ΑΚ = β, καὶ ἐπ' αὐτῆς ὡς διαμέτρου γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΚ, ὃ διατεμεῖ τὴν καμπύλην ΑΜΖ καθ' ἓν σημεῖον τὸ Ζ, καθ' ὃ προσδιορισθήσεται ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ = χ, δευτέρα ζητουμένη ἀνάλογος.

Ἡ ἐχρησάμεθα ἐν τῷ δε τῷ προβλήματι, ἡ μέθοδος δύναται συχνάκις ἀσείας ποιεῖν τὰς τῶν ὑπὲρ τὸν τρίτον καὶ τέταρτον βαθμὸν προβλημάτων λύσεις· κεῖται δ' ἡ μέθοδος αὕτη ἐν τῷ τιθέναι ἀντὶ τῶν τύπων, οἵτινες, εἰ μείνειαν ἐν τῷ λογισμῷ, ἀπεργάζονται τὰς καμπύλας ὑπερτέρας τῆς δευτέρας τάξεως, ἀγνώσους ἄλλας καὶ ἄλλας, καὶ ὅτω διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν, ἢ καμπύλων ὑπερτέρων μέν, γραφομένων δὲ διὰ τῶν κωνικῶν τομῶν, ἐπιλύειν τὸ πρόβλημα· ἵνα δὲ ἡ λύσις ἀσειοτέρα γένηται, προσέχειν δεῖ, ὅπως αἵ, τε ἀντικατασάσεις καὶ αἱ ἄγνωσοι ποσότητες ὡς οἷόν τε ἐνάριθμοι ὦσιν ἐν τῇ ἐχάτῃ ἐξισώσει.

316. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐφ' ᾧ δὲ ἐν τῇ κατασκευῇ τῶν προβλημάτων ἀποφεύγειν τὰς ὑπερτέρας καμπύλας, τὴν ἐφεξῆς ἐξέθεντο μέθοδον οἱ Ἀναλυτικοί· ἐὰν μὲν ὁ βαθμὸς τῆς κατασκευασθησομένης ἐξισώσεως ᾖ ἀριθμὸς τετράγωνος, χρησέον ἐσὶ δυσὶ καμπύλαις, ὧν ἑκατέρας ἡ τάξις ἰσοῦται τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τῆς προκειμένης τάξεως· ἐὰν δὲ μὴ ᾖ τετράγωνος, ἀφαιρετέον αὐτοῦ τὸν μείζονα τετράγωνον, καὶ εἰ μὲν τὸ κατάλοιπον εἴη ἴσον ἢ ἔλαττον τῆς ῥίζης τοῦ μείζονος τετραγώνου, χρησέον αὖθις δυσὶ καμπύλαις, ὧν τῆς μὲν ὁ βαθμὸς εἴη ἴσος τῇ ῥίζῃ, τῆς δὲ μείζων τῆς ῥίζης μονάδι· εἰ δ' εἴη τὸ κατάλοιπον τῆς ῥίζης

μεῖζον, χρησέον τηνικαῦτα δυσὶ καμπύλαις, ὧν ἑκατέρας ὁ βαθμὸς ὑπερέχοι μονάδι τῆς τȣ̃ τετραγώνȣ ῥίζης· ὅτως εἰς κατασκευὴν ἐξισώσεως ἐννεαβαθμίȣ χρησέον δυσὶ καμπύλαις τριτογενέσι· τῆς δ' ἐξισώσεως ἑνδεκαβαθμίȣ ὄσης, ἀφαιρετέον τȣ̃ 11 τὸν μείζω τετράγωνον 9· ϗ δὴ καταλειφθήσεται 2 < 3 ῥίζης τετραγωνικῆς τȣ̃ 9· κατασκευαστέον ἄρα τὴν ἐξίσωσιν, χρησαμένοις δυσὶ καμπύλαις, τῇ μὲν τριτοβαθμίῳ, θατέρᾳ δὲ τεταρτοβαθμίῳ· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ περιπτώσει πολλαπλασιάζεται ἡ ἑνδεκαβάθμιος ἐξίσωσις ἐπὶ $\chi = 0$ (ἢ ϗ ἐπὶ $\chi - 0 = 0$), ἵν' ἀποβῇ δωδεκαβάθμιος· τῆς δὲ ἐξισώσεως ὄσης 13°, 14°, 15°, ὡς ἀφαιρȣ́μενον τὸν 9 τȣ̃ 13, 14, 15 καταλείπειν μείζω ἀριθμὸν τȣ̃ 3, χρησέον τηνικαῦτα δυσὶ καμπύλαις, ἑκατέρᾳ τετάρτης τάξεως. Ἀλλὰ γὰρ μάτην ἂν τοιάδε τις ἀποδοθείη μέθοδος, εἰ ϗ ὅπως ταύτῃ δέον χρήσασθαι μὴ προσαποδοθῇ, ἄλλως τε ἀδύνατον δοκεῖ τοιαύτην τηρηθῆναι μέθοδον· αἱ μὲν γὰρ ἐξισώσεις τȣ̃ 10° ϗ 11° βαθμȣ̃ εἰς τὸν 12° ἀνάγονται, πολλαπλασιαζόμεναι, αἱ μὲν ἐπὶ $\chi^2 = 0$, αἱ δὲ ἐπὶ $\chi = 0$· ἔσω δὲ ἐξίσωσις τȣ̃ 12° βαθμῖ, τȣ̃ δευτέρȣ αὐτῆς ὅρȣ ἀπηλλαγμένη ἡ $\chi^{12} + \alpha\chi^{10} + \beta\chi^9 + \kappa\tau. = 0$· γενομένȣ ὂν $\chi^3 = \upsilon$, τραπήσεται ἡ ἐξίσωσις εἰς τὴν $\upsilon^4 + \alpha\upsilon^3\chi + \kappa\tau. = 0$, ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος· ὑποτεθέντος δὲ $\chi^4 = \upsilon$, γίνεται $\upsilon^3 + \alpha^2\upsilon^2\chi^2 + \beta\upsilon\chi + \kappa\tau. = 0$· ὅτως ὂν ἀδύνατον τηρεῖν δύω καμπύλας, τὴν μὲν τρίτȣ, τὴν δὲ τετάρτȣ βαθμȣ̃, καθάπερ ἡ μέθοδος διακελεύεται· προκειμένης δὲ ἐξισώσεως βαθμȣ̃ 16° ἡ $\chi^{16} + \alpha\chi^{14} + \beta\chi^{13} + \kappa\tau. = 0$, ὑποτεθέντος $\chi^4 = \upsilon$, γενήσεται $\upsilon^4 + \alpha\upsilon^3\chi^2 + \kappa\tau. = 0$ ἐξίσωσις πεμπτοβάθμιος· ἄρα ἡ 16° βαθ-

μὲ ἐξίσωσις ἐ κατασκευάζεται δι' ἐξισώσεων δύω τεταρτοβαθμίων, ὡς ἡ μέθοδος ἐντέλλεται.

Οὐ μὴν ἀλλὰ μᾶλλον τὸν νοῦν προσεκτέον τῇ εὐμαρείᾳ τῆς κατασκευῆς, ἢ τῇ τῶν ἐξισώσεων ἁπλότητι· κ̀ γὰρ ἡ μὲν κατὰ τὴν παραβολὴν ἐξίσωσις ἁπλουστέρα ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου, ἡ μέντοι τούτου ἀναγραφὴ τῆς κατ' ἐκείνην πολὺ ῥᾴων· ξυμβαίνει δὲ πολλάκις τὰς ὑψηλοτέρας τῶν καμπύλων εὐμαρεστέρας ὑπάρχειν εἰς ἀναγραφὴν τῶν ταπεινοτέρων· ἀλλὰ γὰρ ταύτην τὴν μέθοδον καταλιπόντες, ὅπως δεῖ πᾶσαν ἐξίσωσιν ὡρισμένην διὰ καμπύλης ὁμοβαθμίου κ̀ εὐθείας κατασκευάζειν, εἴπωμεν ἤδη διὰ βραχέων· ἐπὶ τούτῳ τοίνυν ὅλη ἡ ἐξίσωσις διῃρήσθω διὰ πάντων τῶν ποιητῶν τοῦ ἑκάτου ὅρου, πλὴν ἑνὸς, ὃς γενέσθω = υ, κ̀ γεγράφθω ἡ καμπύλη, ἧς τεταγμένη μὲν ἐστιν ἡ υ, ἀποτετμημένη δὲ ἡ χ, διαφόρους δυνάμεις ὑποδυομένη· τῆς δὲ καμπύλης καθάπαξ γραφείσης, ἤχθω ταῖς ἀποτετμημέναις παράλληλος εὐθεῖα ἀπέχουσα αὐτῶν ποσότητι ὑποτιθεμένῃ = υ· ἐκ δὲ τῆς κοινῆς διατομῆς τῆς εὐθείας κ̀ τῆς καμπύλης πᾶσαι αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως προκύψουσι.

317. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω ἐξίσωσις $\chi^5 - 2\alpha^2\chi^3 + \alpha^4\chi - \alpha^4\beta = 0$· διῃρήσθω οὖν πᾶσα διὰ α^4, ὑποτεθέντος $\beta = \upsilon$, κ̀ μεταθέσει ἔσται $\frac{\chi^5}{\alpha^4} - \frac{2\chi^3}{\alpha^2} + \chi = \upsilon$· γεγράφθω τοίνυν ἡ ταύτης τῆς ἐξισώσεως καμπύλη· εἰς δὲ τοῦτο εἰλήφθω, ἄξων μὲν ὁ ΓΒ (σχ. 152), ἀρχὴ δὲ τῶν χ τὸ Α· κ̀ ὑποτεθέντος $\chi = 0$, εὑρίσκεται $\upsilon = 0$· ἡ ἄρα καμπύλη συμπεσεῖται τῷ τῶν ἀποτετμημένων ἄξονι κατὰ τὸ Α· ὑποτεθέντος δ' εἶτα $\chi = \pm \alpha$, εὑρίσκεται

$\upsilon = o$· ἡ καμπύλη ἄρα συμπεσεῖται καὶ τοῖς δυσὶ σημείοις Γ καὶ Β τοῦ ἄξονος ὡρισμένοις, εἰ ληφθείη $AK = AB = \alpha$· ὑποτεθέντος δὲ $\chi = \pm 2\alpha$, εὑρίσκεται $\chi = \pm 17\alpha$· ἐντεῦθεν καταφανὲς, ὅπως θηρεύονται, ὅσα ποτ' ἂν βεληθείημεν σημεῖα, τῆς προκειμένης καμπύλης· ὑποτεθείσθω τοίνυν ὡς γεγραμμένη ἡ καμπύλη· καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Α ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων παραλλήλως ταῖς τεταγμέναις ἡ εὐθεῖα $AM = \beta$, καὶ ἐπείπερ $\upsilon = \beta$ ἐστὶν ἐξίσωσις εὐθείας παραλλήλου τῷ ἄξονι τῶν χ, διὰ τοῦ Μ ἤχθω ἡ ΜΝ παραλλήλως ταῖς ἀποτετμημέναις· καὶ δὴ αἱ εὐθεῖαι ΜΠ, ΜΞ, ΜΝ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ὑπὸ τοῦ σημείου Μ, καὶ τῶν σημείων, οἷς ἡ ΜΝ συμβάλλει τῇ καμπύλῃ, εἰσὶν αἱ πραγματικαὶ ῥίζαι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· καὶ γὰρ κληθεισῶν Υ τῶν τεταγμένων ἐπὶ τὸν νέον ἄξονα ΜΝ, ἔσται $\Upsilon = \upsilon - \beta$· ἀλλ' αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi^3}{\alpha^4} - \frac{2\chi^3}{\alpha^2} + \chi = \Upsilon = \upsilon - \beta$ συνοιχοῦσι σημείοις, ἐν οἷς $\Upsilon = \upsilon - \beta$ ἔστιν $= o$· ἄρα κτ. (*)· εἰ μὴν ἀλλ' ἐὰν ληφθῇ ἡ δύναμις τῆς υ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon - \beta = o$, καὶ ἀντικατασταθῇ ἐν τῇ ἐξισώσει $\frac{\chi^3}{\alpha^4} - \frac{2\chi^3}{\alpha^2} + \chi = \upsilon$, ῥᾷστα εὑρεθήσεται ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις.

318. Εἰ δὲ προκέοιτο εἰς κατασκευὴν ἡ ἐξίσωσις $\chi^5 + \alpha\beta\chi^3 + \gamma = o$, ἠδύνατο ὑποτεθῆναι $\gamma = \upsilon$, καὶ $\delta = 1$,

---

(*) Τοῦ δὲ ἄξονος ΜΝ ἀποτμήσαντος τῆς καμπύλης καθ' ἕνα σημεῖον, ἔσονται πᾶσαι αἱ ῥίζαι ἴσαι, εἴγε τηνικαῦτα τὰ σημεῖα τῆς διατομῆς ἐκληφθήσονται ὡς συμπεπτωκότα εἰς ἕν.

καὶ τὰ τὰ γενέσθαι $\upsilon = -\frac{\chi^7}{\delta^6} - \frac{\alpha\beta\chi^3}{\delta^4}$, ὅπερ ἤκιστα κινεῖ τὴν τῶν ὅρων δύναμιν· ἡ γὰρ ἔστιν ὅπως ἡ μονὰς διαιρεῖ· τοιγαρῦν οἱ ὅροι τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εὐμαρῶς ἔχουσι κατασκευῆς ὑπὲρ πάσης δυνάμεως τῆς χ.

319. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου δυνάμεθα εὑρεῖν τὰς πραγματικὰς ῥίζας ἐξισώσεως ἀριθμητικῆς· ἔστω γὰρ ἐξίσωσις $\chi^4 - 2\chi^3 + 3\chi - 192 = 0$· γενέσθω δὴ $\alpha = 2$, καὶ $\beta = 3$, καὶ $\gamma = 192$, καὶ ζητηθήτωσαν αἱ ῥίζαι, ὡς εἰ α, β, γ γραμμαὶ εἴησαν, ἔχουσαι τοὺς λόγους τῶν ἀριθμῶν, οἷς ἴσα ὑπεθέμεθα ταῦτα τὰ γράμματα· ὑποτεθέντος οὖν δ ὡς μονάδος γραμμῆς (ὅπερ οὐδὲν ὅλως τὸ κωλύον), ἔσται $\delta = 1$, καὶ $\alpha = 2\delta$· κτ.· τιθεμένου δὲ $\gamma = 0$, εὑρίσκονται αἱ ῥίζαι τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως· ὑποθώμεθα οὖν τὰς πραγματικὰς ῥίζας ταύτης τῆς ἐξισώσεως ΜΠ, ΜΞ, ΜΝ, τῶν ἄλλων ἀνυπάρκτων ὄντων· ἐφαρμοσθέντος οὖν δ ταύταις ταῖς ῥίζαις, ἐὰν εὑρεθῇ ΜΠ $= 2\delta$, καὶ ΜΞ $= 6\delta$, καὶ ΜΝ $= 15\delta$, συναχθήσεται ἐντεῦθεν τὰς ζητουμένας ῥίζας εἶναι 2, 6, 15.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ Ὑπερβατικῶν Καμπύλων.

Τίνες μὲν οὖν εἰσὶν αἱ ὑπερβατικαὶ καμπύλαι, πρὸ μικροῦ εἴρηται (276), ἀμέλειτοι, ὧν τὴν φύσιν ἐκδηλῶσαι οὐ δύναται ἐξίσωσις, περιέχουσα τὸν τῶν ἀποτετμημένων καὶ τεταγμένων λόγον· ῥητέον μέντοι ἰδίᾳ καὶ περὶ

αὐτῶν βραχέα. Πᾶσα συνέκθεσις, ἣ ἐκ ἔστι γεωμετρικὴ, ὑπερβατικὴ ἐστὶ καὶ λέγεται· τοιαῦδε εἰσὶν αἱ τόξων, ἡμιτόνων, συνημιτόνων, ἀπτομένων, τεμνουσῶν, λογαρίθμων περιεκτικαὶ, καὶ αἱ περιέχουσαι δὲ ποσὰ ἀνύπαρκτα, ἃ ἄντις εἰς πραγματικὰ τρέψειε, καὶ ἔτι αἷς ῥιζικὰ ἄλογα δεῖκται ἐπιτίθενται· οἷον $\upsilon = \chi^{\sqrt{5}}$ ἐὰν οὖν κληθῶσιν, υ μὲν αἱ τεταγμέναι, χ δὲ αἱ ἀποτετμημέναι, πᾶσαι αἱ καμπύλαι, ὧν ἡ φύσις ἐμφαίνεται διὰ τῶν ἐφεξῆς ἐξισώσεων, εἰσὶν ὑπερβατικαὶ, ἃς καὶ μηχανικὰς εἰσὶν οἱ ὀνομάζουσι· $\upsilon = \alpha . \sigma\upsilon\nu\eta . \chi$ (σημαίνει δὲ ὁ τύπος, ὡς ἄρα τὸ υ ἴσεται τῷ τόξῳ α, εἰ τὸ συνημίτονον ἴσον τίθεται τῇ ἀποτετμημένῃ χ)· $\upsilon = \alpha . \eta\mu . \chi$· $\upsilon = \alpha . \dot{\alpha}\pi . \chi$· $\upsilon = \alpha . \tau\varepsilon\mu . \chi$· $\upsilon = \lambda . \chi$· $\upsilon^{\mu} = \lambda\chi^{\mu}$ (τοῦ λ δηλοῦντος τὸν λογάριθμον)· τελευταῖον δὲ πᾶσα ἐξίσωσις, μὴ ἐμφαίνουσα τὸν τῶν ἀποτετμημένων καὶ τεταγμένων λόγον, λογικὴ μὴ οὖσα, ἔστιν ὑπερβατικὴ, καὶ ὑπερβατικὴν παρίστησι καμπύλην· τὰς δὲ ὑπερβατικὰς, ἃς ἐμφαίνουσιν ἐξισώσεις, ἐφ' ὧν αἱ τρεπταὶ ποσότητες ἀλόγους ἔχουσι δείκτας, οἷον $\upsilon = \chi^{\sqrt{5}}$, $\upsilon = \chi^{\sqrt{2}}$, ὁ Λειβνίτιος καμπύλας διαβατικὰς (intercedentes) ἀπεκάλει.

Αἱ δὲ τοιαῦδε καμπύλαι οὐδαμῶς ἂν ἄλλως κατασκευασθείησαν, ὅτι μὴ διὰ τῶν λογαρίθμων· τῶν γὰρ κατὰ τὰς ἴσας ποσότητας λογαρίθμων ἰσαμένων, ἐκ τῆς ἐκθέσεως $\upsilon = \chi^{\sqrt{2}}$ πρόεισι $\lambda\upsilon = \lambda\chi^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} . \lambda . \chi$· ἐπεὶ οὖν $\lambda\upsilon = \sqrt{2} . \lambda . \chi$, πολλαπλασιαζομένου τοῦ λογαρίθμου ἑκάστης ἀποτετμημένης ἐπὶ $\sqrt{2}$, θηρευθήσεται ὁ τῆς ἀντιστοιχούσης τεταγμένης λογάριθμος, ὃς γνω-

σθήσεται διὰ προσεγγίσεως· ὑποτιθεμένων γὰρ τῶν χ ὑπαρκτικῶν, ἐὰν μὲν ἡ χ = 0, ἔσεται καὶ υ = 0· ἐὰν δ' ἡ χ = 1, ἔσαι καὶ υ = 1, ὥσπερ καθ' ἑαυτό ἐστι κατάδηλον· εἰ δὲ χ εἴη = 2, λυ = $\sqrt{2 . \lambda . 2}$ = 0,425 7274 περίπυ· ἄρα υ = 2,665186 περίπυ· εἰδ' εἴη χ = 10, πορισθήσεται λ.υ = 1,4142356 περίπυ, καὶ υ = 25,956 περίπυ· εἰ δέ τοι ὑποτεθείη χ = — 1, — 2, — 3, κτ., ἀμήχανον ὅλως διορισθῆναι τὴν δύναμιν τοῦ υ.

Ἐκ τῶν μονονὺκ ἀπείρων τῷ εἴδει ὑπερβατικῶν καμπύλων, τὰς ἑξῆς ἡμεῖς μόνον ὑποστρωσόμεθα.

320. Λογαριθμικαὶ καμπύλαι εἰσὶν, ὧν ταῖς ἐξισώσεσιν ἔνεισιν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀποτετμημένων, ἢ τῶν τεταγμένων· τοιάδε ἔν ἐστιν ἡ λυ = χ, ἐν ᾗ ἀποτετμημέναι εἰσὶν οἱ λογάριθμοι τῶν τεταγμένων· τοιγαροῦν εἰς καταγραφὴν τοιᾶς δε καμπύλης, ἔστωσαν αἱ δύω πρόοδοι Ἀριθμητική τε καὶ Γεωμετρική

∞ . . . . — 1 . 0 . 1 : 2 . . . . . ∞ . A

$\frac{1}{\infty}$ . . . . . $\frac{1}{2}$. 1 . 2 : 4 . . . . . ∞ . B

ἕκαστος ὅρος τῶν ἐν τῇ A ἔσαι πάντως λογάριθμος ἑκάστου ἀντιστοίχου κατὰ τὸ B (Συμβ. Λογ. 313)· ἥκοῦν πρὸς τῷ σημείῳ A τῆς Πε (χ. 153) ἔστω ἀποτετμημένη = 0, ἡ δ' ἀντίστοιχος ἀποτετμημένη AH = 1, καὶ εἰλήφθωσαν πρὸς τὸ B αἱ ἀποτετμημέναι = 2, = 4 κτ. ὅθεν ἀπολημφθήσεται καμπύλη ἀπέραντος, ἐπεκτεινομένη πρὸς τὸ B· εἰλήφθωσαν εἶτα πρὸς τὸ β λεπτικαὶ ἀποτετμημέναι — 1, — 2 κτ., καὶ αὐταῖς ἀντίστοιχοι τεταγμέναι $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ κτ., καὶ δὴ ἡ καμπύλη ἐς ἄπειρον ἐπεκταθήσεται πρὸς τὸ β, ἀεὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἔγγιον γιγνομένη τῆς εὐθείας Bβ, διὰ τὰς ἐπ' ἄπειρον φθινούσας τεταγμένας

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ .... $\frac{1}{\infty}$· ἄρα Πε ἔςαι ἀσύμπτωτος τῆς προκειμένης καμπύλης· παρὰ δὲ ταῦτα σαφὲς, ὡς ἀντὶ τοῦ διπλοῦ λόγου, τοῦ ἐν τῇ πρόοδῳ Β κρατοῦντος, δύναται ἀντικατασῆναι ἕτερός τις οἱοσοῦν, ἐκτεθειμένος ἐν ὅροις, εἴτε ὁλοχερέσιν, εἴτε κλασματικοῖς· ἐντεῦθεν ἄρα ἀναφύσιν ἄπειροι καμπύλαι λογαριθμικαὶ, ἀλλήλων διάφοροι.

Ἔςω ἤδη ἐξ ἐναντίας υ = λχ, καὶ εἰς καταγραφὴν τῆς ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως ταύτης παρισαμένης καμπύλης εἰλήφθωσαν αἱ δύω πρόοδοι

$\dot{\neg}$	1 .	2 .	3 :	4			∞	Δ
$\dot{\dot{\neg}}$	1 :	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$			$\frac{1}{\infty}$	Ε

ἐὰν ὖν ληφθῶσιν, αἱ μὲν χ ἐν τῷ Ε, αἱ δὲ υ ἐν τῷ Δ, ἔςω Α ἀρχὴ τῶν ἀποτετμημένων (χ. 154), καὶ ΒΑ = ΒΚ = 1· ΒΚ ὖν ἔςαι τεταγμένη ἀντίςοιχος τῇ ἀποτετμημένῃ ΒΑ· λαμβανομένων εἶτα, κατὰ τὴν πρόοδον, ἐκ διαδοχῆς, ὡς ἀποτετμημένων μὲν ΕΑ = $\frac{BA}{2}$, ΑΖ = $\frac{BA}{4}$ κτ., ὡς δὲ τεταγμένων ΕΗ = 2ΒΚ, ΖΙ = 3ΒΚ κτ., ἀπολιφθήσεται ἡ ζητουμένη καμπύλη ΚΗΙ· Ἀλλ' ἔςι γὰρ πάντως πρόδηλον ἐκ τῆς Ε προόδου, ὡς μεταξὺ Ε καὶ Α ἐναπολαμβάνονται ἄπειροι ἀποτετμημέναι, καὶ ἀεὶ ἐλάττους γινόμεναι, αἷς ἀντιςοιχοῦσιν ἄπειροι τεταγμέναι, ἀεὶ μεγεθυνόμεναι· ἄρα ἡ καμπύλη, ἀπειράκις μὲν ἔγγιςα γενήσεται τῇ εὐθείᾳ Αψ, οὐδέποτε μέντοι αὐτῇ συμπεσεῖται· ἄρα Αψ ἔςιν αὐτῆς ἀσύμπτωτος.

321. Συγκαταλεκτέον δὲ ταῖς λογαριθμικαῖς τὰς δεικτικὰς καλουμένας καμπύλας, ἅτε δὴ εἰσιοῦσαν αὐτῶν ταῖς ἐξισώσεσι δεικτῶν ἐυμεταβλήτων· οἷα ἐςὶν ἡ καμπύλη, ἣν ἐμφαίνει ἡ ἐξίσωσις υ = χ^{λ}, δι' ἧς σημαίνεται τὰς τεταγμένας ἀνάλογον ἔχειν τοῖς ἀπὸ τῶν

ἀποτετμημένων χ βαθμοῖς χ· ὅθεν ἀποφέρεται $\lambda . \upsilon = \chi . \lambda . \chi$· ἐὰν ὖν ὑποτεθῇ $\chi = 0$. ἔσαι $\upsilon = 1$, ἐὰν δὲ $\chi = 1$, καὶ $\upsilon = 1$· ἐὰν δὲ $\chi = 2$, ἔσαι $\upsilon = 2^2 = 4$· ἐὰν δὲ $\chi = 3$, ἔσαι $\upsilon = 3^3 = 27$ κτ.· ἐὰν ἄρα ληφθῇ ἡ ἀποτετμημένη $A\Gamma = \chi = 1$ (χ. 155), εὑρεθήσεται $\upsilon = \Gamma\Delta = 1$, ὑποτιθεμένων ὑπαρκτικῶν τῶν πρὸς τὸ Γ, χ· μεταξὺ δὲ Α καὶ Γ ἀεὶ ἔσαι $\chi < 1$· ὡς, ἐὰν τεθῇ $A\Xi = \frac{1}{2}$, γίνεσθαι $\upsilon = \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$· ὑποθετέον δὲ ἤδη $A\Theta = -\chi$· καὶ δὴ ἔσαι $\upsilon = (-\chi)^{-\chi} = \frac{1}{(-\chi)^{\chi}}$· ἐὰν ὖν ἦ $\chi = -1$, ἔσαι $\upsilon = -1$· ἄρα ὑποτιθεμένης $A\Theta = -1$, πορισθήσεται τεταγμένη $\Theta T = -1$· τὸ δὲ σημεῖον Τ ἔσαι τῆς καμπύλης· ἐὰν δ' ὑπάρχῃ $\chi = -2$, πορισθήσεται $\upsilon = \frac{1}{4}$· ἄρα ἡ $AZ = -2$ ἀποτμηθήσεται ὑπὸ τεταγμένης, ὑπαρκτικῆς μὲν τῆς $ZM = \frac{1}{4}$, λειπτικῆς δὲ ὐδεμιᾶς· ἐὰν δὲ αἱ λειπτικαὶ ἀποτετμημέναι χωρῶσι κατὰ πρόοδον αὔξουσαν 1, 2, 3, κτ., αἱ δὲ τεταγμέναι τεθῶσι προσεχέστατα ἀλλήλων, πορισθήσονται τεταγμέναι παραλλὰξ ὑπαρκτικαί τε καὶ λειπτικαὶ, ὧν τὰ πέρατα ἑκατέρωθεν τοῦ ἄξονος ἄπειρα σημεῖα διακεκριμένα ἀλλήλων, ἅτινα καμπύλην μὲν συνεχῆ ἥκιστα συνήσουσι, φαινόμενον δὲ τοιαύτης καμπύλης· τοιαύτη δὲ ἰδιότης ὐδεμίαν χώραν ἔχει ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς καμπύλαις· ἴδωμεν δὲ, εἰ τοιοῦτόδη σημεῖα ἐμφιλοχωρεῖν δύναται ταῖς ὑπαρκτικαῖς χ· ἔστω $\chi = \frac{1}{2}$, ὑκοῦν ἔσαι $\upsilon = \frac{1}{\pm\sqrt{2}}$· ἄρα τῇ ἀποτετμημένῃ $A\Xi = \frac{1}{2}$ συνοιχοῦσι δύω τεταγμέναι ἴσαι

ΞΝ, Ξν, ἡ μὲν ὑπαρκτικὴ, ἡ δὲ λειπτική· ὑποτιθεμένων δὲ ἐκ διαδοχῆς $\chi = \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ κτ. ῥᾷστα φανήσεται, ὅτι τοῖς μὲν κλάσμασιν, ὧν ἄρτιος ὁ παρονομαστὴς, δύω συστοιχοῦσι τεταγμέναι, ἡ μὲν ὑπαρκτικὴ, ἡ δὲ λειπτικὴ, τοῖς δ', ὧν ὁ παρονομαστὴς περιττὸς, μόνον ὑπαρκτικαί· ἄρα πρὸς τὰ ἐπὶ τὰς ὑπαρκτικὰς χ ἡ καμπύλη ἔχει ὕπερθεν τοῦ ἄξονος ἄπειρα σημεῖα διακεκριμένα ἀλλήλων.

322. Αἱ παρὰ τοῖς πάλαι λίαν διεβοηθεῖσαι τέσσαρες καμπύλαι, ὡς αὐτοῖς εὐχρηστοῦσαι εἰς ἐπίλυσιν τῶν δύω περικλεῶν προβλημάτων, τοῦτε περὶ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, καὶ τοῦ περὶ τοῦ κυκλικοῦ τετραγωνισμοῦ, εἰσὶν ἡ Κισσοειδεὶς, ἡ Τετραγωνίζουσα, ἡ Κογχοειδὴς, καὶ ἡ Σπειροειδείς.

323. Κισσοειδής. Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒβ (χ. 156), καὶ ἀπτομένη ἡ ΑΡ, καὶ πᾶσαι στιχηδὸν αἱ εὐθεῖαι ΑΡ· ἐὰν ὦν ἐφ' ἑκάστης ΑΡ ληφθῇ ἡ οἰκεία Αβ, καὶ μετενεχθῇ ἐκ τοῦ Ρ ἐπὶ τὴν ΑΡ (ὅθεν δῆλον, ὡς ΡΙ = Αβ), καμπύλη ἡ διήκουσα διὰ πάντων τῶν σημείων Ι ἐστὶν ἡ καλουμένη κισσοειδὴς· οὗτον ά. ἐπεὶ ΑΡ ἀεὶ μᾶλλον ἐπὶ τῆς ΒΡ ἐγκλίνεται, καὶ Αβ, ὅσῳ ἀφίσταται τοῦ Β, ἐλαττοῦται, ἡ καμπύλη αὕτη μᾶλλον καὶ μᾶλλον τῇ εὐθείᾳ ΒΡ πλησιάζει· β'. ἕξεσιν ΑΡ ἀπείρως ἀγαγεῖν ἐπὶ τῆς ΒΡ προσχθείσης ἐπ' ἄπειρον· ἡ δὲ ΑΒ διὰ τὰς τοιάσδε ἐπ' ἄπειρον προηκούσας ΑΡ οὐδέποτε γενήσεται = 0, διὰ τὸν ἀναγκαῖον πλαγιασμὸν τῶν ΑΡ ἐπὶ ΒΡ· αὕτη δὲ ἡ Αβ, μεταφερομένη ἐπὶ τὴν οἰκείαν ἑαυτῆς ΑΡ, ἀεὶ διακρινεῖται τῆς ΒΡ τὴν καμπύλην· ἄρα ΑΙΙ ἐπ' ἄπειρον ἐγγιζουσα τῇ ΒΡ, οὐδέποτε ἕμπης αὐτῇ συμπεσεῖται· ἡ ἄρα ΒΡ ἀσύμπτωτός ἐστιν αὐτῆς τῆς καμπύλης.

324. Ἐὰν τὸ κυκλικὸν τεταρτημόριον ΑΜ (σχ. 157), καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ ΑΒ, εἰς ὁσαδήποτε μέρα ἴσα τμηθῶσι, καὶ ἀχθῶσιν ἅπασαι αἱ ἡμιδιάμετροι, καὶ παραλλήλως τῇ ΒΜ τεθῶσιν αἱ ΝΟ, ΔΟ συμβάλλουσαι ταῖς διαμέτροις, ἡ τὰ σημεῖα Ο, Ο ἐπιζευγνῦσα καμπύλη καλεῖται Τετραγωνίζουσα τοῦ Δεινοστράτου.

325. Ἐκ τῆς φύσεως ταύτης τῆς καμπύλης τὸ τόξον ΑΓ πρὸς τὸ τεταρτημόριον ΑΓΜ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ἀποτετμημένη ΑΝ πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΑΒ· ἐὰν οὖν γένηται ΑΓ = χ, καὶ ΑΓΜ = β, καὶ ΑΝ = υ, καὶ ΑΒ = α, ἔσται χ : β :: υ : α, ὅθεν αχ = βυ, ἐξίσωσις τῆς Δεινοστρατείου τετραγωνιζούσης· ἵνα δὲ εὑρεθείη τὸ σημεῖον Ξ, καθ' ὃ ἡ καμπύλη ἁπαντᾷ τῇ ἀκτῖνι ΒΜ, ὑποτεθήτω ἡ ἀκτὶς Βκ ἀπειράκις μικρά· καὶ δὴ καὶ τόξον τὸ ΜΘ ἔσται καὶ αὐτὸ ἀπειροστὸν μόριον τῆς κατὰ τὸ Μ ἁπτομένης τοῦ κύκλου, ἣ κατὰ τὴν τοῦ κύκλου ἰδιότητα ἐφέξηκε πρὸς ὀρθὰς τῇ ἀκτῖνι ΜΒ· τούτου τεθέντος, τὰ τρίγωνα ΘΒΜ, Βκν ὅμοιά εἰσιν, ὅτι ὀρθαὶ μὲν αἱ πρὸς τοῖς Μ, κ γωνίαι, ἰσάλληλοι δὲ αἱ ἐναλλὰξ Βνκ, ΘΒμ· ἄρα ΒΜ : νκ :: ΘΜ : κΒ· ἀλλ' ὑποτιθεμένης τῆς κΒ ἀπειράκις μικρᾶς, τὸ σημεῖον ν ἐκλαμβάνεται ὡς συμπεπτωκὸς τῷ Ξ, ὡς ὑπάρχειν κν = ΒΞ· ἔστι δὲ ἐκ τῆς ἰδιότητος τῆς τετραγωνιζούσης, ΘΜ : κΒ :: ΑΓΜ : ΑΒ· ἄρα ΜΒ = ΑΒ : ΒΞ :: ΑΓΜ : ΑΒ, εἴτ' οὖν α : ΒΞ :: β : α, ὅθεν ΒΞ × β = $α^2$, εἴτ' οὖν β : α :: α : ΒΞ, τουτέστιν „ἡ ΒΞ τρίτη ἀνάλογός ἐστι τῆς τοῦ κυκλικοῦ τεταρτημορίου περιφερείας, καὶ τῆς ἀκτῖνος, καὶ ἑπομένως ἡ τοῦ κυκλικοῦ τεταρτημορίου περιφέρεια τρίτη ἀνάλογός ἐστι τῆς εὐθείας „ΒΞ καὶ τῆς ἀκτῖνος.“

326. Ἐὰν ἄρα γεωμετρικῶς εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Ξ,

εὑρεθῆναι δύναται γεωμετρικῶς καὶ τὸ μῆκος τῆς τοῦ κυκλικοῦ τεταρτημορίου περιφερείας, ἧς τὸ τετραπλοῦν ἐστιν ὅλη ἡ κυκλικὴ περιφέρεια· ὅθεν παρέπεται ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμός· ἀλλὰ γὰρ ἀμήχανον τόδε τὸ σημεῖον προσδιορισθῆναι γεωμετρικῶς· ἡ γὰρ κν, ἐγγίσῃ ὑποτιθεμένῃ τῇ ΒΜ, οὐμὴ τεμεῖ τὴν ἀκτῖνα ΒΘ τοῦ Θ τῷ Μ συμπίπτοντος· εἴγε ἡ κν, παράλληλος οὖσα τῇ ΒΜ, ἔσται παράλληλος καὶ τῇ ΒΘ, ἤ, εἰ καὶ τοῦτο βουλοίμεθα, ἡ κν συμπίπτει τηνικαῦτα τῇ τε ΒΘ καὶ τῇ ΒΜ.

327. Ἐὰν ἀκτὶς ἡ ΑΒ (χ. 158) ἐπὶ τῆς ΒΓ παραλλήλως ἑαυτῇ κινηθῇ, ἕως οὗ διανύσῃ αὐτὴ μὲν τὸ κυκλικὸν τεταρτημόριον ΑΔΓ, κατὰ δὲ τὸν αὐτὸν χρόνον ἡ πμ, παράλληλος ἀεὶ μένουσα τῇ ΒΓ, διαδράμῃ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν, ὥστε ἀεὶ ὑπάρχειν τὴν τοῦ κυκλικοῦ τεταρτημορίου περιφέρειαν ΑΔΓ : ΑΔ : : ΑΒ : ΑΠ, καμπύλη ἡ διὰ πάντων τῶν σημείων μ, καθ' ἃ τέμνονται αἱ εὐθεῖαι ΖΔ, ΠΜ διήκουσα καλεῖται τετραγωνίζουσα τοῦ Tschirnaus, ὃς ταύτην εὕρατο, τὸν Δεινόστρατον μιμησάμενος· ἐὰν δὲ γένηται ΑΔΓ = β, καὶ ΑΔ = χ, καὶ ΑΠ = υ, καὶ ΑΒ = α, ἕξομεν β : χ : : α : υ, ὅθεν αχ = βυ, ἐξίσωσις ταύτης τῆς καμπύλης.

328. Βουλομένοις δὲ ἐξίσωσιν διάφορον ἔχειν, ἢ τὴν εὑρεθεῖσαν, σημειωτέον, ὅτι ΠΜ = ΟΔ ἔστιν ἡμιτ. χ, ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως αχ = βυ, ἔστιν $\upsilon = \text{ΑΠ} = \frac{\alpha\chi}{\beta}$. ἄρα $\text{ΒΠ} = \alpha - \frac{\alpha\chi}{\beta}$· ἀλλ' ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΠΜΒ (ὑποτιθεμένης ΒΜ = ψ) ἔστι $\psi^2 = \overline{\text{ημ.}\chi}^2 + (\alpha - \frac{\alpha\chi}{\beta})^2$, εἶτ' οὖν $\alpha^2\psi^2 = \alpha^2 . (\text{ημ.}\chi)^2 + (\beta\alpha - \alpha\chi)^2$.

329. Ἐν δὲ τῇ Δεινοστρατείῳ (σχ. 157) ἀγομένης τῆς ιΓ παραλλήλως τῇ ΜΒ, ἔσται ΝΟ = ημ. χ, καὶ ιΒ = συνημ. χ, καὶ ἐκ τῆς ἐξισώσεως αχ = βυ πρόσεισιν υ = ΑΝ = $\frac{\alpha\chi}{\beta}$· ἀλλ' ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΒιΓ, ΒΟΝ, ἔσι Βι : ΒΓ :: ΒΝ : ΒΟ, εἴτ' οὖν συνημ. χ : α :: α — $\frac{\alpha\chi}{\beta}$: ψ, ὑποτεθείσης ΒΟ = ψ· ἄρα ψ = $\frac{\beta\alpha^2 - \alpha^2\chi}{\alpha . \text{συνημ.}\chi}$· καὶ αὕτη δὲ ἡ ἐξίσωσις ὑδόλως συντελεῖ πρὸς εὕρεσιν τοῦ σημείου ξ· ἐὰν γὰρ γένηται χ = β, ἔσται ψ = $\frac{\alpha . \beta^2 - \alpha^2 . \beta}{0}$ = $\frac{0}{0}$, ἐξίσωσις ὑδενὸς σημαντική· ὃ δείκνυσιν ἀδύνατον τὴν γεωμετρικὴν εὕρεσιν τοῦ σημείου Ο.

330. Ἡ Κογχοειδής. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΡΣ (σχ. 159) πρὸς ὀρθὰς καθῇ εὐθείᾳ τῇ ΘΖ, καὶ ἐκ τοῦ Ρ ἑκατέρωσε τῆς ΟΣ ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ἀσυγχύτως, καὶ ληφθῇ ἐφ' ἑκάσης εὐθείας ὕπερθεν τῆς ΘΓ μέρος τι ἴσον τῇ ΟΣ, ἐκ τοῦ σημείου, καθ' ὃ αὕτη τὴν ΘΓ τέμνει, ἀρχόμενον, καὶ ἐπ' εὐθείας πρὸς τὰ ἄνω ἐπεκτεινόμενον, τὰ μέρη ταῦτα τὰ ἴσα ἕκαστον τῇ ΟΣ, ἐγχαράξουσι σημεῖα τὰ Κ, Κ, ἃ ἡ ἐπιζευγνῦσα καμπύλη, καλεῖται κογχοειδής· ἀλλὰ γὰρ δῆλον τῶν ΚΙ ἀεὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πλαγιαζομένων ἐπὶ τῆς ΖΘ, μηδέποτε δὲ αὐτῇ παραλλήλων γινομένων, οἱ δύω κλῶνες τῆς καμπύλης, ἐπ' ἄπειρον μὲν προσπελάσουσι τῇ ΖΘ, οὐδέποτε μέντοι αὐτῇ συμπεσοῦνται· ἄρα ἡ ΖΘ ἀσύμπτωτός ἐσι ταύτης τῆς καμπύλης.

331. Ἡ Σπεῖρα. Διῃρήσθω κύκλος τε ὁ ΒΓΙ (σχ. 160), καὶ ἡ αὐτοῦ ἀκτὶς ΑΓ εἰς ὁσαδήποτε ἰσόμηκα μέρη· καὶ ἤχθωσαν ἀκτῖνες πρὸς πάντα τὰ τῆς διαιρέσεως

τȣ̃ κύκλȣ σημεῖα, ȣ̀ μετηνέχθω ἐκ τȣ̃ Α ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΑΔ, τὴν προσεχῆ τῆς ΑΓ, ἓν τῶν ἰσαλλήλων μερῶν τῆς ΑΓ, ȣ̀ δύω ἐπὶ τὴν ἑξῆς ΑΕ, ȣ̀ τρία ἐπὶ τὴν τρίτην, ȣ̀ ȣ̓τως ἐφεξῆς ἕως τȣ̃ς ΑΓ, ἐφ᾽ ἣν μετενεχθήσονται πάντα τὰ ἰσάλληλα αὐτῆς μέρη, εἴτ᾽ ȣ̓ν αὐτὴ ἡ ΑΓ ἐφ᾽ ἑαυτὴν· ἐκεῖν ἡ τὰ ȣ̓τως εὑρεθέντα ἐπὶ τῶν ἀκτίνων σημεῖα ἐπιζευγνȣ̃σα καμπύλη καλεῖται σπεῖρα, καὶ Ἕλιξ Ἀρχιμήδειος· ἐὰν δὲ διπλασιαθείσης τῆς ἀκτῖνος ΑΓ = ΑΡ, γραφῇ ἄλλος κύκλος ὁ ΡΤΟ, ȣ̀ προσχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ἐς τὴν αὐτȣ̃ περιφέρειαν, ȣ̀ ἐπὶ τῆς ΑΟ μετενεχθῇ ΑΓ + 1, ἐπὶ δὲ τῆς ΑΚ, ΑΓ + 2, κτ, προκύψει ἡ συνέχεια τῆς σπείρας ΑΜΓ ἐκ τῆς καινῆς καμπύλης ΓΧΡ· ἡ δὲ ὅλη σπεῖρα κληθήσεται διπλῆς περιελίξεως· ἐὰν δὲ τριπλασιαθῇ ἡ ΑΓ ἀκτὶς, γεννηθήσεται σπεῖρα τριπλῆς περιελίξεως ȣ̀ ȣ̓τως ἑξῆς· ἐὰν δὲ κληθῇ ΑΓ = α, ἡ δὲ περιφέρεια ΒΓΙ = π, ἓν δέ τι κυκλικὸν τμῆμα = χ, ἓν δέ τι τῆς ἀκτῖνος τμῆμα = υ, ἐκ τῆς ἰδιότητος τῆς σπείρας προκύψει υ : α :: χ : π, ὅθεν υπ = αχ, ἐξίσωσις τῆς σπείρας.

Δυνάμεθα δὲ ἐννοῆσαι τὴν σπεῖραν ὡς γραφομένην ἐπὶ τȣ̃ Γ ὑπὸ σημείȣ τȣ̃ Α, κινȣμένȣ ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος ΑΓ ἐκ τȣ̃ Α ταχυτῆτι τῇ αὐτῇ, ᾗ κινεῖται τὸ πέρας Γ τῆς ἀκτῖνος ΑΓ, περιφερομένης κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον περὶ τὴν περιφέρειαν.

Α΄. Ἐὰν ὑποτεθῇ $υ^{μ} : α^{μ} :: χ^{ν} : π^{ν}$, πορισθήσεται ἐντεῦθεν $π^{ν}υ^{μ} = α^{μ}χ^{ν}$, ἐξίσωσις τῶν παντὸς γένȣς σπειρῶν· αὗται δὲ αἱ σπεῖραι παραβολικαὶ μέν, εἰ μ ȣ̀ ν ἀριθμοὶ εἶεν ὑπαρκτικοὶ, ὑπερβολικαὶ δὲ, εἰ λειπτικοὶ, προσαγορεύονται· τῶν δὲ π, α, χ, υ εὐθείας ἐμφαινόντων, παραβολῶν μὲν ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει, ὑπερβολῶν δ᾽ ἐν τῇ

δευτέρᾳ, ἡ ἐξίσωσις ἔσται· ὑποτίθεται δὲ ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἕτερος τῶν ἐκθετῶν ὁ μ, ἢ ὁ ν τῆς μονάδος διαφέρων· ἐὰν δ' ὑποτεθῇ μ = + ι, καὶ ν = — ι, καὶ γένηται απ = β^2, πορισθήσεται υχ = β^2, ἐξίσωσις ἐμφαίνουσα σπεῖραν ὑπερβολικὴν (καθάπερ κοινῶς ἅπαντες αὐτὴν ὀνομάζουσι)· ὅθεν $\upsilon = \frac{\beta^2}{\chi}$· ὑπὲρ ἄλλης ἄρα τεταγμένης υ^1, ἀποφέρεται $\upsilon^1 = \frac{\alpha^2}{\chi^1}$· ἀκοῦν $\upsilon : \upsilon^1 :: \frac{\alpha^2}{\chi} : \frac{\alpha^2}{\chi^1} :: \frac{1}{\chi} : \frac{1}{\chi^1} :: \chi^1 : \chi$, τοῦτ' ἔστιν, ἐν ταύτῃ τῇ καμπύλῃ αἱ τεταγμέναι ἀντιπεπόνθασι ταῖς ἀποτετμημέναις· ἀλλ' αἱ ἀποτετμημέναι εἰσὶ κυκλικαὶ καὶ ἀνάλογοι τῇ γωνίᾳ τῇ γραφομένῃ ὑπὸ τοῦ σημείου Γ, ἐν ᾧ κινεῖται ἡ ἀκτὶς ΑΓ (ἀνωτ.)· ἐν ἄρα τῇ ὑπερβολικῇ σπείρᾳ αἱ τεταγμέναι εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντιστρόφῳ τῶν περιόδων, τοῦτ' ἔστιν, ἐὰν δὶς ἡ ἀκτὶς περιενεχθῇ, ἡ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ τεταγμένη διπλασία ἔσται τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀκτῖνος, καὶ ἑπομένως ἡ γωνίᾳ ὑποδιπλασίᾳ συστοιχοῦσα ἀκτὶς διπλασία ἔσται ἀκτῖνος συστοιχούσης διπλασίᾳ γωνίᾳ· ἐὰν γὰρ ἐπινοηθῇ τόξον μοιρῶν 300, δυνάμεθα συλλαβεῖν τῷ νοῖ, ὅτι γραμμὴ εὐθεῖα περιήνεκται περὶ τὸ κέντρον τοῦδε τοῦ τόξου, καταγράφουσα διὰ τοῦ πέρατος αὐτῆς τόδε τὸ τόξον, εἴτ' οὖν τόξον ἴσον τριπλασίῳ τόξου 100 μοιρῶν, τοῦτον εἰπεῖν, τόξα πλείω, ἃ ἅμα δύνανται μοίρας 300· ἐὰν δὲ τὸ καταγραφὲν τόξον ᾖ 360° + 100 = 460°, καταμετρήσει ὡρισμένον ἀριθμὸν γωνιῶν, αἳ ἅμα δύνανται 460°, ὧν τὸ ἄθροισμα καλεῖται γωνία 460° κτ.

Ἵνα δὲ γραφῶσιν αἱ σπεῖραι, εὑρεῖν ἀνάγκη τὴν δύναμιν τοῦ ἑκάστῃ ἀκτῖνι συστοιχοῦντος τόξου· μεθ' ὃ ῥᾷστα καταγράφονται διὰ τῶν σημείων, ὡς εἰ καὶ εἴησαν καμπύλαι

γεωμετρικαί· τοσούτῳ δὲ ἀκριβέστερον, ὅσῳ ἄν τις λάβοι ἀκριβέστερον τὰς τῶν δε τῶν τόξων δυνάμεις.

Β΄. Ἐμφαινέτω σ γωνίαν ὁποιανοῦν, ἡ τὸ ταύτην μετροῦν τόξον, οὗ ἡ ἀκτὶς = ι· Καμπύλη οὖν, ἣν παρίστησιν ἡ ἐξίσωσις $\sigma = \upsilon . \Lambda . \frac{\upsilon}{\alpha}$ καλεῖται σπεῖρα λογαριθμική· ἐφ' ἧς (χ. Β. 160) αἱ περὶ τὸ Κ γωνίαι σ, ἡ τὰ τόξα τῆς περιφερείας, ἧς ἀκτὶς = ι, ἀνάλογα ὄντα ταῖς γωνίαις σ, εἰσὶν ἀνάλογα τοῖς λογαρίθμοις τῶν ἀκτίνων υ· ἐὰν τοίνυν ὑποτεθῇ υ = ι = α, ἡ ἐξίσωσις γίνεται σ = λ. υ· ὑποτιθεμένων ἄρα τῶν γωνιῶν σ, ἡ τῶν περὶ ὧν εἰρήκαμεν τόξων, ἐν προόδῳ ἀριθμητικῇ, αἱ συστοιχοῦσαι αὐταῖς ἀκτῖνες (ἃς ἐμφαινέτωσαν αἱ ΚΑ, Κν, ΚΒ κτ) ἔσονται ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ· ἐὰν δὲ ΚΑ ἐμφαίνῃ τὴν ἀκτῖνα (ἡ ὑποτίθεται = ι) τοῦ γεννήτορος κύκλου, κατάδηλον ὡς ἐπ' αὐτῆς δυνατόν ἐστι λαβεῖν ἄπειρα μέρη κατὰ γεωμετρικὴν φθίνουσαν πρόοδον· ὥστε ἡ καμπύλη ἀπείρους ποιήσει περιόδους περὶ τὸ σημεῖον Κ, ἕως ἂν αὐτοῦ τοῦ σημείου ἐφίκηται· δυνατὸν δὲ ὑποθεῖναι τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, Κμ, κτ. κ᾽ κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξουσαν.

332. Ἐναρίθμιος δὲ φέρεται καμπύλαις ταῖς ὑπερβατικαῖς ᾗ ἡ Κυκλοειδής, ἧς ἡ ἐπὶ τῶν τεχνῶν ἐφαρμογὴ ἐγνώρισε ταύτην ἅπασιν ἐν τοῖς νῦν χρόνοις· ἐὰν κύκλος ὁ ΒΔΕ (χ. 161) ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ περικυλιωθῇ, ἀρχόμενος ἐκ τοῦ Α, τὸ αὐτοῦ σημεῖον Ζ, ὃ ἦν ἐν ἀρχῇ κατὰ τὸ Α, ἐν τέλει δὲ εὕρηται κατὰ τὸ Γ, ἐν ταύτῃ τῇ περικυλίσει καταγράψει καμπύλην τὴν ΑΔΓ, ἥτις ἀκούει Κυκλοειδής· ᾗ ἡ μὲν ΒΔ εὐθεῖα ἄξων