

ΚΕΦΑΛ. ΔΕΚΑΤ. ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ διαμέτρων τῆς ὑπερβολῆς.

213. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Πᾶσα διάτετρος Μν δίχα
τέμνεται κατὰ τὸ κέντρον (χ. 99).

ΔΕΙΞΙΣ. Ήχθω τεταγμένως ἐπὶ τὸν ἄξονα ἡ ΜΕ
χεῖσω ΚΔ = KE, καὶ Δμ κάθετος τῇ ΚΔ· ἐκεν τὸ ΚΕΜ
= KΔμ· ἀρα EM = Δμ· ἀλλ' ἐν τῇ ὑπερβολῇ διώ
ἴσου ἀπέχεται τῇ κέντρῳ Κ εἰσὶν οἵσαι· τῆς EM ἀρχ τε.
ταγμένης εἶσης, καὶ Δμ εἶσεται τεταγμένη· ἀρχ τὸ ση.
μεῖον μ πέρας τῆς Δμ καὶ τῆς Μμ ἀσαύτως εἶσαι ἐν τῇ
καμπύλῃ· ἀρα Km = KM εῖσι τὸ ἀληθὲς μέρος τῆς δια.
μέτρου τὸ ἀπὸ τῇ κέντρῳ Κ καὶ τῆς καμπύλης ἀπολαμβα.
νόμενον. Ο. Ε. Δ.

214. ΘΕΩΡΗΜΑ Β. Πᾶσα διάμετρος μΜδ δίχα
τέμνει τὰς ἐφ' εἰντήν διπλᾶς τεταγμένας, δI = δτ
(χ. 100).

ΔΕΙΞΙΣ Εἴ τῶν ὁμοίων τριγώνων KMT, Kδρ εῖσι
MT : δρ :: KM : Kδ· εἴκ δὲ τῶν KξM, Kδρ ὁμοίων
καὶ αὐτῶν, Mξ : δο :: KM : Kδ· ἀρα MT : δρ :: Mξ
: δο, καὶ εἰναλλαξξ, MT : Mξ :: δρ δο· ἀλλὰ MT =
Mξ (190)· ἀρα δρ = δο· ἀλλὰ Iρ = ot (189)· ἀρχ
δI = δτ. Ο. Ε. Δ.

215. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ορίζεται ἐν ὑπερβολῇ διάμετρος
ἢ Μ' μ' συζυγῆς ἐτέρᾳ διαμέτρῳ τῇ Μμ, διαπεριωμένης
εἰς τῇ Κ κέντρον τῆς Μ' μ' παραλλήλων τῇ TM ἀπτομέ.

η διὰ Μ ἀρχῆς τῆς πρώτης διαμέτρου Μμ διηγέση, ὡς γνωμένης Κμ' ἢ ΚΜ'' = TM.

216. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Εν ὑπερβολῇ τὸ τετράγωνο τὸ ἀπὸ τεταγμένης ἐπὶ διάμετρου Μμ ἔσι πρὸς τὸ περιεχόμενον ἐκ τῶν ὅπ' αὐτῆς ἀποτετμημένων, εἰτ' ὡς δμ × δM, ὡς τὸ τετράγωνον Κμ' τὸ ἀπὸ τῆς συζυγῆς ἡμιδιαμέτρου πρὸς τὸ τετράγωνον ΚΜ² τὸ ἀπὸ τῆς ἑτέρας συζυγῆς.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἴσω δτ = v, ὡς Κμ' = β, ὡς ΚΜ = α,
ὡς Κδ = χ. οθεν δM = χ - α, ὡς δμ = χ + α, ὡς
δM × δμ = χ² - α². φημὶ δὴ ὡς ἔσιν v² : χ² - α²
:: β² : α².

Εν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΚΜΤ, Κδρ, ἔσι ΚΜ =
α : TM :: Κδ = χ : δρ. ἀλλὰ TM = Κμ = β (215).

ἄρα α : β :: χ : δρ. ἄρα δρ = $\frac{\beta\chi}{\alpha}$. ἔσι δὲ Id =

δτ (214) v. ἄρα I_ρ = $\frac{\beta\chi}{\alpha} - v$, ὡς I_ρ = Id +

δτ + τ₀, = $\frac{\delta\chi}{\alpha} + v$ (επεὶ τ₀ = I_ρ). ἄρα I_ρ × I_ρ =

$\frac{\beta^2 \chi^2}{\alpha^2} - v^2$

Α'λλα I_ρ × I_ρ = MT² (193), Κμ'² = β². ἄρα

ρα β² = $\frac{\beta^2 \chi^2}{\alpha^2} - v^2$. ἄρα v² $\frac{\beta^2 \chi^2}{\alpha^2} - \beta^2 =$

$\frac{\beta^2 \chi^2 - \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2}$. εντεῖθεν ἄρα v² : χ² - α² :: β² :

α² (P) Ο. Ε. Δ.

217. ΠΟΡΙΣΜΑ. Πρὸς τῷ κέντοῳ μὲν τῆς ἀποτο-

μῆς γνωμένης, ὡς δέδεικται, ἔσαι $v^2 = \frac{\beta^2 \chi^2 - \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2}$

ἔξισωσις τῶν ἐπί πᾶσαν διάμετρον τεταγμένων. ὁ δὲ τύπος τάντιζεται τῷ εύρεθεντι ὑπὲρ τῶν ἐπί τὸν πρώτον ἄξονα τεταγμένων (164).

Πρός μέντοι τῇ κεφαλῇ Μ τῆς διαμέτρου Μμ ἀρχομένης τῆς προτομῆς, ἔσαι $\delta M = \chi$, καὶ $\delta m = 2\alpha + \chi$, $\chi \delta M \times \delta m = 2\alpha\chi + \chi^2$. ἢ δὲ ρήθεται ἔξισωσις ἐπὶ τάσης διαμέτρου γενήσεται $v^2 = \frac{2\alpha\chi\beta^2 + \chi^2\beta^2}{\alpha^2}$, ὥσπερ καὶ τὴν πρώτην ἄξονα εἴρηται (166).

218. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Εὐνάπεξβολῇ τὸ ὑπὸ δύο συζυγῶν ἡμιδιαμέτρου περιεχόμενον ὄρθιογώνιον ΚΜμΤ, ἴσεται τῷ ὑπὸ τῶν ἡμιαξόνων ΒηΚΣ.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰπεὶ $Mv \times Kv = K\Gamma \times \Sigma\Gamma$ (186, 187) ἔσι $K\Gamma : Kv :: Mv : \Sigma\Gamma$. ἤχθωσαν ἐν κάθετοι αἱ Mv , $\Sigma\chi$. ἐκ δὴ τῶν ὁμοίων τριγώνων Mv , $\Sigma\chi\Gamma$ (*) ἔσαι $Mv : \Sigma\Gamma :: Mv : \Sigma\chi$. ἅρα $K\Gamma : Kv :: Mv : \Sigma\chi$. ἅρα $K\Gamma \times \Sigma\chi = Kv \times Mv$.

Παρὰ ταῦτα α'. $K\Gamma \times \Sigma\chi = 2K\Gamma\Sigma$ (Γεωμ. 285). ἔσι δὲ $2K\Gamma\Sigma = K\Sigma$, ὅτι $K\Gamma = \Pi$ (Γεωμ. 244). ἥ. ἅρα $Kv \times Mv = K\Sigma$. β'. $Kv \times Mv = KMT$. ἐπεὶ $Kv \times Mv = 2KvM = 2KMA$ (Γεωμ. 237). ἀλλὰ $2KMA =$

(*) Ή μὲν γάρ Mv ἔσι παράλληλος τῇ ἀσυμπτωτῷ $K\Gamma$. ἀλλὰ καὶ $\Sigma\Gamma$ ἔσι παράλληλος τῇ αὐτῇ ἀσυμπτωτῷ $K\Gamma$, ὅτι ἐξ κατασκευῆς (179) παράλληλόγραμμού ἔσι τὸ ΒΣΚη. ἅρα Mv παράλληλός ἔσι τῇ $\Sigma\Gamma$. ἵντοῦντεν ἅρα δύο τριγώνα τὰ Mv , $\Sigma\Gamma\chi$ ἔχεσι δύο πλευράς παράλληλης ἐκπτίσασσις τέρα, καὶ ἐπομένης εἰσὶ δύοις.

ΚΜΤ, είγε ἐν τοῖς ὁμοῖοις τριγώνοις ΚΞΤ, ΤΜΑ, ἵστηται
 $\text{TK} : \text{TA} :: \text{TX} : \text{TM}$. ἀρα ἔπειτα $\text{TM} = \frac{\text{TX}}{2}$ (190),

ἔσται $\text{TA} = \frac{\text{TK}}{2} \cdot \text{άρχ } 2\text{KMA} = \text{KMT} \cdot \text{άρχ } \text{Ky} \times$
 $\text{Mu} = \text{KMT} \cdot \text{άρχ } \text{KuS} = \text{KMT} \cdot \text{έντεῦθεν } \text{άρχ} \text{ (Γεωμ.}$
 $237)$, τὸ ὅλον ὀρθογώνιον ΒηΚΣ, τὸ ὑπὸ τῶν δύο ήμια-
 $\xiόνων$ περιεχόμενον, οἷον ἐσὶ τῷ ὅλῳ παραλληλογράμμῳ
 KMT , τῷ ὑπὸ δύο συζυγῶν ήμιδιαμέτρων περιεχόμενῳ
 $(\Sigmaυμβ. Διηγ. 234) \text{ O. E. } \Delta.$

219. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ως δέδεικται καν τῇ ἐλλείψει,
 $\text{έπειτα } \text{KTM}\mu' = \mu' \text{K} \times \text{M}\bar{E}$, ἔσται $\text{M}\bar{E} \times \mu\text{K} = \text{KS} (=x)$
 $\times \text{BK} (=y) (181).$

220. Εάν αἱ ἐπὶ ἀσύμπτωτοι ὑπερβολῆς τεταγμέ-
 $\gammaαι$ ΜΡ, παράλληλαι δὲ τῇ ἐτέρᾳ ἀσυμπτώτῳ ΚΒ, προ-
 $\alphaχθῶσι, \text{ἐσ } \overset{\circ}{\text{o}} \text{ἄν γένηται } \text{MP} = \text{P}\Delta \cdot \text{άυτὸ } \text{δὲ } \text{τῶ } \text{το } \text{γένη-}$
 $\text{ται } \overset{\circ}{\text{x}} \text{ ἐπὶ } \text{τῶ } \text{ἄλλων } \text{τριῶν } \text{κλωνῶν } \text{τῶ } \text{δύ } \text{ω } \text{ἀντικείμε-}$
 $\text{νων } \text{ὑπερβολῶν}, \text{ διὰ } \text{δὲ } \text{τῶ } \text{τῶ } \text{ο } \text{ριζομένων } \text{συμβίκου-}$
 $\text{διαχθῶσιν } \text{αἱ } \text{καμπύλαι } \text{ΔΛΔ, Nλu, ποριωθήσονται } \text{δύ } \text{ω }$
 $\text{ἀντικείμεναι } \text{ὑπερβολαι}, \text{ αἱ } \text{τιγες } \text{κατὰ } \text{συζυγίαν } \text{ἀν-}$
 $\text{τικείμεναι } \text{ταὶ } \text{MΣμ, Oσo, ως } \overset{\circ}{\text{x}} \text{ αὐται } \text{έκείναις,}$
 $\text{ἀκένσι, τὺ } \text{αὐτὲ } \text{ε } \text{χεσι } \text{πᾶσαι } \text{ἄξονας, πλὴν } \overset{\circ}{\text{o}} \text{τι, } \text{ο } \text{ μὲν}$
 $\text{δεύτερος } \text{τῶ } \text{πρώτων } \text{ε } \text{ιαι } \text{πρώτος, } \text{ο } \text{ δὲ } \text{πρώτος, } \text{δεύτε-}$
 $\text{ρος } \text{ἄξων } \text{τῶ } \text{δευτέρων } \text{ὑπερβολῶν}. \overset{\circ}{\text{o}} \text{τι } \text{δὲ } \text{ὑπερβολαι}$
 $\text{ήμιν } \text{αἱ } \text{καμπύλαι, } \text{δῆλον } \text{ο } \text{γάρ } \text{KP} \times \text{MP} = \text{KT}^2 =$
 $x^2, \text{ ἐπει } \text{MP} = \text{P}\Delta, \text{ ἔσται } \overset{\circ}{\text{x}} \text{ KII} \times \text{P}\Delta = \text{KT}^2 = x^2$
 $(188) = xy.$

221. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἴρας $v = \frac{x^2}{x}$ ἐπὶ ἐκατέραι-

Τόμ. Γ.

N

τῶν κλωνῶν ΣΜ, ΛΔ· ὅσῳ τοίνυν αὐξεῖ ἡ χ, τοσύτῳ
μειώται ἡ υ, ταῦτ' ἔσιν αἱ τεταγμέναι ἐπὶ τὰς συζοίχες
κλῶνας τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ὑπερβολῶν ἐν
λόγῳ εἰσὶν ἀντιπεπονθέται τῶν ὑπὸ ἀντῶν ἀποτετμημένων
πρὸς τῷ κέντρῳ εἴκαστα: $\chi = \infty$, ἔσαι $\upsilon =$

$$\frac{\kappa^2}{\infty} = 0$$
 (Συμβ. Λιγ. 530), τατέστη ἡ ἀσύμπτωτος ΓΡ
ἔφευξεται ἐκτέρες κλωνὸς, ὅταν οἵτε κλῶνες ἢ ἡ ἁ.
Συμπτωτος ἐπὶ ἀπειρον προχθέντας ἐπιγνωθῶσι· συνελόν.
Τι δὲ εἰπεῖν, αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν πρώτων ὑπερβολῶν ἐσοῦται
αἱ αὐταὶ ταῖς τῶν κατὰ συζυγίαν ἐκείναις ἀντικειμένων· ἐάν
ἐν οἱ ὀκτὼ κλῶνες προχθῶσιν ἐπὶ ἀπειρον, συνδραμεντα,
ἀδιατητῶς ταῖς ἀσυμπτώτοις ἀνὰ δύο, ἢ ὅτας ἀπογεν.
ανθῆσεται οὐδῆμα, πρὸς τοῖς τέσσαρσι τοῖς συνδραμήσι συ-
μείοις περιττώμενοι, τοῖς τῇ κέντρῳ ἀπείρως ἀπέχοσι.

222. Η̄ χθω ἐκ τῇ Σ τεταγμένως ἡ ΣΤ, ἢ πρ.
ήχθω εἰς τὴν συζυγῆ ὑπερβολῆν· ἐπεὶ δὲ ἔσι $MP = PD$
ἔσαι ἢ $\Sigma T = TL$ · τὸ δὲ Λ ἔσαι κορυφὴ τῆς ὑπερβολῆς
δΛΔ, καθάπερ ἢ τὸ Σ τῆς ΜΣμ· ἐπεὶ δὲ αἱ ἀσύμ-
πτωτοι ἀπάσης ὑπερβολῆς πορίζονται ἀγομένων εὐθειῶν
ἐκ τῇ κέντρῳ Κ, ἢ τῶν περάτων Β, Β εὐθείας καθέτες ἀ-
γομένης τῷ πρώτῳ ἀξοι, ισθμένης τῷ δευτέρῳ, ἢ δίχα
τεμνομένης ὑπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὑπερβολῆς (179), δῆ-
λον ὅτι ΛΒ μέν ἔσι δεύτερος ἥμιαξων, ΛΚ δὲ πρῶτος
ἥμιαξων τῆς δΛΔ ὑπερβολῆς.

223. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Εἰὰν ἐκ τῇ πέρατος Δ τῆς
ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον τῆς ὑπερβολῆς δΛΔ τεταγμένης
ἀχθῆ εὐθεῖα ἡ ΔΚΝ, διὰ μὲν τῇ κέντρῳ Κ διήκεσα, τῇ
δὲ ἀντικειμένῃ ὑπερβολῇ συμβάλλεσα, ἡ ΔΝ ἔσαι συ.

ξυγής διάμετρος τῆς ΜΟ, τῆς ἀπὸ τῆς Δσημείως τῇ ἀντισοίχᾳ τῷ Ν αρχομένης, καὶ διὰ τῆς κέντρος διερχομένης, καὶ πρὸς τῷ Ο σημείῳ τῆς ΟσΟ ὑπερβολῆς περιττώμενης.

ΔΕΙΞΙΣ. Διάμετρος χάρη συζυγής τῆς ΜΟ ἔστιν ἡ ἀγομένη διὰ τῆς κέντρος Κ παραλλήλως τῆς κατὰ τὸ Μ ἀπτομένη ΖΜε (215). ἀλλ' εἰς $K\Delta = M\vartheta$, καὶ $KN = M\epsilon$ διὰ τὰ παραλληλόγραμμα $K\Delta M\vartheta$, $K\epsilon M\eta$. ἐπειδὴ γὰρ ἐκ κατασκευῆς $\Delta\pi = \pi M$, καὶ $\Delta M = K\vartheta$, (εἴγε διὰ τὰ ὄμοια τρίγωνα $\epsilon\Delta\vartheta$, ϵPM ἐπειδὴ $\vartheta\epsilon = 2M\epsilon$ (190), εἰς καὶ $K\vartheta = 2PM = \Delta M$). ἀρα τὸ $\Delta KM\vartheta$ εῖσι παραλληλόγραμμον, καὶ ΔK παράλληλός εἰσι πρὸς τὴν $M\vartheta$, ὅπερ ἀπαιτεῖται ἡ ἴδιότης τῶν συζυγῶν διαμέτρων.

Ο. Ε. Δ.

224. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἱ ἀριθμοὶ συζυγεῖς ὑπερβολῶν διήκνεσι διὰ τῶν περάτων τῶν συζυγῶν διαμέτρων τῶν ἐν ταῖς πρώταις ὑπερβολαῖς, καὶ τὸ ἀνάπτυχον.

225. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Η' εἴξισσωσι τῶν ὑπερβολῶν, αἵστις ἀξῶν εἶσι $\Sigma\tau$, ὑπάρχει $u = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = (\chi^2 - \alpha^2)$ (164). ἀλλὰ τῆς $\Sigma\sigma$ ὄντος δευτέρου ἀξονοῦ τῶν συζυγῶν ὑπερβολῶν, ἡ αὐτῶν εἴξισσωσι περιέχεται τὸν εἰρημένον ἀξονακεῖσαι $\tau^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \times (\alpha^2 + \chi'\chi')$, ὡς εἴτις ἐπισαμένως τὰ ῥηθέντα (171) ἐπισκέψαιτο γνώσεται. ἀλλ' ἡ εἴξισσωσις αὗτη τῆς προστέρας μακρῷ διεγήγοχεν. ἀριθμοὶ συζυγεῖς ὑπερβολαῖ, ἐχόν μηδὲ ὅσι κυκλικαῖ, μακρῷ διαφέρει τῶν αὐταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων.

225. ΠΟΡΙΣΜΑ. Εἴ τῆς εἰρημένης σημειώσεως μανθάνομεν, ὡς εἰ ληφθεῖται δύο τεταγμέναι: ἐπὶ τὸν πρῶ-

τοι ἀξονας τῆς ὑπερβολῆς ΣΜ, καὶ κληθεῖν υ Τ, καὶ δύο
τεταγμέναι ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀξονας Σσ τῆς ὑπερβολῆς ΛΔ,

καὶ κληθεῖν π, Π, ποσιθέται $v^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\chi^2 -$

$\alpha^2)$ καὶ $T^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\chi' \chi - \alpha^2)$, καὶ $\pi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$

$(\alpha^2 + \omega^2)$ καὶ $\Pi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha^2 + \omega' \omega')$. συντομίας

δὲ $\chi' \chi$ ποτε βέντων $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \delta$, καὶ $\chi^2 - \alpha^2 = \sigma$, καὶ $\chi' \chi -$

$\alpha^2 = \Sigma \chi \alpha + \omega^2 = \xi$, καὶ $\alpha \alpha + \omega' \omega' = \Xi$ (ω δὲ καὶ ω' τὰς
ἐν τῇ ὑπερβολῇ δΛΔ ἀποτετμημένας ἐμφανίζεται)

προκόψει $v^2 : \delta \sigma :: T^2 : \delta \Sigma :: \pi^2 : \delta \xi :: \Pi^2 : \delta \Xi$.

(εἴγε ἐκάστη τῶν δε τῶν λόγων οἱ ὄραι εἰσὶν ισάλληλοι).

δικιρεῖται δὲ ἐκάστη τῶν ἐπομένων ὄρων διὰ δ, πρέπει

$v^2 : \sigma :: T^2 : \Sigma :: \pi^2 : \xi :: \Pi^2 : \Xi$. ἐκ τέτων ἀρι-

θέλων ὅτι $v^2 : \sigma :: \pi^2 : \xi$, εἴτ' ἐν (κατικαθισαμένων τῶν
διεγέμεων τῇ σ, καὶ ξ) $v^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \pi^2 : \alpha \alpha + \omega^2$.

Οὗτον καὶ $v^2 : \pi^2 :: \chi^2 - \alpha^2 : \alpha^2 + \omega^2$, τοῦτο δέ τι

, τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων, ὃν αἱ μὲν ἐπὶ

, τὴν ἐτέραν, αἱ δὲ ἐπὶ τὴν ἐτέραν τῶν ἀντιστοίχων συ-

, γινοῦσαι ὑπὲρ τῶν ἀποτετμημένων πρὸς τῷ

, κέντρῳ ἀπὸ τῆς πρώτης ἀξονας πρὸς τὸ ἀθροισμα τῇ ἀπὸ τῆς

, δετῆς πρώτης ἀξονος τετραγώνου, καὶ τῇ τετραγώνῳ τῇ ἀπὸ

, τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ ἀποτετμημένης ὑπὸ τεταγμένης

, ἀπὸ τυχόντος σημείου τῆς ὑπερβολῆς τῆς συζυγῆς ἐπ'

, αὐτὸν ἐκείνου τὸν πρῶτον ἀξονα.

226. ΘΕΩΡΗΜΑ 5. Εάν ἀπὸ τῶν περάτων Μ,

Ν δύω συζυγών διαμέτρων ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα Σσ τῶν πρώτων ὑπερβολῶν αἱ ΜΠ, ΝΞ, ἔσαι τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ ΚΞ τῆς ἐνσπολαριθμόντος ὑπὸ τῆς κέντρου Κ ψήφης τεταγμένης ΝΞ ἵσου τῷ γιγομένῳ ἐκ τῶν ἀποτετμημένων ἀπὸ τῆς ἐτέρας τεταγμένης ΜΠ, εἴτ' ᾧ τῷ $\chi^2 - \alpha^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἴ γὰρ τῇ ἦδη ἐκτεθέντος πορίσματος (225) ἔσι $\text{ΜΠ}^2 : \text{ΝΞ}^2 :: \chi^2 - \alpha^2 : \alpha^2 + \omega^2$ ἀλλὰ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΤΜΠ, ΚΞΝ (ἔχοσι γὰρ δύω πλευρὰς δισὶ πλευραῖς παραλλήλας ἐκτέραν ἐκατέρᾳ, τὴν μὲν ΜΠ τῇ ΞΝ ἔξι ὑποθέσεως, τὴν δὲ ΜΤ τῇ ΚΝ κατὰ τὸ 223) ἔσι $\text{ΜΠ}^2 : \text{ΝΞ}^2 :: \text{ΤΠ}^2 : \text{ΚΞ}^2$. ἅρα $\chi^2 - \alpha^2 : \alpha^2 + \omega^2 :: \text{ΤΠ}^2 : \text{ΚΝ}^2 :: \frac{(\chi^2 - \alpha^2)^2}{\chi^2}$ (177); $\omega^2 \cdot \omega^2 \times (\chi^2 - \alpha^2) = (\alpha^2 + \omega^2) \times \frac{(\chi^2 - \alpha^2) \cdot (\chi^2 - \alpha^2)}{\chi^2}$. διαιρεθεῖσα δὲ αὕτη ἡ ἔξισωσις διὰ $\chi^2 - \alpha^2$, ψήφη πολλαπλασιαθεῖσα ἐπὶ χ^2 , γίνεται $\omega^2 \chi^4 = (\alpha^2 + \omega^2) \cdot (\chi^2 - \alpha^2) = \alpha^2 \chi^2 - \alpha^4 + \omega^2 \chi^2 - \alpha^2 \omega^2$. διὰ δὲ μεταθέσεως γενήσεται $\alpha^2 \omega^2 = \chi^2 \alpha^2 - \alpha^4$, διαιρέσει δὲ α^2 ἀποσύνει $\omega^2 = \chi^2 - \alpha^2$. Ο. Ε. Δ.

227. ΠΟΡΙΣΜΑ. Αἴρα $\chi^2 = \alpha^2 + \omega^2$.

228. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'. Τὸν περβολῆς διατείσης τῆς ΣΜμ, εὑρεῖν τὰς ἄξονας, τὰς ἀσυμπτώτας, τὸ κέντρον αὐτῆς (%. 102).

ΛΤΣΙΣ. Διὰ τῶν μέσων σημείων δύω παραλλήλων τῶν βΣ, δρ, ψήφης δίω ἐτέρων τῶν οξ, ΣΕ, δίω εἰσεῖσαι ἀχθεῖσαι αἱ ΚΝ, ΚΥ, διάμετροι ἔσαι (214), συμανθεῖσαι

διὰ τῆς αὐτῶν ὑπὸ ἀλλήλων διατομῆς τὸ κέντρον Κ, οὐ ΚΣ ἀχθεῖσα ἐκ τῆς Κ ἐπὶ τὸ ἔγγυια σημεῖον τῷ Κ, ἔσται ὁ πρῶτος ἡμιάξων· ἐπεὶ ΚΣ μετενεχθείσης ἐπὶ τὴν ἀπέραντου κάθετον ΚΡ, = BK, φυμί, ὡς μετενεχθείσης τῆς ΒΣ ἐπὶ τὴν ΚΣΘ, = ΠΚ, ἡ τεταγμένη ΠΜ, ἥτις ἀντιστοιχεῖ τῷ σημείῳ Π, ἔσται ὁ δεύτερος ζυγός μενος ἡμιάξων Κχ, = β.

Καὶ γὰρ $\Sigma B^2 = K\Sigma^2 + BK^2 = 2K\Sigma^2$ (*ἐκ κατασκευῆς*) = $2\alpha^2 \cdot \alpha^2 \cdot K\Pi^2 = \chi^2 = \Sigma B^2$ (*ἐκ κατασκευῆς*) = $2\alpha^2$.

Ἐγ τῇ ἀναλογίᾳ $\Pi M^2 : \chi^2 = \alpha^2 : \beta^2$:: $\beta^2 : \alpha^2$ (**103**) ἀντικατασάντις ἀντὶ χ^2 τῆς κατ' αὐτὴν δυνάμεως $2\alpha^2$, οὐ ἀναγωγῆς γενομένης ἔσαι $\Pi M^2 : \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2 \cdot \Pi M^2 : \beta^2 :: \alpha^2 : \alpha^2 \cdot \alpha^2 \Pi M = \beta$. ἀναστοιχῶς ἀριστερὰς ἐκ τῆς Σ πρὸς ὅρθας τῇ ΚΘ τῶν εὐθειῶν ΣΚ, ΣΨ, = ΠΜ, = β, ἀχθήσονται αἱ ἀσύμπτωται ΚΓΤ, ΚΨε. Ο. Ε. Π.

229. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Εὑρεῖν διὰ προσεγγίσεως τὸ ἐμβαδὸν (Δ) ὑπερβολῆς τῆς ΣΘΘ ($\%.$ 93).

ΛΤΣΙΣ. Εὑρεθείσης τῆς ἐπιφανείας (Β) τῇ τραπέζῃ ΣΞδε, οὐ ἀχθεῖσῶν τῶν εὐθειῶν δδ, ΒΓ κτ. ἔγγυια ἀλλήλων, παραλλήλως τῇ ΞΣ, συσταθήσονται ὡς πρὸς αἰωνιού τραπέζια τὰ δδΒΓ κτ, ὃν ληφθέντος τῇ Α ἀθροίσματος τῶν ίδιων ἐπιφανειῶν, ἔσαι $B - A = \Sigma \delta e$, οὐ $2\Sigma \delta e = \Delta$. ὁ καθ' ἑαυτὸν δῆλον.

230. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Εὑρεῖν τὸν κυβισμὸν τῆς ὑπερβολῆς κωνοίδος ΣΤτ ($\%.$ 103).

ΛΤΣΙΣ. Εἶσωσαι αἱ ἀσύμπτωται ΚΗ, Κβ, οὐ η κάθετος. $\Sigma \xi = KM$, εἴτ' ἐν τῷ δευτέρῳ ἡμιάξων, = ΣΞ. ἢ δὲ ΣΟ τετμήσω διὰ τῶν ἔγγυια καθέτων Σξ, Πρ,

κτλ. ἥχθωσαν δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ἐν τῷ χώματι· ὡς περιηγέχθω ὅλον τὸ μέρος Σξβο περὶ τὴν ΣΟ· καὶ δὴ πάντα μὲν τὰ ἔφεξῆς κείμενα παραπληγραμματα· γράψτι κυλίνδρος· τὸ δὲ τραχέζιον Σξβο κῶνον κίλιφρον τὸν Σξβη, τὸ δὲ ὑμινπερβολιον Στοιχερολικήν κωνιδατὴν ΣΤτ.

Εἰσω καὶ Α μὲν κύλινδρος ὁ ἀπογεννηθεὶς ἐκ Σχπρ, Β δὲ ὁ ἐκ ΣΠΜ· καὶ Δ μὲν κύκλος ὁ γραφεὶς ὑπὸ Πρ· ὁ δὲ ὑπὸ ΠΜ = Ε· Θ δὲ ὁ ὑπὸ Σξ· εἶται γὰρ Α = Δ × ΣΠ, καὶ Β = Ε × ΣΠ (Γεωμ. 456). ἀρχ Λ — Β = Δ—Ε = ΣΠ. (P).

Α'λλ' ἐν τοῖς δυσὶν ὁμοκέντροις κύκλοις Δ, Ε, ἡ ἵπεροχὴ τῆμερος ὑπὲρ τὸν ἐλάσσονα Δ — Ε ίση ἐσὶ κύκλῳ, ἢ οὐδὲν ἐσὶ μέση ἀνάλογος τῆς ΝΜ, (*) καὶ Μρ· φημὶ ταύτην εἶναι τὴν Σξ, ἡ τὸν δεύτερον ἡμιάξεν· καὶ γάρ $MN \times Mr = \Sigma \xi^2$ (193)· ἀρα $MN : \Sigma \xi :: \Sigma \xi : Mr$ · ὅτως γάρ Θ = Δ — Ε· ἀρχ ἐν τῇ Ρ ἐξισώσει ἐσιν $A - B = \Theta \times \Sigma \Pi$.

Α'λλ' ἐφίδω συλλογισμῷ ὁμοίᾳ φανήσεται, ὅτι τῆς Σξ μέσης ἐσης ἀναλόγη μεταξὺ ἐνάσης Μ'ρ' καὶ τῆς ἑτέρου τμήματος Μ'Ν', η ἵπεροχὴ ἐκάστη κυλίνδρος περιγεγραμμένης περὶ τὸν κόλιφρον κῶνον Σξβη ὑπὲρ τὸν ἀντίστοιχον κῶνον, τὸν τῇ ὑπερβολικῇ κωνισίδι περιγεγραμμένον, εἶτι $\Theta \times \Sigma \Pi$ · ἀρα η ἵπεροχὴ τῆς ἀθροίσματος πάντων διαφορας Μρ, δηλου (Γεωμετ. 355, 401).

(*) NM γάρ εἶτι τὸ ἀντοισμα τῶν ἀκτίνων τῶν δύο κύκλων Δ, Ε· εἴτι γάρ $PM + PR = PM + PN = MN$, ὅτι δὲ οὐδεὶς διαφορὰ τῆς Ε ὑπὲρ τὸν Δ κύκλον ίση εἰτὶ κύκλῳ γεννωμένῳ ὑπὸ μέσης ἀναλόγη τῆς ἀντοισματος MN , καὶ τῆς ἀντίκτυης διαφορας Μρ, δηλου (Γεωμετ. 355, 401).

των τῶν προτέρων κυλίνδρων ὑπὲρ τὸ πάντων τῶν ὑπέρων
ἔσι ΘΧΣΠ, ὅσαν ἂν ἐπικαληφθῶσι, ὅση τε ἂν ἡ ἡ
πικυότης τέτων τῶν κυλίνδρων· ἀρα ἡ ὑπερβολικὴ κω.
νῖσις ΣΤτ ἴση ἔσι τῷ κολάρῳ κώνῳ ΞΕΗΒ πλὴν ΘΧΣΟ.

Τατέσιν, η δερεότης τῆς ὑπερβολικῆς κωνοΐδος πο.
ριμήσεται εὑρεθείσης τῆς δερεότητος Ε κώνις κολάρι, ἢ
ἀκτὶς, τῆς μὲν ὑπερθεν βάσεως ἔσιν ὁ δεύτερος ἡμιάξων,
τῆς δ' ἔνερθεν, ἡ ἐχάτη κάθετος ΟΒ, ἀγομένη ἀπὸ τῆς
ἀσυμπτωτικῆς ἔπι τὸν ἄξονα, ἢ ἀφαιρεθείσης ἀπὸ Ε τῆς
δερεότητος κυλίνδρου, ἢ ἀκτὶς μέν ἔσιν ὁ δεύτερος ἡμιά.
ξων, ὥψος δὲ τὸ τῆς ὑπερβολικῆς κωνοΐδος.

ΑΙΤΗΜΑ. Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν περὶ τὸν κό.
ρων κῶνον περιγεγραμμένων κυλίνδρων ὡς δερεότητα
αὐτῆς τῆς κολάρου κώνις ἐκλαθεῖν· πράγματι γὰρ ἀπειρο.
σύτι ἀλλήλων διενηρόχαστη (70)· τὸ αἰτὸ δὲ νοητέσιν ἢ
περὶ τῶν τῇ ὑπερβολικῇ κωνοΐδι περιγεγραμμένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῆς ἐν τῇ Δισκτρικῇ χρήσεως τῆς
ὑπερβολῆς.

231. Εἴσω ὑπερβολὴ (χ. 104), ἐν ᾧ Σσ: Εε ::
2 : 3 ἢ Μβ = ΜΕ· ἢ κέντρῳ μὲν τῷ Μ, ἀκτὶνι δὲ
τῇ Μβ, γεγράφθω κύκλος ὁ ΒΕτ, διῆκων διὰ τῶν Ε, Β·
ἡ ἐν αβ ἡ τῇ αΜ κάθετος ἔσαι πάντως ἡμίτονον τῆς ὑπὸ^τ
βΜα γωνίας· ἡ δὲ ΕΟ ἡ τῇ ΜΟ κάθετος ἡμίτονον τῆς
ὑπὸ ΕΜΟ γωνίας· ἔσω δὲ ἢ κατὰ τὸ Μ ἀκτομένη ἡ
Μδ, ἢ ἐτάσθωσαν πρὸς ὅρθας τῇ ΣΜχ αἱ ΟΜ, εΡ.

Τέτων τεθέντων φημὶ, ὡς ἀκτίστις φωτὸς ἡ βΜ

εἰσδύσα τὸ ἐπίπεδον νΙΜ τῇ ὑπερβολοειδῆς συΝΜ, τῇ περιαγωγῇ τῆς σΜν καμπύλης περὶ τὴν σΙ ἀποτελεμένη, ἔξελθεσα ἐκ τῆς Μ, πρὸς τὸ Ε χωρίσει.

Ἐπισυθείσης γάρ πρὸς ὄρθας τῇ Εη τῆς Κδ, τὰ τρίγωνα ΕΜΟ, ΚΜδ εἰσὶν ὅμοια, διὸ τὰς ὄρθας γωνίας Ο, δ, η ἐπεὶ ΕΜΟ = ΚΜδ, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα Κδ : ΕΟ :: Κε : ΕΜ = Μβ.

Καὶ τὰ τρίγωνα δὲ ΙΜΚ, αβΜ ὅμοιά εἰσιν· εἴγε παρὰ τὰς ὄρθας γωνίας Ι, α, ἔσι η ὑπὸ ΙΚΜ = αΜβ διὰ τὰς παραλλήλες Μβ, ΙΚ· ἄρα ΚΜ : Μβ :: ΙΜ : αβ· ἄρα Κδ : ΕΟ :: ΙΜ : αβ· η (Συμβ. Λογ. 242) αβ : ΕΟ :: ΙΜ : Κδ.

Τέλος δὲ η τὰ τρίγωνα ΕΚδ, ΕΙΜ ὅμοια εἰσιν, ἐπειπερ παρὰ τὰς ὄρθας γωνίας δ, Ι, ἔχοσι κοινὴν τὴν Ε· τοιγαρῦν ΙΜ : Κδ :: ΕΜ : ΕΚ· ἄρα αβ : ΕΟ :: ΕΜ : ΕΚ.

Ἐπεὶ τοινυν τῶν εΡ, ΚΜ παραλλήλων ἐσῶν, ὡς καθέτων τῇ ἀπτομένῃ Μδ, η ἔτι (Γεωμ. 318) ΕΜ : ΕΚ :: ΕΡ : εΕ, ἔσαι αβ : ΕΟ :: ΕΡ : εΕ· ἀλλὰ ΕΡ = ΕΜ — εΜ, εἴγε (173) Με = ΜΡ· ἔτι δὲ ΕΜ — εΜ = Σσ (180)· ἄρα ΕΡ = Σσ· ἄρα αβ : ΕΟ :: Σσ : Εε :: 2 : 3.

Ἄρα ἀκτίνες ὅποιαιεν αἱ βΜ παράλληλοι τῷ ἄξοι ήμίτουν τῆς μὲν κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνίας ποιῶσαι· τὸ αβ, τῆς δὲ κατὰ τὴν θλάσιν τὸ ΕΟ, ἔχοντα πρὸς ἀλληλα :: 2 : 3, ἐκ τῆς ὑέλιας εἰς τὸν ἀέρα μεταβαίνονται, φέρονται πρὸς τὸ Ε.

232. Φακὸς ἄρα ἰέλινος ὁμοιοχήμων τῷ εἰρημένῳ ἔχων τὴν ιδιότητα τῇ συλλέγειν ἐν τῇ ἐσιά Ε πάσας τὰς ἀκτίνας, κανοικωτάτην ἔξει τὴν δύναμιν.

233. Τάνακαλη δὲ ἀκτὶς φωτὸς ἡ ΕΜ ἐκ τῆς Ε
ἔρχομένη, προσβάλλοντα κατὰ τὸ Μ τῇ κυρτότυτι τῆς
ὑπερβολείδης, χωρίσει τὴν βΜ φορὰν παράλληλον τῷ
ἄξοι· εἰ γὰρ τὸ ὑμίτου οὐ ΕΟ τῆς κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν
γωνίας πρὸς τὸ ὑμίτου αβ τῆς κατὰ τὴν θλάσιν, τῆς
διόδης ἀπὸ ἀέρος ἐφύελον γνομένης, ἔσαι :: 3 : 2.

234. Άλλῃ γὰρ ἀκτὶς φωτὸς ἡ ξΜ παράλλη-
λος τῷ ἄξοι ἐλευθέρως φερομένη ἐν ἀέρι πρὸς τὸ β,
εἰ διέλθῃ τὴν κυρτότυτα τῆς ὑπερβολῆς, θλασθήσεται
ὕτως, ὡς φαίνεται ἐρχομένη ἀπὸ τῆς Ε, τῆς φορῆς Μβ
γνομένης Μη· ἔσι γὰρ ἡ κατὰ τὴν ἐπίπτωσιν γωνία
ξΜτ ὑπὲρ τῆς ξΜ ἴση τῇ βΜα τῇ ὑπὲρ τῆς βΜ,
ὡς κατὰ κορυφὴν ἀντικείμεναι· ὥσαύτως ἄρα ἔσαι ἡ αὐ-
τὴ γὰρ ἡ κατὰ θλάσιν γωνία· ἔσι δὲ ὑπὲρ τῆς βΜ γω-
νία κατὰ θλάσιν ἡ ΕΜΟ = αΜη (231)· ἄρα ὑπὲρ ξΜ
ἔσεται αΜβ· ἄρα ἡ ξΜ ἀκτὶς τὴν φορὰν Μη χωρίσει.

. 235. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Εἴπερ ἐν δερεῷ ἀπογενωμέ-
νῳ (γ. 105) ἐκ τῆς χύματος ΠυΗΣρΟ, ἐφ' ἐ ΠνηΣ εἶη
ὑπερβολὴ, ἔχεσα ἐσίαν ἐκτὸς κειμένην τὴν Τ, εἰ ΠΟρΣ
ἐτέρα ὑπερβολὴ, ἔχεσα ἐσίαν ἐκτὸς κειμένην τὴν τ, α.
Ξηκὴ δὲ κοινὸν ἐκατέρᾳ τὸν ΤΘ, ὀφθαλμὸς ἐπιτεθῆ αὐ-
τῷ πρὸς τὸ Θ, ὅψεται κατὰ τὸ τ τὸ ἐν τῷ Τ κείμενον
ὅριτόν· αἱ γὰρ ἀκτῖνες τῆς φωτὸς ἐκ τῆς Τ ὥκεσαι πρὸς
τὴν κυρτότυτα ΠνηΣ παράλληλοι γενήσονται τῷ ἄξοι
(233)· εἰσιέσαι δὲ εἰς τὴν κανὴν ὑπερβολικὴν κυρτότυ-
τα ΠΟρΣ, ἔτω χωρίσεται, ὡς τὴν φορὰν αὐτῶν διευ-
θύνεται πρὸς τὴν τ ἐσίαν αὐτῆς τῆς δευτέρας ὑπερβολῆς
(234).

Αὕτη ἄρα ἡ ὕελος μέγιστην οἴσει πρὸς ὁρίσεως ἐν-

χριστινού τοις ἀμεληωπεῖσιν· ὁ γάρ κατὰ τὸ Τέθεωνται,
κατὰ τὸ τὸ γέν, ἐν διατίματι ἀμέλει ἐλάσσονι, ὅψουται.

236. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Τεγυαυτίου δὲ, εἰς τὸ ἔστι τὸ
τῆς ΠΟρΣ, ότι τὴς ΠΥΗΣ, αἱ ἀπὸ τῆς τὸν ἀποχωρῆσαι
ἀκτίνες, διὰ μὲν τῆς πρώτης θλάσσεως παράλληλοι τῷ
ἄξονι γενήσονται, διὰ δὲ τῆς δευτέρας, ἄλληλων ἀπο-
νήσονται, ὡς ἵκεσαι ἐκ τῆς Τ· ὁρατόντι ἄρα κείμενον κα-
τὰ τὸ Τ, ὁραθήσεται ὡς εἰ ἦν ἐν τῷ Τ· ὕελις ἄρα τοιά-
δε καλλιζόει εἴη φυκὸς ὀπτικὸς τοῖς πρεσβύωψιν, οἱ
τὰ εγγύς μὴ δυγαμένοι ἴδεται, ἀφεινότα μικρὸν ὡς ἀ-
πὸ τῆς τὸν ἐπὶ τὸ Τ τηλαυγῶς ὁρῶσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤ. ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς καμπυλότητος.

237. Κύκλος ὁ διήκων διὰ τριῶν συμείων, εἴγγισα
ἄλληλων κειμένων (χ. 103, 107) τῶν ν, Μ, γ' καμ-
πύλης τινὸς, ἵνα ἡ κατὰ τὸ Μ καμπυλότης τῇ τῇ κύκλῳ
συμπίπτει, καλεῖται κύκλος φιλῶν· ἡ δὲ αὐτοῦ ἀ-
κτίς, ἣτις διορίζει τὴν καμπυλότητα τῆς καμπύλης καθ'
ἐν συμείων δεδομένων, ὀνομάζεται ἀκτίς τῆς καμ-
πυλότητος, ἡ ἀκτίς τῇ φιλῶντος κύκλῳ, ἡ
ἀκτίς τῆς ἐξειλιγμένης.

238. ΛΗΜΜΑ. Τὸ πλάγιον ἥμιτονον ΠΒ (Γεωμ.
492) τόξον ἀπειροτεῖ τῷ ΒΡΜ (χ. 108) ἔσιν = $\frac{vv}{2x}$.

$$\Delta EΞΙΣ. vv = 2ax - x^2 \quad (12) = x \times \overline{2a-x}.$$

$$\text{ἄρα } x = \frac{vv}{2a-x} \quad (\Sigma \text{μβ. } \Lambda \text{ογ. } 253). \quad \text{ἄλλα } 2x - x$$

= 2α , ὅτι $\chi = \Pi B$ εἴναι ἀπειροσή (Συμβ. Δογ. 530).

$$\therefore \chi = \Pi B = \frac{vv}{2\alpha} = \frac{\Pi M^2}{AB}. \text{ Ο. Ε. Δ.}$$

239. ΠΟΡΙΣΜΑ. Εἴσω $\alpha = \xi$. ἄρα $\chi = \frac{vv}{2\xi}$.

240. Εἴσω ὁ πρῶτος ἄξων (θ. 106, 107) Σσ = $2A$, ο δεύτερος = $2B$, ο διάμετρος $AM = 2\alpha$, ο ἡπτηνός $B\Delta = 2\beta$, ο ὁρθίας πλευρὴ $EM = \rho$, τὸ φίλεντος κύκλου ἀκτὶς $M\tau = \xi$, τὸ μέρος MO τοῦ απολαμβανόμενον ὑπὸ M , ο τῆς συζυγῆς διαμέτρος = η , ο ἀπειροσή τεταγμένη uI , ο $uE = v$, ο u ὑπὸ αὐτῆς ἀποτετμημένη MI , ο ἐπὶ τῆς MA , = χ , τὸ δὲ τὸ κυκλικὸ τόξο Mu πλάγιον ὑμίτονον $M\varepsilon = \frac{vv}{2\xi}$, ο η τῆς ἀπτομένης κάθετος $\varepsilon\Gamma = \psi$. τότων τεθέντων. . .

241. ΘΕΩΡΗΜΑ. Η ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος εἴτε τῇ ἐλλείψει καὶ τῇ ὑπερβολῇ εἴτε $\frac{\beta\beta}{\eta}$. (*)

ΔΕΙΞΙΣ. Εἴ τῶν ὁμοίων τριγώνων $MI\varepsilon$, MKO , εἴτε $MI = \chi : M\varepsilon = \frac{vv}{2\xi}$ (239) :: $MK = \alpha : MO = \eta$. ἄρα $\chi\varepsilon = \frac{\alpha vv}{2\xi}$ (P): ἀλλ' εἴη $vv : 2\alpha\chi \neq \chi\varepsilon$:

(*) Τοῦτο εἰνισταται τῷ τετραγάνῳ τῷ ἀπὸ ἡμιδιαμέτρος τῆς $B\Delta$ συζυγῆς διαμέτρῳ δεδομένῃ τῷ AM , διηριμένῳ διὰ τοῦ τοῦ MO τῆς ἀκτίνος ταύτης, τῷ απολαμβανομένῳ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς M τῆς διαγέτρου AM , ο τῆς ταύτης συζυγῆς $B\Delta$.

$\beta\beta : \alpha\alpha$ (92, 217). οὐχ ἔσιν ἀπειροσὸν δευτεροταγὲς,
εἴγε τὰ σημεῖα M , u , v ἀπείρως ἐτέθησαν ἔγγισα
(237), κακ τύτῳ οὐ ἀκοτετμημένη $Ml = x$ ἔσιν ἀπει-
ροσὸν πρωτοταγὲς, ἀφ' ἣ τὸ τετράγωνον ἀποτελεῖται
δευτεροταγὲς ἔσαι αριτμηφιγίσως υν : $2ax : : \beta\beta : \alpha\alpha$

(Συμβ. Λογ. 528). ἄρα $uv = \frac{2ax\beta\beta}{\alpha\alpha} = \frac{2x\beta\beta}{\alpha}$.

Ἐν τῷ P ἔξισώσει ἀντὶ υν ἀντικατασάσης τῆς εὐ-
ρεθείσης δυνάμεως, ἔσαι $\eta x = \frac{2ax\beta\beta}{2ax} = \frac{\beta\beta x}{x}$. ἄρα η

$= \frac{\beta\beta x}{x} = \frac{\beta\beta}{\xi}$ (Συμβ. Λογ. 250). ἄρα $\eta\xi = \beta\beta$, οὐ

$\xi = \frac{\beta\beta}{\eta}$. Ο.Ε.Δ.

242. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. $\beta x \eta$ ἵσου ἔσι τῷ γινομέ-
νῳ ἐπὸ τῶν ἡμιαξόνων A, B (130, 219) εἴτ' ἐν $\beta\eta =$
 AB . ἄρα $\beta = \frac{AB}{\eta}$. οὐ $\beta\beta = \frac{A^2B^2}{\eta^2}$. ἀντικατασάσει δὲ

ταύτης τῆς δυνάμεως ἀντὶ $\beta\beta$, ἔσι $\xi = \frac{A^2B^2}{\eta^3}$. εὔτε

θεοῦ ἄρα : $\xi : \Xi :: \frac{A^2B^2}{\eta^3} : \frac{A^2B^2}{H^3}$. ἀλλαμήγ $\frac{A^2B^2}{\eta^3} :$

$\frac{A^2B^2}{H^3} :: H^3 : \eta^3$ (Συμβ. Λογ. 259). ἄρα $\xi : \Xi : H^3$

: η^3 (II) τατέσιν,, αἱ ἀκτῖνες τῆς καμπυλότητος ἐν δια-
,, φόροις σημείοις τῆς ἐλλείψεως οὐ τῆς ὑπερβολῆς ἀντιπε-
,, πονθότως εἰσὶν ἀνάλογοι τοῖς κύρσοις τῶν τμημάτων MO
,, = η (240) τῶν ἀκτῶν ἀντῶν, ἀκολαμβανομένων ὥ-
,, πὸ τῆς ἀρχῆς M διαμέτρου τιγρὸς AM , οὐ τῆς αὐτῆς συ-
,, ζιγῆς $B\Delta$.“

243. Ε'κ τῆς ἀναλογίας Π πρόεισι $\xi = \frac{\Xi \times H^3}{\eta^3}$.

ἀλλὰ παραθέσει, τῆς μὲν ξ πρὸς Ξ , τῆς δὲ η πρὸς H , ἐκληφθῆναι φέρει δύναται ὡς πρὸς τὴν ξ ή $\Xi = 1$, καὶ ὡς πρὸς τὴν η ή $H = 1$. Ὅτως ὥν ἡ εἰρημένη ἔξιστωσις γε.

$$\text{ΆΠΟΔΕΙΞΗ} \quad \xi = \frac{1 \times 1}{\eta^3} = \frac{1}{\eta^3}.$$

244. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Η' ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ξ ἐν διαφόροις σημείοις τῆς ἐλλείψεως, ή τῆς ὑπερβολῆς, οὐσιῇ τῷ κύβῳ ρ^3 τῆς ὁρίας πλευρᾶς, διαιρεθεῖται διὰ τοῦ κύβου ψ^3 τῆς ἐπιστρεψῆς καθέτες ἐκ τῆς ἐσιτούσης αὐτού τοῦ ἀπτομένης.

$$\text{α}s \text{ ἐπὶ τῆς ἀπτομένης (240). εἰτ' ὥν } \xi = \frac{\rho^3}{\psi^3}.$$

ΔΕΙΞΙΣ Α'. Ε'ν τῇ ἐλλείψει ἀχθείσης τῆς ΕΤ παραληλες τῇ ΜΓ, ἔσαι η ὑπὸ ΜΕΤ = ΕΜΖ (Γεωμ. 133). ἀλλ' ἔσιν ὑπὸ ΕΜΖ = ΤΜΓ (104). ἀρα ΜΕΤ = ΤΜΓ. ἀλλ' ἔσιν ὑπὸ ΜΤΕ = ΤΜΓ. ἀρα ΜΕΤ = ΜΤΕ. τῇ ἀρᾳ τριγώνων ΕΜΤ ισοσκελῆς ὄντος, ἔσι ΜΕ = ΜΤ (Γεωμ. 204). ἀρα $\epsilon M + MT = \epsilon M + EM$. ἀρα εΤ ἔσιν η διαφορὰ τῶν δύο ἀποσημάτων εΜ. ἀρα

$$2MT + \epsilon T = 2A. \text{ ἀρα } MT + \frac{\epsilon T}{2} = A.$$

Β'. Ε'κ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΕεΤ, $\epsilon K\psi$ ἔσιν $Ee = 2\kappa : EK = \kappa :: \epsilon T : \epsilon \psi$. ἀρα $\epsilon \psi = T\psi = \frac{\psi T}{2}$. ἂ.

$$\text{ἄρα } MT + T\psi = A. \text{ ἀρα } M\psi = A.$$

γ'. Ε'ν δὲ τῇ ὑπερβολῇ, ἀχθείσης παραληλες τῇ ΜΓ τῆς εΤ, διὰ τῶν αὐτῶν ἐφόδων, τιθεμένης μέγιστης εἰς τῇ Ε, ἔσαι ἀ. $\epsilon M = MT$. β'. ἐκ τῶν τριγώνων

$E\psi T, E\psi K, T\psi = \frac{ET}{2}$. ἀλλ' εἰν τῇ ὑπερβολῇ

$zA = EM - eM$ (140) $= EM - MT$ (διὰ τὸ εἶναι
 $eM = MT$) $= ET - zMT = z\psi T - zMT$. ἀρα A
 $= \psi T - MT = M\psi$.

δ'. Εκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $M\epsilon\Gamma, MO\psi$, εἰ M
 $O = \psi$ (240): $M\psi = A$ (ἐν τῇ ἀνὰ χειρας δεῖξει) ::

$$\epsilon\Gamma = \psi \text{ (240)} : \rho \cdot \text{ἄρα } \eta = \frac{A\psi}{\rho} \cdot \text{ἄρα } \eta^3 = \frac{A^3\psi^3}{\rho^3}.$$

$$\text{ἀλλ' εἰ } \xi = \frac{A^2B^2}{\eta^3} \text{ (242). ἄρα } \xi = A^2B^2 : \frac{A^3\psi^3}{\rho^3} = \frac{B^2\rho^3}{A\psi^3}.$$

$$\frac{A^2B^2\rho^3}{A^3\psi^3} = \frac{B^2\rho^3}{A\psi^3} \cdot \text{ἄρα διὰ τὴν ἀμετάτρεπτον } \frac{B^2}{A}, \text{ εἰ }$$

$$\xi = \frac{\rho^3}{\psi^3}. \text{ Ο. Ε. Δ.}$$

245. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τάντα δὲ δείκνυται καὶ ἐν τῇ παραβολῇ. ἀλλ' ἐν τῷ κύκλῳ, οὐ ἀκτὶς τῆς καμπυλότητος ξ , οὐ η ἀκτὶς τοῦ κύκλου, οὐ οὐρθία πλευρά ρ , οὐ η τῇ ἀπτομένη κάθετος ψ , ἀπαντα ἵπαρχει τάντα. διὸ

εἰς $\xi = \frac{\rho^3}{\psi^3} = \frac{1}{t}$. ἐν γένει ἄρα ἀπάσης κωνικῆς το-

μῆς η τῆς καμπυλότητος ἀκτὶς εἰς $\xi = \frac{\rho^3}{\psi^3}$.