ἴση ἔσεται τῇ τῆς θράυσεως γωνίᾳ ΕΜΖ (139)· ἄρα ἡ φορὰ ΡΜ, ἣν θραυσθεῖσα φέρεται ἡ ΜΟ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖται εὐθείας, ἐφ' ἧς καὶ ἡ ΜΕ· ἄρα ἡ ΜΟ θραυσθεῖσα κινηθήσεται ὡς φερομένη ἀπὸ τοῦ Ε· ἀλλ' ἐξιοῦσα διατηρήσει πρὸς τὸ Ρ τὴν φορὰν ΜΡ, ὡς τοῦ ΙΧ ἀκτὶς ΡΕ, κάθετος τῇ τοῦ ἀέρος ἐπιφανείᾳ ΙΧ· ἔξεισιν ἄρα τῆς ὑέλου, καθάπερ εἰ ἐφέρετο ἐκ τοῦ Ε.

149. Φακὸς ἄρα ὁμοιόχημος τῷ διαληφθέντι ὑέλινος ξυντελεῖ λίαν τοῖς ἀμβλύωψι· καὶ γὰρ αἱ ἀκτῖνες αἱ ἀπὸ σώματος λίαν ἀφεξῶτος ἀποπεμπόμεναι πρὸς αἴσθησιν, ὖσαι παράλληλοι, μετὰ τὸ διελθεῖν τὴν τῆς ὑέλου κοιλότητα εἰσχωρήσουσιν εἰς τὸν κατὰ τὸ Υ κείμενον ὀφθαλμὸν, ὡς εἰ ἐφέροντο πᾶσαι ἀπὸ τῆς ἑσίας Ε· δυνήσεται ἄρα ἰδεῖν τὸ ἀφεξῶς ὁρατὸν, ὡς εἰ ἔκειτο κατὰ τὸ Ε.

150. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Σαφὲς ἄρα ἐκ τῆς προεκτεθείσης δείξεως, ὡς ἐν καμπύλῃ οἱαδήποτε τῇ ΗΟθκ, ἡ γωνία τῆς ἐπιπτώσεως ΟΜΕ = ΠΜΔ ἡ αὐτή ἐστιν ἐπὶ ἀκτῖνος τῆς ΟΜΠ, τῆς εἴτε εἰς τὴν κυρτότητα, εἴτε εἰς τὴν κοιλότητα τῆς καμπύλης εἰσιούσης· καὶ δὴ καὶ ἡ γωνία τῆς θράυσεως ἐν ἑκατέρᾳ τῶν περιπτώσεων ἡ αὐτὴ ἔσεται ΕΜΖ = ΡΜΔ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῆς Υπερβολῆς.

151. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Οἱ ὑπερβολικοὶ κλῶνες ΗΜ, ΗΜ΄ ἐπ' ἄπειρον ἀποχωροῦσι τοῦ ἄξονος ΗΠ (κ. 68).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ ΗΒ > ΑΗ (17), καὶ τὰ ἐφεξῆς κείμενα τρίγωνα ΑΠΔ ὅμοια τῷ τριγώνῳ ΑΗΒ, ἑκάστη

ΠΔ τάχιον αὔξει, ἢ ἡ ΕΠ· ἑκάςη ἄρα ΠΔ ἐκ τοῦ Ε ἐφ' ἑαυτὴν μεταφερομένη ἀποςήσει μᾶλλον ἢ μᾶλλον τὴν καμπύλην ἀπὸ τῆς ΗΠ. Ο.Ε.Δ.

152. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Προήχθω ἡ μὲν ΑΤ πρὸς τὸ ζ, ἡ δ' ΑΠ πρὸς τὸ ε· ὑκεῖν αἱ ὕπερθεν τοῦ Α ἐς τὸ ε, ΠΔ ἔσονται πρῶτον ἐλάττυς, ἢ αἱ αὐτῶν ΕΠ· ἀλλ' ἐπείπερ αἱ ΠΔ διὰ τὸ εἶναι ΗΒ > ΑΗ τάχιον αὔξυσιν, ἢ αἱ ΕΠ, εὑρεθήσεται τέλος μία τις ΠΔ = ΕΠ, εἶτ' ὖν ἡ ηΔ', ἥτις, μετενεχθεῖσα ἐκ τοῦ Ε ἐφ' ἑαυτὴν, πεσεῖται ἐπὶ τοῦ σημείυ η· τοιγαροῦν μετενεχθεισῶν ἀπὸ τοῦ Ε ἐφ' ἑαυτὰς τῶν ἐφεξῆς ΠΔ', εὑρεθήσονται δύω νέοι ὑπερβολικοὶ κλῶνες ηκ, ηΜ'· τοῦθ' ὅπερ ἡμῖν ἢ δὴ δειχθήσεται.

153. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Αἱ δύω κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι καμπύλαι ΗΜΜ, ηκΜ' μιᾷ μόνη ὑπερβολῇ ἐπανήκυσι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΑΗΒ, Αηδ' ἔςιν ηδ' : ΗΒ :: ηΑ : ΗΑ· ἐπεὶ δὲ ηδ' = ηΕ, ἢ ΗΒ = ΗΕ (ἐκ κατασκευῆς) ἀντικατασάσει ἄρα ἔςαι ηΕ : ΗΕ :: ηΑ : ΗΑ (17). Ο.Ε.Δ.

154. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ ὑπερβολὴ ἄρα δύω μὲν κορυφὰς Η, η, ἕνα δὲ ἄξονα Ηη ὡρισμένον ἔχει.

155. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἡ ὑπερβολὴ μόνη δύναται ἔχειν ἀντικειμένας καμπύλας.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν γὰρ τῇ παραβολῇ ἕκαςον σημεῖον ὕπερθεν τοῦ Α κείμενον (κ. 66) αὐτῇ ἐπανήκειν ἀμήχανον (23)· ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει, ὅτι ΗΒ < ΑΗ (κ. 67), πᾶσα ὑπὲρ τὸ Α κειμένη ΠΔ ὐμὴ ἰσωθήσεται τῇ ΠΕ· ἄρα ὐδ' ἐν τῇ ἐλλείψει σημειωθήσονται ὑπὲρ τὸ Α σημεῖα αὐτῇ ἐπανήκοντα. Ο.Ε.Δ.

156. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐφάνη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ

κώνου τομῶν (6)· ὡς καὶ ἐνταῦθα ἐν ταῖς κατὰ τὸ ἐπίπεδον γεγραμμέναις κωνικαῖς τομαῖς.

157. ΑΙΤΗΜΑ. Ἐὰν, ληφθείσης ηΕ = ΗΑ, καὶ ηδ = ΗΒ, καὶ ηε = ΗΕ (κ. 68), ἀχθῇ τέρματος ἄνευ ἡ ΕΔ, καὶ ἡ διευθετοῦσα ΕΒ, εὑρεθήσεται καὶ διὰ ταύτης τῆς ἀπεράντου ἡ καινὴ καμπύλη ηκΜ΄· ἀλλ' ἐπεὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΒ = Εηδ· ἄρα καὶ ἡ καμπύλη ΗΜΜ = ηκΜ΄· ἄρα καὶ διὰ τῆς ἑξίας ε γραφῆναι δύνανται ἀμφότεραι αἱ καμπύλαι ΗΜΜ, ηκΜ΄· ἐκεῖν α΄. ἡ ὑπερβολὴ ἀναγκαίως ἔχει δύω ἑξίας Ε, ε· β΄. αἱ τεταγμέναι ἐν ταῖς καμπύλαις ΗΜΜ, ηκΜ΄, αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τῶν κορυφῶν, εἰσὶν ἴσαι.

158. ΟΡΙΣΜΟΣ. Εὐθεῖα ἡ Ηη καλεῖται πρῶτος ἄξων τῆς ὑπερβολῆς· τὸ δὲ μέσον σημεῖον Κ τῆς Ηη, κέντρον· ἡ δὲ κάθετος ΧΚΧ προσχθεῖσα ὅτως, ὡς τὸ ἀπόσημα ΕΕ τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν ἑξιῶν μετενεχθὲν ἐκ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΧΚΧ πίπτειν ἐπὶ τῶν περάτων Χ, Χ, ὁ δεύτερος ἄξων, ἢ ἄξων συζυγής, ἡ δὲ ὑπερβολὴ καλεῖται μὲν ἰσοσκελής, ἢ κυκλικὴ, ἐὰν ἡ ΧΚΧ = Ηη, σκαληνὴ δὲ, ἢ ἐλλειπτικὴ, ἐὰν ὦσιν ἄνισοι οἱ ΧΚΧ, Ηη ἄξονες.

159. Τηρήσομεν δὲ ἐν ταύτῃ τῇ καμπύλῃ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐν τῇ ἐλλείψει ὀνόματα (88), εἴτ' ἔν $\frac{Ηη}{2} = α$, καὶ $\frac{ΧΚ}{2} = β$, καὶ ΠΜ = υ, καὶ ΠΚ = χ, καὶ ΚΕ = κ· ὅθεν ΗΠ''' = χ — α, καὶ ηΠ''' = χ + α, καὶ δὴ ΗΠ''' × ηΠ''' = $χ^2 - α^2$.

160. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ο' πρῶτος ἄξων Ηη ἴσος ἐστὶ τῇ τῶν ἑνός τινος σημείου τῆς καμπύλης ἀφ' ἑκατέρας

τῶν ἑςιῶν ἀποςημάτων διαφορᾷ· εἶτ' ἦν M'''E — M'''ε = Hη.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςι γὰρ M'''ε = Π''δ, καὶ M'''E = Π''Δ' (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα M'''E — M'''ε = Δ'δ· ἀλλὰ α'. παραλληλόν ἐςιν τῆς Εδ παρὰ τὴν Αε, πᾶσαι αἱ Δδ εἰσὶν ἴσαι (Γεωμ. 127)· β'. Hη = Δ'δ· εἴγε Hη = ηE — HE = ηΔ' — ηδ (ἐκ κατασκευῆς) = Δ'δ· ἄρα M'''E — M'''ε = Hη. Ο. Ε. Δ.

161. Ἐντεῦθεν ἄρα ῥᾷςα ὑπερβολὴν καταγράφειν διδασκόμεθα· ληφθέντος γὰρ ἄξονος τοῦ Hη, καὶ τῶν εὐθειῶν HE, ηε, HA ἴσων, ἐὰν κέντρῳ τῷ ε γραφῶσιν ἑξῆς (κ. 91) τόξα τὰ MδM, καὶ μετενεχθῇ ἐκ τοῦ E ἑκάςη Αδ ἐπὶ τὸ ἑαυτῆς σύςοιχον τόξον, τὰ ὅτως εὑρεθέντα σημεῖα M, M' ἔσονται ἐν ὑπερβολῇ· καὶ γὰρ εM' = εδ', καὶ EM' = Αδ' (ἐκ κατασκευῆς)· ἄρα εM' — EM' = εA· ἀλλὰ εA = Hη (ἐπεὶ εη = AΘ)· ἄρα εM' — EM' = Hη, ἰδιότης τῆς ὑπερβολῆς (160).

162. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Ο' δεύτερος ἡμιάξων ἔςιν εὐθεῖα μέση ἀνάλογος πρὸς τὰ δύω ἀποςήματα τῶν δύω περάτων τοῦ πρώτου ἄξονος ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν ἑςιῶν, εἶτ' ἦν EH = κ — α : KX = β : : KX = β : Eη = κ + α (κ. 68).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ HKX ἔςι $KX^2 = HX^2 - KH^2$· ἀλλὰ $KX^2 = \beta^2$, καὶ $HX^2 = KE^2$ (158) $= \kappa^2$, καὶ $KH^2 = \alpha^2$· ἄρα $\beta^2 = \kappa^2 - \alpha^2$· ἄρα κ — α : β : : β : κ + α (Συμβ. Λογ. 240). Ο. Ε. Δ.

163. ΘΕΩΡΗΜΑ ς'. Ἐν ὑπερβολῇ τὸ ἀπὸ τεταγμένης ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα τετράγωνον πρὸς τὸ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένων γινόμενον ἔςιν, ὡς τὸ ἀπὸ τοῦ

δευτέρᾳ ἡμιάξονος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου εἴτ' ἂν $\Pi'''M''^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστιν $\varepsilon\Pi''' = \chi + \kappa$, καὶ $E\Pi''' = \chi - \kappa$, καὶ $\varepsilon M'' - EM'' = 2\alpha$ (160)· ἔστω δὴ καὶ $\varepsilon M'' + EM'' = 2\nu$· τοιγαροῦν ἔσται $\varepsilon M'' = \nu + \alpha$, καὶ $EM'' = \nu - \alpha$ (Συμβ. Λογ. 442).

Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ $EM''\Pi'''$ ἔστιν EM''^2 $(= \nu^2 - 2\alpha\nu + \alpha^2) = \Pi'''M''^2$ $(= \upsilon^2) + E\Pi^2$ $(= \chi^2 - 2\kappa\chi + \kappa^2)$ A· ἐν δὲ τῷ $\varepsilon\Pi'''M''$ ἔστιν $\varepsilon M''^2$ $(= \upsilon^2 + 2\alpha\nu + \alpha^2) = \Pi''M''$ $(= \upsilon^2) + \varepsilon\Pi'''^2$ $(= \chi^2 + 2\kappa\chi + \kappa^2)$· ἀφαιρέσει δὲ τῆς A ἐξισώσεως ἀπὸ τῆς B, λειφθήσεται $4\alpha\nu = 4\kappa\chi$· ὅθεν $\alpha\nu = \kappa\chi$, καὶ $\nu = \frac{\kappa\chi}{\alpha}$, καὶ $\nu^2 = \frac{\kappa^2\chi^2}{\alpha^2}$

Ἀντικαταστάσει ἀντὶ ν τῆς αὐτοῦ δυνάμεως ἐπὶ τῆς A ἐξισώσεως, γίνεται $\frac{\kappa^2\chi^2}{\alpha^2} - 2\kappa\chi + \alpha^2 = \upsilon^2 + \chi^2 - 2\kappa\chi + \kappa^2$· μεταθέσει δὲ τοῦ $-2\kappa\chi$, $\frac{\kappa^2\chi^2}{\alpha^2} + \alpha^2 = \upsilon^2 + \kappa^2 + \chi^2$· ἄρα $\upsilon^2 = \frac{\kappa^2\chi^2}{\alpha^2} + \alpha^2 - \kappa^2 - \chi^2$· ἀπαλλαγῇ τοῦ κλάσματος, $\alpha^2\upsilon^2 = \kappa^2\chi^2 + \alpha^4 - \alpha^2 \times \overline{\kappa^2 - \chi^2}$ (ἢ $\overline{\kappa^2 - \alpha^2} \times \chi^2 + \overline{\alpha^2 - \kappa^2} \times \alpha^2$) (Δ).

Ἀλλὰ $\kappa^2 - \alpha^2 = \beta^2$ (162)· καὶ δὴ $\alpha^2 - \kappa^2 = -\beta^2$· ἡ Δ ἄρα ἐξίσωσις γενήσεται $\alpha^2\upsilon^2 = \beta^2\chi^2 - \alpha^2\beta^2$· ἐντεῦθεν ἄρα $\upsilon^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (Συμβ. Λογ. 411) (P) Ο. Ε Δ.

164. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ τῆς P ἀναλογίας πρόειστιν $\upsilon^2 = \frac{\chi^2 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2}$ (P), ἢ $\upsilon^2 = \frac{\chi^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^2}$,

ἐξίσωσις γενικὴ τῆς ὑπερβολῆς· ἐὰν μέντοι ὑποτεθῇ $\beta^2 = \alpha^2$, ἔσται $\upsilon^2 = \chi^2 - \alpha^2$, ἐξίσωσις ἐπανήκουσα τῇ κυκλικῇ ὑπερβολῇ.

165. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ ἄρτι εὑρεθεῖσα τῆς ὑπερβολῆς ἐξίσωσις ἐκτεθῆναι δύναται ὅτως· $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\chi^2 - \alpha^2)}$· ἐὰν δὲ ἡ ἀποτετμημένη τῷ ἄξονι ἰσωθῇ, εἴτ' ὖν γένηται $\chi = \alpha$, ἔσται $\upsilon = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - \alpha^2)} = \frac{\beta}{\alpha} \times \sqrt{0} = \frac{\beta}{\alpha} \times 0 = 0$, τοῦτ' ἔστιν, οὐδεμία αὐτῇ ἀντιστοιχήσει τεταγμένη· ἡ ὑπερβολὴ ἄρα διὰ τῶν τοῦ ἄξονος διήκει περάτων.

166. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐὰν δὲ ἀποτμηθῶσι πρὸς τῇ κορυφῇ Η αἱ εὐθεῖαι, ἔσεται ΗΠ''' $= \chi$· ὅθεν ηΠ''' $= 2\alpha + \chi$, καὶ ΗΠ''' × Π'''η $= 2\alpha\chi + \chi^2$· ἡ δὲ Ρ ἀναλογία τρέψεται εἰς $\upsilon^2 : 2\alpha\chi + \chi^2 :: \beta^2 : \alpha^2$, ἡ δὲ ρ ἐξίσωσις ἔσται $\upsilon^2 = \frac{2\alpha\chi\beta^2 + \beta^2\chi^2}{\alpha^2}$, ἢ $\upsilon^2 = \frac{2\beta^2\chi}{\alpha} + \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$.

167. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐπεὶ καθερός ἐστιν ὁ λόγος $\beta^2 : \alpha^2$, ἡ ῥηθεῖσα ἀναλογία Ρ ἐν διαφόροις ἀποτετμημέναις προβαλεῖ $\upsilon^2 : \Upsilon^2 :: \chi^2 - \alpha^2 : X^2 - \alpha^2$, τουτέστιν ἐν ταύτῃ τῇ καμπύλῃ „τὰ ἀπὸ τῶν τεταγμένων „τετράγωνα πρὸς ἄλληλα εἰσὶν, ὡς τὰ ἐκ τῶν ὑπ' αὐ„τῶν ἀποτετμημένων καὶ συναποτετμημένων γινόμενα“. ἄρα ἡ καμπύλη αὕτη ἡ αὐτή ἐστι τῇ εὑρεθείσῃ ἐκ τῆς τοῦ κώνου τομῆς (16).

168. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἡ παράμετρος ΜΕΜ΄ τοῦ κατὰ τὴν ἄξονος τῆς ὑπερβολῆς ἐστιν εὐθεῖα τρίτη ἀνάλογος;

τῦ δευτέρυ ἄξονος καὶ τῦ πρώτυ· καὶ γὰρ ἐν τῇ παραμέτρῳ ἔστι $\chi = KE = x$ (159)· ἄρα ἀντικαταστάσει γενήσεται ἡ P ἀναλογία $v^2 : x^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$· ἄρα, ἐπεὶ $x^2 - \alpha^2 = \beta^2$ (162)· $v^2 : \beta^2 :: \beta^2 : \alpha^2$, ἢ $v : \beta :: \beta : \alpha$· ἄρα $2v : 2\beta :: 2\beta : 2\alpha$ (Συμβ. Λογ. 246).

169. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Ἔστι δὲ καὶ ἐν τῇ ἐλλείψει $\pi : 2\beta :: 2\beta : 2\alpha$ (97)· ἀλλ' ἡ παραβολὴ ἔστι καὶ αὐτὴ ἔλλειψις (5)· ἄρα καὶ ἐν αὐτῇ $\pi : 2\beta :: 2\beta : 2\alpha$, τυτέστιν ἐν ἁπάσῃ κωνικῇ τομῇ α΄. ἡ παράμετρος π ἔστι τρίτη ἀνάλογος τῦ δευτέρυ καὶ τῦ πρώτυ τῶν ἀξόνων· β΄. $\pi = \frac{4\beta^2}{2\alpha} = \frac{2\beta^2}{\alpha}$.

170. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ΄. Τύπος τῆς μὲν μείζονος ὀρθίας πλευρᾶς ἔστιν $\varepsilon M'' = \frac{x\chi + \alpha^2}{\alpha}$· τῆς δὲ ἐλάττονος $EM'' = \frac{x\chi - \alpha^2}{\alpha}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Καὶ γὰρ $\varepsilon M'' = \nu + \alpha$, καὶ $EM'' = \nu - \alpha$ (163. ἐν τῇ δείξει) καὶ $\nu = \frac{x\chi}{\alpha}$ (ἀντ.)· ἄρα $\varepsilon M'' = \frac{x\chi}{\alpha} + \alpha = \frac{x\chi + \alpha^2}{\alpha}$· ὡσαύτως εὑρεθήσεται $EM'' = \frac{x\chi}{\alpha} - \alpha = \frac{x\chi - \alpha^2}{\alpha}$. Ο. Ε. Δ.

171. ΘΕΩΡΗΜΑ Η΄. Τύπος τῦ ἀπὸ ἐπὶ τὸν ἐλάσσω ἄξονα ἡμιοσῦν τεταγμένης τετραγώνυ ἔστι $\frac{\alpha^2 v^2 + \alpha^2 \beta^2}{\beta^2}$, εἴτ' ἴσον $\frac{\alpha^2}{\beta^2} \times (v^2 + \beta^2)$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ γὰρ $v^2 : \chi^2 - \alpha^2 :: \beta^2 : \alpha^2$ (163)·

$$\ddot{\alpha}\rho\alpha\ \chi^2 - \alpha^2 = \frac{\alpha^2\ \upsilon^2}{\beta^2} \cdot\ \ddot{\alpha}\rho\alpha\ \chi^2 = \frac{\alpha^2\ \upsilon^2}{\beta^2} + \alpha^2 =$$

$$\frac{\alpha^2\ \upsilon^2 + \alpha^2\ \beta^2}{\beta^2} \cdot\ \dot{\alpha}\lambda\lambda\grave{\alpha}\ \mathrm{M'I}^2 = \mathrm{K\Pi'}^2 = \chi^2 \cdot\ \ddot{\alpha}\rho\alpha\ \mathrm{MI}^2$$

$$= \frac{\alpha^2\ \upsilon^2 + \alpha^2\ \beta^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \times (\upsilon^2 + \beta^2).\ \text{O. E. Δ.}$$

172. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** Ἐκ τῆς διαληφθείσης ἐξισώσεως προέρχεται $\mathrm{M'I}^2 : \upsilon^2 + \beta^2 :: \alpha^2 : \beta^2$ (Η)· ἀλλ' ἡ ἀποτετμημένη KI, ἣ ἀντιστοιχεῖ τῇ $\mathrm{M'I} = \mathrm{\Pi M'} = \upsilon$, ἄρα $\upsilon^2 = \mathrm{KI}^2$· τουτέστι „τὸ ἀπὸ τῆς τεταγμένης ἐπὶ „τὸν δεύτερον ἄξονα τετράγωνον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν „τετραγώνων τοῦ τε ἀπὸ τῆς συζυγούσης ἀποτετμημένης, „καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἡμιάξονος, ὡς τὸ τετράγωνον τὸ „ἀπὸ τοῦ πρώτου ἡμιάξονος πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου". δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν, ὡς αἱ ἰδιότητες τῶν τῆς ὑπερβολῆς ἀξόνων ἥκιστα ταυτίζονται, καθὰ ξυμβαίνει τῇ ἐλλείψει (124)· καὶ οὕτως ἄρα οἱ δύω ὑπερβολικοὶ ἄξονες οὐκ ἂν κληθείησαν συζυγεῖς.

173. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς σημείου M ἀπτομένην ἀγαγεῖν (χ. 92).

ΛΥΣΙΣ. Πεπράχθω τὰ πάντα, ὡς ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως (103)· εἰλήφθω ἀμέλει ἐπὶ τῆς εM, MP = ME, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EP· φημὶ δὴ ὡς εὐθεῖα ἡ TMX, δίχα τέμνουσα τὴν EP, ἔστιν, ἣν ζητοῦμεν, ἡ ἁπτομένη· ἐπεὶ γὰρ EM = MP, ἡ TX δίχα τέμνουσα τὴν EP, αὐτῇ ἐπιστήσεται κάθετος (Γεωμ. 164, 217)· ἄρα OE = OP· ἅπαν οὖν σημεῖον τῆς TX παρὰ τὸ M, τὸ O φέρ' εἰπεῖν, οὐ δύναται εἶναι ἐν τῇ καμπύλῃ· καὶ γὰρ εP = εM — EM (ἐκ κατασκευῆς) = Hη· ἀλλ' εO — OP < εP· εἰ-

εγ εΡ + ΟΡ γωνιώδη γραμμὴν συνίσησι, τῆς εΟ εὐθείας ὔσης· ἄρα εΟ — ΟΡ < Ηη. ἐπεὶ ἄρα ΟΡ = ΟΕ, ἔσαι εΟ — ΕΟ < Ηη· ἄρα τὸ Ο σημεῖον ὐκ ἔστιν ἐν τῇ καμπύλῃ (156)· Ο. Ε. Π.

174. ΠΟΡΙΣΜΑ. Καθάπερ καὶ ἐν τῇ ἐλλείψει (104), ἡ γωνία ΕΜΤ = εΜΤ, διὰ τὸ τὴν ΤΜ δίχα τέμνειν τὴν ΕΡ (Γεωμ. 217).

157. ΘΕΩΡΗΜΑ Θ'. Τύπος τῆς ὑποκαθέτου ΠΤ ἔστι $\frac{\beta^2 \chi}{\alpha^2}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ παράλληλός ἐστι τῇ ΤΜ ἡ ΕΡ (Γεωμ. 138), ἔστιν εΡ : εΕ :: ΜΡ : ΕΤ (Γεωμ. 318)· ἀλλ' εΡ = εΜ — ΕΜ = 2α, διὰ τὴν ΕΡ = ΕΜ (ἐκ κατασκευῆς,), ἡ εΕ = 2κ, ἡ ΜΡ = ΜΕ = $\frac{\kappa\chi - \alpha^2}{\alpha}$ (170)· ἄρα ἀντικαταστάσει, 2α : 2κ :: $\frac{\kappa\alpha - \alpha^2}{\alpha}$: ΕΤ, ἢ α : κ :: $\frac{\kappa\chi - \alpha^2}{\alpha}$: ΕΤ = $\frac{\kappa^2\chi - \alpha^2\kappa}{\alpha^2}$, ἢ ἀφαιρεθέντος ΠΕ = ΠΚ — ΚΕ = χ — κ, ἔσαι ΠΤ = $\frac{\kappa^2\chi - \alpha^2\kappa}{\alpha^2}$ — χ + κ = $\frac{\kappa^2\chi - \alpha^2\kappa - \alpha^2\chi + \alpha^2\kappa}{\alpha^2}$ = $\frac{\kappa^2\chi - \alpha^2\chi}{\alpha^2}$ = $\frac{(\kappa^2 - \alpha^2)\chi\chi}{\alpha^2}$· ἀλλὰ κ² — α² = β² (162) ἄρα ΠΤ = $\frac{\beta^2\chi}{\alpha^2}$· Ο. Ε. Δ.

176. ΠΟΡΙΣΜΑ. Η' κανονική ΤΜ $= \sqrt{\overline{\Pi M}^2 + \overline{\Pi T}^2}$

$= \sqrt{\frac{\beta^2 \chi^2 - \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2} + \frac{\beta^4 \chi^2}{\alpha^4}}$ (164, 175).

177. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι'. Τύπος τῆς ὑφαπτομένης ΤΠ ἔστι $\frac{\chi^2 - \alpha^2}{\chi}$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΤΤΜ (19) ἔστι ∺ ΠΤ $= \frac{\beta^2 \chi}{\alpha^2}$ (175) : ΠΜ $= \upsilon$: ΤΠ (Γεωμ. 341). ἄρα ΤΠ $= \upsilon^2 : \frac{\beta^2 \chi}{\alpha^2}$. ἔστι δὲ $\upsilon^2 = \frac{\beta^2 \chi^2 - \alpha^2 \beta^2}{\alpha^2}$ (164). ἄρα ΤΠ $= \frac{\beta^2 \chi^2 - \alpha^2 \beta^2}{\beta^2} \times \frac{\alpha^2}{\beta^2 \chi} =$

$\frac{\beta^2 \chi^2 - \alpha^2 \beta^2}{\beta^2 \chi} = \frac{\chi^2 - \alpha^2}{\chi}$. Ο. Ε. Δ.

178. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δ' ἐν τύπῳ ΠΤ $= \frac{\chi^2 - \alpha^2}{\chi}$ αἱ εὐθεῖαι ἀποτετμημέναι ὦσι πρὸς τῇ κορυφῇ, εἴτ' ὖν τῇ ἀρχῇ τοῦ ἄξονος, τηνικαῦτα χ τρέψεται εἰς $\alpha + \chi$, ὅτινος ἀντὶ χ ἀντικατασταθέντος γενήσεται ὁ τύπος ΠΤ $= \frac{2\alpha\chi + \chi^2}{\alpha + \chi}$. ἐὰν δὲ ἀπὸ ΠΤ ἀφαιρεθῇ ΗΠ $= \chi$, γενήσεται ΠΤ — ΗΠ $=$ ΗΤ $= \frac{2\alpha\chi + \chi^2}{\alpha + \chi} - \chi = \frac{\alpha\chi}{\alpha + \chi}$. ἐν τούτῳ ὖν τῷ τύπῳ ὑποτεθέντος $\chi = \infty$, εὑρεθήσεται ΗΤ $= \frac{\alpha \cdot \infty}{\infty} = \alpha$· ἡ ἄρα ΗΤ μείζων τῆς

ΗΚ ὐδέποτε γίνεται· ἢ πᾶσαι αἱ τῆς ὑπερβολῆς ἀπτόμεναι μεταξύ τῶν Η, Κ πίπτουσιν· ἀλλ' ἐν τῇ παραβολῇ ΗΤ = χ (46), ὑποτεθέντος χ ∞, ΗΤ καθίσταται ἄπειρος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ὑπερβολῆς.

179. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐὰν ἐπιζεύξῃ κάθετος (κ. 93) τῷ πρώτῳ ἄξονι κατὰ τὴν κορυφὴν Σ ἡ Ση = ΚΝ, εἶτ' ἐν τῷ δευτέρῳ ἡμιάξονι, ἢ ΣΞ = Ση, ἢ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι αἱ Κητ, ΚΞΒ· αὗται Ἀσύμπτωτοι ἀκούουσι τῆς ὑπερβολῆς· αἱ δ' εὐθεῖαι Με, ΕΜ, ΡΜ αἱ παράλληλαι, εἴτε τῷ πρώτῳ, εἴτε τῷ δευτέρῳ ἄξονι, εἴτε καὶ τῇ ἀντιθέτῳ ἀσυμπτώτῳ, τεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον ὀνομάζονται.

180. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον τεταγμένης παραλλήλου τῷ δευτέρῳ ἄξονι, ἢ τῆς αὐτῆς προσαγωγῆς ΜΑ προεκβαλλομένης εἰς τὴν ἑτέραν ἀσύμπτωτον, ἀεὶ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ἡμιάξονος τετραγώνῳ· εἴτ' ἐν Με × ΜΑ = ΚΝ² = β^2.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΚΣη, ΚΠε ἔστι ΚΣ = α : Ση = β :: ΚΠ = χ : Πε· ἄρα Πε = $\frac{\beta\chi}{\alpha}$. ἀλλὰ Με = Πε — ΠΜ = $\frac{\beta\chi}{\alpha}$ — υ, ἢ ΜΑ = Πε (= $\frac{\beta\chi}{\alpha}$) + ΠΜ (= υ)· ἄρα Με × ΜΑ =

$\frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \upsilon^2 = \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2}$ (164) $= \beta^2$ · ἄρα Με × ΜΑ $= \beta^2$ · Ο. Ε. Δ.

181. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ ἑκάτερον τῶν γινομένων ΜΕ × ΜΑ, ΙΓ × ΙΒ ἔστιν $= \beta^2$, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα· καὶ ὅσα δήποτε δὲ ἄλλα τοιάδε γινόμενα ἴσα ἔσονται.

182. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐπεὶ δὲ Με × ΜΑ $=$ ΚΝ^2, ἄρα Με : ΚΝ :: ΚΝ : ΜΑ, τουτέστιν „ὁ δεύ„τερος ἡμιάξων ἐστὶ μέση ἀνάλογος τῆς τεταγμένης ἐπὶ „τὴν ἀσύμπτωτον, καὶ τῆς προσαγωγῆς αὐτῆς προεκβληθεί„σης εἰς τὴν ἑτέραν ἀσύμπτωτον.“

183. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἡ ὑπερβολὴ προσεγγίζει μᾶλλον καὶ μᾶλλον τῇ ἀσυμπτώτῳ· καὶ γὰρ Με × ΜΑ $=$ ΚΝ^2 $= \beta^2$ · ἄρα Με $= \frac{\beta^2}{\text{ΜΑ}}$ (Συμβ. Λογ. 258)· ἀλλ' ὅσον ἐπεκτείνεται ἡ ὑπερβολή, ἀεὶ αὔξεται ἡ ΜΑ, ἄρα ἡ Με ἐλαττοῦται (Συμβ. Λογ. 259)

184. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἡ ὑπερβολή, καίτοι ἐπ' ἄπειρον τῆς ἀσυμπτώτου ἐγγὺς γίνεται, οὐδέποτε μέντοι αὐτῇ συμπίπτει· ἔστι γὰρ Πε^2 $= \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2}$ (180), καὶ ΠΜ^2 $= \upsilon^2 = \frac{\beta^2\chi^2}{\alpha^2} - \beta^2$ · ἄρα Πε^2 $<$ ΠΜ^2, καὶ Πε $<$ ΠΜ ἀείποτε δείκνυται (Συμβ. Λογ. 291).

185. Διὰ ταῦτ' ἄρα καμπύλης ἀσύμπτωτος ἐν γένει καλεῖται εὐθεῖα, ἡ ἐπ' ἄπειρον αὐτῆς ἐγγὺς γινομένη, μηδέποτε δὲ αὐτῇ συμπεσεῖν ἔχουσα.

186. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Τὸ γινόμενον ἐκ τεταγμένης ἐπὶ τὴν ἀσύμπτωτον παραλλήλου τῇ ἑτέρᾳ, καὶ τῆς

ὑπ' αὐτῆς ἀποτετμημένης ΡΚ, ἔστιν ἀεὶ εὐσαθὲς ἰσούμενον τῷ ΣΔ².

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω Μο παράλληλος τῇ ΡΚ· ὅθεν Μο = ΡΚ· ἀ. ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΣΔη, ΜΡε (Γεωμ. 220) ἔστι ΜΡ : ΣΔ :: Με : Ση (β)· ἀλλὰ Με : β :: β : ΜΑ (182)· ἄρα ΜΡ : ΣΔ :: β : ΜΑ.

β'. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΣΔη, ΜΑο ἔστι Ση = β : ΜΑ :: ηΔ = ΣΔ (*) : Μο = ΡΚ· ἄρα ΜΡ : ΣΔ :: ΣΔ : ΡΚ· ἄρα ΜΡ × ΡΚ = ΣΔ². Ο.Ε.Δ.

157. ΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ ἀπὸ τῆς ἡμιδιαγωνίου ΣΔ τετράγωνον ΣΔ², ἢ ΣΔ × ΔΚ (σημ. τοῦ β'.) δύναμις ὑπερβολικὴ ὀνομάζεται.

188. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἔστω ΜΡ = υ καὶ ΡΚ = χ· ἔσται δὴ χυ = ΣΔ² (186 β'.)· ἐὰν οὖν κληθῇ ΣΔ = κ, κ² = χυ ἔσται ἐξίσωσις τῶν τῆς ὑπερβολῆς ἀσυμπτώτων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἡ ὑπερβολικὴ δύναμις ἰσοῦται τῷ τεταρτημορίῳ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τοῦτε ἀπὸ τοῦ πρώτου ἡμιάξονος καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ γὰρ ΣΔ = $\frac{ΣΝ}{2}$ (Γεωμ. 244) ἄρα ΣΔ² = $\frac{ΣΝ^2}{4}$· ἀλλὰ ΣΝ² = ΚΣ² + ΚΝ² (Γεωμ. 349)· ἄρα ΣΔ² = $\frac{ΚΣ^2 + ΚΝ^2}{4}$.

189. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ Νε ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἀσύμπτωτον ἀχθῇ, διαπερῶσα τὴν ὑπερβολήν, ἔσται Νκ = Με (κ. 94).

(*) Ἐπείπερ αἱ διαγώνιοι Κη, ΝΣ τοῦ ὀρθογωνίου ΚΝηΣ εἰσὶν ἴσαι, καὶ τὰ ἡμίση ηΔ, ΣΔ εἰσὶν ἴσα (Γεωμ. 244)·

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἔςωσαν ΜΓ, ΜΡ, καὶ κΘ, κτ παράλληλοι ταῖς ἀσυμπτώτοις· ἔςαι ὧν ΜΡ × ΜΓ (= ΚΡ) = ΣΔ² (χ. 93) ὡ κτ × κΘ = ΣΔ² (185)· ἄρα (χ. 94) ΜΡ × ΜΓ = κτ × κΘ ἄρα ΜΡ : κΘ :: κτ : ΜΓ (Συμβ. Λογ. 241).

β΄. Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΜΡε, εκΘ ἔςι ΜΡ : κΘ :: Με : εκ· ἄρα Με : εκ :: κτ : ΜΓ.

γ΄. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις Νκτ, ΝΜΓ, ἔςι κτ : ΜΓ :: Νκ : ΝΜ· ἄρα Με : εκ :: Νκ : ΝΜ: ἄρα (Συμβ. Λογ. 244) εκ — Με : Με :: ΝΜ — Νκ : Νκ· τυτέςι Μκ : Με :: Μκ : Νκ, ἢ Μκ : Μκ :: Με : Νκ· ἄρα Με = Νκ· Ο. Ε. Δ.

190. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Πᾶσα ἀπτομένη αβη περατυμένη πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις δίχα τέμνεται κατὰ τὸ τῆς ἁφῆς συμεῖον β·, ἅπτεται γὰρ καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ β τῆς καμπύλης (19)· τὰ δὲ αὐτῆς μέρη τὰ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων ὡ τῆς καμπύλης ἀπολαμβανόμενα εἰσὶν ἴσα (189)· ἄρα αβ = βη.

191. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δοθεισῶν τῶν ἀσυμπτώτων (χ. 96) ΚΤ, ΚΖ, ὡ σημείυ τυχόντος τῦ ν ὑπὸ τὴν γωνίαν ΤΚΖ κειμένυ, καταγραφήσεται ὑπερβολή, διιῦσα διὰ τῦ δοθέντος σημείυ ν· ἀγομένων γὰρ τῶν εὐθειῶν ρνΡ, ΖνΖ΄ κτ, ὡ λαμβανομένων οΡ = ρν, ὡ ΔΖ΄ = νΖ κτ, τὰ σημεῖα Δ, ο κτ ἔσονται ἐν ὑπερβολῇ (189)· δυνάμεθα δὲ χρήσαωθαι ὡ τοῖς σημείοις, Δ, Ο, καθάπερ τῷ ν εἰς εὕρεσιν ὡ ἄλλων τῆς ὑπερβολῆς σημείων, κἀκείνοις εἰς εὕρεσιν ἄλλων, ὡ ὕτως ἐφεξῆς, μέχρις ἂν πυκνότατα εὑρεθέντα σημεῖα συγκροτήσωσι τὴν ὑπερβολήν.

192. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Τὰ γινόμενα ΜΤ × Η Μ, ΒΔ × ΑΒ (χ. 95) ἐκ δύω ὠντινωνῦν εὐθειῶν, ἀγομένων

ἀπὸ τῆς ἑτέρας ἀσυμπτώτου ἐπὶ τὴν ἑτέραν παραλλήλως μιᾷ τινι ἀπτομένῃ τῇ ΠΕν, εἰσὶν ἴσα.

ΔΕΙΞΙΣ. Διὰ τῶν σημείων Β, Μ, ἀχθεισῶν παραλλήλως τῷ δευτέρῳ ἄξονι τῶν ΤΒχ, καὶ ΘΜΣ, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΔΤ, ΜΘΤ ἔσται (Γεωμ. 220) ΒΤ : ΜΘ :: ΒΔ : ΜΤ (Ρ), ἐκ δὲ τῶν ΑΒχ, ΣΜΗ καὶ αὐτῶν ὁμοίων, Βχ : ΣΜ :: ΑΒ : ΗΜ (η)· πολλαπλασιασμῷ δὲ τῆς Ρ ἐπὶ η, ἔσται ΒΤ × Βχ : ΜΘ × ΣΜ :: ΒΔ × ΑΒ : ΜΤ × ΗΜ· ἀλλὰ ΒΤ × Βχ = ΜΘ × ΣΜ (181)· ἄρα ΒΔ × ΑΒ = ΜΤ × ΗΜ. Ο. Ε. Δ.

193. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπὶ δὲ τῆς ἀπτομένης Πν, τὰ μέρη ΑΒ, ΒΔ καθίστανται ΠΕ, Εν, $= \frac{\Pi\nu}{2}$ (199)· ἄρα ΒΔ × ΑΒ = ΠΕ × Εν = Εν², τουτέστι τὰ γινόμενα ΒΔ × ΕΒ, κτλ. εἰσὶν ἴσα ἕκαστον τῷ τετραγώνῳ „Εν² τῷ ἀπὸ τῆς ἡμιαπτομένης".

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ὑπερβολικῶν Λογαρίθμων.

194. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἐὰν αἱ ἀπὸ τῆς ἀσυμπτώτου πρὸς τῷ Κ (χ. 97) ἀποτετμημέναι Κμ, Κν, Κξ κτλ. ἐν προόδῳ ὦσι γεωμετρικῇ αὐξούσῃ, αἱ θατέρᾳ ἀσυμπτώτῳ παραλλήλως τεταγμέναι ἔσονται ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ φθινούσῃ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ γὰρ χυ = κ² (188)· ἐν ἄλλῃ τινὶ χ΄, καὶ τῇ αὐτῆς ἀντιστοίχῳ Υ, ἔξομεν χ΄Υ = κ², κτ· ἡγίκα ἄρα