ΣΕΙΡΑΣ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ

ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΣΥΛΛΕΧΘΕΙΖΩΝ

ΥΠΟ Κ. Μ. ΚΟΥΜΑ

ΛΑΡΙΣΣΑΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

Περιέχων, τὴν Ἐπίπεδον Τριγωνομετρίαν, τὴν τοῦ Συμβολικοῦ Λογισμοῦ τῇ στοιχειώδει Γεωμετρίᾳ προσεφαρμογὴν, Ἐπιτομὴν τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας, τὴν Ὑψηλοτέραν Γεωμετρίαν, εἴτ' ἂν τὰς τοῦ Κώνου τομὰς, καὶ τὰ περὶ τῶν ἄλλων καμπύλων, καὶ μέρος τοῦ Λογισμοῦ τῶν Ἀπειροστῶν.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗ ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΟΥΣΗ.

Α Ω Ζ.

ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΗΣ.

Τῶν ἐν τῷ Γ'. Τόμῳ περιεχομένων.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Ε'.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ ς'.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Ζ'.

ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Α'.

Σελ.

ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Β΄.

ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜ. ΤΗΣ ΩΣ ΑΠΕΙΡΟΥ ΘΕΩΡΟΥΜ. ΠΟΣΟΥ. ΤΜΗΜΑ Α΄.

Σελ.

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΤΩΝ ΗΜΑΡΤΗΜΕΝΩΝ.

ΣΕΛΙΔΙ 5, στίχῳ 7. Τῆς ὑπὸ ΖΚ, Γρ. Τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. — Σελ. 6, στίχ. 8, Τῷ συνημιτόνῳ, Γρ. Τοῦ συνημιτόνου. — Σελ. 9, στίχ. 8. κ. 12. Γρ. κ. 2. — Σελ. 15. στίχ. 10, Γρ. κ. 2. — στίχ. 19 Γρ. κ. 5 — στίχ. 22. Τῷ ΚΝ. Γρ. Τῆς ΚΝ. — Σελ. 50, στίχ. 6 (452), Γρ. (552). — Σελ. 60, στίχ. 2 Ἐπειπῶς, Γρ. Ἐπειπῶς. — Σελ. 62, στίχ. 6. (454), Γρ. (453). — Σελ. 104. στίχ. 15. (κ 16) Γρ. (κ 61) — Σελ. 108. στίχ. 2 Γρ. (κ. 65). — Σελ. 114. στίχ. 29 (348), Γρ. (Γεωμ. 348). — Σελ. 129, στίχ. 7. Κατὰ, Γρ. Μετά. — Σελ. 145. στίχ. 2. (299) Γρ. (248). — Σελ. 153. στιχ. 21. (452) Γρ. (456.) — Σελ. 157, στίχ. 21. (131) Γρ. (Γεωμ. 131). — Σελ. 166. στίχ. 1, ογ. Γρ. γε — στίχ. 4 (156). Γρ. (160). — Σελ. 177. στίχ. 18. (330). Γρ. (332). — Σελ. 195. στίχ. 13. Γρ. κ. 101. — Σελ. 201. στίχ. 21. (180). Γρ. (160). — Σελ. 212. στίχ. 3 (243) Γρ. (253). — Σελ. 236. στίχ. 28 (191) Γρ. (192). Σελ. 267. στίχ. 18. ἐνάριθμοι, Γρ. ἐνάριθμοι. — Σελ. 273. στίχ. 23 Ἀποτετμημένη ΑΗ, Γρ. Τεταγμένη ΑΗ — στίχ. 24 Αἱ ἀποτετμημέναι = 2, = 4 κτ. Γρ. Αἱ ἀποτετμημέναι = 1, = 2, κτ, ἢ ἠγέρθωσαν αἱ τεταγμέναι = 2, = 4, κτ. — Σελ. 293. στίχ. 17, $\pi\chi^{\pi+1}$, Γρ. $\pi\chi^{\pi-1}$. — Σελ. 295. στίχ. 7. Τῆς ἐν π. Γρ. Τῆς ἐν Π. — Σελ. 302. στίχ. 11, Μεινεμένη, Γρ. Μεινεμένη. — Σελ. 314, στίχ. 16, Τοῦ § 20, Γρ. Τοῦ § 273.

ΣΕΙΡΑ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΕΜΠΤΟΝ
Τριγωνομετρία ἐπίπεδος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.
Ἔκθεσις τῶν ἐν αὐτῇ ἐξετάζεσθαι εἰωθότων.

480 ΟΡΙΣΜΟΣ. Τριγωνομετρία καλεῖται ἡ τὸ πρόβλημα τόδε ἐπιλύουσα ἐπιστήμη „παντὸς τριγώνου, „τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας ἀναγκαίως περιέχοντος, „ἐὰν τρία τούτων τῶν ἐξ δοθῶσιν, ἐν οἷς ὑπάρχει καὶ μία τῶν πλευρῶν, εὑρεῖν τὰ ἄλλα τρία.“

481. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀναγκαίως δὲ τῶν γνωστῶν ὑπ-

ἄρχειν καὶ μίαν τῶν πλευρῶν ὁ ὁρισμὸς ἀπαιτεῖ, ὅτι ἀπειράριθμα τρίγωνα ὅμοια ὑπάρχειν δύνανται, ὧν αἱ γωνίαι ἴσαι ἑκάστη ἑκάστῃ· ἐὰν ἓν μὴ ᾖ ἐν τοῖς δεδομένοις καὶ μία τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ἄδηλον ἔσται, τίνος τῶν ἀπείρων ὁμοίων τριγώνων τὴν λύσιν ζητοῦμεθα.

482. ΟΡΙΣΜΟΣ. Γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΚΔ, καὶ τοῦ τόξου ὡσαύτως ΖΔ (κ. 1), τοῦ τὴν γωνίαν ταύτην καταμετροῦντος, ἡμίτονον κοινῇ ἀκούει κάθετος, ἀγομένη ἀπὸ τοῦ Ζ πέρατος τῆς τε ἑτέρας πλευρᾶς ΖΚ καὶ τοῦ τόξου ΔΖ ἐπὶ τὴν ἑτέραν ΔΚ.

483. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΚΔ ἡμίτονον ΖΠ τὸ ἥμισύ ἐστι τῆς ΖΠκ χορδῆς, ἥτις ὑποτείνει τὸ ΖΔκ τόξον, ὅ ἐστι διπλοῦν τοῦ τὴν γωνίαν ταύτην μετροῦντος ΔΖ τόξου· ἡ γὰρ ΚΔ ἀκτὶς κάθετος ἐφέσηκε τῷ ΖΠ ἡμιτόνῳ (72)· ἄρα (157) ΖΠ=Πκ. Τὸ ἄρα γωνίας τινὸς ἡμίτονον ἥμισύ ἐστι χορδῆς τόξου, ὅ ἐστι διπλοῦν τοῦ τὴν γωνίαν ταύτην μετροῦντος.

484. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐπεὶ ἄρα α΄. τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας, καὶ τοῦ αὐτὴν μετροῦντος τόξου, ἐστὶ ταὐτὸν (482)· β΄. τὸ ἡμίτονον ἁπάσης γωνίας ἐστὶν ἥμισυ τῆς τόξου διπλοῦν τοῦ τὴν γωνίαν ταύτην μετροῦντος ὑποτεινούσης χορδῆς (283)· τέλος δὲ, ἐπεὶ τὰ ἡμίση πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ὡς τὰ ὅλα (Συμβ. Λογ. 234)· ἐντεῦθεν ἄρα, ἃ ταῖς χορδαῖς παραβαλλομέναις πρὸς τὰ ὑποτεινόμενα τόξα δέδεικται, ἐξέσται ἀποδεμηθῆναι τὰ αὐτὰ καὶ τοῖς ἡμιτόνοις, παραβαλλομένοις πρὸς τὰς ἑαυτῶν γωνίας, ἢ τὰ καταμετροῦντα ταύτας τόξα· ἐκεῖν,

485. α΄. Τὰ ἡμίτονα τῶν μεταξὺ ἐλαχίστου τόξου =0, καὶ τόξου = 90° κειμένων τόξων συναύξουσι τοῖς τό-

ξοις· καὶ γὰρ αἱ μὲν χορδαὶ αὔξυσι μέχρι τῶν 180° (50)· τὰ δὲ ἡμίτονα ἀντιστοιχοῦσι τοῖς ἡμίσεσι τόξοις, τοῖς ὑποτεινομένοις ὑπὸ τούτων τῶν χορδῶν (483)· φθίνυσι δὲ αἱ χορδαὶ, τῶν τόξων ἀπὸ 180° ἐς 360° αὐξομένων (52)· φθίνυσιν ἄρα καὶ τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν, αὐτῶν αὐξομένων ἀπὸ 90° ἐς 180° (53).

486. β΄. Ἡ ἄρα ἀκτὶς ΒΚ τὸ πάντων μέγιστόν ἐστιν ἡμίτονον, ἐπανῆκον ὀρθῇ γωνίᾳ τῇ ΒΚΔ, ἢ 90°· ἐντεῦθεν ἄρα ἡ ἀκτὶς ὁλικὸν ἀποκαλεῖται ἡμίτονον, καὶ ὑποτίθεται = 1 σὺν ὅσοισδήποτε μηδενικοῖς, φέρ' εἰπεῖν δέκα, τουτέστιν ὑποτίθεται = 10000000000· ταὐτὸν εἰπεῖν, διῃρημένη εἰς μοίρας ἰσαλλήλους δέκα δισμυρίων· αἱ δ' ἐν τῷ κύκλῳ ἄλλαι εὐθεῖαι κατὰ λόγον, ὃν ἔχουσι πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἔσονται πλείω, ἢ ἐλάττω, μέρη τῶν δέκα δισμυρίων.

Ἡ ἀκτὶς, ἢ τὸ ὁλικὸν ἡμίτονον, σημαίνεται ἀεὶ διὰ τοῦ Η, ὃ δηλοῖ ἡμιδιάμετρον.

487. γ΄. Ὥσπερ αἱ χορδαὶ (54), οὕτω καὶ τὰ ἡμίτονα οὐκ ἀναλόγως αὐξομένοις τοῖς τόξοις, ἢ ταῖς γωνίαις, συναύξονται· ἐπεὶ ἡμίσεια τῶν χορδῶν εἰσι τὰ ἡμίτονα.

488. Ὅρισον μέν ἐστι τὸ μῆκος τῶν ἁπτομένων, ἃς κατείδομεν (148, κτ)· ἐνταῦθα δὲ καλεῖται ἁπτομένη, ἡ κάθετος ἡ ἐπὶ τοῦ πέρατος Δ τῆς ἀκτῖνος, ἥτις ἐστὶν ἡ ἑτέρα τῶν τῆς ΔΚΖ γωνίας πλευρῶν, προαγομένη, μέχρις ἂν συναντήσῃ τῇ ἀκτῖνι ΚΖ, ἐκβληθείσῃ ἐς τὸ Η, ἥτις ἐστὶν ἑτέρα τῶν πλευρῶν τῆς ΔΚΖ γωνίας· ἡ δὲ ἀκτὶς αὕτη προαγομένη, ἕως οὗ συναντήσῃ τῇ ἁπτομένῃ, τουτέστιν ἡ ΚΖΗ, καλεῖται τέμνουσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ ΖΚΒ γωνία τοῦ παραπληρώ-

ματος τῆς ΖΚΔ ά. ἡμίτονον μὲν ἑαυτῆς ἔχει τὴν ΖΤ κάθετον, καθειμένην ἀπὸ τοῦ Ζ πέρατος τῆς ΖΚ πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ΒΚ ἀκτῖνα. ἥτις ἐστὶν ἡ ἑτέρα πλευρὰ ταύτης τῆς γωνίας· β΄. ἀπτομένη δ' αὐτῆς ἐστιν ἡ ΒΟ· γ΄. τέμνουσα δὲ ἡ ΚΖΟ.

489. Τὸ δὲ ΖΤ ἡμίτονον τῆς ΖΚΒ γωνίας Συνημίτονον ὀνομάζεται τῆς ΖΚΔ· τοὐναντίον δὲ τὸ ΖΠ ἡμίτονον τῆς ΖΚΔ συνημίτονον καλεῖται τῆς ΖΚΒ παραπληρώματος τῆς ΖΚΔ· ταὐτὰ ῥητέον καὶ περὶ τῆς ἁπτομένης καὶ τῆς τεμνούσης· εἰς δὲ συντομίαν γράφονται· συνημ. συναπτ. συνδιατ. οἷον συνημίτονον τῆς ΖΚΔ γωνίας ἐστὶν ἡ ΖΤ, συναπτομένη δὲ αὐτῆς ἡ ΒΟ, συνδιατέμνουσα δὲ ἡ ΚΟ.

Τοὐνάπαλιν δὲ τῆς ΒΚΖ γωνίας συνημ. ΖΠ, συναπτ. ΔΗ, συνδιατ. ΚΗ.

490. Ἥτε ἁπτομένη καὶ ἡ τέμνουσα ταῖς γωνίαις συναύξουσιν ἀπὸ 0 μέχρις 90°· ἀλλὰ τηνικαῦτα ἡ ἁπτομένη, τῇ τεμνούσῃ γινομένη παράλληλος, οὐδέποτε αὐτῇ συμπεσεῖται· τῆς δὲ 90° γωνίας ἥτε τέμνουσα καὶ ἡ ἁπτομένη εἰσὶν ἄπειροι.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπείπερ ὀρθῆς γωνίας ἡ ἁπτομένη καὶ ἡ τέμνουσα οὐδαμοῦ πραγματικῶς συνίασιν· ὥρισται δὲ ἁπτομένη ἡ τῇ ΔΚ ἀκτῖνι κάθετος, ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τοῦ πέρατος τῆς ἀκτῖνος, καὶ τοῦ σημείου, καθ' ὃ συναπαντᾷ τῇ τεμνούσῃ, ἐξέσται εἰπεῖν, ὡς αὗται αἱ δύω εὐθεῖαι, γωνίᾳ ἐπανήκουσαι ὀξείᾳ, βραχύτι διαφερούσῃ ὀρθῆς, προσέλαβον ἅπασαν τὴν δυνατὴν αὐτῶν αὔξησιν· προσεθέντος ἀλλ' ἐν τῇ ὀξείᾳ τῇδε γωνίᾳ τοῦ βραχέος ἐκείνου, ᾧ ἐνέδει ὀρθῆς, καὶ τούτου τῆς γωνίας καθισαμένης ὀρθῆς, ἥτε ἁπτομένη καὶ ἡ τέμνουσα, ἀποβάλλουσαι τὸ ἀλλήλαις

συνιέναι, τὸ εἶναι συναποτίθενται, εἴτ' ὖν μεδενὶ ἴσαι γίνονται· ἄλλο τυτὶ ὑπόδειγμα, τῦ ποσότητα ἅπασαν ἐξυθενῦσθαι μετὰ τὸ προσκτήσασθαι ἅπασαν τὴν δυνατὴν ἑαυτῆς αὔξησιν, ἤ, ὡς εἰώθασι λέγειν, μετὰ τὸ γενέσθαι μεγίστην, εἰ πρὸς ταύτῃ τῇ μεγίστῃ αὐξήσει κἂν ἐλάχιστόν τι προσεπιτεθείη (76).

491. ΠΟΡΙΣΜΑ. Γωνίας ἀμβλείας τῆς ὑπὸ ΖΚ ἡμίτονόν ἐστι τὸ τῆς ὀξείας ΖΚΔ, ἥτις τῇ εἰρημένῃ ἀμβλείᾳ ὑπάρχει ἀναπλήρωμα (211)· τυτὶ δὲ ἔστιν, ὅτι τόξον τὸ ΖΓκ > 180° χορδὴν ἔχει τὴν τῦ τόξυ ΖΔκ, ὃ μετὰ τῦ πρωτέρυ παρέχει 360° (46), καὶ ὅτι τὸ ἡμίτονον τὸ ἡμισύ ἐστι τῆς χορδῆς ταύτης (483).

Ἕπεται δὲ τῦτο καὶ ἐκ τῦ ὁρισμῦ τῦ ἡμιτόνυ· καὶ γὰρ τὸ ἡμίτονον τῆς ΖΚ γωνίας ὀφείλει εἶναι κάθετος, ἀπό τινος πλευρᾶς τῆς ΖΚ τῦ πέρατος Ζ καθειμένη ἐπὶ τὴν ΚΓ πλευρὰν (482)· ἀλλαμὴν ἀπὸ τῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΠΚΓ εὐθεῖαν μία μόνη κάθετος ἄγεται ἡ ΖΠ (116)· ἄρα ἡ ΖΠ, ἥτις ἡμίτονόν ἐστι τῆς ὀξείας γωνίας ΖΚΠ ἡ αὐτὴ ἔσται ἡμίτονον καὶ τῆς ἀμβλείας γωνίας ΖΚΓ· ἵνα ἄρα εὑρεθῇ τὸ ἡμίτονον γωνίας = 110° φέρ' εἰπεῖν, ἀφαιρετέον 110° ἀπὸ 180°, τὸ δὲ κατάλοιπον 70° ἔσται τὸ ἡμίτονον τῆς 110° ἀμβλείας γωνίας.

492. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡμίτονον πλάγιον καλεῖται τῦ ΔΖ τόξυ, ἡ τῆς ὑπὸ ΖΚΔ γωνίας, μέρος τῆς ἀκτῖνος τὸ ΔΠ, ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ΔΖ περιφερείας, καὶ τῦ ΖΠ ἡμιτόνυ, ὃ παραβαλλόμενον πρὸς τὸ ΔΠ ὀνομάζεται ἡμίτονον ὀρθόν.

493. Ἡμεῖς ἀλλ' ὖν ἐνταῦθα περὶ μόνυ τῦ ὀρθῦ ἡμιτόνυ διαληψόμεθα, ὡς βάσεως ὄντος, ἢ θεμελίυ, τῦ τριγωνομετρικῦ λογισμῦ· ἀλλ' ὖκ ἔστιν ὅπως ἀγράφῳ

πάμπαν φήσομεν τὴν τοῦ πλαγίου ἡμιτόνου γνῶσιν· ἡ γὰρ θεωρία τῶν διαφόρων τῆς Φυσικῆς εἰδῶν τὰ πολλὰ φέρει εἰς τὰς τοῦ πλαγίου ἡμιτόνου ἰδιότητας, ὡς δείξομεν ἐν τοῖς ἐφεξῆς.

494. Ἀλλὰ τοῦτο ἡμῖν μόνον τὸ 1 σχῆμα χαρίζεται· ἐπὶ αὐτοῦ γὰρ ῥᾷστα πᾶς ἄντις ἀναγνοίη, ὅτι τὸ πλάγιον ἡμίτονον ἴσον ἐστὶ τῇ ἀκτῖνι ἢ τῷ ὁλικῷ ἡμιτόνῳ πλὴν τοῦ ΠΚ = ΖΤ, εἴτ' ὢν τῷ συνημιτόνῳ διὰ τὸ ΖΤΠΚ παραλληλόγραμμον.

Εἰ δ' ἂν εὑρεθῇ τὸ πλάγιον ἡμίτονον ΔΠ τόξου τοῦ ΔΖ = 60° φέρ' εἰπεῖν, ζητηθήτω ἐν τοῖς πίναξι τὸ ἡμίτονον τόξου τοῦ ΖΒ = 30° ὃ ἔστι τοῦ 60° τὸ παραπλήρωμα, ὃ παρίσταται διὰ ΖΤ = ΠΚ· ὃ ἀφαιρεθήτω ἀπὸ τῆς ΔΚ ἀκτῖνος, εἴτ' ὢν ἀπὸ 10000000000· τὸ δὲ κατάλοιπον ἔσται τὸ πλάγιον ἡμίτονον ΔΠ.

495. Ἐπεὶ τὸ πάσης γωνίας ἡμίτονον ἥμισύ ἐστι τῆς χορδῆς, ἥτις ὑποτείνει τόξον διπλοῦν τοῦ ταύτην τὴν γωνίαν μετροῦντος· ἡ δ' ὑποτείνουσα τόξον 60° ἴση ἐστὶ τῇ ἀκτῖνι (252)· ἐντεῦθεν ἄρα τὸ γωνίας = 30° ἡμίτονον ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τῆς ἀκτῖνος.

496. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Παντὸς τριγώνου τοῦ ΑΒΓ (σχ. 6.) τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ὑπ' αὐτὰς ὑποτεινούσαις πλευραῖς.

ΑΕΙΞΙΣ. Τὸ ἡμίτονον ἐστὶν ἥμισυ χορδῆς ὑποτεινούσης τόξον διπλοῦν τοῦ τὴν γωνίαν τοῦ ἡμιτόνου τούτου μετροῦντος (483)· ἀλλ' ἑκάστη πλευρὰ ΒΓ ἐστὶ χορδὴ τόξου διπλασίου τοῦ τὴν ὑποτεινομένην γωνίαν Α μετροῦντος (201)· τὸ ἄρα γωνίας ἁπάσης ἡμίτονον ἥμισύ ἐστι τῆς αὐτὴν ὑποτεινούσης πλευρᾶς· ἀλλὰ τὰ ἡμίση ἀνάλογόν εἰσι τοῖς ὅλοις (Συμβ. λγ. 234.)· ἄρα τὰ τῶν γωνιῶν ἡμίτονα

ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ὑπ' αὐτὰς ὑποτεινούσαις πλευραῖς· Ο. Ε. Δ.

497. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Τριγώνου ὀρθογωνίου τοῦ ΑΒΓ (σχ. 7.) ἡ πρὸς τῇ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ πλευρὰ ΑΓ ἐστὶ πρὸς τὴν ἑτέραν ΒΓ· ὡ ἡ ἀκτὶς ΑΓ (*) πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς Α ὀξείας γωνίας ΒΓ· ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον.

498. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἡ ἀπτομένη γωνίας $= 45^\circ$ ἐστὶν ἴση τῇ ἀκτῖνι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ὀρθογωνίου γὰρ τριγώνου τοῦ ΚΔΗ (σχ. 1), τῆς Κ ὄσης $= 45^\circ$, ἔσται καὶ Η $= 45^\circ$ (212)· τριγώνου τοίνυν τοῦ ΚΔΗ ὄντος ἰσοσκελοῦς (221), ἔσται ἡ ΔΗ ἀπτομένη ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΔ. Ο. Ε. Δ.

499. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Τριγώνου ἰσοσκελοῦς, ἢ σκαληνοῦ, τὸ ἄθροισμα δυεῖν πλευρῶν ἀνίσων πρὸς τὴν αὐτῶν διαφορὰν λόγον ἔχει, ὃν ἡ ἀπτομένη τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύω γωνιῶν, ἃς ὑποτείνουσιν αἱ ῥηθεῖσαι πλευραὶ, πρὸς τὴν ἀπτομένην τῆς αὐτῶν ἡμιδιαφορᾶς.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. α'. Προήχθω ἡ ΑΟ (σχ. 8.), ὥστε γενέσθαι ΟΠ = ΟΖ, καὶ ἑπομένως ΑΠ = ΑΟ + ΟΖ· ἐπεὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΟΠ = Α + Ζ (216), ἀθροίσματι τῶν γωνιῶν, ἃς ὑποτείνουσιν αἱ ΑΟ, ΟΖ πλευραί· ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΖΟΠ ἰσοσκελές ἐστιν, ἐκ κατασκευῆς· ἄρα (217) ἡν ἀχθῇ κάθετος ἡ ΟΔ δίχα τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΖΟΠ γωνίαν· ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta O \Pi = \frac{Z O \Pi}{2} = \frac{A + Z}{2}$.

β'. Κέντρῳ τῷ Ο, καὶ διαστήματι τῷ ΟΔ, γεγράφθω

(*) Ἡ ΑΓ ἀκτὶς ἐστὶ κύκλου τοῦ ΓΟ, γεγραμμένου περὶ τὸ Α ὡς περὶ κέντρον.

τόξον τὸ ΔΓΗ μετρῶν τὴν ὑπὸ ΔΟΠ γωνίαν, ἴσην τῇ $\frac{A+Z}{2}$. ἐκεῖν ἡ ΔΠ, ἔσα ἀπτομένη τῆς ὑπὸ ΔΟΠ γωνίας (488), ἔσαι ϗ τῆς $\frac{A+Z}{2}$.

γ'. Ἀχθείσης παραλλήλε τῆς ΟΓ παρὰ τὴν ΑΖ, ἔσαι ἡ ὑπὸ ΓΟΠ = Α (132): ἐκεῖν ἡ Ζ = ΖΟΠ — ΓΟΠ, εἴτ' ἔν — Α, = ΖΟΓ: ἄρα ἡ μείζων Ζ ἴση ἐσὶ τῷ ἡμιαθροίσματι αὐτῶν σὺν τῇ ἡμιδιαφορᾷ (Συμβ. λογ. 442.)· ἡμιδιαφορὰ δὲ αὐτῶν ἐσὶν ἡ ὑπὸ ΔΟΓ γωνία, ἧς ἀπτομένη ἐσὶν ἡ ΔΓ:

δ'. Ἀχθεισῶν τῶν ΤΔ ϗ Ββ παραλλήλων τῇ ΑΖ, ἐπεὶ ΖΔ = ΔΠ (217) ἔσαι (313) ϗ ΑΤ = ΤΠ, ϗ (Συμβ. λογ. 442) ΤΟ ἔσαι ἡμιδιαφορὰ τῶν ΑΟ, ΟΖ· δεικτέον ἂν ὡς ἔσιν ΑΠ : 2ΤΟ :: ΔΠ : ΔΓ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπείπερ ΟΓ παράλληλός ἐσι τῇ ΤΔ, τῇ Ββ, ἔσι ΤΠ : ΔΠ :: ΤΟ : ΔΓ (313)· ἐκεῖν ϗ (Συμβ. λογ. 242.) ΤΠ : ΤΟ :: ΔΠ : ΔΓ, ἔνθεν διπλασιασμῷ τε πρώτε λόγε (Συμβ. λογ. 246) 2ΤΠ : 2ΤΟ : ΔΠ : ΔΓ, ἢ ΑΠ : 2ΤΟ :: ΔΠ : ΔΓ. Ο. Ε. Δ.

500. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Παντὸς σκαληνε τριγώνε ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύω λοιπῶν ἐσὶν, ὡς ἡ διαφορὰ τῶν δύω λοιπῶν πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν τμημάτων, ἃ τέμνονται ὑπὸ καθέτε τῇ μείζονι πλευρᾷ καθιεμένης ἀπὸ τῆς, ἣν αὕτη ὑποτείνει, γωνίας.

ΔΕΙΞΙΣ. Κέντρῳ μὲν τῷ Β (χ.9) διαςήματι δὲ τῷ ΒΕ γεγράφθω ἀπέραντον τόξον τὸ Ο Ε Τ ϗ προήχθω ἡ ΒΓ μέχρι τε Τ· ἐκεῖν ἔσαι ΒΤ = ΒΕ, = ΒΟ (45)· ἄρα ἡ ΓΟ διαφορά ἐσι τῶν ΒΓ, ΒΕ· ἐπεὶ δὲ ἡ ΒΔ κάθ-

ετος ἐφέςηκε τῇ ΗΕ χορδῇ, ἄρα ΗΔ=ΔΕ (157.)· ἄρα ΓΗ ἔςιν ἡ διαφορὰ τῶν τῆς μεγάλης πλευρᾶς ΓΕ τμημάτων ΓΔ, ΔΕ, ἃ τέμνονται ὑπὸ τῆς ΒΔ καθιεμένης ἀπὸ τῆς, ἣν ὑποτείνει ἡ μεγάλη πλευρὰ, γωνίας· ἀλλαμὴν (330) ΛΕ : ΓΤ :: ΓΟ : ΓΗ· ἄρα κτλ. Ο. Ε. Δ.

501. ΘΕΩΡΗΜΑ ς΄. Α᾽εἴποτε ὑπάρχουσιν αἱ ἑξῆς ἀναλογίαι· α΄. ἡ ἀκτὶς πρὸς τὸ συνημίτονον τόξου (χ. 12), ὥσπερ ἡ ἁπτομένη τοῦ αὐτοῦ τόξου πρὸς τὸ αὐτοῦ ἡμίτονον, εἰτ᾽ ἓν Η : συνημ :: ἁπ : ἡμ· β΄. Η : ἡμιτ :: συναπ : συνημ· γ΄. ἁπ. : Η :: Η συναπ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα ΚΔΒ, ΚΑΝ διὰ τὰς παραλλήλους ΒΔ, ΑΝ· ἄρα ΚΑ : ΚΔ :: ΑΝ : ΒΔ, εἰτ᾽ ἓν Η : συνημ :: ἁπ : ἡμιτ· ὅπερ ἦν τὸ πρῶτον.

Τὰ τρίγωνα ΗΚΜ, ΙΚΒ εἰσὶν ὅμοια· ἄρα Η = ΗΚ : ΙΚ=ΔΒ=ἡμ :: ΗΜ (συναπ. τοῦ ΒΑ) : ΙΒ (συν. ημ τοῦ ΒΑ), εἰτ᾽ ἓν Η : ἡμ :: συναπ : συνημ· ὅπερ ἦν τὸ β΄.

Τὰ τρίγωνα ΗΚΜ, ΝΚΑ ἔχουσιν ἑκάτερον μίαν γωνίαν ὀρθὴν, τὸ μὲν τὴν πρὸς τῷ Η, τὸ δὲ τὴν πρὸς τῷ Α, ἐξ τῶν ΚΑ, ΗΜ παραλλήλων ὐσῶν, ἡ πρὸς τῷ Μ γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ ΝΚΑ· εἰσὶν ἄρα ὅμοια· διὸ ΝΑ : ΚΑ :: ΗΚ : ΗΜ, εἰτ᾽ ἓν ἁπτ : Η :: Η : συναπ = $\frac{\text{Η Η}}{\text{ἁπ}}$

502. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἄρα α΄· ἡμιτ = $\frac{\text{ἁπ} \times \text{συνημ}}{\text{Η}}$

β΄. $\text{συνημ} = \frac{\text{συναπ} \times \text{ημιτ}}{\text{Η}}$. γ΄. $\text{απ} = \frac{\text{Η}^2}{\text{συναπτ}}$. δ΄. ὑ-
ποτιθεμένης Η = 1 ἡ πρώτη ἐξίσωσις προβάλλει ημιτ =
απτ × συνημ, ἢ $\text{απτ} = \frac{\text{ημ}}{\text{συνημ}}$. ε΄. ἐκ τῆς δευτέρας ἐξι-
σώσεως ἐυμαρῶς ἀποφέρεται $\text{συναπτ} = \frac{\text{συνημ}}{\text{ημ}} = \frac{1}{\text{απτ.}}$,
ὁ γὰρ τρίτος τύπος προβάλλει $\text{συναπ} = \frac{\text{Η}^2}{\text{απτ.}} = \frac{1}{\text{απτ}}$.
ϛ΄. ἐκ τῆς $\text{συναπ} = \frac{1}{\text{απ}}$, πρόεισι συναπ. α × απ α = 1 =
συναπ β × απτ. β, τῶν α, β τόξα, ἢ γωνίας σημαινόν-
των· ἐὰν δ' ἐν τῷ τετάρτῳ τύπῳ ἀντικατασταθῇ ἡ δύνα-
μις $\frac{1}{\text{συναπ}}$ τῆς απτομένης, πορισθήσεται πολλαπλασιασμῷ
ἐπὶ συνημ. ὁ τύπος $\text{ημ} = \frac{\text{συνημ}}{\text{συναπτ}}$· ἀντικατασταθέντος δὲ ἐν
τῷ δευτέρῳ τύπῳ τοῦ $\frac{1}{\text{απτ}}$ ἀντὶ τῆς συναπτομένης (ὑπο-
τιθεμένης ἀεὶ Η = 1), πορισθήσεται $\text{συνημ} = \frac{\text{ημ}}{\text{απτ}}$.

503. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐκ τοῦ τρίτου τύπου τοῦ ἐκτε-
θέντος ἤδη πορίσματος, εἴτ' ὖν τῆς ἐξισώσεως $\text{απ} = \frac{\text{Η}^2}{\text{συναπτ}}$ δῆλον, ὡς, εἰ προκέοιντο δύω τόξα α καὶ β, εὑρεθήσε-
ται $\text{απ. α} : \text{απ. β} :: \frac{\text{Η}^2}{\text{συναπ. α}} : \frac{\text{Η}^2}{\text{συναπ. β}}$· ἢ (ἐπεὶ τὰ τὸν

αὐτὸν ἀριθμητὴν ἔχοντα κλάσματα εἰσὶν ἐν λόγῳ (Συμβ. λογ. 261) ἀντιστρόφῳ τῶν παρονομαστῶν)· ἀπ. α : ἀπ. β :: συναπ. β : συναπ. α, τοῦτ' ἔστιν αἱ ἀπτόμεναι ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ εἰσὶ τῶν συναπτομένων· αὐτὸ δὲ τοῦτο καὶ οὕτω δειχθήσεται· ἐκ τοῦ προλαβόντος θεωρήματος ἔστιν ἀπ. : η :: η : συναπ· ἄρα απ. α × συναπ. α = η², καὶ ἀπ. β × συναπ. β = η²· ἄρα απ. α × συναπ α = απ. β × συναπ. β. ἄρα ἀπ. α : ἀπ. β :: συναπ. β. συναπ. α.

504. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄ Δοθέντος τοῦ ἡμιτόνου ΑΖ, τόξου τοῦ ΑΜ εὑρεῖν τὸ ἡμίτονον τόξου διπλασίου τοῦ ΑΜΒ. (κ. 3.).

ΛΥΣΙΣ. Ἤχθω ΒΔ κάθετος τῇ ΚΑ, καὶ ἐκ τοῦ Κ σημείου κάθετος ἡ ΚΜ κατὰ τὸ μέσον Ζ τῆς χορδῆς ΒΑ. γνωστῆς δὲ ὔσης τῆς ΑΖ, γνωστὴ ἔσται καὶ ἡ αὐτῆς διπλασία ΑΒ· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΚΖΑ, ΒΔΑ, ἔχοντα γωνίαν κοινὴν τὴν πρὸς τῷ Α, καὶ μίαν ἔτι ὀρθὴν, εἰσὶν ὅμοια· ἄρα ΚΑ : ΚΖ :: ΒΑ : ΔΒ· τοῦτ' ἔστιν· η : συνημ. τοῦ δοθέντος τόξου : 2 ἡμ τοῦ αὐτοῦ τόξου : ἡμ τοῦ διπλοῦ.

505. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ὑποτέθειται γνωστὸν τὸ συνημίτονον ΚΖ· τοῦ γὰρ ἡμιτόνου ΑΖ γνωστοῦ ὄντος, δῆλον ὅτι διὰ τῆς ἰδιότητος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΖΑ ἔστι ΚΖ = √(ΚΑ² — ΖΑ²), εἴτ' ὂν συνημιτ = √(η² — ἡμ²), „τοῦτ' ἔστιν ὅταν δοθέντος μὲν τοῦ ἡμιτόνου ζητῆ„ται τὸ συνημίτονον, τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος „ἀφαιρετέον τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμιτόνου τετράγωνον, καὶ τοῦ κα„ταλοίπου ἐξακτέον ῥίζαν τὴν τετραγώνειον· δοθέντος „δὲ τοῦ συνημιτόνου, ζητῆται τὸ ἡμίτονον, ἀφαιρετέον

„τὸ ἀπὸ τοῦ συνημιτόνου τετράγωνον ἀπὸ τοῦ τῆς ἀ-
„κτῖνος, καὶ ἐκ τοῦ καταλοίπου λαμπτέον ῥίζαν τὴν τετρα-
„γώνειον."

506. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Βουλομένοις δὲ εὑρεῖν τὸ ἡμιτονον τόξου ὑποδιπλασίου τοῦ ΑΜ, δεδομένου ἤδη τοῦ ἡμιτόνου καὶ τοῦ συνημιτόνου τόξου διπλασίου τοῦ ΑΒ λαμπτέον αὐτὸ ἐκ τῆς ἰδιότητος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $BA^2 = B\Delta^2 + \Delta A^2$, ἢ $BA^2 = \eta\mu^2\, \alpha + \pi\alpha\rho\eta\mu.^2\, \alpha$, ὑποτιθεμένοις α τὸ διπλάσιον τόξον· ἄρα $BA = \sqrt{(\eta\mu^2.\alpha + \pi\alpha\rho\eta\mu^2.\ \alpha)}$ καὶ $AZ = \frac{BA}{2} =$ ἡμ. τοῦ ὑποδιπλασίου τόξου $= \frac{1}{2}\sqrt{(\eta\mu^2.\alpha + \pi\alpha\rho\eta\mu^2.\ \alpha)}$· γνωσθέντος δὲ τοῦ ἡμιτόνου, γνωσθήσεται ῥᾶστα τό, τε συνημίτονον, καὶ τὸ παρημίτονον ΔΑ, ὅπερ ἔστιν = ΚΑ — ΚΔ (494).

507. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Δοθέντων τῶν δυοῖν τόξοιν ἡμιτόνων, εὑρεῖν τὰ ἡμίτονα τούτε ἀθροίσματος, καὶ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς. (κ. 4.).

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΔΛ = β, ΑΛ = α· δῆλον ἐν ὅτι ΔΞ ἔστιν ἡμίτονον τοῦ ΑΔΒ τόξου ἀθροίσματος τῶν δύο· ἐὰν δὲ ληφθῇ ΛΒ = ΔΛ, τὸ βχ ἡμίτονον τοῦ ΑΛ — ΒΛ, ἢ τοῦ ΑΛ — ΔΛ, ἔσται τὸ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς· γνωσκομένων τῶν ἡμιτόνων τοῦ α καὶ β, γινώσκεται καὶ τὰ αὐτῶν συνημίτονα (505)· ἐκ δὲ τῶν σημείων Δ, Λ, Β κατήχθωσαν κάθετοι τῇ ΚΑ, καὶ ἐκ τοῦ Β κάθετος τῇ ΔΞ ἡ ΒΠ, καὶ ἐκ τοῦ Ο μέσου τῆς χορδῆς ΔΒ αἱ κάθετοι ΟΘ, ΟΜ· ἀχθεῖσα δὲ ἡ ΚΟ, ἐπεὶ διήκει διά τε τοῦ κέντρου, καὶ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς ΔΒ, ἀναγκαίως ἐφεσήξει αὐτῇ πρὸς ὀρθάς (164)· διὰ δὲ τὰς παραλλήλους ΠΒ, ΘΟ αἱ εὐθεῖαι ΔΠ, ΔΒ ἀναλόγως τμηθήσονται κατά τε τὸ

Θ καὶ τὸ Ο (318)· ἀλλὰ μὴν ΔΒ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ο· ἄρα ΔΠ δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ΔΘ = ΘΠ· ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΛΝ, ΚΟΜ πρόεισι ΚΛ : ΚΟ :: ΛΝ : ΟΜ, ἢ η : συνημ. β :: ἡμ. α : ΟΜ = $\frac{\text{ἡμ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta}{\eta}$· ἐπεὶ δὲ καὶ τὰ τρίγωνα ΚΛΝ, ΔΘΟ ὅμοια, ὡς ἔχοντα ἐκ κατασκευῆς ἁπάσας τὰς πλευρὰς καθέτους ἀλλήλαις (220. Πορ. Γ), ἄρα ΚΛ : ΚΝ :: ΔΟ : ΘΔ, εἶτ' οὖν η : συνημ. α :: ἡμ. β : ΘΔ = $\frac{\text{ημ. } \beta \times \text{συνημ. } \alpha}{\eta}$· ἀλλὰ ΔΞ = ΟΜ + ΔΘ = ΞΘ + ΘΔ, καὶ Βχ = ΘΞ — ΠΞ = ΔΞ — ΔΘ· ἄρα ΔΞ, εἴτ' ἂν ἡμ (α + β) = $\frac{\text{ἡμ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta + \text{ἡμ. } \beta \times \text{συνημ. } \alpha}{\eta}$· καὶ Βχ = ημ (α — β) = $\frac{\text{ημ. } \alpha \times \text{συνημ. } \beta - \text{ημ. } \beta \times \text{συνημ. } \alpha}{\eta}$· τουτέστι „τὸ ἡ-„μίτονον τοῦ ἀθροίσματος δύω τόξων α, β (ὑποτιθεμένου „α > β) ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ α καὶ „τοῦ συνημιτόνου τοῦ β σὺν τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου β καὶ τοῦ „συνημιτόνου τοῦ α, συνάμα διαιρεθεῖσι διὰ τῆς ἀκτῖνος· τὸ „δὲ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς τῶν αὐτῶν τόξων ἴσον ἐστὶ τῷ „γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ α, καὶ τοῦ συνημιτόνου τοῦ β, „πλὴν τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ ἡμιτόνου τοῦ β καὶ τοῦ συνημιτό-„νου τοῦ α, διαιρεθεῖσι διὰ τῆς ἀκτῖνος."

508. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Δοθέντων τῶν συνημιτόνων δύω τόξων α καὶ β, εὑρεῖν τὸ συνημίτονον ΚΞ τοῦ αὐτῶν ἀθροίσματος, καὶ τὸ συνημίτονον Κχ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς.