ὲ χ ἀποτετμημένας (μ δὲ ποσότης ἐςὶν, ἥτις ἐφεξῆς διορισθήσεται)· τότε τεθέντος, ἄγομεν διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν μχ γραμμῶν εὐθεῖαν, ποιοῦσαν μετὰ τῶν μχ γωνίαν τοιαύτην, ὥςε προςιθεμένης τῇ ψ, ἢ ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρεμένης ποσότητος, ἣν ἐμφαίνει ὁ λογισμὸς, δύνασθαι τὴν υ προσδιορίζεσθαι, προςιθεμένης, ἢ ἀφαιρεμένης, εἰ δέοι, ποσότητος ἀμεταβλήτου. Τελευταῖον δὲ προσδιορισθήσεται ἡ δύναμις τοῦ υ, οὐμὴν ἀλλὰ καὶ τὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν, ἃς ἐμφιλοχωρεῖν δέοι, ὡς ἂν αἱ εὐθεῖαι χ, υ περιέχοιεν τὴν δεδομένην γωνίαν.

292. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Ἔςω ἐξίσωσις $\upsilon^2 - 2\alpha\upsilon + \chi\upsilon = \alpha^2 + 4\alpha\chi - \chi^2$· προςεθέντος ἑκατέρῳ μέλει τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ $\chi - \alpha$ ἡμισυνεργοῦ τῆς υ, ἵνα γένοιτο $(\upsilon - \alpha\chi\chi)^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\chi$, καὶ ὑποτεθέντος $\upsilon - \alpha + \chi = \psi$, προελεύσεται ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς $\psi^2 = (\chi + \alpha) \cdot 2\alpha$· ἀλλὰ γὰρ τὴν καμπύλην κατασκευαςέον, ὡς εἶναι τὰς ἀποτετμημένας μχ, ἀλλ' ὲ χ· διὰ ταῦτ' ἄρα, τῆς ἰσότητος διατηρεμένης, διατεθείσθω ἡ ἐξίσωσις ὅτω· $\psi^2 = \frac{2\alpha}{\mu} \cdot (\mu\alpha + \mu\chi)$· ὑποτεθείσθω ὖν ἡ παραβολὴ AI (σχ. 136), γεγραμμένη ἐπὶ τῆς διαμέτρου AZ παραμέτρῳ $= \frac{2\alpha}{\mu}$· ἐν ταύτῃ δὲ ἔςωσαν αἱ ἀποτετμημένοι $AZ = \mu\alpha + \mu\chi$, καὶ αἱ τεταγμένοι ZHI (παράλληλοι τῇ ἀπτομένῃ AB) $= \psi$· εἰλήφθω δὲ $AK = \mu\alpha$· καὶ δὴ ἔςαι $KZ = \mu\chi$· ἵνα δὲ πορισθῇ $\upsilon = \psi + \alpha - \chi$, προσήχθω ἡ BA ἐς τὸ Δ, ὡς εἶναι $A\Delta = \alpha$, καὶ παράλληλος τῇ ZA ἤχθω ἡ ΔΘ, καὶ προεκβεβλήσθω ἡ IZ ἕς τ' ἂν ἀπαντήσεται τῇ ΘΔ ἐκεῖ· πορισθήσεται $I\Delta\Theta = KZ = \mu\chi$, καὶ $\Theta I = \psi + \alpha$·

ἀφοριωθείσης δὲ τῆς χ ἀπὸ $\psi + \alpha$, καταλειφθήσεται ἡ τοῦ υ δύναμις· ὑποτεθείσθω δὲ ἡ εὐθεῖα MH ὕτως ἠγμένη, ὡς τε τὴν ἀπολαμβανομένην ΘH εἶναι $= \chi$· πορισθήσεται τοίνυν $HI = \Theta I - \Theta H = \psi + \alpha - \chi = \upsilon$· ἵνα δὲ αἱ υ προσδιοριωθῶσι πρὸς τῇ γραμμῇ τῶν χ, ἐπάναγκες εἶναι $MH = \chi$· δεῖ ὖν εὑρεῖν δύναμιν τῆς μ τοιάνδε, ὡς εἶναι $\Theta H = MH = \chi$, δεδομένης τῆς ὑπὸ MHΘ γωνίας. Συνεςάσθω τρίγωνον τὸ PTΣ, ὗ ἡ μὲν γωνία Σ ἴση εἴη τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῶν χ ϗ υ, εἶτ' ὖν τῇ ὑπὸ MHΘ, αἱ δὲ πλευραὶ ΣP, ΣT ἰσάλληλοι· ὑποτεθείσθω ὖν, ἑκατέρα μὲν τέτων $= \alpha$, ἡ δὲ $PT = \gamma$· τέτε τεθέντος ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣPT, HMΘ πρόεισιν $\alpha : \gamma :: \chi : \mu\chi :: 1 : \mu$· ἄρα $\mu = \frac{\gamma}{\alpha}$· ἡ ἄρα παράμετρος $AB = \frac{2\alpha}{\mu} = \frac{2\alpha^2}{\gamma}$, ἡ δὲ εὐθεῖα $KA = \Delta M = \mu\alpha = \gamma$· ἐπεὶ δὲ ἡ ὑπὸ $M\Theta H = T$, ἡ ὑπὸ BAZ παραπλήρωμα ἔςαι τῆς γωνίας T, εἴγε εἰσὶν ἴσαι αἱ γωνίαι Θ, AZI· ἔςι δὲ ἡ BAZ παραπλήρωμα τῆς ὑπὸ $Z\Lambda\Delta = AZI$· διὸ δὴ ἐπὶ διαμέτρε τῆς AZ διὰ παραμέτρε $AB = \frac{2\alpha^2}{\gamma}$, ὑπὸ γωνίαν τὴν BAZ παραπλήρωμα τῆς γωνίας T, γραφήσεται ἡ παραβολὴ AI, ϗ λειφθήσεται $\Delta A = \alpha$, ἀγομένης παραλλήλε τῆς ΔΘ τῇ ZA, ϗ ἐπὶ τῆς ΔΘ ἀποτμηθήσεται $\Delta M = \gamma$, ϗ ἐπιζευχθήσεται ἡ MH ὕτως, ὡς τὴν ὑπὸ ΘMH γωνίαν εἶναι $= T = P$, ϗ πορισθήσεται $MH = \chi$, ϗ $HI = \upsilon$· εἰ δὲ τὰς χ ϗ υ περιέχειν δέοι γωνίαν ὀρθὴν, εὑρεθήσεται $\mu = \sqrt{2}$.

293. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ ς'. Ἔςω ἐξίσωσις εὐτάκτως

διατεθειμένη ἡ $\upsilon^2 - \chi\upsilon = \alpha^2 - \chi^2$· πρῶτον ἓν ἀνα. πληρωθέντος τοῦ πρώτου μέλους, εἶτα ὑποτεθέντος $\upsilon - \frac{\chi}{2} = \psi$, ἀποβήσεται $\psi^2 = \alpha^2 - \chi^2 + \frac{1}{4}\chi^2$, εἴτ' ἓν $\psi^2 = \alpha^2 - \frac{3}{4}\chi^2$, ἐξίσωσις ἐλλείψεως· ἵνα δ' αἱ ἐν αὐτῇ συντεταγμέναι εἶεν $\mu\chi$ καὶ ψ, πολλαπλασιασθήτω μὲν ἡ ἐξίσωσις διὰ μ^2, διαιρεθήτω δὲ διὰ $\frac{3}{4}$· καὶ δὴ τρέψεται εἰς τόν δε τὸν τύπον $\frac{4\mu^2\psi^2}{3} = \frac{4\mu^2\alpha^2}{3} - \mu^2\chi^2$, ὅθεν πρόεισι $\frac{4\mu^2\alpha^2}{3} - (\mu\chi)^2 : \psi^2 :: \frac{4\mu^2\alpha^2}{3} : \alpha^2$· ἐπὶ ἓν ἡμιδιαμέτρων τῶν $KA = \frac{2\mu\alpha}{\sqrt{3}}$ καὶ $KB = \alpha$ ὑποτεθείσθω γεγραμμένη ἡ ἔλλειψις AIB (κ. 137)· καὶ δὴ πορισθήσονται, αἱ μὲν $KE = \mu\chi$, αἱ δὲ $EI = \psi$, ὑποτιθεμένης τῆς EI παραλλήλου τῇ KB· ἐπεὶ μέντοι $\upsilon = \psi + \frac{\chi}{2}$, ἀχθείσης τῆς KH ὡς εἶναι $HE = \frac{\chi}{2}$, πορισθήσεται $HI = \upsilon$· ἀλλ' ἵνα αἱ υ ὁρισθῶσι πρὸς τῇ τῶν χ γραμμῇ, ἐπάναγκες εἶναι $KH = \chi$· ἐπεὶ δὲ KH διπλῆν εἶναι δεῖ τῆς EH, δέδοται δὲ ἡ τῶν συντεταγμένων γωνία KHI, κατεσκευάσθω τρίγωνον τὸ ΡΣΤ, οὗ ἡ μὲν Σ γωνία ἴση εἴη τῇ δεδομένῃ, ἡ δὲ πλευρὰ ΣΡ διπλασία τῆς ΣΤ· ἔσω δὴ $P\Sigma = \alpha$, καὶ $\Sigma T = \frac{\alpha}{2}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $PT = \gamma$· τοιγαροῦν ἔσται $\alpha : \gamma :: 1 : \mu = \frac{\gamma}{\alpha}$. ἐκεῖν ἡ μὲν ἡμιδιάμετρος $KA = \frac{2\gamma}{\sqrt{3}}$· ἡ δ' ὑπὸ KPH γωνία $= BKA$ (διὰ τὰς παραλλήλους BK, IH) $= T$·

διὸ δὴ τῶν ἡμιδιαμέτρων ΚΒ, ΑΚ τὴν ὑπὸ ΒΚΑ = Τ γωνίαν ποιησαμένων, γραφήσεται ἡ ἔλλειψις ΒΑ· τελευταῖον δὲ τῆς ΚΗ ἀχθείσης ὕτως, ὡς τὴν ὑπὸ ΗΚΕ γωνίαν εἶναι = Ρ, αἱ μὲν ΚΗ ἔσονται = χ, αἱ δὲ ΗΙ = υ· ἐὰν δὲ ἡ Σ = ΙΗΚ = 90°, πορισθήσεται $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

294. ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Ζ'. Ἔςω ἐξίσωσις $2\alpha\upsilon - 3\alpha\chi + 4\chi^2 = -2\upsilon^2 + 6\chi\upsilon$· μεταθέντων ἓν πάντων τῶν τοῦ υ περιεκτικῶν ὅρων ἐν τῷ πρώτῳ μέλει, τῶν δὲ λοιπῶν ἐν τῷ δευτέρῳ, καὶ διαιρεθέντων ἁπάντων διὰ 2, πρόεισιν ἐξίσωσις ἐυτάκτως διατεθειμένη ἡ $\upsilon^2 - 3\chi\upsilon + \alpha\upsilon = \frac{3\alpha\chi}{2} - 2\chi^2$· τοῦ τοίνυν πρώτου μέλους ἀναπληρωθέντος, καὶ ὑποτεθείσης τῆς ῥίζης $\upsilon - \frac{3\chi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \psi$, πρόεισι $\psi^2 = \frac{\chi^2 + \alpha^2}{4}$, εἶτ' ἂν $4\psi^2 = \chi^2 + \alpha^2$. Ζητεῖται ἓν ἤδη ὁ τόπος τῶν συντεταγμένων ψ καὶ μχ· πολλαπλασιασθήτω δὴ ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ μ^2· ὅθεν ἔςαι $4\mu^2\psi^2 = \mu^2\chi^2 + \mu^2\alpha^2$, ἐντεῦθεν δ' ἀποφέρεται $(\mu\chi)^2 + (\mu\alpha)^2 : \psi^2 :: (\mu\alpha)^2 : \frac{\alpha^2}{4}$· γεγράφθω τοίνυν ἡ ὑπερβολὴ ΒΙ (χ. 138), ἧς δευτέρα μὲν ἡμιδιάμετρος εἴη ΚΛ $= \mu\alpha$, πρώτη δὲ ΚΒ $= \frac{\alpha}{2}$· καὶ δὴ αἱ μὲν ΚΖ ἔσονται $= \mu\chi$, αἱ δὲ ΖΙ = ψ· ἤχθω δὲ ἡ ΒΓ παράλληλος τῇ ΚΖ, ἵνα γένοιτο ΙΓ $= \psi - \frac{\alpha}{2}$· ταύτῃ δὲ τῇ ποσότητι προσεθείσθω $\frac{3}{2}\chi$ ἵνα γένοιτο υ· διὸ δὴ ἤχθω ἡ ΒΗ ἕτως, ὡς εἶναι Η$\varkappa$ = $\frac{3}{2}\chi$, ἵνα γένοιτο ΗΙ $= \psi - \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}\chi$

$= \upsilon$· ἵνα δὲ ὑπὸ γωνίαν τὴν δοθεῖσαν ΒΗΙ ποριςθείη, ΒΗ $= \chi$, καὶ ΓΗ $= \frac{1}{2}\chi$, ὑποτεθείσθω ἡ γωνία Σ $=$ ΒΗΙ, καὶ γενέσθω ΡΣ $= \alpha$, καὶ ΣΤ $= \frac{3\alpha}{2}$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΡΤ $= \gamma$· ὑποτεθείσθω δὲ καὶ $\mu . \alpha = \gamma$· ἐκεῖν ἔςαι $\alpha : \gamma :: 1 : \mu = \frac{\gamma}{\alpha}$· ἡ ἄρα ἡμιδιάμετρος ΚΑ $=$ $\mu\alpha = \gamma$, τῆς ΚΒ ἀεὶ ἴσης $= \frac{\alpha}{2}$· συνεςάτωσαν ἓν αἱ ἡμιδιάμετροι αὗται γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΚΑ $=$ Τ, καὶ γεγράφθω ἡ ὑπερβολὴ ΒΙ, καὶ ἤχθω ἡ ἁπτομένη ΒΓ ἐξ ἀνάγκης παράλληλος τῇ ΚΖ, καὶ ΒΗ ἀχθεῖσα ποιείτω μετὰ τῆς ΒΚ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΗΒΚ $=$ Ρ· ποριςθήσονται ἓν, αἱ μὲν ΒΗ $= \chi$, αἱ δὲ ΗΙ $= \upsilon$· τῆς δὲ γωνίας Σ ὀρθῆς ἴσης, ποριςθήσεται $\gamma^2 = \alpha^2 + \frac{9\alpha^2}{4} = \frac{13\alpha^2}{4}$, καὶ $\gamma = \frac{\alpha}{2}\sqrt{13}$, καὶ $\mu = \frac{\sqrt{(13)}}{2}$.

295. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐφαρμοςέον δ' ἂν εἴη τὴν μέθοδον καὶ ταῖς τοῦ υ^2 μὴ περιεκτικαῖς ἐξισώσεσιν· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ περιπτώσει διαθετέον τὸ ἐπίπεδον $\chi\upsilon$, ὡς εἶναι ὑπαρκτικὸν, συνεργοῦ δίχα, καὶ κείμενον πρὸς ἃ μέρη καὶ χ^2.

296. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Η'. Ἔςω ἐξίσωσις $\chi\upsilon - \frac{\chi^2}{2} = \phi\chi - \alpha\upsilon + \alpha^2$· ὑποτεθείσθω ἓν ὁ τοῦ χ πολλαπλασιαςὴς $\upsilon - \frac{\alpha}{2} = \psi$, εἶτ' ἓν $\upsilon = \psi + \frac{\alpha}{2}$, καὶ ἀντικαταςαθήτω ἡ δύναμις τοῦ υ ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, ἵνα γένηται

$\chi\psi = \frac{\alpha\chi}{2} - \alpha\psi + \alpha^2$, εἴτ' ἦν $\psi\chi - \frac{\alpha\chi}{2} = \alpha^2 - \alpha\psi$· γενέσθω δὲ $\psi - \frac{\alpha}{2} = \kappa$· καὶ δὴ ἔσται $\chi\kappa = \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\kappa$, εἴτ' ἦν $\chi\kappa + \alpha\kappa = \frac{\alpha^2}{2}$· ἐὰν ἦν ἐν τῇ καμπύλῃ ἀποτεταμημέναι ὦσιν αἱ χ, εὑρεθήσονται αἱ κ προσοριζόμεναι τῇ γραμμῇ τῶν χ· διὸ δὴ πολλαπλασιασθείσης τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ μ, ἵνα γένοιτο $\kappa(\mu\chi + \mu\alpha) = \frac{\mu\alpha^2}{2}$, καὶ ὑποτεθέντος $\mu\chi + \mu\alpha = \pi$, προκύψει $\pi\kappa = \frac{\mu\alpha^2}{2}$ ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις· ἐπὶ μιᾶς ἦν τῶν ἀσυμπτώτων (κ. 139) εἰλήφθω ΚΑ $= \mu\alpha$, καὶ ἤχθω ΒΑ $= \frac{\alpha}{2}$ καὶ παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ ΚΜ· ὑπερβολῆς δὲ, διὰ τοῦ Β διηκούσης, γραφείσης, ἔσονται αἱ μὲν ΚΖ $= \pi$, αἱ δὲ ΖΙ $= \kappa$· ἀλλὰ $\mu\chi = \pi - \mu\alpha$· ἄρα ΑΖ $= \mu\chi$· παρὰ ταῦτα δὲ, ἐπεὶ $\psi = \kappa + \frac{\alpha}{2}$, γενομένης ΑΔ $= \frac{\alpha}{2}$, καὶ διὰ τοῦ σημείου Δ ἀγομένης τῆς ΔΝ παραλλήλου τῇ ΚΖ, ἔσονται, αἱ μὲν ΔΘ $=$ ΑΖ $= \mu\chi$, αἱ δὲ ΘΙ $= \psi$· ἀλλ' $\upsilon = \psi + \frac{\chi}{2}$· ἀχθείσης ἄρα τῆς ΔΗ ὥστε, ὡς εἶναι ΗΘ $= \frac{1}{2}\chi$, ἔσται τηνικαῦτα ΗΙ $= \upsilon$· ἵνα δὲ ἡ υ προσδιορισθῇ τῇ γραμμῇ τῶν χ, δεῖ εἶναι ΔΗ $= \chi$: διορισέον οὖν ἐνταῦθα τὴν τοῦ μ δύναμιν· ἐπειπερ ἡ

ὑπὸ ΔΗΙ γωνία τῶν συντεταγμένων γνωσὴ ὑποτίθεται, καὶ ἔτι $\Delta H : \Theta H :: \chi : \frac{\chi}{2} :: 2 : 1$, συνεσάτω τρίγωνον τὸ ΡΣΤ, οὗ ἡ γωνία Σ ἴση εἴη τῇ δεδομένῃ γωνίᾳ· καὶ τεθήτω $P\Sigma = \alpha$, καὶ $\Sigma T = \frac{\alpha}{2}$, καὶ ΡΤ ὑποτεθείσθω $= \gamma = \mu\alpha$· ἄρα $\mu = \frac{\gamma}{\alpha}$· διὰ ταῦτ' ἄρα μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ΚΜ, ΚΑ περιεχουσῶν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΜΚΑ $= T$, ληφθείσης τῆς $KA = \mu\alpha = \gamma$, καὶ $BA = \frac{\alpha}{2}\gamma$· γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ ΒΙ διὰ τοῦ Β διερχομένη· γενομένης δὲ $A\Delta = AB$, ἤχθω τῇ ΚΑ παράλληλος ἡ ΔΝ, καὶ ἤχθω ἡ ΔΗ ὥστε, ὡς τὴν ὑπὸ ΗΔΘ γωνίαν εἶναι $= P$· καὶ δὴ αἱ ΔΗ ἔσονται $= \chi$, αἱ δὲ τῇ ΚΜ παράλληλοι ΗΙ ἔσονται $= \upsilon$· τῆς δὲ Σ γωνίας ὀρθῆς οὔσης, πορισθήσεται $\gamma^2 = \frac{5\alpha^2}{4}$ καὶ $\gamma = \frac{\alpha}{2}\sqrt{5}$.

297. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τοῦ χυ ὀρθογωνίου μετὰ τοῦ τετραγώνου υ^2 τῇ ἐξισώσει παρόντων, ἀπῇ τὸ χχ, τρεπτέον τὴν υ εἰς χ καὶ τ' ἀνάπαλιν· καὶ δὴ πορισθήσεται ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἐξίσωσις ὁμοία ταῖς ἄρτι κατεσκευασμέναις. Ἀλλὰ γὰρ ἴωμεν ἤδη εἰς τὸ ἐπιλύσαθαι ἔνια τῶν ἀορίστων δευτεροβαθμίων προβλημάτων.

298. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τῆς Αμ ἁπτομένης κύκλου (σχ. 140), οὗ κέντρον τὸ κ, καὶ Ξμ ἀεὶ ὑποτιθεμένης παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ ΑΒ καὶ ἴσης τῇ ἐναπολαμβανομένῃ Ρμ, εὑρεῖν τοὺς τόπους πάντων τῶν σημείων Ξ.

ΛΥΣΙΣ. Καθείσθω πρὸς ὀρθὰς τῇ διαμέτρῳ ΒΑ

προεκβληθείσῃ ἡ ΞΠ = Αμ = υ, καὶ ΑΠ ἔσω = χ = Ξμ = Ρμ, καὶ κΑ = α· διὰ τοίνυν τὴν ἰδιότητα τοῦ κύκλου (Γεωμ. 344) ἔστιν Αμ² = μΡ × μΜ, εἴτ' οὖν υ² = χ. (χ + 2α), τουτ' ἔστιν υ² = 2αχ + χ², ἐξίσωσις κυκλικῆς ὑπερβολῆς, ἧς οἱ ἄξονες ἴσοι τῇ δοθείσῃ διαμέτρῳ· κατάδηλον δέ, ὡς αἱ μὲν ἐναπολαμβανόμεναι Ρμ τοῦ κυκλικοῦ τεταρτημορίου Αδ διδόασι τὸν κλῶνα ΑΞ, αἱ δὲ ἐναπολαμβανόμεναι πΤ, τὸν ΑΖ· ἐδὲ τοῦτο δὲ δυσχερὲς σύνιδεῖν ὡς ἄρα διὰ τῆς ἀπτομένης ΝΒΚ συσαίη ἂν ἡ ἀντικειμένη ὑπερβολὴ νΒΗ.

299. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Σημείου δοθέντος τοῦ Ν (χ. 141), μεταξὺ δύω πλευρῶν τῆς ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας εὑρεῖν καμπύλην τὴν ΝΜ, ὅπως ἀγομένης διὰ τοῦ Ν εὐθείας ἁπάσης τῆς ΑΜΓ, αἱ ἐναπολαμβανόμεναι ΑΜ, ΝΓ ἀεὶ ἴσαι ὦσιν.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τῶν Μ, Ν σημείων ἤχθωσαν ΜΣ, καὶ ΝΔ παράλληλοι τῇ πλευρᾷ ΒΓ, καὶ ὑποτεθείσθω ΒΣ = χ, καὶ ΜΣ = υ, καὶ ΝΔ = α· καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος ΑΜ = ΝΓ, ἔσται ΑΣ = ΒΔ = β (διὰ γὰρ τὰς παραλλήλους ΝΔ, ΜΣ ἔστι ΜΑ : ΓΝ :: ΣΑ : ΔΒ· ἀλλὰ ΜΑ = ΓΝ· ἄρα καὶ ΣΑ = ΒΔ)· ἄρα ΑΔ = ΒΣ = χ· ἀλλὰ διὰ τὰς παραλλήλους ΣΜ, ΝΔ ἔστι ΣΑ : ΣΜ :: ΑΔ : ΔΝ, εἴτ' οὖν β : υ :: χ : α· ἄρα χυ = βα = γ²· γενομένου ἄρα βα = γ², ἔσται χυ = γ², ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ΑΒ, ΒΓ· ἐὰν ἄρα μεταξὺ τῶν δεῦ τῶν εὐθειῶν ὑπερβολὴ γραφῇ, διήκουσα διὰ τοῦ σημείου Ν, πορισθήσεται ἡ ζητουμένη καμπύλη.

300. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Τετράγωνον συστήσασθαι ἴσον ὀρθογωνίῳ, οὗ αἱ πλευραὶ διαφέρωσιν ἀλλήλων γραμμῇ εὐθείᾳ δεδομένῃ τῇ κα.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω υ ἡ τȣ̃ τετραγώνȣ πλευρὰ ȣ̓ χ ἡ ἐλάσσων τȣ̃ ὀρθογωνίȣ πλευρά· ἡ ἄρα μείζων ἔςαι = χ + 2α· ἐκ δὲ τῆς τȣ̃ προβλήματος φύσεως ἔςιν υ² = αχ + χ², ἐξίσωσις κυκλικῆς ὑπερβολῆς, ἧς οἱ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἑκάτερος τῇ εὐθείᾳ 2α. Τὸ ἄρα ἀφ' ἡςινοσȣ̃ τεταγμένης τετράγωνον υ² ἀεὶ ἔςαι ἴσον ὀρθογωνίῳ, ȣ̔ αἱ πλευραὶ διαφέρȣσιν ἀλλήλων τῇ δεδομένῃ εὐθείᾳ 2α.

301. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Τετράγωνον συςήσαȣθαι ἴσον ὀρθογωνίῳ, ȣ̔ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν εἴη ἀμετάβλητον ȣ̓ ἴσον τῷ 2α.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω υ ἡ τȣ̃ ζητȣμένȣ τετραγώνȣ πλευρά, ȣ̓ χ ἡ ἑτέρα τῶν τȣ̃ ὀρθογωνίȣ πλευρῶν· ἑτέρα τοίνυν ἔςαι = 2α — χ· ἔςι δὲ ἐκ τῆς τȣ̃ προβλήματος φύσεως υ² = 2αχ — χ², ἐξίσωσις κύκλȣ, ȣ̔ ἡ διάμετρος = 2α· ἄρα τὸ ἀφ' ἑκάςης τεταγμένης τετράγωνον, ȣ̓ τὸ ὑπὸ τῶν συςοιχȣσῶν ἀποτετμημένων ὀρθογώνιον, ἕξȣσι τὴν ζητȣμένην ἰδότητα.

302. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Τῆς θέσεως δύω παραλλήλων ΑΗ, ΒΘ (σχ. 142), ὧν τὰ πέρατα Α ȣ̓ Β μόνιμά εἰσι, δοθείσης, εὑρεῖν μεταξὺ αὐτῶν σημεῖον τὸ Μ, δι' ȣ̔ ἂν ȣ̓ διὰ τȣ̃ Α ἀχθεισῶν τῆς τε εὐθείας ΑΜΔ ȣ̓ τῆς ΠΜΞ παραλλήλȣ τῇ ΒΑ, ἡ ΒΔ εἴη πρὸς τὴν ΜΠ, ὡς μία δεδομένη εὐθεῖα ἡ φ πρὸς τὴν ΒΑ.

ΛΥΣΙΣ. Κείσθω τὸ πρᾶγμα ὡς γεγονώς· ȣ̓ δὴ ἔςω ΑΒ = α, ΑΠ = χ, ȣ̓ ΠΜ = υ· τῶν ȣ̔ν τριγώνων ΑΒΔ, ΜΠΑ ὁμοίων ὄντων, ἔςι ΜΠ : ΠΑ :: ΑΒ : ΒΔ, εἴτ' ȣ̔ν υ : χ :: α : ΒΔ = $\frac{\chi\alpha}{\upsilon}$· ἀλλὰ διὰ τὴν φύσιν τȣ̃ προβλήματος ἔςι $\frac{\chi\alpha}{\upsilon}$: υ :: φ : α· ἄφα φυ = $\frac{\alpha^2\chi}{\upsilon}$, εἴτ'

οὗ $\varphi\upsilon\upsilon = \alpha^2\chi$, ἢ $\upsilon\upsilon = \frac{\alpha^2\chi}{\varphi}$, ἢ τέλος, τεθέντος $\frac{\alpha^2}{\upsilon} = \pi$, $\upsilon^2 = \pi^4\chi$, ἐξίσωσις παραβολῆς, ἧς ΑΗ ἐστὶν ἡ γραμμὴ τῶν χ.

303. Ἔστιν δ' τῶν προβλημάτων δυσχερέστερα τὸ πρῶτον δοκεῖ, ὧν μέντοι ἡ ἐπίλυσις ῥᾴστη, μικρόντι ἐπιστήσασι τὸν νοῦν ἰδιότητί τινι τῶν καμπύλων· οἷον

304. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'. Καμπύλην εὑρεῖν τὴν ΑΛΔΒ (σχ. 143), ὅπως περὶ τὸν ἄξονα ΑΒ, ἀπείρων παραβολῶν γραφεισῶν ΛΑ, ΖΑ, ΔΑ, κτ. (ὡς εἶναι ἀλλ' ὧν τὴν μεγίστην παράμετρον < 2ΑΒ) καὶ ἐκ σημείου τοῦ Β τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΒ ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΒΛ, ΒΖ κτλ. καθέτων ταύταις ταῖς παραβολαῖς, ἡ καμπύλη ΑΖΘΒ διήκη διὰ πάντων τῶν σημείων, ἐν οἷς αὗται αἱ κάθετοι συναντῶσι ταῖς αὐτῶν παραβολαῖς.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῶν σημείων Λ, Ζ, Δ ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΛΡ, ΖΞ, ΔΠ, κτ. κάθετοι τῷ ἄξονι ΑΒ, ἐκκεῖν ἡ μὲν Βπ ἔστιν ὑποκάθετος τῆς παραβολῆς ΘΑ, ἡ δὲ ΒΠ τῆς ΔΑ κτ. ἔστω ἤδη ΔΠ = υ, καὶ ΑΠ = χ, καὶ ΑΒ = 2β· ἄρα ΒΠ = 2β — χ· διὰ δὲ τὴν φύσιν τῆς παραβολῆς ΔΑ, τιθεμένης τῆς κατ' αὐτὴν παραμέτρου = 2π, πρόεισιν $\upsilon^2 = 2\pi\chi$. Ἀλλ' ἡ ὑποκάθετος ΒΠ ἡμίσεια ἐστὶ τῆς παραμέτρου· ἄρα ΒΠ = π = 2β — χ, καὶ $\upsilon^2 = 2\,(2\beta\chi - \chi\chi)$· ὡσαύτως δὲ γενομένης Βπ = 2β — χ, καὶ Απ = χ, καὶ Θπ = υ, εὑρεθήσεται καὶ ἐπὶ τῆς ΘΑ παραβολῆς $\upsilon^2 = 2 \cdot (2\beta\chi - \chi\chi)$· ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἄλλων παραβολῶν· ἐν ἄρα τῇ καμπύλῃ ΑΛΒ τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα εἰσίν, ὡς τὰ διπλᾶ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων χ καὶ 2β — χ, τοῦτ' ἔστιν ἀεὶ ὑπάρχει

$\upsilon^2 : 2\beta\chi - \chi\chi :: 2 : 1 :: \alpha\alpha : \beta\beta$ (ὑποτιθεμένης $\alpha\alpha = 2\beta\beta$)· ἄρα $\upsilon^2 : 2\beta\chi - \chi\chi :: \alpha\alpha : \beta\beta$ καὶ $\upsilon^2 = \frac{\alpha\alpha}{\beta\beta}(2\beta\chi - \chi\chi)$, ἐξίσωσις ἐλλείψεως· ἐκεῖν ἡ καμπύλη ΑΔΒ ἔστω ἡμιελλείψιον, ἧς ὁ μὲν ἄξων ΑΒ $= 2\beta$, ὁ δ' ἡμιάξων ΞΖ $= \alpha$· ἵνα δ' εὑρεθείη ἡ ΙΞ, εἰλήφθω τὸ γινόμενον ὑπὸ δύω τῶν τυχόντων ἀποτετμημένων (ΑΠ, ΠΒ φέρε), καὶ γενέσθω ΑΠ $\times$ ΒΠ $= 2\beta\chi - \chi\chi : \Delta\Pi^2 = \upsilon^2 :: \beta\beta : \alpha\alpha$· ὁ δὲ ταύτης τῆς ἀναλογίας τέταρτος ὅρος γνωστὸν ποιήσει τὸν ἡμιάξονα $\alpha =$ ΙΞ.

Περὶ Γεωμετρικῆς ἐπιλύσεως τῶν ὡρισμένων ἐξισώσεων τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου βαθμοῦ.

305. Ἐὰν ἐξίσωσις ὡρισμένη τριτοβάθμιος ἢ τεταρτοβάθμιος εἰς δύω ἀναλυθῇ ἐξισώσεις ἀορίστους δευτεροβαθμίους, αἱ διατομαὶ τῶν καμπύλων, ἃς ἐμφαίνουσιν αἱ ἀόριστοι αὗται ἐξισώσεις, ἀποδώσουσι τὰς ῥίζας τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· Ἵνα δὲ τὸ πρᾶγμα λαμπρότερον ἀναφανείη, ἔστων ἐξισώσεις αἱ $\chi^2 = \alpha\upsilon$, $\chi\upsilon = \alpha\beta$· εἰσὶν οὖν ἡμῖν ἐξισώσεις τε δύω καὶ δύω ποσότητες ἄγνωστοι· ἐκεῖν ἀφικέσθαι δυνησόμεθα εἰς ἐξίσωσιν μιᾶς μόνης ἀγνώστου περιεκτικήν· ἐκ γὰρ τῆς πρώτης ἐξισώσεως πρόεισι $\frac{\chi^2}{\alpha} = \upsilon$, ταύτης δὲ τῆς τοῦ υ δυνάμεως ἀντικαταστάσης ἐν τῇ δευτέρᾳ, προκύψει ἐξίσωσις ὡρισμένη τριτοβάθμιος $\frac{\chi^3}{\alpha} = \alpha\beta$, εἴτ' οὖν $\chi^3 = \alpha\alpha\beta$· τοὐναντίον δὲ ταύτην τὴν ὡρισμένην ἐξίσωσιν εἰς δύω ἀορίστους δευτεροβαθμίους

ἀναλύσαι δυνάμεθα, ὑποτιθέμενοι $\chi^2 = \alpha\upsilon$, καὶ $\chi\upsilon = \alpha\beta$, ἐξ ὧν τῆς συνθέσεως ἀποτελεῖται ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 = \alpha^2\beta$.

Τῆς τοίνυν τριτοβαθμίου, ἢ τεταρτοβαθμίου, ἐξισώσεως εἰς δύω ἀναλυθείσης ὁρίσεις δευτεροβαθμίους, εἰλήφθω ἡ εὐθεῖα ΑΠ ὡς ἄξων (σχ. 144), τὸ δὲ σημεῖον Α ὡς ἀρχὴ τῶν χ ἑκατέρας τῶν ἐν ταύταις ταῖς ἐξισώσεσι δοθεισῶν κωνικῶν τομῶν· γραφεισῶν ἐν τῶν δε τῶν καμπύλων, αἱ ῥίζαι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ὁριοθήσονται ὑπὸ τῶν σημείων, τῶν οἷς ἀλλήλας τέμνουσιν αἱ καμπύλαι· ἐν γὰρ τῷ προτεθέντι ὑποδείγματι γραφεῖσα ἡ παραβολὴ Αμ ἐπὶ τῆς ἀπτομένης ΑΠ ἔσται τόπος τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 = \alpha\upsilon$· ἀχθείσης εἶτα τῆς ΑΝ παραλλήλως ταῖς τεταγμέναις Πμ, καὶ γραφείσης τῆς ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi\upsilon = \alpha\upsilon$ ὑπερβολῆς μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ΑΠ, ΝΑ, τὸ σημεῖον μ τῆς τῶν καμπύλων Αμ, μΜ, διατομῆς προσδιορίσει τὴν τεταγμένην μΠ, καὶ τὴν ἀποτετμημένην ΑΠ μίαν μόνην ῥίζαν τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 = \alpha^2\beta$· αἱ γὰρ ἄλλαι ῥίζαι εἰσὶν ἀδύνατοι· ὥσπερ καὶ αἱ καμπύλαι Αμ, μΜ, καθ' ἓν μόνον σημεῖον διατέμνονται.

Μόνη τοιγαροῦν ἀπαιτεῖται ἡ τῆς τριτοβαθμίου, ἢ τεταρτοβαθμίου, ἐξισώσεως εἰς δύω ὁρίσεις δευτεροβαθμίους ἀνάλυσις, τοιάς δε μέντοι, οἷαι ἀποδιδόναι αὖ ἔχειν· καὶ ἀνακαθισᾶν τὴν προτιθεμένην ἐξίσωσιν· εἰς πλείω δὲ εὐμάρειαν δυνατὸν ὑποθέσθαι τὰς τεταρτοβαθμίους, ἢ τριτοβαθμίους, ἐξισώσεις ἀπηλλαγμένας τοῦ δευτέρου ὅρου· προσιθέναι μόνον δεῖ ταῖς εὑρεθείσαις ἂν ῥίζαις τὸ τρίτον τοῦ κατὰ τὸν ἀφαιρεθέντα δεύτερον ὅρον συνεργοῦ, ἢ τὸ τέταρτον, εἰ τεταρτοβάθμιος εἴη ἡ προκειμένη ἐξίσωσις, μετὰ συμβόλου ἐναντίου, καθάπερ δέδεικται (Συμβολ. Λογισμ. 465)· τὸ δὲ τρίτον τοῦτο, ἢ τέταρτον, γραμμὴν

εὐθεῖαν εἶναι, ἀλλὰ μὴ καμπύλην, μὴ ὀχὶ περιττὸν ἢ προσεπισημειῶσαι;

306. ΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἔςω γενικὴ ἐξίσωσις τριτοβάθμιος, τοῦ δευτέρου ὅρου ἀπηλλαγμένη, ἡ $\chi^3 + \alpha\beta\chi - \alpha\zeta^2 = 0$, ἐφ' ἧς α καὶ β ὑποτεθῆναι δύνανται εἴτε ὑπαρκτικαὶ, εἴτε λειπτικαί· γενέσθω ἓν $\chi^2 = \alpha\upsilon$, καὶ ἀντικαταςαθήτω ἡ τοῦ χ^2 δύναμις ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει, ἥτις ἔσται διὰ α διαιρεθεῖσα $\upsilon\chi + \beta\chi - \zeta^2 = 0$· ἡ μὲν ἓν ἐξίσωσις $\chi^2 = \alpha\upsilon$ ἔςι παραβολῆς· εἰς δέ γε κατασκευὴν τῆς ἑτέρας ἐξισώσεως, γενέσθω $\upsilon + \beta = \psi$· καὶ τοίνυν ἔςαι διὰ μεταθέσεως $\chi\psi = \zeta^2$, ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις. Παραμέτρῳ ἓν $= \alpha$, ἐπὶ τῆς ΔΜ (σχ. 145) ληφθείσης ὡς γραμμῆς τῶν χ, ὧν ἡ ἀρχὴ ἔςι κατὰ τὸ Δ, γεγράφθω ἡ παραβολὴ ΠΔΝ ἧς ἅπτεται ἡ ΔΜ κατὰ τὸ Δ ἀρχὴν τοῦ τῶν υ ἄξονος ΔΣ· ἐκ δὲ τῆς κατὰ τὴν παραβολὴν ἰδιότητος, ἔςι $\Delta M^2 = \Sigma N^2 = \chi^2 = \alpha \times \Delta\Sigma = \alpha\upsilon$· ἄρα ΔΝ ἐςὶν ἡ ζητουμένη παραβολή· εἰς δὲ κατασκευὴν τῆς ἐν τῇ ἐξισώσει $\psi\chi = \zeta^2$ ὑπερβολῆς, ἐπειδὴ ἑκατέραν τῶν καμπύλων ἔχειν ἐπάναγκες τὸν αὐτὸν ἄξονα καὶ τὴν αὐτὴν ἀρχὴν τῶν χ, εἰλήφθω ΚΔ $= \beta$, καὶ διὰ τοῦ Κ ἤχθω τῇ ΔΜ παράλληλος ἡ ΙΚΞ· ἡ ἄρα τῶν ἀσυμπτώτων γωνία ΞΚΣ, ἴση ἔςαι τῇ ὑπὸ ΜΔΣ γωνίᾳ τῶν χ καὶ τῶν υ, ὅπερ ἀεὶ ὅτως ἔχειν πρόσηκει ἐν ταῖς δε περιπτώσεσι. Τοῦτο τοίνυν ζητηθήτω σημεῖόν τι τῆς ὑπερβολῆς ΜΝ, τιθεμένοις

$\zeta : K\Xi :: \Xi N : \zeta$· ἄρα $\Xi N = \dfrac{\zeta^2}{\Xi K}$· ἀλλὰ ΞΚ ῥᾳδίως ἔχει γνωσθῆναι· ἄρα καὶ ΞΝ εὐχερῶς γνωσθήσεται· ἄρα εὐμαρῶς εὑρεθήσεται σημεῖόν τι τὸ Ν τῆς ὑπερβολῆς· εὑρεθήσονται δὲ καὶ ἕτερα σημεῖα ποικιλλομένης τῆς ΚΞ·

ἔστιν ἄρα $\Xi N = \psi = \upsilon + \beta$, καὶ $\upsilon = \psi - \beta = \Xi N - \mu\Xi$· ἄρα $\mu N = \upsilon$ καὶ $\Delta\mu = K\Xi = \chi$· ῥᾷστα ἂν καταφανεῖται, ὡς τὸ τῆς διατομῆς σημεῖον N μίαν τὴν Δμ προσδιορίσει ἐκ τῶν ῥιζῶν τῆς προκειμένης ἐξισώσεως, τῶν δὲ α καὶ β ὑπαρκτικῶν ὄντων ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ παραβολὴ καθ' ἓν μόνον σημεῖον διατμηθήσονται, καὶ ἡ ἐξίσωσις μίαν μόνην ἕξει ῥίζαν πραγματικήν· τ' αὐτὸν ἔσται, κ' ἂν ἡ $\beta = 0$.

307. ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἔστω ἤδη ἐξίσωσις γενικὴ τεταρτοβάθμιος $\chi^4 + \zeta\vartheta\chi^2 + \zeta^2 \cdot \beta\chi \pm \zeta^3\gamma = 0$· ὑποτεθείσθω ἂν $\zeta^3\gamma = \chi^2\upsilon^2$, καὶ γενομένης ἀντικαταστάσεως, πρόεισι $\chi^4 + \zeta\vartheta\chi^2 + \zeta^2\beta\chi + \chi^2\upsilon^2 = 0$· γράφω δὲ ὁ τρίτος ὅρος ὅτω $\frac{\zeta^2\beta}{\zeta\sqrt{\zeta\varepsilon}}\zeta\sqrt{(\zeta\gamma)}\,\chi$· ἐν αὐτῷ δὲ τῷ ὅρῳ ἀντικαταστάθήτω $\chi\upsilon$ ἀντὶ $\zeta\sqrt{(\zeta\gamma)}$: (ἐκ γὰρ τῆς ἐξισώσεως $\zeta^3\gamma = \chi^2\upsilon^2$ ἀποφέρεται $\chi\upsilon = \zeta\sqrt{(\zeta\gamma)}$)· καὶ δὴ ἔσται $\chi^4 + \zeta\vartheta\chi^2 + \frac{\beta\sqrt{(\zeta)}}{\sqrt{\gamma}}\chi^2\upsilon + \chi^2\upsilon^2 = 0$, ἥτις διὰ χ^2 διαιρεθεῖσα γενήσεται $\chi^2 + \vartheta\zeta + \frac{\beta\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\gamma}}\upsilon \pm \upsilon^2 = 0$· αὕτη τοίνυν ἡ ἐξίσωσις, ληφθέντος τοῦ — συμβόλου ἐν τῷ ἐσχάτῳ ὅρῳ, ἐλλείψεως μὲν ἔσται τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας μὴ ὀρθῆς ἔσης· κύκλου δὲ, ὀρθῆς· ὑπερβολῆς δὲ κυκλικῆς, τοῦ — τεθέντος ἐν τῷ ἐσχάτῳ ὅρῳ· καὶ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει συζεύχθω ἡ ἔλλειψις, ἡ ὁ κύκλος, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἡ κυκλικὴ ὑπερβολὴ τῇ ὑπερβολῇ τῆς ἐξισώσεως $\zeta\sqrt{(\zeta\gamma)} = \chi\upsilon$· αἱ δὲ αὐτῶν διατομαὶ προσδιορίσουσι τὰς ζητουμένας ῥίζας. Τῆς δὲ τῶν συντεταγμένων γωνίας ὀρθῆς ὑποτεθείσης, καὶ τοῦ συμβόλου — ληφθέντος, προσθήσονται αἱ ῥίζαι διὰ τῶν διατομῶν δύω ὑπερβολῶν κυκλικῶν· εὐχερῶς δὲ κατανο-

εἶται, ὡς ἄρα ἐξίσωσις τριτοβάθμιος πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ $\chi = 0$, ἢ ἐπὶ $\chi - 0 = 0$ τεταρτοβάθμιος γίνεται, καὶ εὐμαρῶς αὐτῆς αἱ ῥίζαι εὑρίσκονται.

Δυνατὸν δὲ κατασκευάσαι τὴν γενικὴν τεταρτοβάθμιον καὶ τριτοβάθμιον ἐξίσωσιν καὶ διὰ παραβολῆς καὶ κύκλου· ἔστω γὰρ παραβολὴ ἡ ΔΕΖ (σχ. 144), ἧς ἐξίσωσις $\upsilon^2 = \beta\chi + \chi^2$, τοῦ Β ἀρχῆς ὄντος τῶν ἀπὸ τῆς εὐθείας ΜΝ ἀποτετμημένων, καὶ ὀρθῆς τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας· καὶ ἐπὶ τῆς ἀπεράντου ΒΑ εἰλήφθω $B\Theta = \delta$ ($\eta = -\delta$, εἰ ληφθείη ἐπὶ τῆς Βα), καὶ ἐπὶ τῆς ΘΗ παραλλήλου τῇ ΜΝ εἰλήφθω $\Theta K = \zeta$, ἢ ἀποδοτέον τὸ —, εἰ ληφθείη πρὸς τὰ ἀριστερά· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ $KZ = \gamma$, γεγράφθω κύκλος ὁ ΖΑ, τέμνων τὴν παραβολὴν κατὰ τὸ Ζ· ἐπεὶ οὖν $ZI = \upsilon$ καὶ $BI = \chi$ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν παραβολήν, ἔσται $ZH = \upsilon - HI = \chi^2 + \beta\chi - \delta$, καὶ $KH = \Lambda I = \Theta H - \Theta K = \chi - \zeta$· ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΗΖ πρόεισι

$$\gamma^2 = \chi^4 + 2\beta\chi^3 + \beta^2\chi^2 - 2\delta\chi^2 - 2\beta\delta\chi + \delta^2 + \chi^2 - 2\zeta\chi + \zeta^2$$

εἶτ' οὖν

$$\chi^4 + 2\beta\chi^3 + \beta^2\chi^2 - 2\beta\delta\chi + \delta^2 = 0 \quad (A)$$
$$- 2\delta\chi^2 - 2\zeta\chi + \zeta^2$$
$$+ \chi^2 \qquad - \gamma^2$$

εἰλήφθω ἤδη ἐξίσωσίς τις τεταρτοβάθμιος, ἥτις ἀεὶ ἐμπεριοχεύσεται τῇ καθολικῇ $\chi^4 + \pi\chi^3 + \xi\chi^2 + \rho\chi + \sigma = 0$ (B)· αἱ δὲ, ἃς εὑρεῖν δεῖ, ΒΙ ἔσονται αἱ χ, εἶτ' οὖν αἱ δυνάμεις τῶν ταύτης τῆς ἐξισώσεως ῥιζῶν· ἴσης οὖν ὑποκειμένης τῆς Β τῇ Α, καὶ ταύτης πρὸς ἐκείνην παραβαλλομένης, ἔξομεν $2\beta = \pi$, καὶ $\beta\beta - 2\delta + \beta = \xi$, καὶ $- 2\beta\delta - 2\zeta = \rho$, καὶ $\delta\delta + \zeta\zeta - \gamma\gamma = \sigma$· αἱ τοίνυν διὰ τῶν γραμμάτων $\beta, \delta, \zeta, \gamma$ ἐμφαινόμεναι εὐθεῖαι ἀεὶ

δύνανται γενέσθαι μεγέθες τȣ̃ ἀπαιτȣμένȣ, ἵν' εἶεν ἀληθεῖς αἱ ἐξισώσεις, αἱ πρὸς διορισμὸν αὐτῶν ξυντελȣ̃σαι· ἐκεῖν ἔσται $\beta = \frac{1}{2}\pi$, καὶ $\delta = \frac{\beta^2 + 1 - \xi}{2} = \frac{\frac{1}{4}\pi^2 + 1 - \xi}{2}$, καὶ $\zeta = \frac{-2\beta\delta + \rho}{2} = \frac{-\frac{1}{4}\pi^3 + \pi - \pi\xi + 2\rho}{4}$, καὶ $\gamma = \sqrt{(\delta\delta + \zeta\zeta - \sigma)}$· ἐκ δὲ ψιλῆς ἐποπτείας δῆλον καθίσταται, ὅτι β, δ, ζ ἐδέποτε κατ' ἐπίνοιαν δύνανται εἶναι· ἡ δὲ γ, μόνον ἡνίκα σ ποσότης εἴη ὑπαρκτικὴ $> \delta\delta + \zeta\zeta$· ἀλλ' ἐπεί περ δ ἐ μόνον διὰ π καὶ ξ προσδιορίζεται, ἀλλὰ καὶ διὰ τῆς μονάδος τῆς εὐθείας, ἣν, ὅσον ἂν βȣλοίμεθα, μεγάλην λαβεῖν δυνάμεθα, ἐξέσται ἀεὶ ποιεῖν $\delta\delta + \zeta\zeta > \sigma$, ἐφ' ᾧ τὴν γ ποσότητα τελεῖσθαι πραγματικήν.

Εἰ μὲν ὁ κύκλος τετραχθὰ τὴν παραβολὴν τέμνει, ἡ προκειμένη ἐξίσωσις τεσσάρων ῥιζῶν πραγματικῶν ἐυμοιρήσει· δυεῖν δὲ, εἰ δίχα· ȣδεμιᾶς δὲ πραγματικῆς, ἀλλὰ πασῶν ἀνυπάρκτων, τȣ̃ κύκλȣ μὴ συμβαλόντος ὅλως τῇ παραβολῇ· ἑτέρωθεν δὲ, ἐπεὶ αἱ ἀνύπαρκτοι ῥίζαι πάσης ἐξισώσεως εἰσὶν ἀεὶ ἀρτιάριθμοι, ὁ κύκλος τεμεῖ δίχα, ἢ τετραχθὰ, ἢ ȣδόλως, τὴν παραβολήν. τȣ̃ δὲ κύκλȣ μόνον ἁπτομένȣ τῆς παραβολῆς, ἕκαστον σημεῖον ἁφῆς δηλώσει δύω ῥίζας ἴσας, αἵτινες εἰς μίαν συμπεσεῖν δύνανται· ὡς εἰ δύω εἶεν τὰ τῆς ἁφῆς σημεῖα, δηλωθήσονται τέσσαρες ῥίζαι ἀνὰ δύω ἰσάλληλοι.

308. ΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἔστω ἐξίσωσις κυβικὴ $\chi^3 + \pi\chi^2 + \xi\chi + \rho = 0$, ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ χ γίνεται $\chi^4 + \pi\chi^3 + \xi\chi^2 + \rho\chi = 0$ (A), ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος, ἧς παραβαλλομένης τῇ ὁμοβαθμίῳ καθ-

ολικῇ, εὑρίσκεται $\sigma = 0$· ὥςε ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει, $\gamma = \sqrt{(\delta\delta + \zeta\zeta - \sigma)}$ γίνεται $= \sqrt{(\delta\delta + \zeta\zeta)}$, ὅπερ δείκνυσιν ἐνταῦθα μίαν τῶν ῥιζῶν τῆς Α ἐξισώσεως εἶναι $= 0$, καὶ κύκλον τὸν, κέντρῳ μὲν τῷ Κ, διαςήματι δὲ τῷ γ, γραφόμενον διήκειν διὰ τοῦ σημείου Β, ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων· αἱ δὲ λοιπαὶ τῆς προκειμένης ἐξισώσεως Α ῥίζαι εὐπετῶς εὑρίσκονται· ἐπεὶ γὰρ ἐξίσωσις πᾶσα τριτοβάθμιος μιᾶς εὐμοιρεῖν ὀφείλει ῥίζης πραγματικῆς, καὶ δυεῖν ἀνυπάρκτων, ἢ γοῦν τριῶν πραγματικῶν, ὁ κύκλος διατεμεῖ τὴν παραβολὴν καθ' ἕν, ἢ τρία σημεῖα, ἢ καθ' ἓν μὲν αὐτὴν τεμεῖ, καθ' ἕτερον δ' αὐτῆς ἐφάψεται.

Ἐπίλυσις ἐνίων Γεωμετρικῶν Προβλημάτων, ὡρισμένων τε καὶ ἀορίςων, βαθμῶν ὑπερτέρων.

309. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Δύω εὐθειῶν τῶν α, β δοθεισῶν, δύω μέσας ἀνάλογον τὰς χ, υ εὑρεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω, ἡ μὲν πρώτη τῶν ζητουμένων $= \chi$, ἡ δὲ δευτέρα $= \upsilon$· διὰ δὲ τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος ἔςιν $\alpha : \chi :: \chi : \upsilon :: \upsilon : \beta$· ἄρα (Συμβ. Λογ. 270) $\alpha^3 : \chi^3 :: \alpha : \beta$ καὶ $\chi^3 = \alpha^2\beta$, ἐξίσωσις τριτοβάθμιος, ἣν ἤδη κατεσκευάσαμεν (305) διὰ παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις· ὥςε ἡ ἀποτετμημένη ΑΠ (σχ. 144) ἔςιν ἡ ζητουμένη ῥίζα τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· ἔςω οὖν ΑΠ $= \gamma$· καὶ δὴ ἐκ τῆς τοῦ προβλήματος φύσεως ἔςιν $\alpha : \gamma :: \gamma : \upsilon = \frac{\gamma\gamma}{\alpha}$, δευτέρα τῶν ζητουμένων μέσων ἀναλόγων.

310. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπειδὴ, διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς γεωμετρικῆς προόδου, ἔστιν $\alpha^3 : \chi^3 :: \alpha : \beta$, ἐὰν ἡ $\alpha : \beta : 2 : 1$· ὁ ἀπὸ τῆς α εὐθείας κύβος διπλάσιος ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας χ· ὄντος δὲ $\alpha = 3\beta$, ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου ἔσται τριπλάσιος· ἐντεῦθεν ἄρα ἐπιλύεται τὸ παρὰ τοῖς πάλαι περιβόητον δηλιακὸν πρόβλημα, ὅπερ ἦν τὸ διπλασιάσαι τὸν κύβον, περὶ οὗ μέτιθι τὰ τοῦ Εὐτοκίου ἐν τῷ τοῦ Ἀρχιμήδου περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου β΄. βιβλίῳ.

311. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Γωνίας ὀρθῆς τῆς ΑΒΗ (σχ. 147), καὶ σημείου μονίμου τοῦ Α ἐπὶ μιᾶς τῶν αὐτῆς πλευρῶν, δοθέντων, ἀπὸ δὲ τοῦ Α ἀγομένης εὐθείας, ἕως ἂν ἀπαντήσῃ τῇ πλευρᾷ ΒΗ, καὶ εὐθείας τῆς ΒΘ ἀεὶ εὑρισκομένης = ΘΜ, εὑρεῖν τίνος καμπύλης εἰσὶ πάντα τὰ σημεῖα Μ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τοῦ Μ σημείου κατήχθω κάθετος ἡ ΜΠ τῇ ΑΒ πλευρᾷ, καὶ γενέσθω ΑΒ = α, καὶ ΑΠ = χ, καὶ ΠΜ = υ· ἐπεὶ ΠΒ ἔσται = $\alpha - \chi$, καὶ ΑΜ = $\sqrt{\chi^2 + \upsilon^2}$ ἐκ δὲ τῶν τριγώνων ΑΠΜ, ΑΒΘ πρόεισι $\chi : \upsilon :: \alpha :$ ΒΘ $= \frac{\alpha\upsilon}{\chi}$ = ΘΜ, ἐξ ὑποθέσεως· ἀλλὰ διὰ τὰς παραλλήλους ΠΜ καὶ ΒΘ ἔστιν ΑΠ : ΠΒ :: ΑΜ : ΘΜ, εἰτ' ἂν $\chi : \alpha - \chi :: \sqrt{(\alpha^2 + \upsilon^2)}$: ΘΜ = ΘΒ = $\frac{\alpha\upsilon}{\chi}$. ἐντεῦθεν ἄρα $\alpha\upsilon = (\alpha - \chi) \cdot \sqrt{(\chi^2 + \upsilon^2)}$, εἰτ' ἂν $\alpha^2\upsilon^2 = (\alpha - \chi)^2 \cdot (\chi^2 + \upsilon^2)$, ἢ $\upsilon^2 = \frac{(\chi - \alpha)^2 \cdot \chi^2}{2\alpha\chi - \chi^2}$ $= \frac{(\alpha - \chi)^2 \cdot \chi}{2\alpha - \chi}$, εἰτ' οὖν $\upsilon = \pm \frac{\alpha\chi - \chi^2}{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi^2)}}$. ἐξ οὗ δῆλον, ὡς ἑκάστῃ ἀποτετμημένῃ συστοιχοῦσι δύω ἴσαι

τεταγμέναι, ἡ μὲν ὑπαρκτικὴ, ἡ δ' ἑτέρα λειπτική· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\chi < 2\alpha$, αἱ τεταγμέναι ἔσονται πραγματικαί· ἡ ἄρα καμπύλη διήξει τηνικαῦτα διὰ τοῦ Β, οἱ δὲ δύω αὐτῆς κλῶνες ἐπεκτενοῦνται, ὁ μὲν πρὸς ν, ἕτερος δὲ πρὸς Ν· ἐὰν δὲ ληφθῇ ΘΝ = ΘΒ, ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΘ, ΑΞΝ πρόεισι $\chi : \upsilon :: \alpha : B\Theta = \frac{\alpha\upsilon}{\chi} = \Theta N$· ἀλλὰ, διὰ τὰς παραλλήλους ΒΘ καὶ ΞΝ, ἔστιν ΑΞ : ΒΞ :: ΑΝ : ΘΝ, εἶτ' ἂν $\chi : \chi - \alpha :: \sqrt{(\chi^2 + \upsilon^2)} : \frac{\alpha\upsilon}{\chi}$, ὅθεν ἀποφέρεται $\upsilon = \pm \frac{\chi^2 - \alpha\chi}{\sqrt{(2\alpha\chi - \chi^2)}}$, ἐξίσωσις ἐπὶ τῶν κλωνῶν ΒΝ, Βν· κέντρῳ μὲν τῷ Β, διαστήματι δὲ = α, γεγράφθω κύκλος, οὗ ΑΔ ἔστι διάμετρος, καὶ ἤχθω ἀπέραντος ἡ ἁπτομένη ζΔΖ, ἥτις ἔσται ἀσύμπτωτος τῆς καμπύλης· ἐὰν γὰρ ὑποτεθῇ $\chi = 2\alpha$, ἔσται $\upsilon = \pm \frac{2\alpha^2}{0} = \pm \infty$· ἐὰν δ' ὑποτεθῇ $\upsilon = \sqrt{(2\alpha\chi - \chi\chi)}$, ἀντικατασταθείσης ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῇ ἤδη εὑρημένῃ ἐξισώσει, τῶν κλασμάτων ἐξωθέντων, πορισθήσεται $2\alpha\chi - \chi^2 = \chi^2 - \alpha\chi$, εἶτ' ἂν $2\alpha - \chi = \chi - \alpha$, ἢ $3\alpha = 2\chi$, καὶ $\chi = \frac{3\alpha}{2}$· ἀλλ' ἡ καμπύλη συναντᾷ τῷ κύκλῳ, ὅταν αὐτῆς ἡ τεταγμένη ἰσωθῇ τῇ τοῦ κύκλου· ἄρα ἡ καμπύλη συναντήσει τῷ κύκλῳ ἐν σημείοις ἀντιστοίχοις τῇ ἀποτετμημένῃ ΑΤ $= \frac{3\alpha}{2}$.

312. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Τόξον κύκλου δοθὲν τὸ μπ ΞΝ εἰς τρία ἴσα τόξα διελεῖν (χ. 148).

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείθω δὴ τὸ πρᾶγμα ὡς γεγονὼς, καὶ ἐκ τῶν τῆς διατομῆς σημείων π, Ξ ἐςάθωσαν πρὸς ὀρθὰς τῇ χορδῇ μΝ αἱ πΣ, ΞΤ, καὶ τετμήθω δίχα κατὰ τὸ Δ ἡ μΝ· δῆλον ἂν ὅτι ΣΔ = ΔΤ, ἐπεὶ μπ = πΞ = ΞΝ, καὶ πΞ παράλληλός ἐςιν ἐκ κατασκευῆς τῇ μΝ· τέτε τεθέντος ἔςω ἡ ἄτρεπτος μΔ = α, καὶ ΔΣ = χ, καὶ Σπ = υ· οὐκοῦν ἔςαι ΣΤ = 2χ = πΞ = μπ· ἐκ δὲ τε ὀρθογωνίε τριγώνε μΣπ, ἔςι $4\chi^2 = \upsilon^2 + \alpha^2 - 2\alpha\chi + \chi^2$, μεταθέσει δὲ καὶ ἀναγωγῇ, καὶ διαιρέσει διὰ 3, καὶ ἀναπληρώσει, προκύπτει ἐξίσωσις $(\chi + \frac{\alpha}{3})^2 = \frac{4\alpha^2}{9} + \frac{\upsilon^3}{3}$· ὑποτεθέντος δὲ $\chi + \frac{\alpha}{2} = \psi$, γίνεται $\psi^2 = \frac{4\alpha^2}{9} + \frac{\upsilon^3}{3}$, εἶτ' ἂν $\psi^2 - \frac{4\alpha^2}{9} = \frac{\upsilon^2}{3}$· ὅθεν $\psi^2 - \frac{4\alpha^2}{9} :: 1 : 3 :: \frac{4\alpha^2}{9} : \frac{4\alpha^2}{3}$, ἀναλογία προσφυὴς ὑπερβολῇ, ἧς, πρῶτος μὲν ἡμιάξων $= \frac{2\alpha}{3}$, δεύτερος δὲ $= \frac{2\alpha}{\sqrt{3}}$· ἡ δὲ γωνία τῶν συντεταγμένων ἐνταῦθα ἔςιν ὀρθὴ· ἵνα δὲ ἀναγραφείη αὕτη ἡ ὑπερβολὴ, διῃρήθω ἡ μΝ εἰς τρία ἰσάλληλα μέρη μΡ, ΡΑ, ΑΝ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, δευτέρῳ δὲ ἡμιάξονι τῷ $\frac{2\alpha}{\sqrt{3}}$, γεγράφθω ὑπερβολὴ ἡ πΡΜΠ· ἡ δὲ π κοινὴ διατομὴ αὐτῆς τε καὶ τε κύκλε ἀποδώσει τὸ μπ τόξον τριτημόριον τε μπΝ τόξε· διὰ δὲ τε σημείε π ἤχθω παράλληλος ἡ πΞ τῇ μΝ· τὸ ἂν σημεῖον τῆς διατομῆς Ξ προσδιορίσει τὸ δεύτερον τριτημόριον πΞ, καὶ ΝΞ ἔςαι τὸ

τρίτον· τέμνει δὲ ἡ ὑπερβολὴ τὸν κύκλον καθ' ἕτερον σημεῖον τὸ Π, ὅπερ ἐκτίθησι τὸ τριτημόριον τοῦ τόξου μΠΝ ἀναπληρώματος εἰς 360° τοῦ προτεθέντος τόξου· βουλομένοις γὰρ καὶ τὸ δὲ τὸ τόξον εἰς τρία ἰσάλληλα μέρη διελεῖν, ΔΖ ὑποθεμένοις = χ, καὶ ΖΠ = υ, προκύψει ἡ αὐτὴ τῇ ἄρτι εὑρημένῃ ἐξίσωσις.

313. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐντεῦθεν καταφαίνεται, ὅπως δυνάμεθα εἰς τρεῖς ἴσας γωνίας διελεῖν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν· ἀπόχρη γὰρ διελεῖν τὸ τὴν γωνίαν μετροῦν τόξον· ὅπερ, ἡμῖν μὲν δι' ὑπερβολῆς καὶ κύκλου ἐπιτετήδευται, ἄλλοις δὲ διὰ παραβολῆς καὶ κύκλου, καθὰ καὶ τὸ τῆς εὑρέσεως τῶν μέσων συνεχῶς ἀνάλογον (309) διὰ δύω παραβολῶν ἐπιλύεται, ὡς ἔστιν ἰδεῖν ἐν Γ'. τόμῳ τῶν Μαθηματ. τοῦ Θεοτόκου §. 318, καὶ 322, καὶ ἐν τοῖς ὑπ' Ἀσάνου τοῦ Κεφαλλήνος παρεντεθεῖσι τῷ τοῦ Καίλλου συμβολικῷ λογισμῷ §. 436, 440.

314. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Δοθεισῶν δύω εὐθειῶν α, β καὶ μεταξὺ αὐτῶν συνεχῶς ἀναλόγων ἐμφαινομένων ὑπὸ τοῦ ἀριθοῦ μ, εὑρεῖν τὴν τῆς ν τάξεως· ὑποτεθέντος, φέρ' εἰπεῖν, μ = 10, καὶ ν = 7, εὑρεῖν τὴν μεταξὺ α καὶ β ἑβδόμην τῶν μέσων συνεχῶς ἀναλόγων.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω χ ἡ πρώτη τῶν μέσων ἀναλόγων· καὶ δὴ πορισθήσεται ἡ ἑφεξῆς σειρὰ ∺ $\alpha : \chi : \frac{\chi^2}{\alpha} : \frac{\chi^3}{\alpha^2} : \frac{\chi^4}{\alpha^3} \ldots\ldots \frac{\chi^\nu}{\alpha^{\nu-1}} \ldots\ldots \frac{\chi^\mu}{\alpha^{\mu-1}} : \frac{\chi^{\mu+1}}{\alpha^\mu} = \beta$· ὅπερ, ἐπεὶ οἱ δεῖκται τὰς τάξεις ἐμφαίνουσι τῶν ὅρων, ὁ τῆς ν τάξεως ἔστι $= \frac{\chi^\nu}{\alpha^{\nu-1}}$· ἐποτεθείσθω δὴ ὅτος