ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΠΕΜΤΟΝ.

Περὶ τῶν κωνικῶν τομῶν παραθέσεως.

246. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Η᾽ ἐπὶ τῶν ἀξόνων γενικὴ ἐξίσωσις ἁπάσης κωνικῆς τομῆς, περιέχουσα τὰς πρὸς τῇ κορυφῇ ἀποτετμημένας, ἐστὶν $v^2 = \frac{\alpha\beta^2\chi}{\alpha} \mp \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$ (Α).

ΔΕΙΞΙΣ, α΄. Ἐὰν τεθῇ $\alpha = \beta$, καὶ ληφθῇ τὸ σύμβολον — ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ τοῦ δευτέρου μέλους, ἡ ἐξίσωσις Α γενήσεται $v^2 = \frac{2\alpha^2\chi}{\alpha} - \frac{\alpha^2\chi^2}{\alpha^2} = 2\alpha\chi - \chi^2$, ἐξίσωσις τοῦ κύκλου (12).

β΄. Ἐὰν α ἀπειράκις μεῖζον ἢ τοῦ β, τοῦ — συμβόλου τεθέντος ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ, ἡ ἐξίσωσις Α γίνεται $v^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\infty} - \frac{\beta^2\chi^2}{\infty^2}$. ἀλλὰ — $\frac{\beta^2\chi^2}{\infty^2}$ ἀπειροστόν ἐστι δευτεροταγές, καὶ μηδὲν πρὸς τὸ $\frac{2\beta\chi}{\infty}$. ἄρα (Συμβ. Λογ. 528) πάντως, $v^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\infty} = \frac{2\beta^2\chi}{\alpha} = \pi\chi$ (169), ἐξίσωσις τῆς παραβολῆς.

γ΄. Ἐὰν α μείζων ἢ τοῦ β μεγέθει πεπερασμένῳ, καὶ τεθῇ — ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ, ἀποτελεσθήσεται $v^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\alpha} - \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$, ἐξίσωσις τῆς ἐλλείψεως (92).

δ΄. Ἐὰν δὲ τέλος ἢ $\alpha = \beta$, ἢ $\alpha < \beta$, ἢ $\alpha > \beta$,

καὶ λαμβῶν τὸ + ἐν τῷ δευτέρῳ ὅρῳ, ἡ Α ἀποκαταστήσεται $v^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\alpha} + \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$, ἐξίσωσις τῆς ὑπερβολῆς (164). Ο. Ε. Δ.

247. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ο΄ μὲν ἄρα κύκλος ἔστιν ἔλλειψις, ἐν ᾗ $\alpha = \beta$· ἡ δὲ παραβολὴ, ἔλλειψις, ἐν ᾗ $\alpha = \infty$· ἡ δὲ τέλος ὑπερβολὴ ἔλλειψίς ἐστιν, ἧς ἡ ἑτέρα τῶν ἑστιῶν, καὶ μὴν καὶ τῶν κορυφῶν, εἰσὶ λειπτικαὶ, εἴτ' ἂν τεθειμέναι κατὰ θέσιν ἐναντίαν θατέρᾳ ἑστίᾳ καὶ κορυφῇ· ὁ δὴ, ἀπεργαζόμενον τὸ τῶν ἀποτετμημένων γινόμενον $= \alpha^2 + \chi^2$, τρέπει τὸ δεύτερον σύμβολον τῆς κοινῆς ἐλλείψεως ἐκ — ἐπὶ +

248. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Τῶν ἐξισώσεων τῆς τε ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς μόνοις τοῖς — + κατὰ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ δευτέρου μέλους διαφεροῦσῶν, οἱ λογισμοὶ καθ' ἕνα τρόπον ἐν ἑκατέρᾳ διαπεραινθῆναι ἔχουσι.

249. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Η' ἐν ἁπάσῃ κωνικῇ τομῇ γενικὴ ἐξίσωσις τῆς παραμέτρου τοῦ πρώτου ἄξονος ἔστιν $v^2 = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$ (Β).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ ἁπάσῃ κωνικῇ τομῇ ἔστι $\pi = \frac{2\beta^2}{\alpha}$ (169), καὶ ἑπομένως $\frac{\pi}{2\alpha} = \frac{2\beta^2}{\alpha \times 2\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$· δυνατὸν ἄρα ἐν τῇ γενικῇ ἐξισώσει Α τῇ ἐπὶ τοῦ πρώτου ἄξονος (246) ἀντικατασῆναι, π μὲν ἀντὶ $\frac{2\beta^2}{\alpha}$, $\frac{\pi}{2\alpha}$ δὲ ἀντὶ $\frac{\beta^2}{\alpha^2}$· ὅθεν ἡ Α τραπήσεται εἰς τὴν $v^2 = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$. Ο. Ε. Δ.

250. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ τῆς γενικῆς ἐξισώσεως

$\upsilon\upsilon = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi\chi}{2\alpha}$ πρόεισι $2\alpha\upsilon\upsilon = 2\alpha\pi\chi \mp \pi\chi\chi = \pi$ $(2\alpha\chi \mp \chi\chi)$· ὅθεν ἡ ἀναλογία $\upsilon\upsilon : 2\alpha\chi \mp \chi\chi :: \pi : 2\alpha$· ἀλλαμὴν $2\alpha\chi \mp \chi\chi = (2\alpha \mp \chi)\chi = \sigma\Pi \times \Pi\Sigma$, ἐν γένει ἄρα „τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων ἐπὶ τὸν „πρῶτον τῆς ἐλλείψεως ἢ τῆς ὑπερβολῆς ἄξονα τετρά„γωνα πρὸς τὰ ὑπὸ τῶν συσοιχουσῶν ἀποτετμημένων γι„νόμενα λόγον ἔχει, ὃν ἡ παράμετρος πρὸς τὸν πρῶτον ἄξονα.“

251. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἔσται ἄρα, ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως $\upsilon^2 = \pi\chi - \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς $\upsilon^2 = \pi\chi + \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$ (248)· ἐπὶ δὲ τοῦ κύκλου, ἐπεὶ $\pi = 2\alpha$ (99), $\upsilon^2 = \pi\chi - \chi^2$· ἐπὶ δὲ τέλος τῆς παραβολῆς, $\upsilon^2 = \pi\chi - \frac{\pi\chi^2}{2\infty} = \pi\chi$ (Συμβ. Λογ. 530).

252. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἡ παράμετρος τῆς κωνικῆς τομῆς π ἔστιν, ἴση μὲν τῷ ΗΕ$=\nu$ ἀποτεμήματι, καθ' ὃ ἀπέχει ἡ κορυφὴ ἀπὸ τῆς ἑστίας, τετράκις εἰλημμένῳ ἐν τῇ παραβολῇ, εἴτ' ἓν $\pi = 4\nu$· ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει $\pi < \nu$· ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ $\pi > \nu$· εἰλήφθω γὰρ ἡ διὰ τῆς ἑστίας διιοῦσα υ· καὶ δὴ ἔσται $2\upsilon = \pi$· $\upsilon = \frac{\pi}{2}$· $\upsilon^2 = \frac{\pi^2}{4}$· ἀντικαταστάσης ἄρα ἐν Β ἀντὶ υ^2 ταύτης τῆς δυνάμεως ἔσται $\frac{\pi^2}{4} = \pi\chi \mp \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$· διαιρέσει διὰ π, $\frac{\pi}{4} = \chi, \mp \frac{\chi^2}{2\alpha}$· $\pi = 4\chi \mp \frac{4\chi^2}{2\alpha}$ (Δ).

Ἀλλ' ὑπὲρ τῆς παραμέτρου, ἡ ἀποτετμημένη $\chi =$ ΗΕ $= \nu$ ἀποσήματι τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς ἑστίας, ἡ ἐξίσωσις Δ γεννήσεται $\pi = 4\nu \mp \frac{4\nu^2}{2\alpha}$· ἐπὶ δὲ τούτοις, ἐν τῇ παραβολῇ, ἔστι $2\alpha = \infty$· ἄρα $\frac{4\nu^2}{2\alpha}$ ἔστι μηδὲν ὡς πρὸς 4ν· ἔσται ἄρα ἀναμφιβόλως $\pi = 4\nu$· ἀλλ' ἐν τῇ ἐλλείψει ἔστι $\pi = 4\nu - \frac{4\nu^2}{2\alpha}$, ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ, $\pi = 4\nu + \frac{4\nu^2}{2\alpha}$.

253. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἐν ἁπάσῃ κωνικῇ τομῇ πᾶσα ὀρθία πλευρὰ εμ λόγον ἔχει πρὸς τὸ ἀπόσημα τοῦ πρὸς τῇ καμπύλῃ πέρατος αὐτῆς μ ἀπὸ παντὸς τῆς διευθετούσης σημείου Θ, ὃν ἄλλη τις ὀρθία πλευρὰ εμ' πρὸς τὸ ἀπόσημα τοῦ πέρατος αὐτῆς μ' ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τῆς διευθετούσης σημείου Θ, τοῦτ' ἔστιν εμ : μΘ :: εμ' : μ'Θ (χ. 109).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστι γὰρ εμ : εμ' :: μΠ' : μ'Π (17)· ἀλλ' ὀρθῶν μὲν ὄντων τῶν πρὸς τοῖς Π, Π' γωνιῶν, κοινῆς δὲ τῆς πρὸς τῷ Θ, τὸ μ'ΠΘ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ μΠ'Θ τριγώνῳ· ἄρα μΠ' : μ'Π :: μΘ : μ'Θ· ἀντικατασάντος δὲ ἐκ τῆς προτέρας ἀναλογίας τοῦ ἴσου λόγου εμ : εμ', ἔσται εμ : εμ' :: μΘ : μ'Θ· ταὐτὰ δ' εὐμαρῶς δείκνυται ἐπὶ πάσης τομῆς· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

254. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ἐν πάσῃ κωνικῇ τομῇ, ἐὰν εὐθεῖα ΜΠ, διὰ τῆς ἑστίας Ε διήκουσα, συμβάλῃ, τῇ μὲν διευθετούσῃ κατὰ τὸ Ξ, τῇ δὲ καμπύλῃ κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Π, τὸ δὲ σημεῖον Μ κείται μεταξὺ τῶν σημείων Ε, Ξ, τμηθήσεται αὕτη ἡ εὐθεῖα κατὰ τὰ σημεῖα Μ,

Ε (κ. 110), ἡ κατὰ τὰ σημεῖα Μ, Ξ (κ. 111), ἐν ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστι γὰρ (243) ΕΠ : ΕΜ :: ΠΞ : ΜΞ (κ. 110)· ἀλλ' ἐν μὲν ταῖς τρισὶν εὐθείαις ΠΞ, ΕΞ, ΜΞ, αἱ ΠΞ, ΜΞ εἰσὶν ἄκρα, αἱ δὲ ΕΠ, ΕΜ, αἱ διαφοραὶ, αἷς τὰ ἄκρα τῆς μέσης διαφέρουσιν· ἐν δὲ ταῖς τρισὶν (κ. 111) ΕΠ : ΕΞ, ΕΜ, αἱ μὲν ΕΠ, ΕΜ εἰσὶ τὰ ἄκρα, αἱ δὲ ΠΞ, ΜΞ, αἱ διαφοραὶ, αἷς τὰ ἄκρα διεστήκασι τῆς μέσης· ἄρα ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων τὰ ἄκρα εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ διαφοραὶ τῶν ἄκρων, αἷς τῆς μέσης διαφέρουσι· τοῦτο δέ ἐστιν ἐν ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ (Συμ. Λογ. 543). Ο. Ε. Δ.

255. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τῷ 110 σχήματι χρήσασθαι ἔχομεν ὑπέρτε τῆς ἐλλείψεως ἡ τῆς παραβολῆς· ἡ δὲ κοινὴ αὐτοῖς διευθετοῦσα ἐστιν ἡ ΞΝ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΕΚΤΟΝ.

Περὶ ὁμοίων κωνικῶν τομῶν.

256. Δύω ὁμοειδεῖς κωνικαὶ τομαὶ ὅμοιαι λέγονται, ὅταν ὦσιν ἀνάλογοι οἱ αὐτῶν ἄξονες.

257. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐὰν ἄρα δύω ὅμοιαι ἐλλείψεις, ἢ δύω ὅμοιαι ὑπερβολαὶ, κοινὸν μὲν ἔχωσι κέντρον τὸ Κ (κ. 112, 113), τὰς δὲ ἄξονας ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, αἱ ἀντίσοιχοι συζυγεῖς αὐτῶν διάμετροι ἔσονται ἡ αὐταὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· περιέχουσι γὰρ μετὰ τῶν ἀξόνων γωνίας ἴσας, εἴγε αἱ κωνικαὶ τομαὶ οὐδενὶ ἀλλήλων διαφέρουσιν, εἰ μὴ ὅτι αἱ ἐν θατέρᾳ εὐθεῖαι μείζονές εἰσι τῶν ἐν θατέρᾳ ἀντισοίχων εὐθειῶν· ἐν ἑκατέρᾳ δὲ ἔ-

χθσι θέσιν τὴν αὐτὴν πρός γε τὸς ἄξονας· ὥςε τῶν ἀξόνων καὶ τῶν διαμέτρων τῆς ἐλάσσονος κατὰ τὴν αὐτὴν θέσιν προεκβαλλομένων, ἐς ὃ ἂν ἰσωθῶσι ταῖς τȣ̃ μείζονος, αἱ δύω τομαὶ συμπεσȣ̃νται ἀλλήλαις, καὶ μία ἐξ ἀμφοῖν ἀποβήσεται καμπύλη.

258. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ε'ὰν ἄρα εὐθεῖα ἡ ΡΣ τέμνῃ δύω ὁμοίας καὶ ὁμοκέντρȣς κωνικὰς τομὰς, τὰ τμήματα ΡΟ, ΣΟ', τὰ ὑπὸ τῶν καμπύλων ἐναπολαμβανόμενα, ἴσα ἔσονται· ἁπτομένη γὰρ τῆς ἐσωτερικῆς καμπύλης ἡ σρ ἔςω παράλληλος τῇ ΣΡ (χ. 112, 113, 114)· καὶ διάμετρος ἡ χυ διηκέτω τὸ τῆς ἁφῆς σημεῖον· ὁκȣ̃ν ἡ ΟΞ τεταγμένη ἔςαι ἐπὶ ταύτην τὴν διάμετρον (37)· καὶ ἐπείπερ ἡ ἀντίσοιχος διάμετρος τῆς ἐσωτερικῆς τομῆς ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖται εὐθείας τῇ τῆς ἐξωτερικῆς (257), δῆλον ὅτι ΣΡ καὶ σρ ἔσονται διπλαῖ τεταγμέναι ἐν τῇ ἐξωτερικῇ τομῇ· ἄρα ΡΞ = ΣΞ, καὶ ρτ = τς· ἐπεὶ δὲ καὶ Ο'Ξ = ΞΟ, ἄρα καὶ ΣΟ' = ΟΡ· διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ΟΜ = ΙΝ, καὶ δλ = δΛ· ἃ δ' εἴρηται ἐντȣ̃ῦθα, καὶ ἐπὶ τῆς παραβολῆς κρατεῖ, ἀπείρȣ οἷον ἐλλείψεως ὅσης.

259. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Ε'ὰν τῆς τε ἐσωτερικῆς καὶ τῆς ἐξωτερικῆς τῶν ὑπερβολῶν ὑποτεθῇ παράμετρος ἡ αὐτὴ = π κειμένη ἐπὶ τȣ̃ αὐτȣ̃ ἄξονος, καὶ γένηται ἡ ἁπτομένη ΔΛ = δ, ἔςαι ΜΟ × ΟΝ = δ^2 (χ. 113).

ΔΕΙΞΙΣ. Ε'ςι γὰρ, ἐν μὲν τῇ ἐξωτερικῇ ὑπερβολῇ π × ΑΠ = ΜΠ^2, ἐν δὲ τῇ ἐσωτερικῇ π × ΔΟ = ΟΠ^2 (29)· ἀλλὰ $\text{ΜΠ}^2 - \text{ΠΟ}^2$ = ΝΟ × ΜΟ (Γεωμ. 356) = ΑΠ × π − ΔΠ × π = ΑΔ × π· καὶ ΑΔ × π = ΛΔ^2 (29)· ἄρα ΝΟ × ΜΟ = ΛΔ^2 = δ^2. Ο. Ε. Δ.

260. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α'. Ε'ὰν ἀντὶ τῶν ἐπὶ τὸν ἄ-

ξονα τεταγμένων ληφθῶσιν αἱ ἐπὶ τὰς διαμέτρους χυ, εὑρεθήσεται ρο × ος = ΡΤ² = ΤΣ² (258).

261. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'. Ἐπειδὴ αἱ παραβολαὶ πᾶσαι οὐδενὶ ἀλλήλων διαφέρουσιν ὅτι μὴ ταῖς παραμέτροις, ὥσπερ οἱ κύκλοι πάντες τῷ μεγέθει τῶν κατ' αὐτοὺς ἀκτίνων· τούτου χάριν ἅπασαι ὑπάρχουσιν ὅμοια σχήματα.

262. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐν ὁμοίαις ἐλλείψεσι καὶ ὑπερβολαῖς ἀεί ἐστι ΡΟ × ΟΣ = ρτ² (χ. 112, 114).

ΔΕΙΞΙΣ. Κληθήτω γὰρ ἡ διάμετρος χυ = 2α, ἡ δ' αὐτῇ συζυγὴς = 2β, καὶ αἱ ἐπὶ τὴν χυ τεταγμέναι ρΞ = υ, καὶ Τ, αἱ ἐπὶ τὴν ἀντίσοιχον τῆς ἐσωτερικῆς καμπύλης διάμετρον = 2γ, καὶ 2δ ἡ συζυγὴς αὐτῇ διάμετρος, καὶ ΚΞ = χ· καὶ δὴ ἔσται, ἐπὶ μὲν τῆς ἐξωτερικῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ἐξωτερικῆς ὑπερβολῆς υ² : ± α² ∓ χ² :: β² : α² (121, 216)· ἐπὶ δὲ τῶν ἐσωτερικῶν Τ² : ± γ² ∓ χ² :: δ² : γ² (αὐτ.)· ἀλλ' ἐπείπερ αἱ ἐσωτερικαὶ ταῖς ἐξωτερικαῖς εἰσιν ὅμοιαι· ἐκ τούτου (256) β² : α² :: δ² : γ²· ἄρα υ² : ± α² ∓ χ² :: Τ² : ∓ γ² ∓ χ², καὶ υ² : Τ² :: ± α² ∓ χ² : ± γ² ∓ χ², καὶ (ἀφαιρέσει τῶν ἑπομένων ὅρων) υ² — Τ² (= ΡΟ × ΟΣ (Γεωμ. 356)) : υ² :: ± α² ∓ γ² : ± α² ∓ χ² :: τρ² : υ² = (ΡΞ²) (*)· ἄρα ΡΟ × ΟΣ : υ² :: τρ² : υ², καὶ ΡΟ × ΟΣ : τρ² :: υ² : υ²· ἄρα ΡΟ × ΟΣ = τρ².

(*) Ἔστω δ' ἄντις συνίδοι τὴν ἀναλογίαν ± α² ∓ γ : ± α² ∓ :: τρ² : ΡΞ², τὰ ἐν τοῖς (94, 216) ἀναμνησθεὶς, καὶ τοῖς προκειμένοις σχήμασι τὸν νῶν μικρὸν ἐπισχόντας· ἔστι γὰρ ΚΙ = γ (ὡς πρὸς τὴν ἐσωτερικὴν καμπύλην κατὰ τὴν ὑπόθεσιν) = χ ὡς πρὸς τὴν τεταγμένην ΡΤ ἐπὶ τὴν διάμετρον χυ, καὶ ΚΞ = χ ἀποτετμημένη ἄλλη ὑπὸ τῆς τε-

263. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι τεταγμέναι ὦσιν ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα, πορισθήσεται $MO \times ON = \Delta\Lambda^2 = \vartheta$, κληθείσης ϑ τῆς $\Delta\Lambda$.

264. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐὰν ὑποτεθῇ $MO = \mu$, καὶ $ON = \omega$ (ὑποτιθεμένου ὡσαύτως κἂν τῇ παραβολῇ κ. 113, $\Delta\Lambda = \vartheta$), ἔσται ἐπὶ τῶν προεκτεθέντων θεωρημάτων καὶ τοῦ ἀνωτέρου πορίσματος, $\mu\omega = \vartheta^2$. γινομένου δὲ ἀπείρου τοῦ ω, ὃ τῇ ἐλλείψει οὐδέποτε συμβαίνει, εὑρεθήσεται $\mu = \frac{\vartheta^2}{\omega} = \frac{\vartheta^2}{\infty} = o$, τοῦτ' ἔστιν ἡ ἐξωτερικὴ καμπύλη συνέρχεται τῇ ἐσωτερικῇ, ἐς ἄπειρον χωρήσασα διάστημα, ὃ οὐδέποτε συμβαίνει τῇ ἐλλείψει, ἅτε μηδέποτε ἐπ' αὐτῆς γινομένου $\omega = \infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τοῦ λογισμοῦ τῶν σοῶν.

265. Τοσαῦται διαφέρουσαι εἴδει σοαὶ ὑπάρχειν δύνανται, ὅσα καὶ εἴδη καμπύλων· αἱ μέντοι μᾶλλον εὔχρηστοι εἰσὶν αἱ ἑφεξῆς.

Σοὰ μὲν ἔγκεντρός ἐστιν, ὅταν ἡ περιφέρεια αὐτῆς AOB (σ. 115), ἀρχὰς ἔχουσα τὰς A, B, ᾖ μέρος τι κυκλικόν· τριτόσημος δὲ, ὅταν AOB ᾖ ὥσπερ τριγωνική· ταπεινὴ δὲ, ὅταν AOB ᾖ ἡμιελλει-

---

ταγμένης ΡΞ· τὰ δὲ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων κατὰ τὰς εἰρημένας παραγράφους εἰσὶν ἐν τῷ λόγῳ τῶν γινομένων ὑπὸ τῶν ἀποτετμημένων.

ψιον· ἀλλὰ α΄. εἰς κατασκευὴν σοᾶς τοῦ δοθέντος εἴδους, ἐπισαθήτω τῷ ἐδάφει ἡ καμπύλη ΑΟΒ, καθ' ἣν ἡ σοὰ τὸ σχῆμα κατασκευασθήσεται, καὶ ἐφηρμόσθωσαν αὐτῇ ὑπὸ τοῦ οἰκοδόμου οἱ λίθοι· β΄. εἰς καταμέτρησιν τῆς στερεότητος μιᾶς τινος σοᾶς, εὑρεθήτω ἡ ἐπιφάνεια ΑΟΒ, καθ' ὃν ἡ καμπύλη αὕτη τετραγωνίζεται τρόπον, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ Μν μῆκος τῆς σοᾶς· καὶ ἕτως εὑρεθήσεται ἡ στερεότης εἴτε πλήρης, εἴτε κενῆς, τῆς σοᾶς τῆς ἀπογεννηθείσης ὑπὸ τῆς ΑΟΒ καμπύλης, ἐρπυσάσης τὴν Μν ὁδόν· ἀλλὰ γὰρ μόνης τῆς στερεότητος τοῦ οἰκοδομήματος ζητουμένης, εὑρεθήτω ἡ ἐπιφάνεια Κοδ ἡ ὁμοία τῇ ΑΟΒ, καὶ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ Μν· τὸ δὲ γινόμενον ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς προευρεθείσης στερεότητος· τὸ δὴ κατάλοιπον ἔσαι ἡ ζητουμένη στερεότης, ἡ ἀπογεννωμένη ἐκ τοῦ σχήματος ΑΚΟΒδ, ἐρπύσαντος τὴν ὁδὸν Μν.

Ἀλλ' ἐὰν ἡ σοὰ ἡ ἐξειργασμένη κατὰ τὸ σχῆμα τοῦ οἰκίσκου αβγδΟο (σχ. 116), θεωρηθῆναι δύναται ὡς γεγεννημένη ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ αΟδ περὶ τὸν αὐτοῦ ἄξονα, ἡ δ' ὁλικὴ αὐτῆς στερεότης, εἴτε πλήρης, εἴτε κενῆς, ἔσεται ἡμισφαίριον, ἢ ἡμιπαραβολοειδές, ἢ ἡμιελλειψοειδὲς, κτ., ἀμέλειτοι ὡς ἔχει φύσεως ἡ καμπύλη αΟδ· ζητηθείσης ἄρα τῆς στερεότητος ταύτης, κατὰ τὴν εὐχρηστοῦσαν πρὸς τὸ στερεὸν τόδε μέθοδον, εὑρεθήτω εἶτα καὶ ἡ στερεότης τοῦ ἐκ τῆς βογ ἀπογεννωμένου σώματος· καὶ τῆς δευτέρας ἀπὸ τῆς πρώτης ἀφαιρεθείσης, γνωσθήσεται ἡ τοῦ οἰκοδομήματος τῆς σοᾶς στερεότης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ Κωνικῶν τομῶν γενῶν ὑπερτέρων.

266. Ἐὰν ἡ καμπύλη αμΑ (χ. 117), ἐν ἡ αΑ $= 2\alpha$ (ἡ κληθείη ἄν ἄξων), καὶ ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ ἀποτετμημένη αΠ $= \chi$, καὶ ἡ τεταγμένη Πμ $= \upsilon$, ὑπάρχῃ δὲ $\chi^{\mu} : \upsilon^{\mu} :: \upsilon^{\nu} : \text{ΑΠ}^{\nu} = (2\alpha - \chi)^{\nu}$, προκύψει ἐξίσωσις $\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^{\mu}(2\alpha - \chi)^{\nu}$, ἥτις καλεῖται ἐξίσωσις κύκλων γενῶν ὑπερτέρων· καλοῦνται δὲ οὕτω διὰ τὴν ταύτης τῆς ἐξισώσεως πρὸς τὴν τοῦ συνήθους κύκλου ἐμφέρειαν· ἐὰν γὰρ ὑποτεθῇ $\mu = \nu = 1$, πρόεισιν $\upsilon^2 = 2\alpha\chi - \chi^2$ ἐξίσωσις τοῦ συνήθους κύκλου· ὡς εἰ διὰ τῶν παρὰ ταύτην τὴν ὑπόθεσιν ἐξισώσεων κύκλοι γραφῶσιν, ἔσονται οἱ ἑρογγύλοι, καθ' ὃν ἅπαντες ἴσμεν κύκλον, μακρῷ δὲ διαφέροντες ἐκείνου τῷ σχηματισμῷ, καθ' ἣν ἔχει φύσιν ἡ ἐξίσωσις· ἐὰν δὲ ἀποτμηθῶσιν αἱ εὐθεῖαι πρὸς μέσῳ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ κ, πορισθήσεται $\upsilon^{\mu+\nu} = (\alpha - \chi)^{\mu} \times (\alpha + \chi)^{\nu}$· τοῦ δὲ Αα ὑποτεθέντος $= \alpha$, ἡ πρώτη ἐξίσωσις γεννήσεται $\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^{\mu}(\alpha - \chi)^{\nu}$· ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^{\mu}(\alpha - \chi)^{\nu}$ ὑποτεθῇ ἐκ διαδοχῆς $\mu = 1, 2, 3, 4, 5$ κτ, καὶ $\nu = 1$, πορισθήσεται ὁ καλούμενος πρῶτος κύκλος πάντων τῶν γενῶν, τοῦτ' ἔστιν $\upsilon^2 = \alpha\chi - \chi^2$, $\upsilon^3 = \alpha\chi^2 - \chi^3$, κτλ.· εἰ δὲ γένηται $\mu = 3$ καὶ $\nu = 2$, εὑρεθήσεται $\upsilon^5 = \chi^3(\alpha - \chi)^2$, ἥτις ἐμφαίνει τὸν δεύτερον κύκλον τῆς πρώτης τάξεως, ὑποτιθεμένου δὲ $\mu = 2$, καὶ $\nu = 3$, ἔσται $\upsilon^5 = \chi^2(\alpha - \chi)^3$, ἐκδηλοῦσα κύκλον τρίτον τάξεως πέμπτης· ἐν γένει δὲ ὁ κύκλος εἴωθε λέγεσθαι πρῶτος, δεύ-

τερος, τρίτος κτ, ὡς ἂν εἴη ὑποτεθειμένον τὸ ν (δείκτης τοῦ καταλοίπου τοῦ ἄξονος) = 1, 2, 3 κτλ.

267. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Τὸ γένος τῆς γραμμῆς ἐκ τοῦ βαθμοῦ τῆς κατ' αὐτὴν ἐξισώσεως ἐκλογιζόμεθα· δυνάμεθα μέν τοι ἀρχὴν ποιήσαθαι τῶν γενῶν καὶ ἀπὸ τοῦ συνήθους κύκλου, ὃν ἐκλάβοιμεν ἂν κύκλον πρωτογενῆ, ἢ πρωτοταγῆ, ἑξῆς δὲ, ὃν ὠνομάσαμεν πέμπτης τάξεως, ἢ πέμπτου γένους, ὡς τετάρτης τάξεως, ἢ τετάρτου γένους, ἐκδέξαθαι, ὥστε τὸν κύκλον τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^{\mu+1} = \alpha\chi^{\mu} - \chi^{\mu+1}$ ἐγκαταριθμεῖσθαι τάξει δηλουμένῃ διὰ $\mu + 1 - 1 = \mu$· δῆλον ὂν ὡς ὀδιάφορον τοῦτο.

268. Πᾶσαι αἱ παραβολαὶ παρασαθῆναι δύνανται διὰ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu} = \chi^{\nu}$, ὑποτιθεμένου $\alpha = 1$· ἐὰν μὲν ὂν ἐπὶ πασῶν τούτων τῶν καμπύλων γένηται $\chi = 0$, ἔσται καὶ $\upsilon = 0$· ἐὰν δὲ γένηται $\chi = \infty$, ἔσται καὶ $\upsilon = \infty$, εἰ μόνον μὴ εἴη ἀνύπαρκτος τύπος· ἡ γεμὴν ποικιλία τῶν δεικτῶν μ καὶ ν προσδιορίζει τὴν θέσιν τῶν παραβολικῶν κλωνῶν· κείσθω γὰρ ἐξαγαγεῖν τὴν ῥίζαν $\mu + \nu$ ἀφ' ἑκατέρου τῶν μελῶν τῆς γενικῆς ἐξισώσεως· ὅθεν εὑρίσκεται $\upsilon = \sqrt[\mu+\nu]{\alpha^{\mu}\chi^{\nu}}$· εἰ μὲν τοίνυν μ καὶ ν εἶεν ἀριθμοὶ περιττοὶ καὶ ὑπαρκτικοὶ, $\mu + \nu$ ἔσται ἀριθμὸς ἄρτιος, καὶ χ^{ν} ποσὸν ὑπαρκτικὸν, καὶ ῥίζα ἀρτιοβάθμιος ποσότητος ὑπαρκτικῆς· υ ἄρα δύω ἕξει δυνάμεις, τὴν μὲν ὑπαρκτικὴν, τὴν δὲ λειπτικήν· καὶ ἔνθεν μὲν αἱ ἀποτετμημέναι ΚΒ ὑπαρκτικαὶ εἶεν (κ. 118), ἡ καμπύλη πρὸς ταῦτα ἀναφύσει δύω κλῶνας ΚΠ, ΚΞ, τὸν μὲν πρὸς τὰ ἐπὶ ΚΜ, ὅπου ὑπαρκτικαί εἰσιν αἱ ἀποτετμημέναι, τὸν ἕτερον δὲ πρὸς τὰ ἐπὶ ΚΜ, ἅ εἰσι λειπτικαί· ἔνθεν δὲ λειπτικαὶ εἶεν αἱ χ, καὶ χ^{ν} ἔσεται ποσότης λει-

πτική, ἡ δὲ υ γενήσεται ἀνύπαρκτος, ῥίζα ὖσα ἀρτία ποσότητος λειπτικῆς (τοῦ α ὑπαρκτικοῦ ὑποτιθεμένου)· πρὸς ἄρα τὰ ἐπὶ ΚΑ, ὅπου λείπουσιν αἱ χ, οὐδένα ἐπεκτείνει κλῶνα ἡ καμπύλη. Ἐὰν δὲ συνάμα τῇ χ καὶ α ὑπάρχῃ λειπτικὸν, καὶ οὕτως ἔσται ἡ ἐξίσωσις $\upsilon^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\chi^{\nu}$, ἐξ ἧς ἡ καμπύλη, δύω μὲν ἕξει κλῶνας, ἔνθα λειπτικαί εἰσιν αἱ ἀποτετμημέναι, οὐδένα μέντοι, ἔνθα ὑπαρκτικαί· θῶμεν οὖν ἤδη, τὸν μὲν μ ἄρτιον, τὸν δὲ ν περιττὸν, ὡς εἶναι μ+ν ἀριθμὸν περιττεύοντα· ἐὰν μὲν οὖν ὑποτεθῇ ὑπαρκτικὸν τὸ χ, ἔσεται καὶ χ^{ν} ὑπαρκτικὸν, καὶ υ ἔσεται ῥίζα περισσὴ ποσότητος ὑπαρκτικῆς, μίαν μόνην ἐχούσης ῥίζαν πραγματικὴν καὶ ὑπαρκτικήν· σαφὲς γὰρ ὡς ὑποτιθεμένης ἐξισώσεως $\chi^3 = \gamma^3$, ἐξ ἧς πρόεισι $\chi = \sqrt[3]{\gamma^3} = \gamma$, αἱ δύω λοιπαὶ ῥίζαι, αἳ πορίζονται διαιρουμένης τῆς $\chi^3 - \gamma^3 = 0$ διὰ $\chi - \gamma = 0$, εἰσὶν ἀνύπαρκτοι, εἴγε τὸ πηλίκον $\chi^2 + \gamma\chi + \gamma^2 = 0$ προβάλλει ῥίζας ἀνυπάρκτους τὰς $\chi = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\gamma}{2}\sqrt{-3}$· ἄρα ἡ καμπύλη (χ. 119) ἕνα μόνον κλῶνα ἔχει τὸν ΚΠ, ἐπεκτεινόμενον πρὸς ὅπερ εἰσὶν ὑπαρκτικαὶ αἵτε ἀποτετμημέναι καὶ τεταγμέναι· ἐὰν δ' ὑποτεθῇ τὸ χ λειπτικὸν, ἔσεται καὶ χ^{ν} ποσότης λειπτική· ἄρα υ ἔσεται ῥίζα περισσὴ ποσότητος λειπτικῆς, μίαν μόνην, πραγματικὴν μὲν, λειπτικὴν δὲ, ἐχούσης δύναμιν· ἡ ἄρα καμπύλη ἕξει καὶ ἕτερον κλῶνα ΚΞ, ἔνθ' αἵτε ἀποτετμημέναι καὶ αἱ τεταγμέναι εἰσὶ λειπτικαί· δῆλον δὲ πρὸς τούτοις, ὡς ἐν τῇ ἐξισώσει $\upsilon^{\mu+\nu} = -\alpha^{\mu}\chi^{\nu}$, ταῖς μὲν ὑπαρκτικαῖς ἀποτετμημέναις ἀντιστοιχοῦσι τεταγμέναι λειπτικαὶ, ταῖς δὲ λειπτικαῖς τὐναντίον ὑπαρκτικαί· ἐὰν μὲν γὰρ ἡ λει-

πτική ἡ χ, ἔσαι $υ^{μ+ν} = -α^μ χ - χ^ν$, καὶ δὴ $υ^{μ+ν} = α^μ χ^ν$· ἐὰν δὲ ἡ ὑπαρκτική, γενήσεται $υ^{μ+ν} = -α^μ χ + χ^ν$, καὶ δὴ $υ^{μ+ν} = -α^μ χ^ν$, εἴτ' οὖν $-υ^{μ+ν} = -α^μ χ^ν$.

Θῶμεν ἐφεξῆς, ἄρτιον μὲν τὸν ν, περισσὸν δὲ τὸν μ· καὶ δὴ, τοῦ χ ὑπαρκτικοῦ ὄντος, ἔσαι καὶ $χ^ν$ ποσότης ὑπαρκτική· περιωθήσεται ἄρα, ὡς καὶ πρότερον, εἰς κλὼν ὁ ΚΠ (σχ. 120) πρὸς ἅπερ εἰσὶν ὑπαρκτικαὶ αἵτε χ καὶ αἱ υ. ἀλλ' ἐπειδὴ βαθμὸς ἅπας ἄρτιος ἀπὸ ποσότητος λειπτικῆς καθέσται ποσότης ὑπαρκτική, τοῦ χ λειπτικοῦ ὄντος, $χ^ν$ γενήσεται ποσότης ὑπαρκτική· υ ἄρα ἔσεται ῥίζα περισσὴ ποσότητος ὑπαρκτικῆς· ἡ καμπύλη ἄρα ἕξει καὶ ἕτερον κλῶνα τὸν ΚΞ, ἔνθα λειπτικαὶ μὲν εἰσὶν αἱ ἀποτετμημέναι, ὑπαρκτικαὶ δὲ αἱ τεταγμέναι· ἐν δὲ τῇ ἐξισώσει $υ^{μ+ν} = -α^μ χ^ν$ ἑκάτερος τῶν κλωνῶν κείσεται πρὸς τὰ ἐπὶ ΚΜ, ἔνθα εἰσὶν αἱ τεταγμέναι λειπτικαί.

Θῶμεν τελευταῖον τόν τε μ καὶ τὸν ν ἀρτίους, ὡς ὑπάρχειν μ + ν ἀριθμὸν ἄρτιον· ὑποτιθεμένου ἐν τοῦ χ εἴτε ὑπαρκτικοῦ εἴτε λειπτικοῦ, $χ^ν$ ἀεὶ ἔσεται ποσότης ὑπαρκτική· υ ἄρα ἔσαι ῥίζα ἄρτιος ποσότητος ὑπαρκτικῆς, καὶ δὴ ἕξει δυνάμεις δύω, τὴν μὲν ὑπαρκτικὴν, τὴν ἑτέραν δὲ λειπτικήν· ἡ ἄρα καμπύλη τέσσαρας ἕξει κλῶνας (σχ. 121), ἐπεκτεινομένους, ἔνθά τε αἱ χ καὶ υ εἰσὶν ὑπαρκτικαὶ, καὶ ἔνθα αἱ χ καὶ υ εἰσὶ λειπτικαί· ἡ δὲ καμπύλη $υ^{μ+ν} = -α^μ χ^ν$ ἔσαι ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει πάντῃ ἀνύπαρκτος.

269. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Ἰσέον ἐν παρόδῳ, ὅτι ἡ παραβολὴ τῆς ἐξισώσεως $χ^{μ+ν} = α^μ υ^ν$ ἡ αὐτή ἐστι τῇ, περὶ ἧς ἤδη εἰρήκαμεν, πλὴν ὅτι αἱ ἐν ἐκείνῃ τεταγμέναι

παράλληλοί εἰσι ταῖς ἐν τῇ πρώτῃ ἀποτετμημέναις, αἱ δὲ ἀποτετμημέναι παράλληλοι ταῖς τεταγμέναις· ὑποτιθεμένου δὲ $\mu = 4$, καὶ $\nu = 1$, πορισθήσεται $\upsilon^5 = \alpha^4\chi$, ἐξίσωσις τῆς πρώτης πεμπτογενοῦς παραβολῆς· γινομένου δὲ $\mu = 3$, καὶ $\nu = 2$, πορισθήσεται $\upsilon^5 = \alpha^3\chi^2$, παραβολὴ δευτέρα πεμπτογενής· καθόλου δὲ εἰπεῖν, αἱ μὲν πρῶται παραβολαὶ προκύπτουσι, γινομένου $\nu = 1$, αἱ δὲ δεύτεραι, ὑποτιθεμένου $\nu = 2$, αἱ δὲ τρίται, $\nu = 3$, κτλ.

270. Ἐὰν ἐν τῇ καμπύλῃ αμΑ (σχ. 117) ὑποτεθῇ $\upsilon^2 : \alpha\Pi \times A\Pi = \alpha\chi - \chi^2 :: \pi : \alpha$, πορισθήσεται τῆς ἐλλείψεως ἐξίσωσις $\frac{\alpha}{\pi}\upsilon^2 = \alpha\chi - \chi^2$· διαιρεθεῖσα γὰρ αὕτη διὰ α, καὶ πολλαπλασιαθεῖσα ἐπὶ π, γενήσεται $\upsilon^2 = \pi\chi - \frac{\pi\chi^2}{\alpha}$, ἔνθα ἀντὶ α εἰσαγομένου 2α, προκύψει $\upsilon^2 = \pi\chi - \frac{\pi\chi^2}{2\alpha}$, ἐξίσωσις ἡ εὑρεθεῖσα (251)· ἐὰν μέντοι ὑποτεθῇ $\upsilon^{\mu+\nu} : \chi^\mu \times (\alpha - \chi)^\nu :: \pi : \alpha$, προκύψει $\frac{\alpha}{\pi}\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^\mu(\alpha - \chi)^\nu$, ἐξίσωσις τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη ἐλλείψεων· καὶ ἵνα μὲν εὑρεθείη ἡ πρώτη, φέρ' εἰπεῖν, πεμπτογενὴς ἔλλειψις, γενέσθω $\nu = 1$, ἵνα δὲ ἡ δευτέρα, ὑποτεθήτω $\nu = 2$ κτ.

271. Ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ ῥηθέντος, α μὲν τὸ πρώτου ἄξονος, π δὲ τῆς παραμέτρου, ἀναπύψει $\frac{\alpha}{\pi}\upsilon^2 = \alpha\chi + \chi^2$· ἐὰν μέντοι γένηται $\upsilon^{\mu+\nu} : \chi^\mu \times (\alpha + \chi)^\nu :: \alpha : \pi$, ἐντεῦθεν προελεύσεται $\frac{\alpha}{\pi}\upsilon^{\mu+\nu} = \chi^\mu(\alpha + \chi)^\nu$, ἐξίσω-

σις τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη ὑπερβολῶν· αἱ δὲ πρῶται, δεύτεραι, τρίται, κτ. ὑπερβολαὶ, αἱ πεμπτογενεῖς φέρε, διοριωθήσονται γενομένου $\nu = 1, 2, 3$ κτ.

272. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν μὲν ὁ δείκτης $\mu + \nu$ τοῦ υ ᾖ ἀριθμὸς περιττὸς, τὸ υ μίαν μόνην ῥίζαν πραγματικὴν περιέξει· δύω δὲ, ἐὰν ᾖ ἄρτιος· ἐκείνως μὲν ἄρα ἑκάστη ἀποτετμημένη μίαν σύστοιχον ἕξει τεταγμένην, ὅτω δὲ δύω· κἀκείνως μὲν εἷς κλῶν μόνος ἔσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ ἄξονος, ὅτω δὲ δύω· ταῦτα δ' οὐχ ἧττον κρατεῖ ἐπίτε τῶν κύκλων καὶ τῶν ἐλλείψεων καὶ τῶν παραβολῶν, τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη· ἑξῆς δ' ὀψόμεθα, ὡς οὐχὶ τ' αὐτὰ κρατεῖ κἀπὶ τῶν ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ὑπερβολῶν, τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη.

273. Ἐὰν γένηται $\chi^{\mu} : \alpha^{\mu} :: \alpha^{\nu} : \upsilon^{\nu}$, προκύψει $\chi^{\mu} \upsilon^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$ ἐξίσωσις τῶν κατὰ τὰ ὑπέρτερα γένη ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ὑπερβολῶν (*) ὅθεν ἀποφέρεται $\upsilon^{\nu} = \frac{\alpha^{\mu+\nu}}{\chi^{\mu}}$· ἐὰν ὖν ὑποτεθῇ χ ἀπειροσὸν, προκύπτει $\upsilon^{\nu} = \infty$, καὶ $\upsilon = \sqrt[\nu]{\infty}$· εἰ δ' ὑποτεθείη $\chi = \infty$, ἔσται $\upsilon^{\nu} = 0$, καὶ $\upsilon = 0$· ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^{\nu} = \frac{\alpha^{\mu+\nu}}{\chi^{\mu}}$, ἀποφέρεται $\upsilon = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha^{\mu+\nu}}{\chi^{\nu}}}$, ἐξίσωσις παρεχομένη τὰς ἐφεξῆς συνεπείας.

(*) Δυνάμεθα δὲ ποιῆσαι καὶ $\chi^{\nu} : \alpha_{\nu} :: \alpha^{\mu-\nu} : \upsilon^{\mu-\nu}$, ὅθεν $\alpha^{\mu} = \upsilon^{\mu-\nu} \chi^{\nu}$, ἑτέρα ἐξίσωσις τῶν ὑπερβολῶν, παρέχουσα, ὃ καὶ ἡ πρώτη, ἀποτέλεσμα.

Α΄. Ἐὰν μὲν μ καὶ ν ὦσιν ἀριθμοὶ περιττοὶ, ὃ συμβαίνει τῇ συνήθει ὑπερβολῇ, ὑπαρκτικοῦ ὄντος τοῦ χ, ἔσεται καὶ χ^μ ποσὸν ὑπαρκτικόν· ἄρα υ μίαν μόνον ἕξει δύναμιν πραγματικήν· διὸ δὴ ἕνα κλῶνα ἕξει ἡ καμπύλη τὸν Π (σχ. 122), ἔνθα αἱ ἀποτετμημέναι καὶ αἱ τεταγμέναι ὑπάρχουσιν ὑπαρκτικαί· λειπτικοῦ δὲ ὄντος τοῦ χ, ἔσεται καὶ χ^μ ποσότης λειπτική, καὶ υ ἔσται ποσότητος λειπτικῆς ῥίζα περισσή, ἔχουσα μίαν μόνην δύναμιν, πραγματικήν μέν, ἀλλὰ λείπουσαν· ἐντεῦθεν ἄρα ἀναφυήσεται κλὼν ἕτερος ὁ Ξ, πρὸς ἃ μέρη λειπτικαὶ τίθενται αἱ χ καὶ αἱ υ.

Β΄. Ἐὰν δὲ ν μὲν ᾖ ἀριθμὸς περισσὸς, μ δὲ ἄρτιος, εἴτε ὑπαρκτικοῦ, εἴτε λειπτικοῦ ὑποτιθεμένου τοῦ χ, χ^μ ἔσεται ἀείποτε ὑπαρκτικόν· ἄρα υ ἔσται ποσότητος ὑπαρκτικῆς ῥίζα περισσή, μίαν μόνην δύναμιν πραγματικὴν καὶ ὑπαρκτικὴν ἔχουσα· ἡ ἄρα καμπύλη σύγκειται ἐκ δύο κλωνῶν Π καὶ Ξ (σχ. 123), ὧν ὁ μὲν πρῶτος τάς τε ἀποτετμημένας καὶ τὰς τεταγμένας ἕξει ὑπαρκτικάς, θατέρῳ δὲ, λειπτικαὶ μὲν ἔσονται αἱ ἀποτετμημέναι, ὑπαρκτικαὶ δὲ αἱ τεταγμέναι.

Γ΄. Ἐὰν δὲ τοῦ ν ὄντος ἀριθμοῦ ἀρτίου, ὁ μ ὑπάρχῃ περισσὸς, ὑποτιθεμένου χ ὑπαρκτικοῦ, ἔσται καὶ χ^μ ποσότης ὑπαρκτική, καὶ υ ἔσεται ποσότητος ὑπαρκτικῆς ῥίζα ἄρτιος, δύω εὐμοιροῦσα δυνάμεων, τῆς μὲν ἐν ὑπάρξει, ἐν λείψει δὲ τῆς ἑτέρας· ἡ ἄρα καμπύλη (σχ. 124) δύω προβαλεῖται κλῶνας, τόν τε Π, ἔνθα αἱ τεταγμέναι εἰσὶν ὑπαρκτικαὶ, καὶ τὸν Ξ, ἔνθα λειπτικαί εἰσιν αἱ υ· εἰ δὲ χ εἴη λειπτικὸν, ἔσεται καὶ χ^μ ὡσαύτως· ἐκεῖν υ ἔσται ποσότητος λειπτικῆς ῥίζα ἄρτιος, καὶ ἑπομένως ἀνύπαρκτος· ἡ ἄρα καμπύλη ὐδενὸς εὐμοιρήσει κλωνὸς, ἔνθα αἱ χ εἰσὶ

λειπτικαί· ἐν ἁπάσαις δὲ ταῖς ῥηθείσαις περιπτώσεσιν, εἴπερ εἴη ἐξίσωσις $\chi^{\mu} \upsilon^{\nu} = - \alpha^{\mu} + \nu$, ἀπογεννήσει τὰς αὐτὰς ὑπερβολὰς, μετατρεπομένων τῶν ὑπαρκτικῶν χ καὶ υ εἰς λειπτικὰς, καὶ τ' ἀνάπαλιν.

Δ'. Τελευταῖον δὲ, ἐὰν μ καὶ ν ὦσιν ἀριθμοὶ ἄρτιοι, τοῦ χ εἴτε ὑπαρκτικοῦ, εἴτε λειπτικοῦ ὄντος, ἔσεται ἀεί ποτε χ^{μ} ποσὸν ὑπαρκτικὸν, καὶ υ, ῥίζα ὅσα ἀρτία ποσότητος ὑπαρκτικῆς, δυεῖν δυνάμεων εὐμοιρήσει, τῆς μὲν ὑπαρκτικῆς, τῆς δ' ἑτέρας λειπτικῆς, ἀντισοιχουσῶν ἑκατέρας ἑκατέρᾳ ὑπαρκτικῇ, ἢ λειπτικῇ χ· ἡ ἄρα καμπύλη (χ. 125) συγκείσεται ἐκ τεσσάρων κλωνῶν Π, Ξ, Θ, Ρ ἐπεκτεινομένων, ἔνθατε εἰσὶν αἱ ὑπαρκτικαὶ χ, υ, καὶ ἔθα αἱ λειπτικαὶ, ἐνταύτῃ δὲ τῇ περιπτώσει ἡ ἐξίσωσις $\chi^{\mu} \upsilon^{\nu} = - \alpha^{\mu} + \nu$ ὑπάρχει ἀδύνατος.

274. ΣΗΜΕΩΣΙΣ. Αἱ, περὶ ὧν ἤδη ἐν τῇ ἐσχάτῃ περιπτώσει εἰρήκαμεν, ὑπερβολαὶ οὐδὲν ἀλλ' ἢ αἱ τῶν προεκτεθεισῶν περιπτώσεων ὑπάρχουσιν, ἀθρόον εἰλημμένων· ἐξαγομένης γὰρ τῆς τετραγωνείου ῥίζης ἐς ὃ ἂν ἕτερος τῶν δεικτῶν τοῦ χ, ἢ τοῦ υ, ἢ καὶ ἑκάτερος, εἶεν περισσοὶ, παριωθήσεται ἐξίσωσις, ἐν ᾗ διὰ τὸ διπλοῦν σύμβολον ± παρασήσονται ὑπερβολαὶ ἐπανήκουσαί τινι τῶν εἰρημένων περιπτώσεων· κατάδηλον δε, ὅτι ὡσαύτως συλλογίζεσθαι προσήκει ἐν τῇ τῆς παραβολῆς ἐξισώσει $\upsilon^{\mu} + \nu = \alpha^{\mu} \chi^{\nu}$, ἡνίκα μ καὶ ν εἶεν ἀριθμοὶ ἄρτιοι.