ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Καμπύλων ἐν γένει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ Γεωμετρικῶν Καμπύλων.

275. Πᾶσα γραμμὴ νοηθῆναι δύναται ὡς γεννωμένη ἐκ κινήσεως σημείου (Γεωμ. 10, 11)· ἢ εἰ μὲν τὸ γεννητικὸν σημεῖον κατὰ ςαθερὸν νόμον ἕρπει, καλεῖται κανονική· ἀκανόνιςος δὲ, εἰ τοὐναντίον· Πᾶσα δὲ εὐθεῖα ὑποτεθῆναι δύναται ὡς πλευρὰ τριγώνου τοῦ ΗΔΜ (χ.63), ἐν ᾧ αἱ τεταγμένως ἐφ' ἕκαςον σημεῖον, καταλειπόμενον ὑπὸ τοῦ γεννητικοῦ σημείου, ἀχθεῖσαι, εἰσὶν ὡς αἱ ἀντίςοιχοι ἀποτετμημέναι, ὁ δὲ λόγος, καθ' ὃν τὸ σημεῖον εἵρπυσε, παρίςαται διὰ πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως τῆς $\upsilon = \frac{\Upsilon \times \chi}{X}$ (11)· πᾶσα ἄρα εὐθεῖα γραμμή ἐςι κανονική· ἄρα πᾶσα ἀκανόνιςος ἔςαι ἀναγκαίως καμπύλη.

276. Καμπύλη Ἀριθμητική, ἢ Γεωμετρική, λέγεται, ὅταν τῇ κατ' αὐτὴν ἐξισώσει εὐθεῖαι ἐμπίπτωσιν, ὧν ὁ λόγος δηλωθῆναι δύναται ἐν ἀριθμοῖς· τοιαίδε εἰσὶν αἱ τέσσαρες ἐγνωσμέναι καμπύλαι, αἳ κωνικαὶ τομαὶ ἤκουσαν· καμπύλη δὲ Ὑπερβατική, ὅταν τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν συντιθῶσι γραμμαὶ, ὧν ὁ λόγος δι' οὐδενὸς ἀ-

ριθμῷ δηλοῦσθαι ἔχει· καμπύλη φέρ' εἰπεῖν, ἧς συνέκθεσίς τις τεταγμένων πρὸς συνέκθεσιν ἀποτετμημένων ἔστιν, ὡς ἡμιτονόν τι πρὸς τὸ αὐτῷ κυκλικὸν τόξον, ὑπάρχει ὑπερβατική· ἐπεὶ γὰρ γεωμετρικῶς ἡ κυκλικὴ περιφέρεια οὐδέπω μεμέτρηται, ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς ῥηθῆναι τὸν μεταξὺ ἡμιτόνου καὶ κυκλικοῦ τόξου λόγον.

277. Οἱ μὲν ἓν διάφοροι βαθμοὶ τῶν ἐξισώσεων, οἱ ἐμφαίνοντες τὴν φύσιν τῶν ἀριθμητικῶν καμπύλων, διορίζουσι τὰ γένη, ἢ τὰς τάξεις, τῶν καμπύλων· οἱ δὲ ποικίλοι συνδυασμοὶ τῶν κατὰ τὰς ἀποτετμημένας καὶ τεταγμένας συνεκθέσεων τὰ ποικίλα εἴδη τῶν καμπύλων τὰ τῷ γένει ὑπαγόμενα ἐμφαίνουσι· καλεῖται τοίνυν γραμμὴ πρωτοταγής, ἢ πρώτου γένους, ἧς πρωτοβάθμιος ἡ ἐξίσωσις, δευτεροταγὴς δὲ, ἢ δευτέρου γένους, ἧς δευτεροβάθμιος κτλ. καὶ τοῦ μὲν πρώτου γένους, μόνη ἡ εὐθεῖα ὑπάρχει· τοῦ δὲ δευτέρου αἱ τέσσαρες κωνικαὶ τομαί· τοῦ δὲ τρίτου παρὰ τὰς τῶν καθυπερτέρων γενῶν κωνικὰς τομὰς (266) καὶ ἄλλαι εἰσὶ πλεῖν ἢ 72· τοῦ δὲ τετάρτου πλείους ἢ 140· καὶ οὕτως ἐπ' ἄπειρον αὔξουσιν· εἰσὶν ἄρα ἄπειροι εἴδει διαφέρουσαι καμπύλαι κανονικαὶ ἀριθμητικαί.

Ὥστε ἐν γένει, ἵνα γραφῇ καμπύλη, ἧς δέδοται ἡ καθόλου συμβολικὴ ἐξίσωσις, ἤχθω εὐθεῖα τέρματος ἄνευ, καὶ εἰλήφθω κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς σημεῖον, ὃ δεῖ τεθῆναι εἰς ἀρχὴν τῶν ἀποτετμημένων, καὶ ἀνεσάθωσαν ἑξῆς πρὸς αὐτὴν τεταγμέναι ὑπαρκτικαί τε καὶ λειπτικαὶ, ἀντισοιχοῦσαι ἑκάστῃ τῇ οἰκείᾳ αὐτῆς ἀποτετμημένῃ· τοῦτο δὲ μάλα φανήσεται δι' ὑποδείγματος.

278. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Δοθείσης ἐξισώσεως καμπύλης ἀριθμητικῆς, ἀναγράψαι τὴν καμπύλην.

ΛΥΣΙΣ. Δεδόσθω ἓν ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος ἡ $\upsilon^2 = \frac{\beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2}$ (P)· ὑποτεθείσθω δὲ κατὰ τὸ δοκοῦν $\alpha = 6$ (6 ὀργυαῖς, ἢ ποσὶ ἢ κτλ.) καὶ $\beta = 3$· μετὰ δὲ τὸ ληφθῆναι τὴν δύναμιν $\alpha = \text{ΚΣ}$ ἐπὶ τῆς ἀπεράντου ΚΛ (κ. 126)· υ ἐν τῇ ἐξισώσει P, ἀεὶ εὑρίσκεται ἀνύπαρκτος, ἕως ἓ ὑποτίθεται $\chi < 6$· ἐκ τούτου ἄρα συνάγειν ἔξεστιν, ὡς οὐδεμία εὐθεῖα ταχθῆναι δύναται ἐπὶ τὴν ΚΣ· ὑποτεθείσης ἄρα $\chi = 6$, υ ἐν τῇ P εὑρίσκεται $= 0$· τουτέστιν ἡ καμπύλη διελεύσεται διὰ τοῦ πέρατος Σ. β'. γενομένης $\chi = 7$, ἔσται, $\upsilon = \sqrt{\frac{117}{6}}$· εὑρεθεῖσα ἄρα διὰ προσεγγίσεως ἡ κατὰ τὴν υ δύναμις, ἡ ἀντίστοιχος τῇ $\chi = 7$, ὑψούσθω ὡς τεταγμένη· ἀντὶ δὲ χ τεθεισῶν ἐκ διαδοχῆς τῶν 8, 9 κτλ, εὑρεθήσονται διὰ πράξεων ἐκ διαδοχῆς αἱ υ, καὶ ἡ διὰ τῶν περάτων τῶν δε τῶν τεταγμένων καταγραφομένη γραμμὴ ἔσεται ἡ ζητουμένη καμπύλη. Ο.Ε.Π.

Ἀλλὰ α'. ἐπείπερ ἐν τῇ P, α^2, β^2 εἰσὶν ἄτρεπτοι, τῶν χ αὐξομένων συναύξονται καὶ αἱ υ, καὶ μᾶλλον χωροῦσι πόῤῥω τοῦ ἄξονος ΣΤ οἱ κλῶνες· β'. $\upsilon = \pm \frac{\sqrt{\beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2}}{\alpha}$, τουτέστιν ἑκάστη ὑπαρκτικῇ ἀντιστοιχεῖ καὶ λειπτικὴ ἄλλη ἴση· πρὸς ἄρα τὰ ἀριστερὰ τῆς ΣΛ τιθεμένων κατὰ τὸ συνεχὲς τῶν ἀντιστοίχων λειπτικῶν θηρεύονται ἑκάτεροι οἱ κλῶνες τῆς ΣΤτ· ἀλλὰ γὰρ χ γενομένου ἐν τῇ ἐξισώσει λειπτικοῦ, προίασιν ἀποτετμημέναι χ ἐκ τοῦ Κ, καὶ πᾶσαι αἱ ἐν τῇ P υ ἐλέγχονται ἀνύπαρκτοι, ἔστ' ἂν τεθῇ $-\chi = -6$· γενομένης δὲ $-\chi = -6$, εὑρίσκεται $\upsilon = 0$, τοῦτο δὲ δηλοῖ, τὴν καμπύ-

λην διελεύσεσθαι διὰ τῆς ἑτέρας κορυφῆς σ· τέλος δὲ, ἐπεὶ ἀεὶ ἔστι χ^2, καὶ ἢ $-\chi$, καὶ $+\chi$, εὑρεθήσονται, ἐκ διαδοχῆς τιθεμένης $\chi = -7, -8$ κτ, αἱ αὐταὶ τεταγμέναι, αἱ καὶ τοῖς σημείοις 7, 8· μεταγομένων ἄρα ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ τῆς σχ τῶν ἀπὸ τοῦ Κ ἀποσημάτων, = Κ7, Κ8, ὡς λειπτικῶν τε καὶ ὑπαρκτικῶν, εὑρεθήσονται αἱ δύο καινοὶ κλῶνες σΜν.

Φημὶ δὴ, ὡς εἰ δέοι ἔχειν τὴν καμπύλην ἀποτετμημένας, γνωσθήσεται ἐξ αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως· οἷον ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon^2 = \pi\chi$ (τῇ τῆς παραβολῆς) ἐὰν τεθῇ λειπτικὸν τὸ χ, ἔσται $\upsilon^2 = -\pi\chi$, καὶ $\upsilon = \pm\sqrt{-\pi\chi}$, ποσότης ἀνύπαρκτος· ἡ ἄρα ἐκ ταύτης τῆς ἐξισώσεως ἐμφαινομένη καμπύλη λειπτικῶν ἀποτετμημένων ἔσεται ἀνεπίδεκτος.

279 ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Δοθείσης ἐξισώσεως τῆς $\upsilon^3 - \alpha\chi^2 = 0$, τὴν δι' αὐτῆς ἐμφαινομένην ἀναγράψαι καμπύλην (σχ. 127).

ΛΥΣΙΣ. Ὑποτεθείσθωσαν αἱ τεταγμέναι κάθετοι ταῖς ἀποτετμημέναις, καὶ ἀποσημειώσθωσαν τῇ χ δυνάμεις ἐκ διαδοχῆς ἀπὸ τοῦ 0 ἀρχόμεναι καὶ εἰς ∞ τελευτῶσαι, καὶ ἑκάστης τῶν δυνάμεων τῆς χ ζητηθήτω δύναμις ἀντίστοιχος τῆς υ· ὑποτεθήτω ἐν $\chi = 0$· ἐκεῖν ἔσται καὶ $\upsilon = 0$· λαμβανομένου ἄρα τοῦ σημείου κ ὡς ἀρχῆς τῶν ἀποτετμημένων, ἡ καμπύλη δι' αὐτοῦ διαβήσεται· γενέσθω εἶτα $\chi = 1$· ἐκεῖν ἔσται $\upsilon^3 = \alpha$ καὶ $\upsilon = \sqrt[3]{\alpha}$· ὑποτιθεμένου δὲ $\alpha = \frac{1}{8}$ (ἐνὶ φέρε ποδὸς ὀκτημορίῳ), εὑρεθήσεται $\upsilon = \frac{1}{2}$· εἰλήφθω τοιγαροῦν κα $= \chi = 1$, καὶ ἤχθω ἐπὶ τὸ α τεταγμένως ἡ αΒ $= \frac{1}{2}$· τὸ δὲ Β σημεῖον ἔσται ἐν τῇ καμπύλῃ· ἑξῆς δὲ γενέσθω $\chi = 2$· καὶ δὴ προκύψει $\upsilon^3 = 4\alpha = \frac{1}{2}$, καὶ $\upsilon =$

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$· τεθέντος ὖν κ Π = χ = 2, ἀνεσάθω τεταγμένη ἡ Πμ = $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (ὅπερ ὡς ἔγγιστα εὑρίσκεται ἐν δεκαδικοῖς ἡ δύναμις)· τιθεμένων δ' ἔπειτα ἐκ διαδοχῆς χ = 3, 4, κτ, ζητηθήτωσαν αἱ ἀυταῖς σύσοιχοι υ· γενομένων δὲ καὶ χ = — 1, = — 2, κτ, εὑρεθήσονται δυνάμεις αἱ ἀντίσοιχοι ταῖς λειπτικαῖς ἀποτετμημέναις· γραμμῆς δὲ διελθούσης διὰ τῶν περάτων πασῶν τῶν εὑρημένων υ, πορισθήσεται καμπύλη ἡ Μκμ τοσούτῳ ἀκριβεστέρα, ὅσῳ ἂν προσεχέστερον ἀλλήλων τεθῶσιν αἱ υ, καὶ ἀκριβέστερον εὑρεθῶσιν αἱ κατ' αὐτὰς δυνάμεις. Ο. Ε. Π.

280. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Ἐξισώσεως τῆς $\upsilon = \sqrt{\chi} \pm \sqrt[4]{\chi^3}$ δοθείσης, τὴν ὑπ' αὐτῆς ἐμφαινομένην ἀναγράψαι καμπύλην (§. 128.)

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΑΒ ἄξων, καὶ Α ἀρχὴ τῶν ἀποτετμημένων· ἐκεῖν ἡ καμπύλη ἐδένα κλῶνα ἕξει πρὸς τὰς λειπτικὰς χ· καὶ γὰρ λειπτικῆ ὑποτιθεμένε τῆ χ, προέρχεται $\upsilon = \sqrt{-\chi} \pm \sqrt[4]{-\chi^3}$ ποσότης ἀνύπαρκτος· ὑποτεθείσθω ὖν χ = 1· καὶ δὴ ἔσται υ = 1 ± 1, εἴτ' ὖν υ = 2, καὶ υ = 0· ὑποτιθεμένε ἄρα τῆ Α Β = 1, εἷς μὲν τῶν κλωνῶν τῆς καμπύλης ὁ ΑΜ συμβαλεῖ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Β, ἄτερος δὲ διαβήσεται διὰ ν πέρατος τῆς τεταγμένης Βν = 2· εἰ δὲ εἴη χ = ΑΠ = $\frac{9}{10}$, εὑρεθήσεται διὰ προσεγγίσεως υ = 1, 741, καὶ υ = 0, 047· τὸ τοίνυν σημεῖον Ν τῆς μείζονος τεταγμένης ἐπανήκει τῷ κλωνὶ Αν, τὸ δὲ μ τῆς ἐλάτονος Πμ, τῷ κλωνὶ ΑμΒ· καὶ ἐπειδὴ μεταξὺ Α καὶ Β αἱ δύω δυνάμεις τῆς υ ἀεί εἰσιν ὑπαρκτικαὶ, ἑκάτερος τῶν δύω κλωνῶν Αμ, Αν κείσεται ὕπερθεν τῆ ἄξονος· ὡς εἰ γένοιτο χ > 1, εὑρεθήσονται τῆ υ δύω δυνάμεις, ἡ μὲν ὑπαρκτικὴ, ἡ δὲ λειπτικὴ,

ὥςε τὸν μὲν Αν κλῶνα μένειν ἀεὶ ὕπερθεν τοῦ ἄξονος, τὸν δὲ ΑμΒ κατιέναι ἔνερθεν τοῦ αὐτοῦ ἄξονος· λογιωθεισῶν δὲ τῶν τοῦ υ δυνάμεων ἐν δεκαδικοῖς, εὑρεθήσονται ὅσα ποτὲ βαλόμενα σημεῖα τῆς καμπύλης· τοσούτῳ δ' ἀκριβέςερον, ὅσῳ ἂν ἐγγύτερον τοῦ ἀληθοῦς τὸν λογισμὸν παραγάγωμεν· εἰ δ' ὑποτεθείη $\chi = \infty$, ἔςαι $\upsilon = \infty^{\frac{1}{2}} \pm \infty^{\frac{3}{4}} = \pm \infty^{\frac{3}{4}}$ (ὁ γὰρ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον ἀφανίζεται)· τοιγαροῦν ἑκάτερος τῶν κλωνῶν ἀπείρως ἀποχωρεῖ τοῦ ἄξονος, ὁ μὲν ἔνερθεν, ὁ δὲ ὕπερθεν· Σημειωτέον δὲ ἐν παρόδῳ, ὡς ἑκάτερος τῶν κλωνῶν τοῦ σημείου Α ἀποχωρῶν ςρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη, ὡς τὴν θατέρου κοιλότητα ἐςράφθαι πρὸς τὴν θατέρου καμπυλότητα.

281. Ἐὰν δοθῇ ἐξίσωσις ἡ $\chi^5 - \chi + \upsilon + \upsilon^3 = 0$, ὑποτεθέντων ἐκ διαδοχῆς $\chi = 1, 2, 3$ κτ· $-1, -2$ κτ, τῇ ἐπιλύσει τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως, γνωσθήσονται αἱ συςοιχοῦσαι δυνάμεις τοῦ υ· κἂν μὴ ἀκριβῶς ἐπιλυθείη ἡ ἐξίσωσις, εὑρεθήσονται μέντοι αἱ προσεχέςαται ταῖς ἀληθέσι δυνάμεις τοῦ υ.

282. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Ἀλλὰ περὶ μὲν τούτων, κἂν βραχέα, ἱκανὰ μέντοι ἐν τῇ προκειμένῃ ἡμῖν προθέσει· ἀφθονώτερα δ' ὁ βουλόμενος εὑρήσει ἐν ταῖς τῶν νεωτέρων βίβλοις, αἷς σκοπὸς αὐτὴν μόνην τὴν ὑψηλοτέραν Γεωμετρίαν πραγματεύσαθαι· μετιέτω δὲ πρὸς τοῖς ἄλλοις καὶ Σαυρίου τὴν πεντάτομον μαθηματικὴν ὁδὸν, ἀφ' ἧς ἡμῖν τὰ πλεῖςα ἐνταῦθα μετωχέτευται· ἀλλ' εἴπωμεν νῦν διὰ βραχέων καὶ περὶ τῶν Γεωμετρικῶν τόπων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Γεωμετρικῶν Τόπων.

283. Ἐξίσωσις πᾶσα ἀόριστος δύω ἀγνώστων περιεκτικὴ χ καὶ υ, δηλοῦσα εὐθεῖαν γραμμὴν ἢ καμπύλην, καλεῖται **Τόπος Γεωμετρικός**· ἐὰν γὰρ λυφθῇ ἡ ΜΝ γραμμὴ (σχ. 129) ὡς ἄξων τῶν χ, καὶ αἱ ΠΖ, ΣΔ, ΣΗ, κτλ. κληθῶσιν υ, τῶν μὲν ὑπαρκτικῶν υ ἐν ἀριστερᾷ, τῶν δὲ λειπτικῶν κειμένων ἐν δεξιᾷ τῆς ΜΝ, ἡ μὲν εὐθεῖα ΔΞ ἔσται τόπος τῶν ὑπαρκτικῶν τεταγμένων, τῶν συστοιχουσῶν τῷ τμήματι ΚΝ τε τῶν ἀποτετμημένων ἄξονος, καὶ ἔτι τόπος τῶν λειπτικῶν τεταγμένων, τῶν συστοιχουσῶν τῷ τμήματι ΚΜ· ἡ δὲ ἀπέραντος γραμμὴ Ηκ ἔσται τόπος τῶν τε λειπτικῶν τεταγμένων, τῶν συστοιχουσῶν τῷ ΚΝ, καὶ τῶν ὑπαρκτικῶν τῶν συστοιχουσῶν τῷ ΚΜ· ἐὰν ἓν γένηται ΚΠ $= \alpha$, καὶ ΖΠ τετάρτη ἀνάλογος δεδομένων εὐθειῶν τῶν ν, μ, α, εἴτ' ἓν $= \frac{\mu\alpha}{\nu}$ ἐφιστάμενη κάθετος τῇ ΜΝ, καὶ ΠΤ $= \chi$, καὶ ἡ τεταγμένη ΤΨ τῇ ΠΖ παράλληλος $= \upsilon$, ἔσται ΚΤ $=$ ΚΠ $+$ ΠΤ $= \alpha + \chi$· καὶ ἐπείπερ ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα ΚΖΠ, ΚΨΤ, ἔσται ΚΠ $= \alpha$: ΠΖ $= \frac{\mu\alpha}{\nu}$ :: ΤΚ $= \alpha + \chi$: ΤΨ $= \upsilon = \frac{\mu\alpha + \mu\chi}{\nu}$. αὕτη ἄρα ἡ ἐξίσωσις ἔσται τόπος γεωμετρικὸς τῶν ὑπαρκτικῶν καὶ λειπτικῶν υ· ἐὰν ἓν ἡ χ $= 0$, ἡ ΠΖ συμπεσεῖται τῇ ΤΨ, καὶ ὁ ζητούμενος τόπος ἔσεται:

εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν ἀποτετμημένων· ἐὰν δὲ ἡ $\upsilon = 0$, ὁ τόπος τῶν χ ἔσται εὐθεῖα παράλληλος τῷ ἄξονι τῶν τεταγμένων.

284. Ἐὰν ὦσι δύω γεωμετρικαὶ πρωτοβάθμιοι, δυεῖν ἀγνώστων περιεκτικαί, ἐξισώσεις, δυνατὸν προσδιορίσαι ἐν γραμμαῖς πεπερασμέναις τὴν τῶν ἀγνώστων, εἰ πεπερασμένη εἴη, δύναμιν· ἔστωσαν γὰρ δύω ἐξισώσεις $\upsilon = \frac{\alpha\chi - \alpha\beta}{\nu}$, καὶ $\upsilon = \frac{\gamma\chi - \gamma\delta}{\mu}$· καὶ ζητηθήτω πρῶτον ἑκατέρας τῶν ἐξισώσεων ὁ τόπος· ὑποτεθείσθω δὴ τὸ Α ἀρχὴ τῶν χ, καὶ τεθήτω ΑΚ $= \beta$, καὶ ΚΠ $= \upsilon$, καὶ κατήχθω ΠΖ $= \alpha$ περιέχουσα μετὰ τῆς ΜΝ γωνίαν ὁποιανοῦν τὴν πρὸς τῷ Π, καὶ ἤχθω ἡ ΔΖΞ, καὶ ἡ ΝΞ παράλληλος τῇ ΠΖ· ἐπεὶ οὖν ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα ΚΠΖ, ΚΝΞ, ἔστι ΚΠ : ΠΖ :: ΚΝ = ΑΝ — ΚΑ : ΞΝ $= \upsilon$, εἶτ' οὖν $\upsilon : \alpha :: \chi - \beta : \upsilon = \frac{\alpha\chi - \alpha\beta}{\nu}$· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΚΞ ἔσται τόπος τῆς πρώτης ἐξισώσεως· καὶ ἀποτετμημέναι μὲν ἔσονται αἱ ΑΝ, τεταγμέναι δὲ αἱ ΝΞ· ὁ δὲ τῆς δευτέρας εὑρεθήσεται οὕτως· ὑποτεθήτω τὸ Α ὡς ἀρχὴ τῶν χ, καὶ ἔστω ΑΘ $= \delta$, καὶ ΘΤ $= \mu$, καὶ ἤχθω τῇ ΝΞ παράλληλος ἡ ΤΡ $= \gamma$, καὶ πέρατος ἄνευ ἡ ΘΡ· ἐκεῖν ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΘΡΤ, ΘΟΒ ἔσται ΘΤ : ΤΡ :: ΘΒ : ΒΟ· ἀλλὰ ΘΤ $= \mu$, καὶ ΤΡ $= \gamma$, καὶ ΘΒ = ΑΒ — ΑΘ $= \chi - \delta$, καὶ ΒΟ ἔστι τεταγμένη υ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως· ἄρα $\mu : \gamma :: \chi - \delta : \upsilon = \frac{\gamma\chi - \gamma\delta}{\mu}$· τοιγαροῦν ἡ ΘΡ ἔστιν ὁ τόπος τῆς δευτέρας ἐξισώσεως· ἐὰν δὲ ἡ ΘΡ τέμνῃ τὴν ΚΞ κατά τι σημεῖον τὸ Ξ, ἡ τεταγμένη ΞΝ κοινὴ ἔσται ἑκατέρῳ

τόπῳ τῶν δύω δοθεισῶν ἐξισώσεων· ἡ ΝΞ ἄρα διορισθήσεται ὑπὸ τῆς συνδρομῆς τῶν δύω εὐθειῶν ΚΞ, ΘΡ. τ' αὐτὸ δὲ γενήσεται καὶ περὶ τῆς χ, ἥτις ἔσται = ΑΝ· ὥστε διὰ τῶν δύω δοθεισῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων δυνατόν ἐστι προσδιορίσαι τὴν γεωμετρικὴν δύναμιν τῶν ἀγνώστων υ καὶ χ.

285. Εἰς δέ γε πληρεστέραν κατάληψιν ταύτης τῆς κατασκευῆς σημειωτέον τὰ ἑφεξῆς· ἐὰν γὰρ λόγος ὁ υ : α ἴσος ᾖ τῷ μ : γ, ἔσται ἐν τοῖς τριγώνοις ΚΠΖ, ΘΤΡ, ΚΠ : ΠΖ :: ΘΤ : ΤΡ· ἀλλ' αἱ γωνίαι Π, Τ εἰσὶν ἴσαι διὰ τὰς παραλλήλους ΠΖ, ΤΡ· ἄρα τὰ τρίγωνα ἔχουσι δύω πλευρὰς ἀναλόγους δυσὶ πλευραῖς, καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν γωνίας ἴσας· εἰσὶν ἄρα ὅμοια (Γεωμ. 337)· ἄρα καὶ αἱ γωνίαι Κ, Θ εἰσὶν ἴσαι καὶ ἑπομένως παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι ΚΖ, ΘΡ. Τοιγαρῶν τῶν εὐθειῶν τούτων ἀλλήλαις οὐδέποτε συμβαλλουσῶν, ἀδύνατόν ἐστι προσδιορίσαι τὰς χ καὶ υ, αἵτινες, ἐπεὶ τὸ Ξ δύναται θεωρηθῆναι ὡς ἀπείρως ἀφεστηκὼς διὰ τὸ τὰς δύω παραλλήλους δύνασθαι θεωρεῖσθαι ὡς συμπιπτούσας ἐν διαστήματι ἀπείρῳ, δυνήσονται ἐκληφθῆναι ὡς ἄπειροι (*).

Ἀνίσων δὲ ὄντων τῶν λόγων υ : α, μ : γ, οἱ τό-

(*) Ἐὰν ἡ ὑπὸ ΡΘΤ γωνία ἐπινοηθῇ κατὰ βραχὺ ἐλαττουμένη, τὸ Ξ ἀεὶ κατὰ βραχὺ ἀποστήσεται· ἡνίκα δὲ ἡ γωνία ἐγγὺς εἴη τοῦ ἰσωθῆναι τῇ ὑπὸ ΠΚΖ γωνίᾳ, αἱ εὐθεῖαι ΚΞ, ΘΡ, μικρῷ δεῖν παράλληλοι οὖσαι, συμπεσοῦνται ἐν διαστήματι ὑπέρπολυ μεγάλῳ, ὅπερ ἔσται μεῖζον παντὸς δεδομένου διαστήματος, ὅταν αἱ εἰρημέναι γωνίαι διαφέρωσιν ἀλλήλων ποσότητι ἐλάσσονι πάσης δεδομένης· ὅταν ἄρα ἰσάλληλοι ὦσιν αἱ δύω αὗται γωνίαι, τὸ διάστημα θεωρηθήσεται ἄπειρον.

ποι συναντήσουται πάντως κατά τι σημεῖον τὸ Ξ, ἀλλ' ἐξετασέον, εἴπερ ἡ γωνία ΤΘΡ εἴη ἐλάσσων ἢ μείζων τῆς ὑπὸ ΠΚΖ· καὶ ὅτω μὲν τὸ τῆς συνδρομῆς σημεῖον κείσεται πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ β, καθάπερ τὸ σχῆμα παρίστησιν· ἐκείνως δὲ τὸ Ξ πεσεῖται πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Δ.

Ἐὰν δ' ὑποτεθῇ β = δ, εὑρεθήσεται χ = β καὶ υ = ο· ἐν ταύτῃ γὰρ τῇ περιπτώσει τὰ σημεῖα Ν, Ξ ἐπιπεσοῦνται τῷ Κ· πρὸς δὲ τῷ Κ, χ = ΑΝ ἔστιν = ΑΚ = β, καὶ ΝΞ = υ = ο· ὃ δὴ καὶ ἡ ἀνάλυσις δείκνυσιν· ἐπεὶ γὰρ αἱ δυνάμεις τοῦ υ ἰσοῦσθαι ἀλλήλαις ὀφείλουσι πρὸς τῷ Ξ, ἔστι πάντως $\frac{\alpha\chi - \alpha\beta}{\nu} = \frac{\gamma\chi - \gamma\beta}{\mu}$, ἢ $\frac{\alpha}{\nu} \times (\chi - \beta) = \frac{\nu}{\nu} \cdot (\chi - \beta)$, ἢ $(\frac{\alpha}{\nu} - \frac{\nu}{\mu}) \cdot (\chi - \beta) = 0$· ἄρα ὁ ἕτερος τῶν δύω ποιητῶν τοῦ πρώτου μέλλει ἀναγκαίως ἔσεται = ο· ἀλλαμὴν οὐκ ἔστιν ὁ πρῶτος, ἅτε δὴ τῶν ἐν αὐτῷ ποσοτήτων πρὸς τὸ δοκοῦν λαμβανομένων· ἄρα χ — β = ο, ὅθεν χ = β· ἐὰν οὖν ἐν ταῖς ἐξισώσεσιν $\upsilon = \frac{\alpha\chi - \alpha\beta}{\nu}$, $\upsilon = \frac{\gamma\chi - \gamma\delta}{\mu}$ ἀντικατασταθῇ β ἀντὶ χ, ἐπεὶ καὶ δ = β, εὑρεθήσεται παντάχοῦ υ = ο· εὐδυχερῶς δὲ καταφαίνεται, ὅ,τι ἂν συμβαίη, εἰγ' εἴη = ο, ἢ καὶ λειπτικόν ο· τελευταῖον δὲ, ἐπεὶ εὐθεῖαι δύω καθ' ἓν μόνον σημεῖον τέμνουσιν ἀλλήλας, κατάδηλον ὡς οἱ τόποι ΔΞ, ΘΡ μίαν μόνην δύναμιν τοῦ χ καὶ τοῦ υ παρέχουσι.

Περὶ κατασκευῆς δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων, δύω περιεχουσῶν ἄγνωστα.

286. Πᾶσα δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἀναχθῆναι δύ-

νται εἰς μίαν τῶν τὰς κωνικὰς τομὰς ἐμφαινεσῶν ἐξισώσεων· εἰσὶ δὲ αἱ γῆν ἡμῖν ἀποδεδομέναι αἱ ἐφεξῆς.

$v^2 = \pm \pi\chi$ . . . . τῆς παραβολῆς (28)

$\chi^2 = \pm \pi v$ . . . . τῆς παραβολῆς, τῶν χ λαμβανομένων ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἁπτομένης (52)

$v^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha - \chi^2)$ . . τῆς ἐλλείψεως, πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτεμνομένων τῶν χ (91)

$v^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot (2\alpha\chi - \chi^2)$. τῆς ἐλλείψεως, τῶν χ πρὸς τῇ κορυφῇ ἀποτεμνομένων (92)

$\left.\begin{array}{l} v^2 = \alpha^2 - \chi^2 \\ v^2 = 2\alpha\chi - \chi^2 \end{array}\right\}$ . . τῶν ἴσων συζυγῶν διαμέτρων τῆς ἐλλείψεως, εἰ ὀξεῖα εἴη ἡ γωνία τῶν συντεταγμένων (123), καὶ τοῦ κύκλου, εἰ ὀρθὴ

$\chi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot (2\alpha v - vv)$. τῆς ἐλλείψεως, τῶν χ ἐπὶ τῆς κατὰ τὴν κορυφὴν ἁπτομένης λαμβανομένων (115)

$\left.\begin{array}{l} v^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \times \overline{\chi^2 - \alpha^2} \\ v^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \times \overline{2\alpha\chi + \chi^2} \end{array}\right\}$ τῆς ὑπερβολῆς ἐπὶ τοῦ πρώτου ἄξονος (164, 166)

$\chi^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}(v^2 + \alpha^2)$. τῆς ὑπερβολῆς ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἄξονος (171)

$v\chi = \kappa^2$ . . . . τῆς ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις (187)

ἴδωμεν ἓν ὅπως ἐξισώσεις αἱ δευτεροβάθμιοι εἰς ἕνα τινὰ τῶν ἐκτεθέντων τέτων τύπων ἀναχθῆναι ἔχεσι.

287. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Τῆς τῶν συντεταγμένων γωνίας δοθείσης, κατασκευάσαι τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi + \alpha\beta = \upsilon$.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπειδὴ $\alpha\chi + \alpha\beta = \alpha \cdot \overline{\chi + \beta}$, ἐὰν τεθῇ $\chi + \beta = \psi$, προκύψει $\alpha\psi = \upsilon^2$, ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς· ἐπὶ διαμέτρε ὖν τῆς ΑΜ (χ. 130), παραμέτρῳ $= \alpha$, γεγράφθω ἡ παραβολὴ ΓΑΝ, ἧς αἱ συντεταγμέναι ΑΠ, ΠΓ περιέχοιεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν· ἐὰν δὴ ΑΠ ἔςαι $= \psi$, ἐὰν ΓΠ $= \upsilon$· ἀλλὰ $\chi = \psi - \beta$· ἄρα τιθεμένης ΑΔ $= \beta$, αἱ ΔΠ ἔσονται $\chi = \psi - \beta$· τοιγαρῦν τὸ σημεῖον Δ ἔςαι ἀρχὴ τῶν χ τῶν, πρὸς μὲν τὸ Μ ὑπαρκτικῶν, πρὸς δὲ τὸ Α λειπτικῶν, ἐσομένων· εἰ δ' ὑπάρχοι ἐξίσωσις $\alpha\chi - \alpha\beta = \upsilon^2$, πορισθείη ἂν $\chi - \beta = \psi$, ἐὰν δὴ $\chi = \psi + \beta$· ἐὰν ὖν γένηται ΑΘ $= \beta$, αἱ χ ἄρξονται ἀπὸ τῦ Θ.

288. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Κατασκευάσαι τὴν ἐξίσωσιν $\chi\upsilon + \alpha\chi = \alpha^2 - \alpha\upsilon$.

ΛΥΣΙΣ. Γενέσθω πρῶτον $\upsilon + \alpha = \psi$, εἶτ' ἓν $\upsilon = \psi - \alpha$ εἰς εὕρεσιν $\psi\chi = 2\alpha^2 - \alpha\psi$, ἐὰν μεταθέσει, $2\alpha^2 = \psi\chi + \alpha\psi$· γενέσθω εἶτα $\chi + \alpha = \pi$· ἐὰν δὴ ἔςαι $\psi\pi = 2\alpha^2 = \varkappa^2$· γενομένε δὲ $2\alpha : \varkappa :: \varkappa : \alpha$ πρόεισιν ἐξίσωσις ὑπερβολῆς ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἡ $\psi\pi = \varkappa^2$· τοιγαρῦν ἤχθωσαν ὑπὸ τὴν δοθεῖσαν, ἢ τὴν τυχῦσαν, εἰμὴ δέδοτο, γωνίαν, αἱ εὐθεῖαι Μμ, Νν (χ. 131), ἐὰν γενέσθω Κα $= \alpha$, ἐὰν $\alpha\beta = 2\alpha$, ἐὰν ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις Μμ, Νν γεγράφθω ὑπερβολὴ διήκεσα διὰ τῦ σημείε β (192)· αἱ τοίνυν ΚΖ ἔσονται $= \pi$, αἱ δὲ ΖΘ $= \psi$· ἀλλὰ $\chi = \pi - \alpha =$ ΚΖ $-$ αΚ· ἄρα αἱ χ ἄρξονται ἀπὸ τῦ Α· ἐπεὶ δὲ $\upsilon = \psi - \alpha$, διηρή-

ϑω αΒ = 2α δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ διήχθω δι' αὐτοῦ παράλληλος τῇ Νν ἡ ΔΗ· καὶ δὴ πορισθήσεται ΗΘ = ψ — α = υ· καὶ ἐπεὶ ΔΗ = αΖ, πορισθήσονται αἱ μὲν χ = ΔΗ, αἱ δὲ υ = ΘΗ· ἐὰν δ' ὑπάρχῃ χ = ο, ἔσται υ = ΔΒ = α· ἐὰν δ' ᾖ χ ὑπαρκτικὸν καὶ < α, αἱ τεταγμέναι ἔσονται ὑπαρκτικαί· εἰ δὲ χ = α, ἔσται υ = ο· τηνικαῦτα γὰρ π = χ + α = 2α· ἄρα $\psi = \frac{2\alpha^2}{\pi} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha}$ = α, καὶ υ = ψ — α = α — α = ο· εἰ δὲ χ > α, αἱ τεταγμέναι ἔσονται λειπτικαί· ὑποτιθεμένου δὲ χ = ∞, ἔσται υ = — α· τοῦ δὲ χ λειπτικοῦ τε ὄντος καὶ < α, αἱ τεταγμέναι ἔσονται ὑπαρκτικαί· τοῦ δὲ χ ὄντος = — α, ἡ τεταγμένη υ ἔσται ἄπειρος.

Εἰ δ' εἴη ἐξίσωσις χυ + αχ = αυ — α², ποιοῦντες υ + α = ψ, καὶ χ — α = π, ἕξομεν πψ = — 2α²· διὸ δὴ τεθέντος Κα = α, γενήσεται αΠ = 2α, ἔνθα λειπτικαί εἰσιν αἱ τεταγμέναι· αἱ δὲ συντεταγμέναι ἔσονται ΔΗ, καὶ ΗΙ.

Τ' πετέθησαν μέχρι τοῦδε αἱ ἀμετάβλητοι ποσότητες ὡς ὑφισάμεναι συναδόσας ἀντικαταστάσεις· εἰ δ' εἶεν μᾶλλον σύνθετοι, δεήσει ἀναγαγεῖν αὐτὰς ἐφ' ἁπλουστέρους τύπους· ἔστω γὰρ ἐξίσωσις α² — βχ = υ²· γενέσθω ἓν πρῶτον α² = βγ· καὶ δὴ ἔσται β·(γ — χ) = υ²· γενέσθω εἶτα γ — χ = ψ· ἐκεῖν γενήσεται βψ = υ², ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς· ὡσαύτως ἐν τῇ ἐξισώσει $\alpha \frac{\delta\delta}{\mu}$ + βχ = υ², ὑποτεθείσθω δδ = βζ, ἵνα γένοιτο $\frac{\beta.(\alpha\zeta)}{\mu}$

$+ \beta\chi = \upsilon^2$· γεγονότος δὲ $\frac{\alpha\zeta}{\mu} + \chi = \psi$, ἡ ἐξίσω-
σις τρέψεται εἰς τὴν προτέραν· ἐν δὲ τῇ ἐξισώσει
$\frac{\alpha^2\chi - \beta^2\chi + \upsilon^3}{\alpha + \beta} = \upsilon^2$, ὑποτεθείσθω πρῶτον $\upsilon^3 = (\alpha\alpha$
$- \beta\beta)$ · γ, ἵνα γένοιτο $(\alpha - \beta)$· $\chi + (\alpha - \beta)$· γ
$= \upsilon^2$, ἑξῆς δὲ ὑποτεθείσθω $\chi + \gamma = \psi$ καὶ $\alpha - \beta = \delta$,
ἵνα πορισθῇ $\delta\psi = \upsilon^2$, ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς.

289. ΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἔστω ἐξίσωσις $\chi^2 + 2\alpha\chi$
$= \upsilon$· $(\alpha + \beta)$, ἥτις ἀναπληρωθεῖσα τὸ ἐλλειπὲς τετρά-
γωνον γενήσεται $\chi^2 + 2\alpha\chi + \alpha^2 = \upsilon$· $(\alpha + \beta) + \alpha^2$·
ὑποτεθέντος δὲ $\chi + \alpha = \pi$, ἀποβήσεται $\pi^2 = (\alpha + \beta)$
$\times \left(\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta} + \upsilon\right)$· γενομένου δὲ καὶ $\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta} + \upsilon = \psi$,
προκύψει ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς $\pi^2 = \psi$· $(\alpha + \beta)$.
(κ. 132) παραμέτρῳ ἐν τῇ $\alpha + \beta$ γραφείσης τῆς παρα-
βολῆς ΑΘ, ἧς ἀπτομένη κατὰ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἄξονος Α
εἴη ΑΖ, ἔσονται αἱ μὲν ΑΖ $= \pi$, αἱ δὲ ΘΖ $= \psi$· ἀλ-
λὰ $\pi - \alpha = \chi$· ἄρα λαμβανομένης τῆς ΑΚ $= \alpha$, αἱ
ΚΖ ἔσονται χ· ὡσαύτως ἐπεὶ $\upsilon = \psi - \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}$, καὶ,
διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς παραβολῆς, ΔΓ $= \frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}$, ἀχ-
θείσης διὰ τοῦ Δ τῆς ΗΔ παραλλήλως τῇ ΖΑ, εὑρεθήσε-
ται ΔΗ $=$ ΚΖ $= \chi$, καὶ ΘΗ $= \upsilon$.

290. ΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ΄. Ὑποτεθείσθω ἡ ἐξίσω-
σις περιέχειν τὰ ἀπὸ δύο ἀγνώστων τετράγωνα· ὥσπερ
ἡ $\chi^2 + \alpha\chi = 2\upsilon^2 - 2\beta\upsilon$· ἀναπληρωθέντος ἐν τοῦ πρώ-
του μέλους, καὶ γενομένου $\chi + \frac{\alpha}{2} = \pi$, πορισθήσεται π^2

$= 2\upsilon^2 - 2\beta\upsilon + \frac{\alpha^2}{4}$, εἴτ' ἂν $\pi^2 - \frac{\alpha^2}{4} = 2\upsilon^2 - 2\beta\upsilon$, ἥτις διαιρεθεῖσα διὰ 2, καὶ τὸ δεύτερον ἀναπληρωθεῖσα μέλος, ὑποτεθέντος $\upsilon - \frac{\beta}{2} = \psi$, γεννήσεται $\psi^2 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\beta^2}{4}$. τρεῖς δὲ δυνατὸν ἐνταῦθα συμβῆναι περιπτώσεις.

Α΄. Ὑποτεθέντος γὰρ $\alpha^2 = 2\beta^2$, ἡ ἐξίσωσις γεννήσεται $\frac{\pi^2}{2} = \psi^2$, καὶ $\pi^2 = 2\psi^2$, εἴτ' ἂν $\pi = \pm \psi \sqrt{2}$, ὅθεν $\pi : \psi :: \sqrt{2} : 1 :: \sqrt{2\beta^2} : \beta :: \alpha : \beta$ (καὶ γὰρ $2\beta^2 = \alpha^2$) $:: \frac{\alpha}{2} : \frac{\beta}{2}$. ἔστω τοίνυν (χ. 133) ΓΑ $= \frac{\alpha}{2}$, καὶ ἤχθω ΒΑ $= \frac{\beta}{2} =$ ΑΔ, καὶ ἀπέραντοι ἤχθωσαν αἱ ΓΒ, ΓΔ· ἐκεῖν ἔσονται, αἱ μὲν ΓΖ $= \pi$, αἱ δὲ ΖΘ $= \psi$· ἀλλὰ $\upsilon = \psi + \frac{\beta}{2}$· ἄρα ἀχθείσης διὰ τοῦ Δ τῆς ΗΔ παραλλήλως τῇ ΖΑ, αἱ ΗΘ ἔσονται υ· ὡσαύτως $\chi = \pi - \frac{\alpha}{2}$· ἄρα αἱ ΔΗ $=$ ΑΖ ἔσονται χ· καὶ ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἡ ἐξίσωσις ἔσται τῶν εὐθειῶν ΓΘ, ΓΔ.

Β΄. Ἐὰν ἦ $\alpha^2 > 2\beta^2$, ὑποτεθείσθω $\alpha^2 - 2\beta^2 = \mu^2$, ἵνα γένοιτο $\frac{\pi^2}{2} - \frac{\mu^2}{8} = \psi^2$, εἴτ' ἂν $\pi^2 - \frac{\mu^2}{4} = 2\psi^2$· ἄρα $\pi^2 - \frac{\mu^2}{4} : \psi^2 :: 2 : 1 :: \frac{\mu^2}{4} : \frac{\mu^2}{8}$, ἀναλογία προσφυῶς ἔχουσα ὑπερβολῆ ὡς πρὸς τὰς δύω αὐ-

τῆς διαμέτρας μ, $\frac{\mu}{\sqrt{2}}$· εἰλήφθωσαν ἓν δύω ἡμιδιάμετροι (σχ. 134) $KN = \frac{\mu}{2}$, καὶ $KM = \frac{\mu}{2\sqrt{2}}$, καὶ ἐπὶ τῆς KNZ γραφεῖσα ὑπερβολὴ ἡ NΘ ἕξει, τὰς μὲν $KZ = \pi$, τὰς δὲ $Z\Theta = \psi$· ἀποτμηθείσης δὲ $KA = \frac{\alpha}{2}$, εὑρεθήσεται $AZ = \pi - \frac{\alpha}{2} = \chi$· ἀχθεισῶν δὲ, τῆς μὲν AΔ παραλλήλως τῇ KM, τῆς δὲ ΔH τῇ KZ, καὶ ληφθείσης $A\Delta = \frac{\beta}{2}$, ποριωθήσεται $H\Theta = \psi + \frac{\beta}{2} = \upsilon$· αἱ ἄρα συντεταγμέναι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ἔσονται $\Delta H = AZ = \chi$, καὶ $\Theta H = \upsilon$.

Γ'. Ἐὰν ἦ $\alpha^2 < 2\beta^2$, γενέσθω $2\beta^2 - \alpha^2 = \mu^2$ ἵνα προέλθοι $\frac{\pi^2}{2} + \frac{\mu^2}{8} = \psi^2$, εἶτ' ἓν $\pi^2 + \frac{\mu^2}{4} = 2\psi^2$· ἄρα $\pi^2 + \frac{\mu^2}{4} : \psi^2 :: 2 : 1 :: \frac{\mu^2}{4} : \frac{\mu^2}{8}$· λαμβανομένης τοίνυν δευτέρας ἡμιδιαμέτρου KM (ἢ δευτέρου ἡμιάξονος, εἰ τῶν συντεταγμένων ἡ γωνία εἴη ὀρθή) $= \frac{\mu}{2}$, καὶ πρώτης ἡμιδιαμέτρου $KN = \frac{\mu}{2\sqrt{2}}$, ὑπερβολὴ γραφεῖσα (σχ. 135) ἡ NΘ ἕξει, τὰς μὲν $KZ = \pi$, τὰς δὲ $Z\Theta = \psi$· ληφθεισῶν ἄρα $KA = \frac{\alpha}{2}$, καὶ $A\Delta = \frac{\beta}{2}$ καὶ παραλλήλου τῇ KN, καὶ τῆς ΔH παραλλήλου γενο-

μένης τῇ ΚΖ, ἔσονται αἱ μὲν ΑΖ = χ, αἱ δὲ ΗΘ = υ· ἐν ταύτῃ ἄρα τῇ περιπτώσει ἡ ἐξίσωσις ἔστιν ὑπερβολῆς, ἀναφερομένης ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον.

291. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐκ τῶν ἤδη ἐκτεθέντων ὑποδειγμάτων κατάδηλον τὸ πᾶν κεῖσθαι ἐν τῷ ἀντικαθιεᾶν ἄγνωστον ἀνθ' ἑτέρας ἀγνώστου, συνημμένης ἀμεταβλήτῳ ποσότητι, ἤτοι ὑπαρκτικῇ, ἢ λειπτικῇ, καὶ ἐν τῷ ἀναπληροῦν δὲ πολλάκις θάτερον τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν· τῆς δὲ καμπύλης ἀναγραφείσης τῆς τὰς ἀντικαταστάσεις παρεχομένης, ἐπανατρέφειν δεῖ πρὸς διορισμὸν τῶν χ καὶ υ, εἴτ' ἓν τῶν συντεταγμένων τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· ἐπεὶ δὲ ἡ μέθοδος αὕτη ἕως ὅτε πολύπλοκός τις καὶ δυσχερὴς καθίσταται ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων, αἷς ἔντι τῶν τετραγώνων χ^2, ἢ υ^2, ἢ καὶ ἀμφότερα ἐμπεριέχονται, ἀμὴν ἀλλὰ καὶ τὸ ὀρθογώνιον χυ· τούτου χάριν ἐν ταῖς τοιαῖς δὲ ἐξισώσεσι χρησόμεθα τῇ τῶν ἀορίστων μεθόδῳ, τηροῦντες ἀεὶ τρόπον, καθ' ὃν τὰ τῆς κατασκευῆς ὡς λίαν ἐξευμαρίζεται· πρὸς δὲ τοῦτο τὴν ἐξίσωσιν οὕτω διαθησόμεθα, ὡς πάντα τὰ υ κεῖσθαι ἑτέρωθι, τοῦ τὸ υ^2 περιέχοντος ὅρου ὑπαρκτικοῦ τε ὄντος καὶ συνεργοῦ δίχα· προσιθέντες δ' ἐφεξῆς ἑκατέρωσε τῆς ἐξισώσεως τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμισυνεργοῦ τοῦ υ τετράγωνον, ἕξομεν τὸ πρῶτον μέλος τετράγωνον ἐντελές, οὗ τὴν ῥίζαν τιθέμεθα = ψ· τὰ δὲ τῆς κατασκευῆς ἐπιτηδεύοντες εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν μὴ περιέχουσαν τὸ ὀρθογώνιον ψχ· ἐὰν δὲ κατασκευασθῇ ἡ καμπύλη τῶν ἀορίστων ψ καὶ χ, τῶν ἀντικαταστάσεων ἀνακαλυμένων, αἱ υ πρὸς τῇ γραμμῇ τῶν χ οὐ προσδιορισθήσονται, ἀλλὰ πρὸς ἄλλῃ, ἧς αἱ ἀποτετμημέναι ἔσονται πρὸς τὰς ἀποτετμημένας χ ἐν λόγῳ δεδομένῳ· ἀνθ' ὅτου δὴ τὴν ἐξίσωσιν κατασκευάζοντες λήψόμεθα μχ, ἀλλ'

ὲ χ ἀποτετμημένας (μ δὲ ποσότης ἐςὶν, ἥτις ἐφεξῆς διορισθήσεται)· τότε τεθέντος, ἄγομεν διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν μχ γραμμῶν εὐθεῖαν, ποιοῦσαν μετὰ τῶν μχ γωνίαν τοιαύτην, ὥςε προςιθεμένης τῇ ψ, ἢ ἀπ' αὐτῆς ἀφαιρεμένης ποσότητος, ἣν ἐμφαίνει ὁ λογισμὸς, δύνασθαι τὴν υ προσδιορίζεσθαι, προςιθεμένης, ἢ ἀφαιρεμένης, εἰ δέοι, ποσότητος ἀμεταβλήτου. Τελευταῖον δὲ προσδιορισθήσεται ἡ δύναμις τοῦ υ, οὐμὴν ἀλλὰ καὶ τὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν, ἃς ἐμφιλοχωρεῖν δέοι, ὡς ἂν αἱ εὐθεῖαι χ, υ περιέχοιεν τὴν δεδομένην γωνίαν.

292. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε'. Ἔςω ἐξίσωσις $\upsilon^2 - 2\alpha\upsilon + \chi\upsilon = \alpha^2 + 4\alpha\chi - \chi^2$· προςεθέντος ἑκατέρῳ μέλει τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ $\chi - \alpha$ ἡμισυνεργοῦ τῆς υ, ἵνα γένοιτο $(\upsilon - \alpha\chi\chi)^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\chi$, καὶ ὑποτεθέντος $\upsilon - \alpha + \chi = \psi$, προελεύσεται ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς $\psi^2 = (\chi + \alpha) \cdot 2\alpha$· ἀλλὰ γὰρ τὴν καμπύλην κατασκευαςέον, ὡς εἶναι τὰς ἀποτετμημένας μχ, ἀλλ' ὲ χ· διὰ ταῦτ' ἄρα, τῆς ἰσότητος διατηρεμένης, διατεθείσθω ἡ ἐξίσωσις ὅτω· $\psi^2 = \frac{2\alpha}{\mu} \cdot (\mu\alpha + \mu\chi)$· ὑποτεθείσθω ὖν ἡ παραβολὴ AI (σχ. 136), γεγραμμένη ἐπὶ τῆς διαμέτρου AZ παραμέτρῳ $= \frac{2\alpha}{\mu}$· ἐν ταύτῃ δὲ ἔςωσαν αἱ ἀποτετμημένοι $AZ = \mu\alpha + \mu\chi$, καὶ αἱ τεταγμένοι ZHI (παράλληλοι τῇ ἀπτομένῃ AB) $= \psi$· εἰλήφθω δὲ $AK = \mu\alpha$· καὶ δὴ ἔςαι $KZ = \mu\chi$· ἵνα δὲ πορισθῇ $\upsilon = \psi + \alpha - \chi$, προσήχθω ἡ BA ἐς τὸ Δ, ὡς εἶναι $A\Delta = \alpha$, καὶ παράλληλος τῇ ZA ἤχθω ἡ ΔΘ, καὶ προεκβεβλήσθω ἡ IZ ἕς τ' ἂν ἀπαντήσεται τῇ ΘΔ ἐκεῖ· πορισθήσεται $I\Delta\Theta = KZ = \mu\chi$, καὶ $\Theta I = \psi + \alpha$·