ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἀσυμπτώτου ἐπὶ τὴν ἑτέραν παραλλήλως μιᾷ τινι ἀπτομένῃ τῇ ΠΕν, εἰσὶν ἴσα.

ΔΕΙΞΙΣ. Διὰ τῶν σημείων Β, Μ, ἀχθεισῶν παραλλήλως τῷ δευτέρῳ ἄξονι τῶν ΤΒχ, καὶ ΘΜΣ, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΔΤ, ΜΘΤ ἔσται (Γεωμ. 220) ΒΤ : ΜΘ :: ΒΔ : ΜΤ (Ρ), ἐκ δὲ τῶν ΑΒχ, ΣΜΗ καὶ αὐτῶν ὁμοίων, Βχ : ΣΜ :: ΑΒ : ΗΜ (η)· πολλαπλασιασμῷ δὲ τῆς Ρ ἐπὶ η, ἔσται ΒΤ × Βχ : ΜΘ × ΣΜ :: ΒΔ × ΑΒ : ΜΤ × ΗΜ· ἀλλὰ ΒΤ × Βχ = ΜΘ × ΣΜ (181)· ἄρα ΒΔ × ΑΒ = ΜΤ × ΗΜ. Ο. Ε. Δ.

193. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπὶ δὲ τῆς ἀπτομένης Πν, τὰ μέρη ΑΒ, ΒΔ καθίστανται ΠΕ, Εν, $= \frac{\Pi\nu}{2}$ (199)· ἄρα ΒΔ × ΑΒ = ΠΕ × Εν = Εν², τουτέστι τὰ γινόμενα ΒΔ × ΕΒ, κτλ. εἰσὶν ἴσα ἕκαστον τῷ τετραγώνῳ „Εν² τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιαπτομένης".

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ὑπερβολικῶν Λογαρίθμων.

194. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἐὰν αἱ ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτου πρὸς τῷ Κ (χ. 97) ἀποτετμημέναι Κμ, Κν, Κξ κτλ. ἐν προόδῳ ὦσι γεωμετρικῇ αὐξούσῃ, αἱ θατέρᾳ ἀσυμπτώτῳ παραλλήλως τεταγμέναι ἔσονται ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ φθινούσῃ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ γὰρ χυ = κ² (188)· ἐν ἄλλῃ τινὶ χ΄, καὶ τῇ αὐτῆς ἀντιστοίχῳ Υ, ἔξομεν χ΄Υ = κ², κτ· ἡγίκα ἄρα

ἀποτετμημένη διπλασιάζεται, ἡ ἀντίστοιχος αὐτῇ τεταγμένη ὑποδιπλασία καθίσταται· τριπλασιαζομένης δὲ τῆς ἀποτετμημένης, ἡ τεταγμένη τὐναντίον ὑποτριπλασία γίνεται· ἄλλως γὰρ τὸ γινόμενον ὑπὸ πάσης ἀποτετμημένης χ καὶ τῆς αὐτῇ ἀντιστοίχως τετάγμένης υ οὐκ ἂν ἦν ἴσον ποσῷ μονίμῳ τῷ κ². ἐὰν ἄρα αἱ ἀποτετμημέναι αὐξῶσι κατὰ πρόοδον γεωμετρικὴν, αἱ τεταγμέναι μειοῦνται ὡσαύτως κατὰ πρόοδον γεωμετρικήν. Ο. Ε. Δ.]

195. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Ἐὰν αἱ ἀποτετμημέναι Κγ, Κμ, Κν, Κξ κτλ. ὦσιν ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ, καὶ αἱ διαφοραὶ αὐτῶν γμ, μν, νξ, κτ ἔσονται ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ.

ΔΕΙΞΙΣ. Αὐτόματον τοῦτο ἕπεται ἐκ τῶν δειχθέντων (Συμβ. Λογ. 274).

196. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Τὰ ὑπερβολικὰ χωρία αγμμ, μνμν, κτ τὰ ἐπὶ τῶν εἰρημένων διαφορῶν βεβηκότα, ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα.

ΔΕΙΞΙΣ. Τετμήσθωσαν αἱ διαφοραὶ γμ, μν κτλ· εἰς μέρη, ἰσάριθμα μὲν, ἀπειροσὰ δὲ, πρὸς ἑκάστην δοθεῖσαν γμ, μν ἀναφερόμενα· ἐπινενοήσθωσαν δὲ τὰ χωρία γαμμ, μνμν, κτλ. συγκείμενα ἐκ τῶν ἀπειροστῶν ἐπιφανειῶν ομμ, πνν τῶν ἐπὶ τοῖς εἰρημένοις ἀπειροστοῖς μορίοις βεβηκυιῶν, αἵ περ ἔσονται στοιχεῖα τῶν περὶ ὧν ὁ λόγος χωρίων· ἔχει δὲ ἐξ ὑποθέσεως ἕκαστον χωρίον ἴσα τὸν ἀριθμὸν στοιχεῖα, ἃ δὴ εἰσὶ καὶ ἰσάλληλα· ἐπεὶ γὰρ αἱ εὐθεῖαι γμ, μν διήρηνται εἰς μέρη τὸν ἀριθμὸν ἴσα, ἕκαστον μόριον ομ τῆς πρώτης πρὸς ἕκαστον μέρος πν τῆς δευτέρας ἔστιν ὡς γμ : μν· ἄρα ομ : πν :: γμ : μν· ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως ἔστι Κγ : Κμ :: Κμ : Κν, ἔσται Κγ — Κμ (= γμ) : Κμ :: Κν — Κμ (= μν) : Κν καὶ γμ : μν :: Κμ : Κν· ἀλλὰ Κμ × μμ = Κν × νν (186)· ἄρ

ρα Κμ : Κν :: νν : μμ· ἄρα ομ : πν :: νν : μμ, καὶ ομ × μμ = πν × νν, εἴτ' ἂν ομμ = πννν· ἄρα τὰ στοιχεῖα τοῦ χωρίου ναμμ εἰσὶν ἴσα τοῖς στοιχείοις τοῦ χωρίου μνμν τόντε ἀριθμὸν καὶ τὸ μέγεθος· ἄρα τὰ χωρία ταῦτα εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις. Ο.Ε.Δ.

197. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ληφθῶσιν ἄπειροι ἀποτετμημέναι κατὰ πρόοδον χωροῦσαι γεωμετρικὴν, ἐκ τῶν ἀριθμῷ ἀπείρων διαφορῶν προκύψουσιν ὑπερβολικὰ χωρία ἰσάλληλα, πεπερασμένα μὲν καθ' ἓν ἕκαστον, ἀριθμῷ δὲ ἀπερίληπτα· τὸ χωρίον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτου καὶ τῆς ὑπερβολῆς ἀπολαμβανόμενον ἔστιν ἄπειρον.

198. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ὑποτείνεται ἐν ταύτῃ τῇ δείξει τὰ στοιχεῖα, εἴτ' ἂν τὰ τραπέζια ομομ, πνπν ὀρθογώνια, ὅπερ ἤκισα ἀληθές· ἀλλὰ γὰρ τῶν εὐθειῶν ομ, πν ἀπειροστῶν ὄντων, τὰ τραπέζια ομμο, δύναται ἐκληφθῆναι ὡς ὀρθογώνια, κυκλικῆς γοῦν τῆς ὑπερβολῆς ὑπαρχούσης· τηνικαῦτα γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένη γωνία ἔστιν ὀρθὴ, εἴγε ἔστιν (158) (χ. 93). ΣΞ = ΚΗ = ΚΣ, ὅπερ ποιεῖ ἰσοσκελὲς τὸ τρίγωνον ΚΣΞ, ἄρα ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ΣΚΞ, ΣΚβ ἔστιν = 45°· ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΚβ ἴση 90°· ὑποτιθεμένης ἀλλ' ἂν ἐλλειπτικῆς τῆς ὑπερβολῆς, τὰ τραπεζίδια (χ. 96) ομομ ἐκληφθῆναι δύνανται ὡς παραλληλόγραμμα, ὧν αἱ παρακείμεναι ταῖς ἴσαις γωνίαις μ, ν πλευραὶ ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογοι.

199. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Τῆς ὑπερβολῆς ἐλλειπτικῆς ὄσης τὰ τραπεζίδια ομμ, πνν ἔσονται ἴσα τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τῆς καθέτου, τῆς ἀπὸ τοῦ πέρατος ἑκάστης τεταγμένης μμ, νν ἐπὶ τὴν βάσιν καταγομένης· αἱ δὲ κάθετοι αὗται μεθ' ἑκάστης τεταγμένης περιέ-

ξυσι τὴν ἀπόμοιραν τῆς ἀσυμπτώτου, τὴν ἀπολαμβανομένην ἀπό τε τῆς τεταγμένης καὶ τῆς καθέτου τῶν ὁμοίων τριγώνων, ὧν τὰ ὕψη εἶεν ἀνάλογα ταῖς ἀντισοίχοις τεταγμέναις· τὰ ἄρα, περὶ ὧν προείρηται, παραλληλόγραμμα, ἔχοντα ὕψη τὰς καθέτους ταύτας, ἔχουσι τὰς ἑαυτῶν βάσεις ἀντιπεπονθότως ἀνάλογοι τοῖς ὕψεσι: διὸ εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις· εἰσὶ δὲ αἱ κάθετοι αὗται καὶ ὡς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀντισοίχων γωνιῶν οομ = χγμ· ἄρα τὰ ὑπερβολικὰ χωρία τῆς ὑπερβολῆς ἐλλειπτικῆς ὕσης πρὸς τὰ ὑπερβολικὰ χωρία τῆς ὑπερβολῆς ὕσης κυκλικῆς εἰσὶν, ὥσπερ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ἐλλειπτικῆς ὑπερβολῆς περιεχομένης γωνίας πρὸς τὴν ἀκτῖνα.

200. ΘΕΩΡΗΜΑ. Κ'ὰν ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ Κα, Κμ, Κν, Κξ κτ, οἱ ὑπερβολικοὶ τομεῖς Καγ, Κμν, Κνκ, κτλ. ἔσονται ἴσοι ἀλλήλοις τε καὶ τοῖς ὑπερβολικοῖς τραπεζίοις αγμμ, μνμν, νκνκ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστι γὰρ Κγ × αγ = Κμ × μμ (186)· ὅθεν Κγ : Κμ :: μμ : αγ, τουτέστι τριγώνων τῶν Κγα Κμμ αἱ τὰς ἴσας γωνίας περιέχουσαι πλευραὶ ἀντιπεπονθότως εἰσὶν ἀνάλογον· δῆλον οὖν ὡς τὰ ὕψη τῶν δε τῶν τριγώνων εἰσὶν, ὡς αἱ πλευραὶ αγ, μμ, τὰυτὸν εἰπεῖν, ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι τῶν βάσεων, ἢ καὶ τῶν ἡμιβάσεων· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἰσὶν ἰσάλληλα· κοινῇ δὲ ἀφαιρεθέντος τοῦ Κηγ τριγώνου, καταλειφθήσεται Καη = ηγμμ· κοινῇ δὲ προσεθέντος τοῦ αημ, ἔσεται ὁ τομεὺς Καμ = αγμμ· καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως· Ο. Ε. Δ.

201. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῶν δύω προτεθέντων θεωρημάτων δῆλον, ὡς οἱ τομεῖς, καὶ τὰ ὑπερβολικὰ τραπέζια, τὰ ἐπὶ τῶν κατὰ γεωμετρικὴν πρόοδον χωρυσῶν ἀποτετμημένων βεβηκότα, συνιεῶσι πρόοδον ἀριθμητικήν· δύνανται

ἄρα θεωρηθῆναι ὡς ὄντα αὐτῶν λογάριθμοι (Συμβ. Λογ. 313)· ἐκεῖν ἐὰν ὑποτεθῇ ὡς ἄρα Κγ ἐμφαίνει ἀριθμὸν, ἡ λογάριθμος ἔστι ο, τὸ χωρίον αγμμ ἐμφανεῖ τὸν λογάριθμον τῷ ἀριθμῷ Κμ, τὸ δὲ αγνν, τῷ Κν, κτ· ἀ. κόλουθοι δὲ ἦτοι λογάριθμοι ὑπερβολικοὶ τῆς ὑπερβολῆς κυκλικῆς ὕσης.

202. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ὑποτεθείσης κυκλικῆς τῆς ὑπερβολῆς ακ, ἡ τῆς ἀποτετμημένης Κο = τῇ τεταγμένῃ οο = 1, εὑρεῖν το χωρίον οονν.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τὴν φυσικὴν ἰδιότητα τῆς ὑπερβολῆς ῥηθείσης ον = χ, ἔξομεν οο × Κο = Κν × νν (188), εἴτ' ἂν 1 × 1 = (1 + χ) × υ, εἴτ' ἂν 1 = υ × (1 + χ)· ὅθεν

$$\upsilon = \frac{1}{1+\chi} = 1 - \chi + \chi^2 - \chi^3, \text{ κτ.}$$

· τούτου τεθέντος, ἐὰν ἀθροισθῶσι πᾶσαι αἱ υ, αἱ ἀπὸ τῶν τεταγμένων οο, ἡ νν ἀπολαμβανόμεναι, εὑρεθήσεται τὸ ζητούμενον, ἤ, ὃ δὴ τοῦτο, ἐὰν εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν σειρῶν $\chi^0 - \chi + \chi^2 - \chi^3$ κτ. τῶν ἀντιστοιχουσῶν ἑκάστῃ υ· ἀλλὰ δυνάμεθα τὰς χ ἐπινοῆσαι αὐξούσας κατὰ τὴν πρόοδον ÷ 0. 1. 2. 3. 4, κτ. μέχρι τῆς τελευταίας χ = ω, ἥτις ὑποτεθῆναι ἔχει = ∞, ὡς ὖσα ἀπειράκις μείζων τῆς πρώτης, ἥτις ὑποτίθεται ἐκείνης ἀπειροστή· ἐὰν οὖν ληφθῇ ἡ ἄπειρος σειρὰ τῶν $\chi^0 = 1$, εἶτα ἡ ἄπειρος σειρὰ τῶν — χ, εἴτ' ἂν τῶν κατὰ φυσικὴν τάξιν προϊόντων λειπτικῶν ἀριθμῶν — 1. — 2. — 3. — 4, κτ., ἑξῆς δὲ ἡ ἄπειρος σειρὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ 1. 2. 3. 4. 5 κτ., ἡ αἱ σειραὶ τῶν ἀκολούθων ὅρων ὁμοίως, εὑρεθήσεται τὸ ζητούμενον χωρίον· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων 1, 1, 1, 1 κτ. ἔστιν = χ· τὸ δὲ τῶν — χ ἔστιν = —

$\frac{\chi^2}{2}$, τὸ δὲ τῶν χ^3 ἔστιν $= \frac{\chi^3}{3}$ κτ. (ὡς ἐκ τοῦ ἀποδοθέντος (Συμβ. Λογ. 567) τύπου δῆλον)· ἄρα τὸ ζητούμενον χωρίον ἔστιν $= \chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{3} - \frac{\chi^4}{4}$ κτ.· ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ογ $= -\chi$ (ὅτι αἱ ἀπὸ τοῦ ο πρὸς τὸ ν χωροῦσαι χ κατ' ἐναντίαν ἔννοιαν ταῖς ἤδη τιθεμέναις ἐλήφθησαν), ἔσται Κγ $= 1 - \chi$, καὶ ὑποτεθείσης αγ $= \upsilon$, πορισθήσεται $(1 - \chi) \times \upsilon = 1$, εἴτ' ἂν $\upsilon = \frac{1}{1-\chi}$, ἢ (τῆς διαιρέσεως ἐνεργείᾳ γενομένης) $\upsilon = 1 + \chi + \chi^2 + \chi^3$, κτ. τὸ δὲ χωρίον ογκγ εὑρεθήσεται ὂν $= \chi + \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{3} + \frac{\chi^4}{4}$ κτ. Ο. Ε. Π.

203. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπείπερ τῶν δύω διαληφθέντων χωρίων, τὸ μὲν ἐμφαίνει τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ Κγ, ὅς ἐστι μονάδος μείζων, θάτερον δὲ, τοῦ ἀριθμοῦ Κγ $< 1 =$ Κο, ἐξ ὑποθέσεως, αἱ ἤδη ἡμῖν εὑρεθεῖσαι σειραὶ ἐμφανοῦσι τοὺς ὑπερβολικοὺς λογαριθμους τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν $1 + \chi$, καὶ $1 - \chi$· ἀλλ' ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ $1 - \chi$, ὅς ἐστιν ἐλάττων μονάδος, καὶ ἑπομένως κλασματίας, ὀφείλει εἶναι λειπτικὸς (Συμβ. Λογ. 330)· τρεπτέον ἄρα τὸ τῶν ὅρων τῆς δευτέρας σειρᾶς σύμβολον, καὶ πάντας τοὺς ὅρους ἀναδεικτέον λειπτικούς· ὁκοῖον πορισθήσεται ἐν γένει ἡ σειρὰ $\pm \chi - \frac{\chi^2}{2} \pm \frac{\chi^3}{3} - \frac{\chi^4}{4} \pm \frac{\chi^5}{5}$ κτ., δι' ἧς ἐκδηλοῦνται οἱ ὑπερβολικοὶ λογάριθμοι ἀριθμοῦ παντὸς μείζονος, ἢ γοῦν ἐλάττονος, τῆς μονάδος.

204. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Η' σειρὰ αὕτη ἐ μὴ εὐχρηςήσει, εἰμὴ ὑποτεθείη $\chi = 1$, ἢ $\chi < 1$· ἄλλως γὰρ ἐκ ἂν γένοιτο συγκλίνεσα.

205. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἵν' εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμῦ κλασματώδες, ἀφαιρεῖν ἐπάναγκες τῦ κατὰ τὸν ἀριθμητὴν λογαριθμε τὸν κατὰ τὸν παρονομάζοντα (Συμβ. Λογ. 336), ἄρα $\Lambda\left(\frac{1+\chi}{1-\chi}\right)$ εὑρεθήσεται ἀφαιρεμένης τῆς σειρᾶς $-\chi - \frac{\chi^2}{2} - \frac{\chi^3}{3}$, κ.τ.λ. ἀπὸ τῆς σειρᾶς, $\chi - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^3}{3}$ κ.τ.λ. ὅθεν εὑρεθήσεται $\Lambda\left(\frac{1+\chi}{1-\chi}\right)$ $= 2\chi + \frac{2\chi^3}{3} + \frac{2\chi^5}{5} +$ κ.τ.λ.

206. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Τ'ποτεθείσθω $\frac{1+\chi}{1-\chi} = \frac{\pi}{\kappa}$, ἐ δὴ τῶν κλασμάτων ἀρθέντων πορισθήσεται $\kappa + \kappa\chi = \pi - \pi\chi$, ἐ μεταθέσει, $\kappa\chi + \pi\chi = \pi - \kappa$, ἐ διαιρέσει διὰ $\pi + \kappa$, $\chi = \frac{\pi - \kappa}{\pi + \kappa}$· ἀλλὰ $\Lambda\left(\frac{\pi}{\kappa}\right) = 2\chi + \frac{2\chi^3}{3}$ κτ.· ἐὰν ἄρα ἐν ταύτῃ τῇ σειρᾷ εἰσαχθῶσιν αἱ δυνάμεις τῦ χ, χ, κτ. πορίζόμεναι ἐκ τῆς ἐξιτώσεως $\chi = \frac{\pi - \kappa}{\pi + \kappa}$, θηρευθήσεται ὁ λογάριθμος ὅτος ἐν ἀριθμοῖς γνωςῶν ὑποτιθεμένων τῶν ἀριθμῶν π ἐ κ.

Ζητηθήτω φέρ' εἰπεῖν ἀριθμῦ τῦ 2 ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος· ὑκῦν ἔςι $\frac{1+\chi}{1-\chi} = \frac{\pi}{\kappa} = \frac{2}{1}$, τιθεμένων

$\pi = 2$ καὶ $\varkappa = 1$ (εἰδ' εἴη ὁ προκείμενος ἀριθμὸς κλασματίας καὶ $= \frac{5}{2}$ φέρε, γενήσεται $\frac{5}{2} = \frac{\pi}{\varkappa}$)· καὶ δὴ ἕξομεν

$$\chi = \frac{\pi - \varkappa}{\pi + \varkappa} = \tfrac{1}{3}.$$

τιθεμένης δὲ ταύτης τῆς δυνάμεως ἐν τῇ σειρᾷ $2\chi + \frac{2\chi}{3} +$ κτ. πορισθήσεται ὁ ζητέμενος ὑπερβολικὸς λογάριθμος· ὃ δὴ πραχθήσεται ἀναγομένων τῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικὰ προκύπτοντα μέχρι τῶν ἑκατὸν μιλλιονίων

$$\chi = \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{1} \times 0,33333333 = 0,33333333$$

$$\frac{\chi^3}{3} = \tfrac{1}{9} \times \frac{\chi}{3} = \tfrac{1}{3} \times 0,03703703 = 0,01234567$$

$$\frac{\chi^5}{5} = \tfrac{1}{9} \times \frac{\chi^3}{5} = \tfrac{1}{5} \times 0,00411522 = 0,00082304$$

$$\frac{\chi^7}{7} = \tfrac{1}{9} \times \frac{\chi^5}{7} = \tfrac{1}{7} \times 0,00045724 = 0,00006532$$

$$\frac{\chi^9}{9} = \tfrac{1}{9} \times \frac{\chi^7}{9} = \tfrac{1}{9} \times 0,00005080 = 0,00000564$$

$$\frac{\chi^{11}}{11} = \tfrac{1}{9} \times \frac{\chi^9}{11} = \tfrac{1}{11} \times 0,00000564 = 0,00000051$$

ἄθροισμα = ...	0,34657351
ἓ τὸ διπλῶν	0,69314702

ὁ ὑπερβολικός ἐςι λογάριθμος τοῦ 2.

207. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐν δυσὶν ὑπερβολαῖς τὰ ἐν ταῖς ἀσυμπτώτοις ἀντίςοιχα χωρία, τὰ συγκείμενα ἐκ τῶν βεβηκότων ἐπὶ ταῖς διαφοραῖς τῶν ἐφεξῆς κειμένων ἀποτετμημένων, τῶν κατὰ πρόοδον βαίνουσῶν γεωμετρικὴν,

καὶ ἰσημένων ἑκάστῳ ἑκάστῳ, εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀτρέκτῳ τὸ τῆς ἑτέρας πρὸς τὸ ἐν θατέρᾳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Εἰλήφθωσαν γὰρ τέσσαρα χωρία τῆς ἑτέρας καὶ τέσσαρα τῆς ἑτέρας ὑπερβολῆς· ταῦτα ἓν ἐν ἑκατέρᾳ ἰσάλληλα ἔσονται (196)· τὰ δὲ αὐτῶν ἀθροίσματα, ὧν ἑκάτερον ἐμφαίνει ὁ λογάριθμος τῆς μείζονος ἀποτετμημένης (τῆς πασῶν ἐλάττονος ὑποτιθεμένης = 1), ἔσονται πρὸς ἄλληλα ὡς ἓν ὁποιονοῦν χωρίον τῆς ἑτέρας πρὸς ἓν ὁποιονοῦν χωρίον τῶν ἐν θατέρᾳ· ἄρα κτ.

208. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα ὑποτεθῇ ὑπερβολή, ἐν ᾗ τὰ μὲν χωρία τῶν ἀσυμπτώτων παρίσωσι τοὺς τῶν κανονίων λογαρίθμους, αἱ δ' ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων ἀποτετμημέναι τοὺς αὐτοῖς συστοιχοῦντας ἀριθμοὺς, εὑρεθήσεται ἀεὶ ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ παντὸς τοῦ ἐν τοῖς κανονίοις, τοῦ 10 δὸς εἰπεῖν, λόγον ἔχων πρὸς τὸν ὑπερβολικὸν λογάριθμον τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἔχει ὁ ἐν τοῖς κανονίοις λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 2 πρὸς τὸν ὑπερβολικὸν λογάριθμον τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 2· ἄρα 0,301030 (λογ. ἐν τοῖς κανον. τοῦ 2) : 0,693147 (λογ. ὑπερβ. τοῦ 2 ἐν ἑπτὰ μόνοις χαρακτῆρσι) :: 1 (λογ. ἐν τοῖς κανον. τοῦ 10) : 2,302585 (λογ. ὑπερβ. τοῦ 10)· τοιγαροῦν, ὅπως ἂν εὑρεθείη λογάριθμος ὁ ἐν τοῖς κανονίοις ἀριθμοῦ παντὸς χ, οὗ δέδοται ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος, ὑποτιθεμένου μ τοῦ ὑπερβολικοῦ λογαρίθμου τοῦ χ, γενέσθω ἡ ἀναλογία· 2,302585 : 1 :: $\mu : \upsilon = \mu \times \frac{1}{2,302585}$, ἢ (ἐνεργείᾳ πραχθείσης τῆς τοῦ 1 διὰ 2,302585 διαιρέσεως) $\upsilon = \mu \times 0,434294$· ἄρα, ἵν' εὑρεθῇ ὁ τοῖς κανονίοις λογάριθμος παντὸς ἀριθμοῦ, ἀπόχρη πολλαπλασιάσαι τὸν αὐτοῦ ὑπερβολικὸν λογάριθμον ἐπὶ 0,434294· ἐπεὶ δὲ υ

$= \mu \times 0,434$, κτ., ποριωθήσεται $\mu = \frac{\upsilon \times 1}{0,430, \text{ κτ.}}$ $= \upsilon \times 2,302585$, τοῦτ' ἔστιν „ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθ- „μος παντὸς ἀριθμοῦ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐν τοῖς κανονίοις λογαριθ- „μῳ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ 2,302585.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ὑπερβολικῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων.

209. Ἐπεὶ δὲ περὶ ὑπερβολικῶν λογαριθμων εἴρηται, ἐκ ἂν εἴη ἄπο σκοποῦ παραβέσθαι βραχέα καὶ περὶ ὑπερβολικῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων· ὑπερβολῆς ἐν κυκλικῆς τῆς ΣΑΖ (σχ. 93) ὁ ἡμιάξων ΠΑ = 0 καλείσθω ὁλόκληρον ἡμίτονον ἀναλόγως τῷ κατὰ τὸν κύκλον· ἔστω δὲ = μ ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ δηλουμένου διὰ ΠΘ, καὶ τετάχθω ΓΘ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἀσυμπτώτῳ ΠΘ, καὶ ἤχθω κάθετος τῷ ἄξονι ἡ ΓΒ· τοιγαροῦν ἡ μὲν ΠΒ ἔσται τὸ συνημίτονον, ἡ δὲ ΒΓ τὸ ἡμίτονον τοῦ ἀριθμοῦ μ· καὶ τὸ μὲν ἡμίτονον τοῦ μ δηλούσθω διὰ ἡμ. υ.μ, τὸ δὲ συνημίτονον διὰ συνημ. υ.μ· ἐπεὶ δὲ πρὸς τῷ σημείῳ α ἔστι βγ = ο, καὶ ΠΒ = 0 = ΠΑ ἀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν ΣΡ, ΑΚ παραλλήλως τῇ ΘΓ, ποριωθήσεται ὑπὲρ τοῦ ἀριθμοῦ ΠΚ, ἡμ. υ.μ = ο, καὶ συνημ. υ.μ = 0· οἱ ἀριθμοὶ μ οἱ ἐλάττονες τοῦ ΠΚ, ὃν δυνάμεθα ὑποθεῖναι = 1 (ἡ γὰρ 1 ἔστι ποσότης λαμβανομένη πρὸς τὸ δοκοῦν) εἰσὶ λειπτικοὶ, ὑπαρκτικὰ μὲν συνημίτονα, λειπτικὰ δὲ ἡμίτονα, ἔχοντες· ἐὰν οὖν γένηται ΠΘ : ΠΚ :: ΠΚ : ΠΡ, ποριωθήσεται $\Pi P = \frac{1}{\Pi\Theta}$ (ὅτι ΠΚ = 1)· ἐκεῖν ὁ λογάριθ-

μος τοῦ ΠΡ ἔσεται = Λ . 1 — μ = 0 — μ = — μ, εἴγε ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος τοῦ 1 ἐστιν = 0, ὥσπερ καὶ ὁ ἐν τοῖς κανονίοις· ἀχθείσης οὖν τῆς ΣΡ, ἐπιζευχθεῖσα ἡ εὐθεῖα ΣΓ κάθετος ἐφεστήξει τῷ ἄξονι· ἐπεὶ γὰρ τὰ τρίγωνα ΙΘΓ, ΙΡΣ ὅμοιά εἰσι διὰ τὰς παραλλήλους ΘΓ, ΡΣ. ἄρα ΙΘ : ΙΡ :: ΘΓ : ΡΣ :: ΡΠ : ΠΘ (διὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ὑπερβολῆς) (*) καὶ διαιρέσει λόγου, ΙΘ : ΡΘ :: ΡΠ : ΡΘ· ἄρα ΙΘ = ΠΡ· ἔστι δὲ καὶ ΠΡ : ΡΚ :: ΤΡ : ΑΚ (διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΠΡΤ, ΠΑΚ) καὶ ἐπείπερ ΠΡ : ΠΚ :: ΠΚ : ΠΘ :: ΘΓ : ΑΚ, ἔσεται ΡΤ : ΑΚ :: ΘΓ : ΑΚ, εἴτ' οὖν ΤΤ : ΘΓ :: ΑΚ : ΑΚ· ἄρα ΘΓ = ΡΤ· ἄρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΠΡΤ, ΙΘΓ ἔχουσι τὰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχούσας πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἄρα εἰσὶν ἴσα ἀλλήλοις· ἡ δὲ γωνία ΘΙΓ = ΤΠΡ· ἀλλὰ ΤΠΡ = 45°· ἄρα καὶ τὸ αὐτῆς παραπλήρωμα ΠΤΡ = 45°· ἄρα τριγώνου τοῦ ΠΒΙ ἔστιν ἥτε Π καὶ Ι γωνία ἑκατέρα = 45°· ἄρα ἡ γωνία Β = 90°· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΣΓΙ κάθετος ἐφέστηκε τῷ ἄξονι.

210. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκταύτης τῆς δείξεως ἕπεται εἶναι συνημ. υ . μ = συνημ. υ . — μ· ἑκάτερον γάρ ἐστιν = ΠΒ, εἴγε συνημίτονον τοῦ μ ἐστι μέρος τοῦ ἄξονος ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τοῦ κέντρου, καὶ τῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα τεταγμένως ἀγομένης ἀπὸ τοῦ σημείου, ἀφ' οὗ ἄγεται κάθετος τῇ ἀσυμπτώτῳ κατὰ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ λήγει ὁ ἀριθμὸς ΠΡ, ἢ ΠΘ· ἀλλὰ ἡμ. υ — μ = — ημ. υ . μ· καὶ

(*) Ἔστι γὰρ υχ = κ² (188). ἐὰν οὖν κληθῇ ΠΡ = χ, καὶ ΡΣ = υ, καὶ ΠΘ = χ', καὶ ΘΓ = υ'· ἔσται χυ = κ², χ'υ' = κ²· ἄρα χυ = χ'υ'· ἄρα υ' : υ :: χ : χ', εἴτ' οὖν ΘΓ : ΡΣ :: ΡΠ : ΠΘ.

γὰρ ἡμ. υ.μ = ΒΓ, ἢ ἡμ. υ.—μ = ΒΣ· ἀλλὰ καίτοι ΒΓ = ΒΣ, τὸ μὲν ἔμπης ὑπαρκτικὸν, θάτερον δὲ ἐκλιφθήσεται λειπτικὸν διὰ τὴν ἐναντίαν αὐτῶν θέσιν.

211. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δοθέντων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων δύω λογαριθμῶν μ, ν, εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον ἢ τὸ συνημίτονον τοῦ αὐτῶν ἀθροίσματος μ+ν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΠΒ = συνημ. υ. μ, ἢ ΒΓ = ἡμ. υ. μ, ἢ ΠΔ = συνημ. υ. ν, καὶ ΔΖ = ἡμ. υ. ν· καὶ ὑποτεθείσθω ΠΜ = συνημ. υ. $\overline{\mu+\nu}$, ἢ ΜΝ = ημ. υ. $\overline{\mu+\nu}$· ἐπεὶ δὲ ἡ γωνία ΑΠΚ = 45° = ΠΙΒ, ἔσαι ΠΒ = ΒΙ, ἢ δὴ ἢ ΠΔ = ΔΛ, ἢ ΠΜ = ΜΞ· ἔσαι ἄρα ΓΙ = ΙΒ — ΒΓ = ΠΒ — ΒΓ = συνημ. υ. μ — ἡμ. υ. μ, ἢ ΖΛ = συνημ. υ. ν — ἡμ. υν, ἢ Νκ = συνημ. υ. $\overline{\mu+\nu}$ — ἡμ. υ. $\overline{\mu+\nu}$· παρὰ ταῦτα, ἐπεὶ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΠΚ ἐστὶν ὀρθογώνιον κατὰ τὸ Κ, ἢ ΠΑ = Ο, ἔσαι $ΠΚ^2 + ΑΚ^2$, ἢ $2ΠΚ^2 = Ο^2$, ἢ $ΠΚ^2 = \frac{Ο^2}{2}$ ἢ ΠΚ $= \frac{Ο}{\sqrt{2}}$· διὰ δὲ τὸ ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΙΘΓ, ἔστι $2ΘΙ^2 = ΓΙ^2$, ἢ $ΘΙ = \frac{ΓΙ}{\sqrt{2}} = \frac{\text{συνημ. υ. μ} - \text{ἡμ. υ. μ.}}{\sqrt{2}}$ ὡσαύτως $ΗΛ = \frac{\text{συνημ. υ. ν} - \text{ἡμ. υ. ν}}{\sqrt{2}}$, καὶ $κΟ = \frac{\text{συνημ. υ} (\mu+\nu) - \text{ἡμ. υ} (\mu+\nu)}{\sqrt{2}}$· τελευταῖον δὲ, ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΠΒΙ ὀρθογώνιόν ἐστι κατὰ τὸ Β, πρόεισι $ΠΙ^2 = ΠΒ^2 + ΒΙ^2 = 2ΠΒ^2$, ἢ ΠΙ = $\sqrt{2}$ × συνημ. υ. μ· κατάδηλον δὲ, ὅτι ἢ ΠΛ = $\sqrt{2}$ × συνημ. υ. ν, ἢ Πκ

$= \sqrt{2} \times$ συνημ. $\upsilon\,\overline{\mu + \nu}$· ἐντεῦθεν ἄρα ΠΘ $= \sqrt{2} \times$ συνημ. $\upsilon\mu - \left(\frac{\text{συνημ. } \upsilon\mu - \text{ημ. } \upsilon . \mu}{\sqrt{2}}\right)$; ἢ ἀναχθέντος τοῦ ὁλοχερῶς εἰς κλάσμα, ΠΘ $= \frac{\text{συνημ. } \upsilon . \mu + \text{ημ. } \upsilon . \mu}{\sqrt{2}}$. ὡσαύτως ΠΗ $= \frac{\text{συνημ. } \upsilon . \nu + \text{ημ. } \upsilon . \nu}{\sqrt{2}}$, καὶ ΠΟ $= \frac{\text{συνημ. } \upsilon\,(\mu+\nu) + \text{ημ. } \upsilon\,(\mu+\nu)}{\sqrt{2}}$· ἀλλὰ ΠΚ : ΠΘ :: ΠΗ : ΠΟ (*)· ἄρα $\frac{O}{\sqrt{2}} : \frac{\text{συνημ. } \upsilon\,\mu + \text{ημ. } \upsilon\,\mu}{\sqrt{2}} :: \frac{\text{συνημ. } \upsilon . \nu + \text{ημ. } \upsilon . \nu}{\sqrt{2}} : \frac{\text{συνημ. } \upsilon\,(\mu+\nu) + \text{ημ. } \upsilon\,(\mu+\nu)}{\sqrt{2}}$, ὅθεν ἀποφέρεται ἡ ἐξίσωσις (A) συνημ. $\upsilon\,(\mu+\nu) +$ ημ. $\upsilon\,(\mu+\nu) = \frac{(\text{συνημ. } \upsilon . \mu + \text{ημ. } \upsilon . \mu) \times (\text{συνημ. } \upsilon . \nu + \text{ημ. } \upsilon . \nu)}{O}$.

ἐπεὶ δὲ ἡ τῆς κυκλικῆς ὑπερβολῆς ἐξίσωσις (164) δίδωσιν $\upsilon^2 = \text{ΒΓ}^2 = \overline{\text{ημ. } \upsilon . \mu}^2 = \chi^2 - \alpha^2 = \text{ΠΒ}^2 - \text{ΠΑ}^2 = \overline{\text{συνημ. } \upsilon . \mu}^2 - O^2$· ἄρα $\overline{\text{συνημ. } \upsilon . \mu}^2 - \overline{\text{ημ. } \upsilon . \mu}^2 = O^2 = (\text{συνημ. } \upsilon . \mu + \text{ημ. } \upsilon . \mu) \times (\text{συνημ. } \upsilon . \mu - \text{ημ. } \upsilon . \nu)$,

---

(*) Ὁ μὲν γὰρ λογάριθμος τοῦ ΠΚ $= 1$ ἔχει $= 0$· τοῦ δὲ κατὰ τὸν ΠΟ ἴσα ὄντος ἐξ ὑποθέσεως τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τοῦ ΠΘ καὶ τοῦ ΠΗ, οἱ λογάριθμοι τοῦ ΠΚ καὶ τοῦ ΠΟ ἔσονται ὅροι ἄκροι ἀναλογίας ἀριθμητικῆς, ἧς μέσοι ἔσονται οἱ λογάριθμοι τοῦ ΠΘ καὶ τοῦ ΠΗ· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ, οἵτινες εἰσὶ λογάριθμοι, συγκροτοῦσιν ἀναλογίαν γεωμετρικήν.

ἡ $\text{συνημ.}\, \upsilon . \mu + \text{ημ.}\, \upsilon . \mu = \dfrac{O^2}{\text{συνημ.}\, \upsilon . \mu - \text{ημ.}\, \upsilon . \mu}$.

διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον, $\text{συνημ.}\, \upsilon . \nu + \text{ημ.}\, \upsilon . \nu = \dfrac{O^2}{\text{συνημ.}\, \upsilon . \nu - \text{ημ.}\, \upsilon . \nu}$, καὶ $\text{συνημ.}\, \upsilon . \overline{\mu + \nu} + \text{ημ.}\, \upsilon . \overline{\mu + \nu} = \dfrac{O^2}{\text{συνημ.}\, \upsilon\, (\mu + \nu) - \text{ημ.}\, \upsilon\, (\mu + \nu)}$. εἰσαχθεισῶν δὲ εἰς τὴν ἐξισώσει Α τῶν εὑρεθεισῶν δυνάμεων τοῦ $\text{συνημ.}\, \upsilon\, \mu + \text{ημ.}\, \upsilon\, \mu$, καὶ τοῦ $\text{συνημ.}\, \upsilon . \nu + \text{ημ.}\, \upsilon . \nu$, καὶ ἀναγωγῆς γενομένης, πορισθήσεται $\dfrac{O^2}{\text{συνημ.}\, \upsilon\, (\mu + \nu) - \text{ημ.}\, \upsilon\, (\mu + \nu)}$

$= \text{συνημ.}\, \upsilon\, (\mu + \nu) + \text{ημ.}\, \upsilon\, (\mu + \nu) = \dfrac{O^2}{(\text{συνημ.}\, \upsilon\, \mu - \text{ημ.}\, \upsilon\, \mu) \times (\text{συνημ.}\, \upsilon . \nu - \text{ημ.}\, \upsilon . \nu)}$. αἱρομένων ἄρα τῶν πλασμάτων, διαιρέσει διὰ Q^2 καὶ μεταθέσει, εὑρεθήσεται ἡ ἐξίσωσις $\text{συνημ.}\, \upsilon\, \overline{\mu + \nu} - \text{ημ.}\, \upsilon\, \overline{\mu + \nu} = \dfrac{(\text{συνημ.}\, \upsilon\, \mu - \text{ημ.}\, \upsilon\, \mu)}{O} \times \dfrac{(\text{συνημ.}\, \upsilon . \nu - \text{ημ.}\, \upsilon . \nu)}{O}$ (Β). συναπτομένης δὲ τῆς ἐξισώσεως Β τῇ ἐξισώσει Α (τὰς δὲ δύω ἐξισώσεις ταύτας ὡς δύω ἐξαίρετα θεωρήματα ἐκλεκτέον)· εἶτα ἀφαιρουμένης Β ἀπὸ τῆς Α εὑρεθήσεται $\text{συνημ.}\, \upsilon\, (\mu + \nu) = \dfrac{(\text{συνημ.}\, \upsilon\, \mu + \text{ημ.}\, \upsilon\, \mu) \times (\text{συνημ.}\, \upsilon . \nu + \text{ημ.}\, \upsilon . \nu)}{2O} + \dfrac{(\text{συνημ.}\, \upsilon\, \mu - \text{ημ.}\, \upsilon\, \mu) \times (\text{συνημ.}\, \upsilon\, \nu - \text{ημ.}\, \upsilon\, \nu)}{2O}$ (Γ)

$$\text{καὶ ἡμ. } \upsilon\,(\mu+\nu) = \frac{(\text{συνημ. } \upsilon\,\mu + \text{ημ. } \upsilon\,\mu) \times (\text{συνημ. } \upsilon\,.\,\nu \times \text{ημ. } \upsilon\,.\,\nu) - (\text{συνημ. } \upsilon\,\mu. - \text{ημ. } \upsilon\,\mu \times \text{συνημ. } \upsilon\,\nu - \text{ημ. } \upsilon\,\nu)}{2O} = \frac{\text{συνημ. } \upsilon\,.\,\mu \times \text{ημ. } \upsilon\,.\,\nu + \text{συνημ. } \upsilon\,.\,\nu \times \text{ημ. } \upsilon\,.\,\mu}{O}$$

(Δ). Ο. Ε. Π.

212. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εὑρεῖν τὸ συνημίτονον καὶ τὸ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς δύω λογαριθμῶν μ καὶ ν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν ὑποτεθῇ $\mu > \nu$, ἀπόχρη θεῖναι ἐν τοῖς δισὶν ἐχάτοις τύποις ἀντὶ συνημ. υ.ν καὶ ἡμ. υ.ν, τὰς ποσότητας συνημ. υ—ν καὶ ἡμ. υ—ν· ἀλλὰ ἡμ. υ—ν = — ημ. υ.ν, καὶ συνημ. υ—ν = συνημ. υ.ν (εἰ γὰρ ΠΡ ὑποτεθείη ἴσος ἀριθμῷ < ι = ΠΚ, τὸ μὲν ἡμίτονον αὐτοῦ ΣΒ ἔξιν ἀριθμὸς λειπτικὸς, τὸ δὲ αὐτοῦ συνημίτονον ΠΒ προδήλως ὑπαρκτικός)· ἀπόχρη ἄρα ἐν τοῖς προεκτεθεῖσι τύποις ἀποθεῖμαι τὸ σύμβολον — τῷ ημ. υ.ν· καὶ δὴ πορισθήσεται

$$\text{συνημ. } \upsilon\,(\mu-\nu) = \frac{\text{συνημ. } \upsilon\,.\,\mu \times \text{συνημ. } \upsilon\,.\,\nu - \text{ημ. } \upsilon\,.\,\mu \times \text{ημ. } \upsilon\,.\,\nu}{O},\quad \text{ἡμιτ. } \upsilon\,(\mu-\nu) = \frac{\text{συνημ. } \upsilon\,.\,\nu \times \text{ημ } \upsilon\,.\,\mu - \text{συνημ. } \upsilon\,.\,\mu \times \text{ημ. } \upsilon\,.\,\nu}{O}$$

Ἐὰν δ ὑποτεθῇ $\mu-\nu$, συνήφθω ἡ ἐξίσωσις Δ τῇ ἐξισώσει Γ, καὶ εἶτα ἀφῃρήσθω ἡ Δ τῆς Γ· καὶ δὴ εὑρε-

θήσονται δύω ἕτεραι ἐξισώσεις

$$\text{συνημ. } \upsilon \cdot 2\mu + \text{ημ. } \upsilon \cdot 2\mu = \frac{(\text{συνημ. } \upsilon \cdot \mu + \text{ημ. } \upsilon \cdot \mu)^2}{O} \quad (Z)$$

$$\text{συνημ. } \upsilon \cdot 2\mu - \text{ημ. } \upsilon \cdot 2\mu = \frac{(\text{συνημ. } \upsilon \cdot \mu - \text{ημ. } \upsilon \cdot \mu)^2}{O} \quad (\Theta).$$

συναπτομένης δὲ τῆς Θ τῇ Z ἢ διὰ 2 διαιρουμένης, εἶτα δὲ τῆς Θ ἀπὸ τῆς Z ἀπαγομένης ἢ διὰ 2 διαιρουμένης, προΐασιν αἱ δύω ἐφεξῆς ἐξισώσεις

$$\text{συνημ. } \upsilon \cdot 2\mu = \frac{(\text{συνημ. } \upsilon \cdot \mu + \text{ημ. } \upsilon \cdot \mu)^2 + (\text{συνημ. } \upsilon \cdot \mu - \text{ημ. } \upsilon \cdot \mu)^2}{2O}, \quad \text{ημ. } \upsilon \cdot 2\mu =$$

$$\frac{(\text{συνημ. } \upsilon \cdot \mu + \text{ημ. } \upsilon \cdot \mu)^2 - (\text{συνημ. } \upsilon \mu - \text{ημ. } \upsilon\mu)^2}{2O}$$

ἐὰν δὲ πρὶν ἢ ἀλλήλαις συναφθῶσιν, ἢ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἐξισώσεις Θ, Z, ἐξαχθῶσιν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι αὐτῶν, ἐν τῇ μετ' ἀλλήλων συνάψει, ἢ ἐν τῇ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαιρέσει, προΐασιν αἱ ἐξισώσεις

$$\text{συνημ. } \upsilon \mu = \frac{(\text{συνημ. } \upsilon\, 2\mu + \text{ημ. } \upsilon\, 2\mu)^{\frac{1}{2}} + (\text{συνημ. } \upsilon\, 2\mu - \text{ημ. } \upsilon\, 2\mu)^{\frac{1}{2}}}{2O^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{ημ. } \upsilon \mu =$$

$$\frac{(\text{συνημ. } \upsilon\, \mu + \text{ημ. } \upsilon\, 2\mu)^{\frac{1}{2}} - (\text{συνημ. } \upsilon\, 2\mu - \text{ημ. } \upsilon\, 2\mu)^{\frac{1}{2}}}{2O^{\frac{1}{2}}}.$$

ἐὰν δὲ τοῖς δυσὶ λογαρίθμοις μ, ν προσεθῇ τρίτος ὁ π, ἐκ τῶν ἐξισώσεων A, B (211) ἕπεται

$$\frac{\text{συνημ. } \upsilon\,(\mu+\nu+\pi) + \text{ημ. } \upsilon\,(\mu+\nu+\pi)}{\text{συνημ. } \upsilon\,(\mu+\nu) + \text{ημ. } \upsilon\,(\mu+\nu)} = \frac{\text{συνημ. } \upsilon\,\pi + \text{ημ. } \upsilon\,\pi}{O},$$

καὶ

$$\frac{\text{συνημ. } \upsilon\,(\mu+\nu+\pi) - \text{ημ. } \upsilon\,(\mu+\nu+\pi)}{\text{συνημ. } \upsilon\,(\mu+\nu) - \text{ημ. } \upsilon\,(\mu+\nu)} = \frac{\text{συνημ. } \upsilon\,\pi - \text{ημ. } \upsilon\,\pi}{O}.$$

εἰσαχθεισῶν δὲ ἐν ταύταις ταῖς ἐξισώσεσι τῶν δυνάμεων τοῦ συνημ. $\upsilon\,(\mu+\nu)$ + ημ. $\upsilon\,(\mu+\nu)$ καὶ τοῦ συνημ. $\upsilon\,(\mu+\nu)$ − ημ. $\upsilon\,(\mu+\nu)$, λαμβανομένων ἐκ τῶν ἐξισώσεων A, B, πορισθήσονται ταῦτα τὰ δύο ἄλλα θεωρήματα·

$$\frac{\text{συνημ. } \upsilon\,(\mu+\nu+\pi) + \text{ημ. } \upsilon\,(\mu+\nu+\pi)}{O^2} = \frac{(\text{συνημ. } \upsilon\,\mu + \text{ημ. } \upsilon\,\mu) \times (\text{συνημ. } \upsilon\,.\,\nu + \text{ημ. } \upsilon\,.\,\nu)}{O^2}$$

$$\times \frac{(\text{συνημ. } \upsilon\,\pi + \text{ημ. } \upsilon\,\pi)}{O^2} \text{ (H)}\cdot$$

$$\frac{\text{συνημ. } \upsilon\,(\mu+\nu+\pi) - \text{ημ. } \upsilon\,(\mu+\nu+\pi)}{O^2} = \frac{(\text{συνημ. } \upsilon\,\mu - \text{ημ. } \upsilon\,\mu)}{O^2}.$$

$$\frac{(\text{συνημ. } \upsilon\,\nu - \text{ημ. } \upsilon\,\nu)\,.\,(\text{συνημ. } \upsilon\,.\,\pi - \text{ημ. } \upsilon\,\pi)}{O^2} \text{ (I)}\cdot$$

ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\mu = \nu = \pi$, καὶ προσεθῇ ἡ I τῇ H, καὶ ἀπ' αὐτῆς εἶτα ἀφαιρεθῇ, προκύψουσι

$$\text{συνημ. } \upsilon\,.\,3\mu = \frac{(\text{συνημ. } \upsilon\,.\,\mu + \text{ημ. } \upsilon\,\mu)^3 + (\text{συνημ. } \upsilon\,.\,\mu + \text{ημ. } \upsilon\,\mu)^3}{2.\,O^2},$$

καὶ

$$\text{ημ. } \upsilon\,.\,3\mu = \frac{(\text{συνημ. } \upsilon\,\mu + \text{ημ. } \upsilon\,\mu)^3 - (\text{συνημ. } \upsilon\,\mu - \text{ημ. } \upsilon\,\mu)^3}{2.\,O^2}.$$

ἐὰν δὲ πρὸ τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ληφθῶσιν αἱ κυβικαὶ ῥίζαι, εὑρεθήσεται

$$\text{συνημ. } \nu . \mu = \frac{(\text{συνημ. } \nu\, 3\mu + \text{ημ. } \nu\, 3\mu)^{\frac{1}{3}} + (\text{συνημ. } \nu\, 3\mu - \text{ημ } \nu\, 3\mu)^{\frac{1}{3}}}{2 . O^{\frac{2}{3}}},$$

καὶ ἡμ. $\nu\mu$ =

$$\frac{(\text{συνημ. } \nu . 3\mu + \text{ημ. } \nu . 3\mu)^{\frac{1}{3}} - (\text{συνημ. } \nu\, 3\mu + \text{ημ } \nu\, 3\mu)^{\frac{1}{3}}}{2 . O^{\frac{2}{3}}}$$

καὶ ἐν γένει:

$$\text{συνημ. } \nu . \nu\mu = \frac{(\text{συνημ. } \nu\, \mu + \text{ημ. } \nu\, \mu)^{\nu} + (\text{συνημ. } \nu\, \mu - \text{ημ. } \nu\, \mu)^{\nu}}{2 . o^{\nu-1}},$$

καὶ ἡμ. $\nu . \nu\mu$ =

$$\frac{(\text{συνημ. } \nu . \mu + \text{ημ. } \nu\, \mu)^{\nu} - (\text{συνημ. } \nu\, \mu - \text{ημ. } \nu\, \mu)}{2 . o^{\nu-1}}$$

τοῦ ν πάντα ἀριθμὸν δυναμένου. Παραβαλλομένων δὲ τῶν δε τῶν τύπων πρὸς τοὺς τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν πολλαπλῶν κυκλικῶν τόξων (Γεωμ. 507, 508), μεγάλη ἀναλογία φανήσεται τῶν κυκλικῶν πρὸς τὰ ὑπερβολικά.