ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ Σειρῶν.

540. Στίχος ὅρων αὐξόντων, ἢ μειουμένων, κατὰ μόνιμον νόμον, καλεῖται Σειρά· τοιαῦται εἰσὶν εἴτε Γεωμετρικαὶ πρόοδοι, καὶ αἱ Ἀριθμητικαί, καὶ οἱ στίχοι τῶν ἐσχηματισμένων ἀριθμῶν

μόνιμοι, ἢ πρωτοταγεῖς	1, 1, 1, 1, 1 κτ.
φυσικοί, ἢ δευτεροταγεῖς	1, 2, 3, 4, 5 κτ.
τρίγωνοι, ἢ τριτοταγεῖς	1, 3, 6, 10, 15 κτ.
πυραμιδικοί, ἢ τεταρτοταγεῖς . . .	1, 4, 10, 20, 35 κτ.
τριγωνοπυραμιδικοί, ἢ πεμπτοταγεῖς .	1, 5, 15, 35, 70 κτ.

νόμος δέ, καθ' ὃν σχηματίζονται οὗτοι οἱ ἀριθμοί, ἐστίν, ἵνα ἕκαστος ὅρος ἰσῶται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς ἡγουμένης σειρᾶς· οὕτως ὁ τρίτος ὅρος 6 τῆς τρίτης σειρᾶς ἴσος ἐστὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν τριῶν πρώτων ὅρων τῆς δευτέρας· καὶ γὰρ $1 + 2 + 3 = 6$ κτ.

Οἱ πολύγωνοι ἀριθμοὶ συνίστανται ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου ἀπὸ 1 ἀρχομένης· καλοῦνται δὲ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι τρίγωνοι, τετράγωνοι, πεντάγωνοι, κτ. ὡς ἂν τύχῃ οὖσα ἡ διαφορὰ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 1, 2, 3 κτ.

Πρόοδοι ἀριθμητικαί.

1, 2, 3, 4, 5 κτ. διαφορὰ 1
1, 3, 5, 7, 9 κτ. διαφορὰ 2
1, 4, 7, 10, 13 κτ. διαφορὰ 3
1, 5, 9, 13, 17 κτ. διαφορὰ 4

Ἀριθμοὶ πολύγωνοι.

1, 3, 6, 10, 15 κτ. τρίγωνοι.
1, 4, 9, 16, 25 κτ. τετράγωνοι.
1, 5, 12, 22, 35 κτ. πεντάγωνοι.
1, 6, 15, 28, 45 κτ. ἑξάγωνοι.

Βραχύτι ἐπιςήσασι τοῖς ἐσχηματισμένοις τῶν ἀριθμῶν δῆλον αὐτίκα, ὡς ἐὰν ὁ χῶρος τοῦ πάσης τάξεως ἐσχηματισμένου ἀριθμοῦ κληθῇ ν, εὑρεθήσεται ὁ τρίγωνος ἀριθμός, ὁ ἐν τῷ χώρῳ ν, ἐκ τοῦ $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$. ζητηθήτω γὰρ ὁ τρίγωνος ἀριθμὸς τοῦ τετάρτου χώρου ἔςαι οὖν $\nu = 4$, ὁ δὲ ζητούμενος ἀριθμὸς $= \frac{4(4+1)}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$· ὁ δὲ πυραμικὸς ἀριθμὸς τοῦ χώρου ν ἐςιν $= \frac{\nu\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+2)}{2\cdot 3}$· ὁ δὲ πεμπτοταγὴς ἀριθμὸς τοῦ χώρου ν ὑπάρχει $= \frac{\nu\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)}{2\cdot 3\cdot 4}$.

ὁ δὲ ἑκτοταγὴς $\frac{\nu(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)\cdot(\nu+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

541. Τῶν δὲ πολυγώνων ἀριθμῶν, τοῦ ν τὸν χῶρον τοῦ ἀριθμοῦ ἐμφαίνοντος, τούτου

τοῦ μὲν τριγώνου $\frac{\nu\nu+\nu}{2} = \frac{\nu\cdot(\nu+)}{2}$

τοῦ δὲ τετραγώνου $\frac{2\nu^2}{2} = \nu\nu$

τοῦ δὲ πενταγώνου $\frac{\nu\cdot(3\nu-1)}{2}$

τοῦ δὲ ἑξαγώνου $\frac{\nu\cdot(4\nu-2)}{2}$

τοῦ δὲ ἑπταγώνου $\frac{\nu\cdot(5\nu-3)}{2}$

τοῦ δὲ ὀκταγώνου $\frac{\nu(6\nu-4)}{2}$

ἐν γένει δὲ τοῦ πολυγώνου $= \frac{(\mu-2)\cdot\nu\nu-(\mu-4)\cdot\nu}{2}$

Πλευρὰν μὲν οὖν καλοῦμεν τὸν ἀριθμὸν ν, ἢ τὸν χῶρον τοῦ πολυγώνου ἀριθμοῦ· τὸν δὲ ἀριθμὸν τὸν ἔχοντα γωνίας μ, καὶ πλευρὰν ν, ἐμφαίνομεν διὰ τοῦ τύπου $\frac{(\mu-2)\cdot\nu\nu-(\mu-4)\cdot\nu}{2}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δακτύλιον ὠνήσατό τις βαρύτιμον· ἐρωτηθεὶς δὲ, πόσου; ἀριθμὸς, ἀπεκρίνατο, ὁ γωνίας ἔχων 365 τοῦ δωδεκάτου χώρου ὅσα κατέβαλον ἐμφαίνει ἀργύρια.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπεὶ $\mu = 365$, καὶ $\nu = 12$· ἄρα

$$\frac{(365-2)\cdot 12\cdot 12-(365-4)\cdot 12}{2}$$

$$= \frac{(363)\cdot 12\cdot 12 - (361)\cdot 12}{2} = \frac{52272 - 4332}{2} = \frac{47940}{2} = 23970.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'. Ἀριθμοῦ δοθέντος καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ, εὑρεῖν διὰ τοῦ τύπου τὴν αὐτοῦ πλευρὰν, εἴτ' οὖν τὸν ἐν ᾧ κεῖται χώραν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω ἀριθμὸς 91, καὶ ἔςω ὁ αὐτὸς τρίγωνος· δεῖ δὴ εὑρεῖν αὐτοῦ τὴν πλευράν· ἐπεὶ δὲ ἐν γένει ἡ πλευρὰ κέκληται ν, ἄρα $\nu = \chi$· καὶ $91 = \frac{\chi\chi+\chi}{2}$, καὶ $\chi\chi+\chi = 182$, καὶ $\chi = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{729}{4}} = 13$.

542. Αἱ τῶν βαθμῶν σειραὶ εἰσὶ τὰ τετράγωνα, οἱ κύβοι, κτ. τὰ ἀπὸ τῶν φυσικῇ τάξει αὐξόντων ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5 κτ. Ὅταν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς διὰ τῶν ὅρων προόδου ἀριθμητικῆς διαιρῆται, τὰ συνεχῆ πηλίκα πρόοδον ἁρμονικὴν συγκροτεῖν λέγεται· οἷον $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ κτ.

543. Τέσσαρες ὅροι ἁρμονικὴν ἀναλογίαν συνιςᾶν λέγονται, ὅταν ἡ ὑπεροχὴ, ἣ ὑπερέχει τοῦ πρώτου ὁ δεύτερος, πρὸς τὴν, ἣ ὑπερέχει τοῦ τρίτου ὁ τέταρτος, λόγον ἔχῃ, ὃν ὁ πρῶτος πρὸς τὸν τέταρτον· οὕτως 6, 8, 12, 18 ἐν ἁρμονικῇ ἀναλογίᾳ εἶναι λέγονται· καὶ γὰρ 2 (ἡ τοῦ 8 ὑπὲρ τὸν 6 ὑπεροχὴ) πρὸς 6 (τὴν τοῦ 18 ὑπὲρ τὸν 12 ὑπεροχὴν) ὡς ὁ 6 (πρῶτος ὅρος) πρὸς τὸν 18 (τέταρτον) εἴτ' οὖν 2 : 6 :: 6 : 18.

544. Ἐὰν δὲ τριῶν ὅρων ὁ μέσος δευτέρου τε καὶ τρίτου χώραν ἐπέχειν δύνηται, τὸ τοιοῦτον καλεῖται πρόοδος ἁρμονική· οἷον ÷ 10 : 16 : 40· ἔςι γὰρ 6 : 24 :: 10 : 40.

Κατὰ τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ἁρμονικὴν πρόοδον συνιςῶσι λέγεται· ἐπὶ γὰρ τὸν αὐτὸν ἀναχθέντα παρονομαςὴν γίνεται $\frac{20}{60}$, $\frac{15}{60}$, $\frac{12}{60}$· ϗ ἡ μὲν μεταξὺ τῶν δύω πρώτων διαφορὰ ἐςὶ $= \frac{1}{12}$, ἡ δὲ μεταξὺ τῶν δευτέρων $= \frac{1}{20}$· ἔςι δὲ $\frac{1}{12} : \frac{1}{20} :: \frac{20}{60} : \frac{12}{60}$, εἴτ' οὖν $5 : 3 :: 20 : 12$· ϗ γὰρ $5 \times 12 = 3 \times 20$· ἄρα τὰ κλάσματα ἐν ἁρμονικῇ εἰσὶν ἀναλογίᾳ.

545. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α'.** Δοθέντων τριῶν ἀριθμῶν τέταρτον ἁρμονικῶς ἀνάλογον εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ α, β, γ· ὁ δὲ ζητούμενος $= \upsilon$· οὐκοῦν (543) ἔςαι $\beta - \alpha : \upsilon - \gamma :: \alpha : \upsilon$· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις $\alpha\upsilon - \alpha\gamma = \beta\upsilon - \alpha\upsilon$, ϗ $\alpha\upsilon = \beta\upsilon - \alpha\upsilon + \alpha\gamma$, ϗ $2\alpha\upsilon - \beta\upsilon = \alpha\gamma$, ϗ $\upsilon = \frac{\alpha\gamma}{2\alpha - \beta}$

τουτέςιν „ὁ τέταρτος ἁρμονικῶς ἀνάλογος ἴσος ἐςὶ τῷ „τηλίκῳ τῷ προκύπτοντι ἐκ τῆς τοῦ ὑπὸ τοῦ πρώτου ϗ „τρίτου τῶν ὅρων γινομένου διὰ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ „τοῦ πρώτου δὶς ληφθέντος ϗ τοῦ δευτέρου διαιρέσεως."

Ἔςωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ 10, 15, 40· εἰς εὕρεσιν οὖν τοῦ τετάρτου πολλαπλασιασθήτω ὁ 10 ἐπὶ 40· ὁ δὲ γινόμενος 400 διαιρείσθω διὰ τῆς διαφορᾶς τῆς μεταξὺ τοῦ διπλοῦ πρώτου, εἴτ' οὖν 20, ϗ τοῦ δευτέρου 15, ταυτὸν εἰπεῖν διὰ 5· οὐκοῦν $\frac{400}{5} = 80$.

546. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.** Δύω ἀριθμῶν δοθέντων, τρίτον ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ὁ ἀνωτέρω τύπος ἐπιλύει τὸ πρόβλημα, εἰ μόνον (ἐπεὶ ὁ αὐτός ἐςι δεύτερος ϗ τρίτος (544)) ἐν τῷ παρονομαςῇ τεθείη γ ἀντὶ β· ἔςωσαν γὰρ οἱ δοθέντες 10, 15· οὐκοῦν ἔςαι ὁ τρίτος $\upsilon = \frac{\alpha\beta}{2\alpha - \beta} =$

$\frac{150}{20 - 15} = \frac{150}{5} = 30$· λέγω δὴ τοὺς τρεῖς ἀριθμοὺς 10, 15, 30 εἶναι ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ· ἐστι καὶ γὰρ $15 - 10 = 5 : 30 - 15 = 15 :: 10 : 30$, εἴτ' οὖν $5 : 15 :: 10 : 30$ ἄρα $\because$ 10, 15, 30 (543, 544).

547. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'.** Δύω ἀριθμῶν δοθέντων, μέσον ἁρμονικῶς ἀνάλογον προσευρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστωσαν οἱ δοθέντες $α, γ$· ὁ δὲ ζητούμενος $υ$· τοιγαροῦν ἐστι (544) $υ - α : γ - υ :: α : γ$, καὶ δὴ $γυ - αγ = αγ - αυ$, καὶ $2αγ = γυ + αυ$, καὶ $υ = \frac{2αγ}{γ + α}$, τουτέστι „μεταξὺ δύω δοθέντων ἀριθμῶν 10, „καὶ 40 μέσος ἁρμονικῶς ἀνάλογος εὑρίσκεται, ἐὰν ὁ δὶς „γινόμενος ὑπὸ τοῦ πρώτου 10 καὶ τοῦ τρίτου 40, εἴτ' οὖν „800, διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δοθέντων, εἴτ' „οὖν διὰ 50· τὸ δὲ πηλίκον 16 δώσει τὸν ζητούμενον" ἐπεὶ γὰρ $16 - 10 = 6 : 40 - 16 = 24 :: 10 : 40$· ἄρα $\because$ 10, 16, 40 (549, 544).

548. **Ποσότητες** αἱ ἐφ' ἑτέρας δίχα λειψάνου μὴ ἀναγόμεναι μεταβάλλουσιν εἰς σειρὰς ἀπείρους· τοιαῦται εἰσὶ τῶν σεσημειωμένων διαιρέσεων, ὧν ὁ διαιρετέος οὐκ ἐστι πολλαπλοῦς τοῦ διαιρέτου, καὶ αἱ ῥίζαι τῶν ἀτελῶν βαθμῶν· κείσθω γὰρ εὑρεῖν τὸ πηλίκον τὸ προϊὸν ἐκ τῆς σεσημειωμένης διαιρέσεως $\frac{1}{1 + υυ}$· ἐὰν οὖν ἡ διαίρεσις κατὰ τοὺς ἐκτεθέντας κανόνας (51, 60) φιλοτεχνηθῇ, εὑρεθήσεται $1 - υ^2 + υ^4 - υ^6 + υ^8$ κτ. ἐὰν γὰρ διαιρεθῇ 1 διὰ 1, καὶ τὸ πηλίκον 1 τεθῇ ὡς πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου, καὶ τὸ γινόμενον $1 \times \overline{1 + υυ} = 1 + υυ$ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ

τοῦ διαιρετέου, ἔσται $1 - 1 - υυ = - υυ$· ἐὰν δὲ αὖθις τὸ κατάλοιπον $- υυ$ διὰ 1 διαιρεθῇ, δεύτερος ὅρος τοῦ πηλίκου προκύψει $- υυ$, ὃς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδωσι $- υυ \times \overline{1 + υυ} = - υυ - υ^4$, ὅπερ ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, καταλειφθήσεται $= - υυ + υυ + υ^4 = υ^4$· τούτου δὲ τοῦ καταλοίπου διαιρεθέντος αὖθις διὰ 1, προκύπτει τρίτος ὅρος τοῦ πηλίκου $+ υ^4$, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, καθὰ δὴ τὸ σχῆμα τῶν πράξεων καθ᾽ ἑαυτὸ δείκνυσι.

διαιρέτης	διαιρετέος	πηλίκον
$1 + υυ$	1	$1 - υυ + υ^4 - υ^6 + υ^8$ κτ.

$$
\begin{array}{l}
- 1 - υυ \\
\hline
\quad - υυ \\
\quad + υυ + υ^4 \\
\hline
\qquad + υ^4 \\
\qquad - υ^4 - υ^6 \\
\hline
\qquad\quad - υ^6 \\
\qquad\quad + υ^6 + υ^8 \\
\hline
\qquad\qquad + υ^8 \\
\qquad\qquad - υ^8 - υ^{10} \\
\hline
\qquad\qquad\quad - υ^{10} \text{ κτ.}
\end{array}
$$

549. Διὰ τῆς αὐτῆς Μεθόδου ἐξευρίσκεται $\frac{α}{β + υ} = \frac{α}{β} - \frac{αυ}{β^2} + \frac{αυ^2}{β^3} - \frac{αυ^3}{β^4} + \frac{αυ^4}{β^5}$ κτ., ὃ δῆλον γίνεται ἐπισκέψασι τῷ τῶν πράξεων σχήματι.

$$
\begin{array}{l|l|l}
\text{διαιρέτης} & \text{διαιρετέος} & \text{πηλίκον} \\
\beta + \upsilon & \alpha & \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\upsilon}{\beta^2} + \frac{\alpha\upsilon^2}{\beta^3} - \frac{\alpha\upsilon^3}{\beta^4} + \frac{\alpha\upsilon^4}{\beta^5} \text{ κτ}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
-\alpha - \frac{\alpha\upsilon}{\beta} \\
\hline
-\frac{\alpha\upsilon}{\beta} \\
+\frac{\alpha\upsilon}{\beta} + \frac{\alpha\upsilon^2}{\beta^2} \\
\hline
+\frac{\alpha\upsilon^2}{\beta^2} \\
-\frac{\alpha\upsilon^2}{\beta^2} - \frac{\alpha\upsilon^3}{\beta^3} \\
\hline
-\frac{\alpha\upsilon^3}{\beta^3} \\
+\frac{\alpha\upsilon^3}{\beta^3} + \frac{\alpha\upsilon^4}{\beta^4} \\
\hline
+\frac{\alpha\upsilon^4}{\beta^4} \\
-\frac{\alpha\upsilon^4}{\beta^4} - \frac{\alpha\upsilon^5}{\beta^5} \\
\hline
-\frac{\alpha\upsilon^5}{\beta^5}
\end{array}
$$

550. Ὡσαύτως τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\alpha}{\upsilon+\beta}$ ἐπὶ τὴν σειρὰν ἀνάγεται $\frac{\alpha\alpha}{\upsilon} - \frac{\alpha\alpha\beta}{\upsilon^2} + \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\upsilon^3}$ κτ., ἥ δῆλον ἐκ τοῦ σχήματος.

$$
\begin{array}{l|l|l}
\text{διαιρέτης} & \text{διαιρετέος} & \text{πηλίκον} \\
\upsilon + \beta & \alpha\alpha & \frac{\alpha\alpha}{\upsilon} - \frac{\alpha\alpha\beta}{\upsilon^2} + \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\upsilon^3} \text{ κτ.} \\
 & -\alpha\alpha - \frac{\alpha\alpha\beta}{\upsilon} & \\
 & \quad - \frac{\alpha\alpha\beta}{\upsilon} & \\
 & \quad + \frac{\alpha\alpha\beta}{\upsilon} + \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\upsilon^2} & \\
 & \qquad + \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\upsilon^2} & \\
 & \qquad - \frac{\alpha\alpha\beta\beta}{\upsilon^2} + \frac{\alpha\alpha\beta^3}{\upsilon^3} & \\
 & \qquad\quad + \frac{\alpha\alpha\beta^3}{\upsilon^3} \text{ κτ. εἰς ἄπειρον.} &
\end{array}
$$

551. Ἀλλὰ καὶ $\sqrt{\alpha\alpha - \upsilon\upsilon}$ εἰς ἄπειρον σειρὰν ἀναλύεται τὴν $\alpha - \frac{\upsilon\upsilon}{2\alpha} - \frac{\upsilon^4}{8\alpha^3} - \frac{\upsilon^6}{16\alpha^5} - \frac{5\upsilon^8}{128\alpha^7} - \frac{7\upsilon^{10}}{256\alpha^9} - \frac{12\upsilon^{11}}{1024\alpha^{11}}$ κτ. ἐπεὶ γὰρ ἡ τετράγωνος ῥίζα τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha\alpha$ ἐστὶ α, ἐὰν ἀφαιρεθῇ $\alpha\alpha$ ἀπὸ τῆς ποσότητος $\alpha\alpha - \upsilon\upsilon$, καταλείπεται $-\upsilon\upsilon$, ὅπερ διὰ 2α διαιρεθέντος πρόεισι δεύτερος ὅρος τῆς ῥίζης ὁ $\frac{-\upsilon\upsilon}{2\alpha}$. ἀφ' οὗ τὸ τετράγωνον $\frac{\upsilon^4}{4\alpha^2}$ σὺν τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ $\frac{-\upsilon\upsilon}{2\alpha}$ καὶ 2α, εἴτ' οὖν σὺν τῷ $-\upsilon\upsilon$, ἀφαιρεθὲν ἀπὸ τοῦ πρώ-

του καταλοίπου —υυ καταλείπει $\frac{υ^4}{4α^2}$, ὅπερ διὰ διπλῆς τῆς ἄρτι εὑρημένης ῥίζης διαιρεθὲν, εἴτ' οὖν διὰ 2α — $\frac{υυ}{α}$, ἀποδίδωσι τὸν τῆς ῥίζης τρίτον ὅρον $-\frac{υ^4}{8α^3}$, ὑφ' ὃ ἢ τοῦ 2α — $\frac{υυ}{α}$ τὸ γινόμενον ($-\frac{υ^4}{4α^2} = \frac{υ^6}{8α^4}$) σὺν τῷ τετραγώνῳ $\frac{υ^8}{64α^6}$ ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ δευτέρου καταλοίπου $-\frac{υ^4}{4α^2}$, καταλείπει $-\frac{υ^6}{8α^4} - \frac{υ^8}{64α^6}$· τῆς δὲ πράξεως ὡσαύτως ἐπανειλημμένης, τῶν ἐκτεθέντων κανόνων περὶ ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκριβῶς τηρουμένων (126), πρόεισι καὶ οἱ λοιποὶ ὅροι, ὡς ἰδεῖν ἔξεστιν ἐν τῷ παρατιθεμένῳ σχήματι, ὃ ῥᾷστα πᾶς, ὃς ἂν τοὺς εἰρημένους κανόνας διὰ μνήμης ἔχοι, συνίησι.

$$
\begin{array}{c|l}
\text{Τετράγωνον} & \qquad\qquad \text{ῥίζα} \\
αα - υυ & α - \frac{υυ}{2α} - \frac{υ^4}{8α^3} - \frac{υ^6}{16α^5} - \frac{5υ^8}{128α^7} - \\
-αα & \qquad \frac{7υ^{10}}{256α^9} - \frac{21υ^{12}}{1024α^{11}} \\
\hline
-υυ & \\
+υυ - \frac{υ^4}{4αα} & \\
\hline
-\frac{υ^4}{4αα} & \\
+\frac{υ^4}{4αα} - \frac{υ^6}{8α^4} - \frac{υ^8}{64α^6} & \\
\hline
\end{array}
$$

$$-\frac{υ^6}{8α^4}-\frac{υ^8}{64α^6}$$

$$+\frac{υ^6}{8α^4}-\frac{υ^8}{16α^6}-\frac{υ^{10}}{64α^8}-\frac{υ^{12}}{256α^{10}}$$

$$-\frac{5υ^8}{64α^6}-\frac{υ^{10}}{64α^8}-\frac{υ^{12}}{256α^{10}}$$

$$+\frac{5υ^8}{64α^6}-\frac{4υ^{10}}{128α^8}-\frac{5υ^{12}}{512α^{10}}-\frac{5υ^{14}}{1024α^{12}}-\frac{25υ^{16}}{16384α^{14}}$$

$$-\frac{7υ^{10}}{128α^8}-\frac{7υ^{12}}{512α^{10}}-\frac{5υ^{14}}{1024α^{12}}-\frac{25υ^{16}}{16384α^{14}}$$

$$+\frac{7υ^{10}}{128α^8}-\frac{7υ^{12}}{256α^{10}}-\frac{7υ^{14}}{1024α^{12}}-\frac{7υ^{16}}{2048α^{14}}-\frac{35υ^{18}}{16384α^{16}}-\frac{49υ^{20}}{65536α^{18}}$$

$$-\frac{21υ^{12}}{512α^{10}}-\frac{12υ^{14}}{1024α^{12}}-\frac{81υ^{16}}{16384α^{14}}-\frac{35υ^{18}}{16384α^{16}}-\frac{49υ^{20}}{65536α^{18}}$$

552. Διὰ τῶν αὐτῶν δὲ πράξεων, εἴτις ὀρθῶς καὶ ἐσκεμμένως ταύτας ἐπιτηδεύοι, ἀεὶ ἐν μνήμῃ φέρων τὰ εἰρημένα (128), ἀμέλειται τὸν διπλασιασμὸν τῆς πρὸ μικροῦ εὑρημένης ῥίζης, καὶ τὴν διὰ τοῦ πρώτου ὅρου αὐτῆς διπλασιασθείσης διαίρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ καταλειπομένου, καὶ τὸν τοῦ πηλίκου (ὃ δὴ ὅρος ῥιζικὸς τίθεται) ἐπὶ τὸ διπλοῦν τῆς προευρημένης ῥίζης πολλαπλασιασμόν, καὶ τὴν τῷ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γινομένῳ πρόσθεσιν τοῦ ἀπὸ τοῦ εὑρεθέντος τούτου ῥιζικοῦ ὅρου τετραγώνου, καὶ τοῦ ὅλου ἀθροίσματος ἀπὸ τοῦ καταλοίπου ἀφαίρεσιν· ταῦτα φημὶ εἴτις ὀρθῶς μετίοι, εὑρήσει ὡσαύτως ὅτι $\sqrt{αα+υυ}=α+\frac{υυ}{2α}-\frac{υ^4}{8α^3}+\frac{υ^6}{16α^5}-\frac{5υ^8}{128α^7}$ κτ. καὶ μὴν καὶ $\sqrt{αα+βυ-υυ}$ $=α+\frac{βυ}{2α}-\frac{υυ}{2α}+\frac{ββυυ}{8α^3}$ κτ.

553. Ἐκ δὲ δὴ τούτων τῶν ὑποδειγμάτων δῆλον, ὡς ἐὰν εὑρεθῶσιν ἐν ἀρχῇ ἱκανοί τινες ὅροι σειρᾶς τινος διὰ τῶν ἐπιπόνων πράξεων, τοῦ τῆς προόδου κανόνος, καθ' ὃν χωρεῖ ἡ σειρά, γνωσθέντος, ἀπόνως τὸ λοιπὸν τὴν σειρὰν συνεχίσαι δυνάμεθα· δεῖ μέντοι πρῶτον εὑρεῖν οὐ δύο ἢ τρεῖς ὅρους, τέσσαρας δὲ ἢ πέντε, ἵνα δήλη γένηται ἡ τοῦ κανόνος μονίμη πρόβασις· οὕτως ἡ τῆς ποσότητος $\sqrt{αα - υυ}$ σειρὰ μικρὰ σκεψαμένοις ἴση ἐστὶ τῇ ποσότητι α σὺν προόδῳ Γεωμετρικῇ, πρῶτον μὲν ὅρον $\frac{υυ}{α}$, κοινὸν δὲ πηλίκον $\frac{υυ}{αα}$ ἐχούσῃ, ἧς ἕκαστος ὅρος πεπολλαπλασιάσθαι ἐφ' ἕκαστον ἀντίστοιχον ὅρον τῆς σειρᾶς $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{16}$, $-\frac{5}{128}$, $-\frac{7}{256}$ κτ. τῶν δὲ ὅρων ταύτης τῆς σειρᾶς κανών, καθ' ὃν πρόεισιν, οὗτος, $-\frac{1}{2}$,

$$-\frac{1.1}{2.4}, -\frac{1.1.3}{2.4.6}, -\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}, -\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}$$

κτ, εἴτ' οὖν οἱ μὲν ἀριθμηταί εἰσι σειρὰ φυσικὴ αὔξουσα τῶν περιττῶν ἀριθμῶν· οἱ δὲ παρονομασταὶ σειρὰ φυσικὴ τῶν ἀρτίων αὔξουσα, ἐπ' ἀλλήλους πολλαπλασιαζομένων, ὡς ἐν ἑκάστῳ ὁρᾶται κλάσματι, καὶ εἰς ἁπλουστέραν ἔκθεσιν ἀναγομένου ἑκάστου κλάσματος.

Περὶ συνάψεως σειρῶν.

554. Σειρὰν συνάπτειν, ζητεῖν ἐστι τὸ ἄθροισμα, ἢ τὴν δύναμιν, τοῦ πάντων τῶν ὅρων συμπληρώματος.

555. Σειρὰ μὲν πεπερασμένη καλεῖται, ἧς ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ὡρισμένος ὑπάρχει· ἄπειρος δέ, ἧς τοὺς ὅρους προσδιορίσαι ἀμήχανον.

556. Σειρὰ μὲν ἀποκλίνουσα ἐστὶν, ἧς οἱ ὅροι κατὰ τὸ συνεχὲς αὔξουσιν· ἧς μέντοι ἀεὶ μειοῦνται, ἐκείνη καλεῖται συγκλίνουσα.

557. Δῆλον οὖν, ὡς εἴπερ σειρὰ ἄπειρος ὑπάρχει ἀποκλίνῃ, τὸ ταύτης ἄθροισμα ὅροις πεπερασμένοις περιληφθῆναι μὴ ἔχειν, συγκλινούσης δὲ, τὸ ἄθροισμα αὐτῆς πεπερασμένον ἐστὶν, ὡς ἐν τοῖς ἐφεξῆς εἰσόμεθα.

558. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ τοῦ συνάπτειν τὰς σειρὰς μέθοδος πολυσχιδής τις ἐστὶ, καὶ μέρος τῆς ἀναλυτικῆς τὸ κάλλιστον· ἡμῖν ἀλλ' οὖν ἀρκέσει, εἰ ἀποδοίημεν τὴν τοῦ τὰς μᾶλλον ἐν χρήσει σειρὰς συνάπτειν μέθοδον· οὐ γὰρ περὶ τῆς καθαρᾶς Μαθηματικῆς μόνης ἡμῖν διαλαβεῖν πρόκειται.

559. Εὑρεθέντος ἅπαξ τοῦ τύπου, καθ' ὃν συνάπτονται πάντες οἱ ὅροι Γεωμετρικῆς προόδου φθινούσης ἐπ' ἄπειρον, συναφθήσονται πᾶσαι αἱ σειραὶ, αἱ ἐφ' ἑτέρας, ὧν ἂν οἱ ὅροι Γεωμετρικὴν σειρὰν φθίνουσαν παριστῶσιν, ἀναλυόμεναι.

Ἔστω γὰρ $\div\!\div\ \frac{\delta}{\beta}, \frac{\delta}{\beta\pi}, \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\delta}{\beta\pi^3}, \frac{\delta}{\beta\pi^4}, \frac{\delta}{\beta\pi^5} \ldots\ldots \frac{\delta}{\beta\pi^\infty}$, πρόοδος ἐπ' ἄπειρον φθίνουσα, ἐὰν ᾖ $\pi > 1$· ἀναστραφεῖσα δὲ γενήσεται αὔξουσα $\div\!\div\ \frac{\delta}{\beta\pi^\infty} \ldots \frac{\delta}{\beta\pi^5}, \frac{\delta}{\beta\pi^4}, \frac{\delta}{\beta\pi^3}, \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\delta}{\beta\pi}, \frac{\delta}{\beta}$· ἔστι δὲ τοῦ Γεωμετρικὴν πρόοδον αὔξουσαν συνάπτειν εἰς ἓν τύπος ὁ $\pi = \frac{\omega\pi - \alpha}{\pi - 1}$ (280). ἐν ᾧ ἐφαρμοζομένης τῆς προκειμένης σειρᾶς ἐστὶν $\omega =$

$\frac{\delta}{\beta}$, καὶ $\alpha = \frac{\delta}{\beta\pi^{\infty}}$· ἄρα $\kappa = \frac{\frac{\delta\pi}{\beta} - \frac{\delta}{\beta\pi^{\infty}}}{\pi - 1}$, τοῦ δὲ ἀπειροστοῦ ἀλογουμένου, εἴτ' οὖν τοῦ $\frac{\delta}{\beta\pi^{\infty}}$, καὶ τῆς ἀναγωγῆς γινομένης, εὑρίσκεται $\kappa = \frac{\delta\pi}{\beta\pi - \beta}$, τύπος γενικὸς τοῦ πᾶσαν τὴν ἐπ' ἄπειρον φθίνουσαν συνάπτειν σειρὰν κλασμάτων, ὧν ἀριθμηταὶ μὲν τὸ αὐτὸ εἶεν ποσὸν, οἱ δὲ παρονομασταὶ πρόοδον συνιστῶεν Γεωμετρικὴν, τουτέστιν ἐπὶ τούτων ,,ἐὰν τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ποσοῦ τοῦ δίκην ἀριθμητοῦ ,,λαμβανομένου, καὶ τοῦ πηλίκου τῆς τῶν παρονομαστῶν προ- ,,όδου, διαιρεθῇ διὰ τοῦ δευτέρου τῆς Γεωμετρικῆς προόδου ,,ὅρου ἐλαττωθέντος τῷ πρώτῳ ὅρῳ, τὸ ἐντεῦθεν προϊὸν ,,πηλίκον ἐμφανεῖ τῆς σειρᾶς τὸ κεφάλαιον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἵνα δὲ τοῦ τύπου τὴν ἀλήθειαν μερικώτερον ἴδωμεν ἔστω εὑρεῖν τὴν δύναμιν τοῦ $\frac{1}{3}$ κλάσματος· ἔστι οὖν $\frac{1}{3} = 0,3333$ κτ. (Ἀριθ. 237)· ἵνα τὸν μετασχηματισμὸν τοῦτον ἀκριβέστατον ποιήσωμεν, ὀφείλομεν προαγαγεῖν τὴν προσέγγισιν ἐς ἄπειρον· ἐπεὶ δὲ $0,3333$ κτ. $= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$ κτ. (Ἀριθ. 224)· ἔσται πάντως $\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots\dots \frac{3}{10^{\infty}}$· ἀνεστράφθω γὰρ ἡ σειρὰ ἵνα γένηται αὔξουσα, καὶ δὴ ἔσται $\frac{3}{10^{\infty}} \dots\dots \frac{3}{10000}, \frac{3}{1000}, \frac{3}{100}, \frac{3}{10}$ ταύτης δὲ τὸ κεφάλαιον ἐστὶ $\kappa = \frac{\delta\pi}{\beta\pi - \beta} = \frac{3 \cdot 10}{100 - 10} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$.

560. Κείσθω δὴ συνάψαι σειρὰν κλασμάτων, ὧν

αἱ μὲν ἀριθμηταὶ συνιςῶσι πρόοδον Ἀριθμητικὴν, αἱ δὲ παρονομαςαὶ Γεωμετρικὴν, τοῦτ' ἔςιν $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha+\delta}{\beta\pi}, \frac{\alpha+2\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\alpha+3\delta}{\beta\pi^3}$ κτ., ἥτις ἀναλυθήτω εἰς ταύτην $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta\pi}+\frac{\delta}{\beta\pi}, \frac{\alpha}{\beta\pi^2}+\frac{\delta}{\beta\pi^2}+\frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\alpha}{\beta\pi^3}+\frac{\delta}{\beta\delta^3}+\frac{\delta}{\beta\pi^3}+\frac{\delta}{\beta\pi^3}$ κτ., ἀφ' ἧς ἀπαντλοῦνται αἱ ἐφεξῆς σειραὶ, πρόοδοι αἱ πᾶσαι οὖσαι Γεωμετρικαὶ

$$\div\!\div\ \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta\pi}, \frac{\alpha}{\beta\pi^2}, \frac{\alpha}{\beta\pi^3}\ \text{κτ, ἧς τὸ κεφ.} = \frac{\alpha\pi}{\beta\pi-\beta} \quad (559)$$

$$\div\!\div\ \frac{\delta}{\beta\pi}, \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\delta}{\beta\pi^3},\ \text{κτ, ἧς τὸ κεφ.} = \frac{\delta}{\beta\pi-\beta}$$

$$\div\!\div\ \ldots \frac{\delta}{\beta\pi^2}, \frac{\delta}{\beta\pi^3},\ \text{κτ, ἧς τὸ κεφ.} = \frac{\delta}{\beta\pi^2-\beta\pi}$$

$$\div\!\div\ \ldots\ldots, \frac{\delta}{\beta\pi^3}\ \text{κτ, ἧς τὸ κεφ.} = \frac{\delta}{\beta\pi^3-\beta\pi^2}$$

ἐπεὶ δὲ τὰ εὑρεθέντα κεφάλαια (πλὴν τοῦ πρώτου) συνιςῶσι τὴν Γεωμετρικὴν πρόοδον $\div\!\div\ \frac{\delta}{\beta\pi-\beta}, \frac{\delta}{\beta\pi^2-\beta\pi}, \frac{\delta}{\beta\pi^3-\beta\pi^2}$ κτ, ἧς τὸ κεφάλαιον ἐςὶν $= \frac{\delta\pi}{\beta\pi^2-2\beta\pi+\beta}$, προςεθέντος αὐτῷ τοῦ τῆς πρώτης σειρᾶς κεφαλαίου $\frac{\alpha\pi}{\beta\pi-\beta}$ ἀπολαμβάνεται $\frac{\delta\pi}{\beta\pi^2-2\beta\pi+\beta}+\frac{\alpha\pi}{\beta\pi-\beta} = \frac{\alpha\varpi\varpi-\alpha\varpi+\delta\varpi}{\beta\varpi\varpi-2\beta\varpi+\beta}$ κεφάλαιον ἁπασῶν τῶν σειρῶν, ὃ τὸ αὐτὸ γενικὸς ἐστὶ τύπος τοῦ συνάπτειν ἁπάσας τὰς σειρὰς τῶν κλασμάτων, ὧν οἱ μὲν ἀριθμηταὶ ἀριθμητικὴν, οἱ δὲ παρονομασταὶ γεωμετρικὴν, συνιστῶσι προόδους.

561. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δὲ ἡ ἄπειρος σειρὰ μὴ ἔχῃ ἀνάγεσθαι ἐπὶ κεφάλαιον πεπερασμένον, πειρατέον παντὶ τρόπῳ συγκλίνουσαν αὐτὴν ἀπεργάσασθαι· τηνικαῦτα γὰρ ἐνίους τῶν προτέρων ὅρων συνάπτοντες τοὺς ἄλλους παρορᾷν δυνάμεθα ἄτερ ἐπαισθητοῦ διαπτώματος· ἐπὶ γὰρ φέρε $\sqrt{\alpha\alpha + \upsilon} = \alpha + \frac{\upsilon}{2\alpha} - \frac{\upsilon^2}{8\alpha^3} + \frac{\upsilon^3}{16\alpha^5}$ κτ. ὅσωπερ ἡ ποσότης υ ἐλάττων ἢ τῆς α, τοσούτῳ τάχιον ἡ σειρὰ συγκλίνει· βραχύνονται γὰρ ἀεὶ οἱ ἀριθμηταὶ ὥσγε πρὸς τοὺς αὐτῶν παρονομαστάς.

Τεθείσθω γὰρ $\alpha = 10$, καὶ $\upsilon = 1$· ἔστι δὴ $\sqrt{\alpha\alpha + \upsilon} = \sqrt{101} = 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{1600000}$· σαφὲς οὖν τὸν τέταρτον ὅρον ὑπάρχειν βραχύτατον· ἐξικνοῦν δὲ τοὺς πρώτους τρεῖς ὅρους μόνον πρὸς παράστασιν τῆς τῇ ἀληθεῖ προσεγγιζούσης ῥίζης $10 + \frac{399}{8000}$.

562. Ἐὰν ληφθῶσιν οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5 κτ. οἱ μὲν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι ἔσονται 1, 4, 9, 16, 25 κτ. οἱ δὲ κύβοι 1, 8, 27, 64, 125 κτ. οἱ δὲ τέταρτοι βαθμοὶ 1, 16, 81, 256, 625 κτ., καὶ ἑξῆς ὡσαύτως· αὗται οὖν καλοῦνται σειραὶ ἄπειροι τῶν βαθμῶν τῶν ἀπὸ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· ἵνα δὲ τὰς τοιάσδε σειρὰς συνάπτειν μάθωμεν, χρησόμεθα συλλογισμοῦ ἐφόδῳ τοιᾶδε.

Ἐπείπερ αἱ ῥίζαι τούτων τῶν βαθμῶν, φυσικοὶ ἀριθμοὶ οὖσαι, μονάδι ἀεί ποτε ἀλλήλων διενηνόχασιν, ἐὰν ληφθῶσιν ὁσαιδήποτε αὐτῶν, καὶ κληθῶσι λ, μ, ν, ξ,