Ι	10	35	50	25	2		
ΙΑ	11	44	77	55	11		
ΙΒ	12	54	112	105	36	2	
ΙΓ	13	65	156	182	91	13	
ΙΔ	14	77	210	294	196	49	2

ἐν μὲν ἒν τῷ πρώτῳ ὁριζοντίῳ χώρῳ ἐτέθησαν $\mu\nu$, $\mu^2\nu^2$, $\mu^3\nu^3$ κτ. ἐν δὲ τῇ πρώτῃ ὁριζοντίῳ σήλῃ ἑλληνικὰ γράμματα, ἐκδηλῦντα τὸν βαθμὸν τῆς ἐξισώσεως· οἱ δὲ ἀριθμοὶ οἱ ὑποκείμενοι τοῖς $\mu\nu$, $\mu^2\nu^2$, $\mu^3\nu^3$ κτ. εἰσὶν οἱ ζητέμενοι πολλαπλασιασαί· σαφὲς ὂν ὡς ἡ σήλη ἡ ἀντίσοιχος τοῖς $\mu\nu$ πρόοδός ἐσιν ἀριθμητικὴ ἧς διαφορὰ ἡ 1, ἣν προάγειν δυνάμεθα ἐς ὃ βυλόμεθα· ἕκασος δὲ ἀριθμὸς τῆς σήλης $\mu^2\nu^2$ τὸ ἄθροισμά ἐσι τῶν ὅρων τῆς πρὸς δεξιὰν αὐτῆς σήλης τῶν ἐνὶ χώρῳ αὐτῦ καθυπερτέρων· ὡσαύτως δὲ ϗ ἐπὶ τῶν ἄλλων σηλῶν· διὰ δὲ τυτυῒ τῦ πίνακος τῦ ὅσον ἂν τις βέλοιτο προχυθέντος ἂν, εὑρεθήσεται ἐξίσωσις παντὸς βαθμῦ περιέχυσαν μίαν ῥίζαν $\chi=\mu+\nu$· καλῶ δὲ ταύτην ἐ π ι λ ύ σ ι μ ο ν.

511. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶσα ἐξίσωσις, ἧ ἐνδεῖ τῶν ὅρων τῶν ἀρτίυ χώρυ, ϗ ἧς τῶν ὅρων οἱ συνεργοὶ ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ποσότησι $\mu\nu$, $\mu^2\nu^2$ κτ. πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ τὺς τῦ ἤδη ἐκτεθέντος πίνακος ἀριθμὺς, ἕξει μίαν ῥίζαν ὁμοίαν τῷ τύπῳ. (499).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔσω γὰρ τεταρτοβάθμιος ἐξίσωσις ἡ $\chi^4 \pm 4\alpha\chi^2 + 2\alpha^2 - \beta = 0$, ϗ παραβεβλήσθω πρὸς τὴν ἐπιλύσιμον· καὶ δὴ ἔσαι $\mu\nu = \mp \alpha$, ϗ $\mu^4 + \nu^4 = \beta$, ἐν ἧ ἀντικατασαθείσης τῆς τῦ ν δυνάμεως λαμβανομένης ἐκ τῆς προτέρας ἐξισώσεως (ἐπεὶ γὰρ $\mu\nu = \mp\alpha$· ἄρα $\nu = \frac{\mp\alpha}{\mu}$, ϗ $\nu^4 = \frac{\alpha^4}{\mu^4}$) πρυκύψει $\mu^4 + \frac{\alpha^4}{\mu^4}$

$=\beta$, ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ μ^4 γίνεται $\mu^8 + \alpha^4 = \mu^4\beta$, καὶ μεταθέσει $\mu^8 - \mu^4\beta = -\alpha^4$, ἐξίσωσις ἥτις ἐπιλυθεῖσα κατὰ τὴν μέθοδον τῶν δευτεροβαθμίων προβλημάτων δίδωσι $\mu^4 = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}$, καὶ $\mu = \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$. ἐν δὲ ταῖς ἀνωτέραις δυσὶν ἐξισώσεσιν, ἐὰν ἀντὶ τῆς δυνάμεως τοῦ ν ληφθῇ ἡ δύναμις τοῦ μ εὑρεθήσεται $\nu = \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$. ἄρα $\mu +$

$$\nu = \chi = \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} + \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}.$$

τὰ δὲ περὶ τοῦ ἐν τῷ δευτέρῳ μέρει συμβόλου — κρατεῖ τὰ αὐτὰ, ἃ εἴρηται κἀπὶ τῶν τριτοβαθμίων ἐξισώσεων.

Ἐὰν δὲ αἱ δυνάμεις τοῦ μ καὶ ν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὰς μοναδικὰς ῥίζας τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, ληφθήσονται αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς προκειμένης ἐξισώσεως· αἱ δὲ μοναδικαὶ ῥίζαι τῆς τετάρτης δυνάμεως εὑρίσκονται οὕτω· κείσθω $\chi^4 - 1 = 0$, ἥτις διαιρεθεῖσα διὰ $\chi^2 - 1 = 0$ δίδωσι πηλίκον $\chi^2 + 1 = 0$· ἡ ἄρα $\chi^4 - 1 = 0$ γινόμενόν ἐστιν ἐκ τῶν δύω ἐξισώσεων $\chi^2 - 1 = 0$, καὶ $\chi^2 + 1 = 0$, ἐπεὶ δὲ τῆς μὲν ῥίζαι εἰσὶ $1, -1$, τῆς δὲ $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$· ἄρα αἱ $1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ εἰσὶν αἱ μοναδικαὶ ῥίζαι τῆς τετάρτης δυνάμεως.

Ἐπὶ ταύτας πολλαπλασιαστέον τὰς εὑρεθείσας δυνάμεις τοῦ μ καὶ ν· τοιγαροῦν τῆς μὲν ἐξισώσεως $\chi^4 - 4\alpha\chi^2 + 2\alpha^2 - \beta = 0$ ῥίζαι εἰσὶ

$$\chi = +\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} + \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$$

$$\chi = -\sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)} - \sqrt[4]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^4}\right)}$$

$$\chi = +\sqrt[4]{\left(\tfrac{\beta}{2}+\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^4}\right)}\times(\sqrt{-1}) -$$
$$\sqrt[4]{\left(\tfrac{\beta}{2}-\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^4}\right)}\times(\sqrt{-1})$$
$$\chi = -\sqrt[4]{\left(\tfrac{\beta}{2}+\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^4}\right)}\times(\sqrt{-1}) -$$
$$\sqrt[4]{\left(\tfrac{\beta}{2}-\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^4}\right)}\times(\sqrt{-1})$$

Τῆς δὲ ἐξισώσεως $\chi^4 + 4\alpha\chi\chi + 2\alpha\alpha - \beta = 0$ ῥίζαι αἵδε.

$$\chi = +\sqrt[4]{\left(\tfrac{\beta}{2}+\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^4}\right)}-\sqrt[4]{\left(\tfrac{\beta}{2}-\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^4}\right)}$$
$$\chi = -\sqrt[4]{\left(\tfrac{\beta}{2}+\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^4}\right)}+\sqrt[4]{\tfrac{\beta}{2}-\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^4}\Big)}$$
$$\chi = +\sqrt[4]{\left(\tfrac{\beta}{2}+\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^4}\right)}\times(\sqrt{-1}) +$$
$$\sqrt[4]{\left(\tfrac{\beta}{2}+\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^4}\right)}\times(\sqrt{-1})$$
$$\chi = -\sqrt[4]{\left(\tfrac{\beta}{2}+\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^4}\right)}\times(\sqrt{-1}) -$$
$$\sqrt[4]{\left(\tfrac{\beta}{2}+\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^4}\right)}\times(\sqrt{-1})$$

512. Ἔςω ἤδη ἐξίσωσις πεμτοβάθμιος ἡ $\chi^5 - 5\alpha\chi^3 + 5\alpha^2\chi - \beta = 0$, ἥτις τῇ ἐπιλυσίμῳ παραβαλλομένη δίδωσι $\mu\nu = \alpha$, ϗ $\mu^5 + \nu^5 = \beta$, ϗ ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει ἐκ διαδοχῆς ἀντικαθιςαμένων τῶν δυνάμεων τῆς μ ϗ ν, αἳ εὑρίσκονται ἐν τῇ προτέρᾳ, ποριωθήσεται

$$\mu = \sqrt[5]{\left(\tfrac{\beta}{2}+\sqrt{\tfrac{\beta}{4}-\alpha^4}\right)} \text{ ϗ } \nu = \sqrt[5]{\left(\tfrac{\beta}{2}-\sqrt{\tfrac{\beta}{4}-\alpha^4}\right)}.$$

εἰσὶ δὲ ῥίζαι μοναδικαὶ τῆς πέμπτης δυνάμεως αἱ 1,

$$\frac{-\sqrt{5}-1\pm\sqrt{-10+\sqrt{5}}}{4},$$
$$\frac{+\sqrt{5}-1\pm\sqrt{-10-\sqrt{5}}}{4}, \text{ αἳ εὑρίσκονται}$$

λυομένης τῆς ἐξισώσεως $\chi^5 - 0 = 0$ (*). ἄρα πολλαπλασιαζομένων τῶν εὑρεθεισῶν δυνάμεων τῆς μ ϗ ν ἐπὶ ταύτας τὰς ῥίζας, ϗ τιθεμένων τῆς μὲν τῦ μ δυνάμεως $= A$, τῆς δὲ τῦ ν $= B$ πορισθήσονται αἱ ἐφεξῆς ἐξισώσεις· $\chi = A + B$

$$\chi = \frac{A\left(-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}\right)}{4} + \frac{B\left(-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}\right)}{4}$$

$$\chi = \frac{A\left(-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}\right)}{4} + \frac{B\left(-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}\right)}{4}$$

(*) Ἔςω ἐξίσωσις ἡ $\chi^5 - 1 = 0$· αὕτη ἦν διαιρεθεῖσα διὰ $\chi - 1 = 0$, πηλίκον δίδωσι $\chi^4 + \chi^3 + \chi^2 + \chi + 1 = 0$, ἥτις ἐπιλυομένη κατὰ τὺς ἐκδεδομένυς κανόνας (506) προβαλεῖ ῥίζας τὰς ἤδη ἐκτεθειμένας. ἀλλὰ περὶ εὑρέσεως τῶν μοναδικῶν ῥιζῶν ἑκάςυ τε ἰδίᾳ, καὶ καθολικώτερον παντὸς βαθμῦ, ϗ ἄλλοις διείληπται, ϗ δὴ ϗ τῷ ἀειμνήςῳ Νικηφόρῳ τῷ Θεοτόκῃ, τόμῳ Γ' τῦ ἀρτίως ἐκδοθέντος αὐτῦ Μαθηματικῦ συντάγματος §. 136 μέχρι §. 142, ὃν μετιέτω ὁ τῆς τύτων εὑρέσεως ἐφιέμενος· ἡμῖν δὲ ἀσυντελῆ ταῦτα ἐν τῇ ἀνὰ χεῖρας πραγματείᾳ, ϗ ὐδ' ἂν περὶ τύτων εἴπομεν ὐδὲν, εἰ μὴ τῶν περὶ ἐπιλύσεως τῶν ἐξισώσεων καθολικωτέρας ἀκροθιγῶς καθαπτόμενοι ἐκ τῶν τῦ Ἀββᾶ Σαυρίυ (Sauri) παρετιθέμεθα ἐνταῦθα, ἃ δὴ ϗ παρεθέμεθα.

$$\chi = \frac{A\left(\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}\right)}{4} + \frac{B\left(\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}\right)}{4}$$

$$\chi = \frac{A\left(\sqrt{5} - 1 - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}\right)}{4} + \frac{B\left(\sqrt{5} - 1 + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}\right)}{4}$$

ἐν γένει δὲ ἐὰν ἡ ἐξίσωσις περισσοβάθμιος ἡ $\chi^\pi - \pi\alpha\chi^{\pi-2}$ κτλ. $-\beta = 0$, εὑρεθήσεται ἀεὶ μία ῥίζα $\chi = \sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^\pi}\right)} + \sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^\pi}\right)}$, ἧς τὰ ῥιζικὰ σύμβολα ἐμφαίνουσιν αἱ σύστοιχοι μοναδικαὶ ῥίζαι. τῶν δὲ ἀρτιοβαθμίων ἐξισώσεων, ὧν λειπτικὸς ὁ δεύτερος ὅρος, ὡς $\chi^\pi - \pi\alpha\chi^{\pi-2}$ κτλ. $-\beta = 0$, ἔσονται δύω ῥίζαι αἱ $\chi = \pm \sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^\pi}\right)} \pm \sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^\pi}\right)}$· ἐὰν δὲ ὁ δεύτερος ὅρος ἔχῃ τὸ σύμβολον $+$, ἔσονται ῥίζαι δύω αὗται $\chi = \pm \sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^\pi}\right)} \mp \sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^\pi}\right)}$.

Σημειωτέον δὲ, ὅτι π ἀρτίου ὄντος, $-\alpha^\pi$ ἀεί ἐστι ποσὸν λειπτικόν· περισσοῦ δὲ ὄντος τοῦ π, λειπτικὸν μὲν ἔσται, εἰ α εἴη ὑπαρκτικὸν, ὑπαρκτικὸν δὲ, εἴπερ α εἴη λειπτικόν· ἵνα δὲ γνωσθῶσιν αἱ ἄλλαι ῥίζαι, εὑρετέον τὰς μοναδικὰς ῥίζας τοῦ βαθμοῦ π, εἶτ' οὖν ἐπιλυτέον τὴν ἐξίσωσιν $\chi^\pi - 1 = 0$, καὶ ἐφ' ἑκάστην αὐτῶν πολλαπλασιαστέον τὰ ποσὰ $\sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^\pi}\right)}$, $\sqrt[\pi]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta\beta}{4} - \alpha^\pi}\right)}$.

Μέθοδος, καθ' ἣν ἐν ἀριθμοῖς ἐπὶ τῶν ἀλόγȣς ῥίζας περιεχȣσῶν ἐξισώσεων, ὅτι ἔγγιςα τῶν ἀληθῶν γινόμεθα.

513. α'. Εὑρεθήτωσαν πάντες οἱ διαιρέται τȣ̃ ἐσχάτȣ ὅρȣ (489) τῆς δεδομένης φέρ' εἰπεῖν ἐξισώσεως $\chi^3 - 5\chi + 6 = 0$ ὑπαρκτικοί τε ϗ λειπτικοὶ, εἴτ' ȣ̃ν 1, 2, 3, 6, — 1, — 2, — 3, — 6. β'. ἀντικαταςαθήτωσαν κατὰ τὸ ἐφεξῆς ἕκαςος τȣ́των ἀντὶ χ, ἔςτ' ἂν μεταλλαγῇ τὸ σύμβολον τȣ̃ συμποσώματος τῆς ἐξισώσεως· ἡ δὲ ῥίζα ἔςαι ποσότης μεταξὺ κειμένη τῆςτε, καθ' ἣν τὸ σύμβολον μετήλλακται, καὶ τῆς προτέρας· ȣ̃κȣ̃ν ἐν τῷ προκειμένῳ ὑποδείγματι ἔςαι

$+1$ . . .	1	-5	$+6$	$=$	$+$	3
$+2$ . . .	8	-10	$+6$	$=$	$+$	4
$+3$ . . .	27	-15	$+6$	$=$	$+$	18
$+6$ . . .	216	-30	$+6$	$=$	$+$	192
-1 . . .	-1	$+5$	$+6$	$=$	$+$	10
-2 . . .	-8	$+10$	$+6$	$=$	$+$	8
-3 . . .	-27	$+15$	$+6$	$=$	$-$	6

ἐπεὶ τοίνυν ἀντικαταςάσει τȣ̃ — 3 ἡ ἐξίσωσις ἐξ ὑπαρχȣ́σης ἀπέλιπε, δῆλον ὅτι ἡ ἀληθὴς ῥίζα μεταξὺ κεῖται — 2 ϗ — 3· εἰλήφθω ȣ̃ν ῥίζα τῆς ἐξισώσεως ἡ — 2, 5, ἧς ἀντικαταςαθείσης ἀντὶ χ εὑρίσκεται συμπόσωμα + 2, 875, ποσότης ἀμέλει ὑπαρκτική· ȣ̃κȣ̃ν ἡ ἀληθὴς ῥίζα κείσεται μεταξὺ — 2, 5 ϗ — 3· εἰλήφθω ȣ̃ν ἡ — 2, 7, ἧς τῇ ἀντικαταςάσει ἡ ἐξίσωσις γίνεται — 0, 183, τȣτέςι ποσότης λειπτική· ἐπεὶ τοίνυν ἡ μὲν — 2, 5 δίδωσι ποσὸν ὑπαρκτικὸν, ἡ δὲ — 2, 7 ποσὸν λειπτικὸν, ἡ δύναμις τῆς χ κείσεται πάντως μεταξὺ $-2,5$ ϗ $-2,7$· ἔςω ἓν ἡ $-2,6$, ἧς ἀντικαταςαθείσης γίνεται ἡ ἐξίσωσις $+0,424$· ἐπεὶ δὲ τῦτο ὑπάρχει δῆλον, ὅτι ἡ ἀληθὴς ῥίζα ἐνυποκρύπτεται μεταξὺ $-2,6$ ϗ $-2,7$, εἴτ' ἓν ἔςι $-2,6$ μετά τινος κλάσματος, ἧττονος ἢ δεκατημόριον ταύτης τῆς ποσότητος, ἢ δῆλον· κληθήτω δὲ τῦτο τὸ κλάσμα ξ· ϗ δὴ ἔςαι $\chi=-2,6-\xi$· ἐπεὶ δὲ $\xi<\frac{1}{10}$· ἄρα ξ^2 πολὺ $<\frac{1}{100}$, ϗ ξ^3 πολὺ ἔτι $<\frac{1}{1000}$· διὸ αἱ δυνάμεις τῦ ξ^2 ϗ ξ^3 παροφθῆναι ἔχυσι πρός γε τὸ ὅλον ποσόν· ἀντικαταςαθεισῶν τοιγαρῦν ἀντὶ χ^3 τῶν δυνάμεων τῶν ἀπὸ $-2,6-\xi$ ἐν τῇ ἐξισώσει, προκύψει ἥδε ἡ ἐξίσωσις·

$$\chi^3=(-2,6+\xi)^3=(-2,6)^3+3(-2,6)^2\xi$$
$$-5\chi=-5(-2,6+\xi)=-5(-2,6)$$
$$-5\xi+6=0$$

τὸ δὲ ἐκ μόνης τῆς ἀντικαταςάσεως συμπόσωμα ἔςαι· $(-2,6)^3+3(-2,6)^2\xi-5(-2,6)-5\xi+6=0$

εἴτ' ἓν $(-2,6)^3=-17,566$

$$\begin{array}{lll}
+3(-2,6)^2\xi = & & +20,28\xi \\
-5(-2,6) = & +13,000 & \\
-5\xi \;\ldots = & & -5\xi \\
+6 \;\ldots = & \ldots\ldots\ldots & +6=0 \\
\hline
\end{array}$$

τὸ δ' ὅλον συμπόσωμα $=-4,566+15,28\xi+6=0$; ὅπερ ἀναγωγῇ γίνεται $=+15,28\xi+1,424=0$,

εἴτ' ἓν $15,28\xi=-1,424$, ϗ $\xi=-\dfrac{1,424}{15,28}$,

ὅ ἐςιν ἐν δεκαδικοῖς $\xi=-0,09$· ὑκῦν ἡ δύναμις τῆς χ, εἴτ' ἓν $\chi=-2,6+\xi$ γίνεται $\chi=-2,6-0,09$, ὅ ἐςι $\chi=-2,69$.

Βυλομένοις δὲ ἐντελεςέραν εὑρεῖν τὴν τῆς χ δύναμιν, θετέον $\chi=-2,69+\tau$· τοιγαρῦν ἔςαι

$$\chi^3 = (-2,69)^3 + 3(-2,69)^2 . \tau$$
$$-5\chi = -5(-2,69) - 5\tau$$
$$+6 = +6$$

τῶν δὲ πράξεων, ὡς ἀνωτέρω ἐκπερανθεισῶν, $-0,015109 + 16,7083\tau = 0$· ὅθεν ἀποισόμεθα $\tau = \frac{0,015109}{16,7083}$, τουτέστι $\tau = 0,000904$· ἡ τοίνυν δύναμις τῆς χ, εἴτ' οὖν $\chi = -2,69 + \tau$ γίνεται $\chi = -2,69 + 0,000904 = -2,689096$.

Εἰ δέ τις βούλοιτο ἔτι ἐγγυτέρω τῆς ἀληθείας πελάσαι, λαβέτω $\chi = -2,689096 + \upsilon$, καὶ ἐπαναλαβέτω τὰς πράξεις ὡς ἀνωτέρω. Τὰ αὐτὰ δὲ πραχθήσεται καὶ ἐπὶ ἐξισώσεων καθυπερτέρων, ἐὰν βουλομένοις ἡμῖν ᾖ διὰ ταύτης τῆς Μεθόδου τὴν ὡς ἔγγιστα τῆς ἀληθοῦς ἀριθμητικὴν ῥίζαν εὑρίσκειν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ Ἀορίστων Προβλημάτων.

514. Προβλήματα ἀόριστα καλεῖται, ὧν πλείους αἱ ἄγνωστοι ποσότητες, ἤπερ αἱ θέσεις (438), καὶ ἅπερ ἀεὶ μὲν πολλάς, τὰ πολλὰ δ' ἀπείρους ἐπιλύσεις ὑφίσταται· οὐκ ἂν οὖν λογιζόμενοι τῷ τὴν ἐξίσωσιν ἐπιλῦσαι τὴν ἰδίαν τῆς ἀγνώστου προσδιορίσαιμεν δύναμιν.

515. Ταύτης ἄρα φύσεως ἔχουσι πάντα τὰ δευτεροβάθμια προβλήματα· κἂν γὰρ μία μὲν αὐτῶν ἡ ἐξίσωσις, μία δὲ καὶ ἡ θέσις, ἀεὶ μέντοι δύω αὐτῶν αἱ ἄγνωστοι ἡ μὲν ὑπαρκτική, λειπτικὴ δὲ ἡ ἑτέρα (457)· καὶ

δὴ ὁ τὸ πρόβλημα ἐπιλύσας ἐκ ἂν ὁρίσειεν ὁποτέραν τῶν δύω ὁ προτείνας ὑπέθετο· ταυτὸν δὲ γενικῶς ῥητέον ϗ περὶ τῶν ὑπερτέρων μὲν, ἀρτιάριθμον δὲ δείκτην ἐχȣσῶν, ἐξισώσεων (127).

516. Ἀλλὰ ϗ πᾶσα ἐν γένει ἐξίσωσις σύνθετος θεωρηθείη ἂν ὡς Ἀόριςον πρόβλημα· τοσαχῶς γὰρ αὐτῶν ἑκάςη ἐπιλυθήσεται διαφόρως, ὅσων μονάδων ἐςὶ περιεκτικὸς ὁ τὸν βαθμὸν αὐτῶν παριςὰς ἀριθμός.

517. Οὐ μὴν ἀλλὰ ϗ τὰ τῇ καλȣμένῃ τῆς συγκράσεως μεθόδῳ ἐμπεριεχόμενα προβλήματα ὁμοφυῆ τȣτοις ὄντα κατείδομεν (Ἀριθ. 285)· ϗ τῆς κράσεως γὰρ γινομένης, ϗ δυνατὸν ὂν τὰς διαφόρȣς ἐξ ὧν αὕτη ὕλας ὁρίσασθαι, ἀδύνατον μέντοι ὁρίσασθαι ἥτις πραγματικῶς ἔχε χώραν· ϗ ταῦτα τοίνυν ἔσεται Ἀόριςα προβλήματα.

518. Τελευταῖον δὲ, τῶν ἁπλῶν, ἢ πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἀόριςα ὑπάρχει, ὧν αἱ ἄγνωςοι πλείȣς τῶν θέσεων, ϗ δὴ ϗ τῶν ἐξισώσεων, ϗ ἀπείρȣς ἐπιλύσεις ὑφίςαται.

Εἴρηται ἤδη (438) ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\chi + y = 15$ ἀπειραχῶς ἂν ἐπιλυθείη, ἐν γένει ἀλλ' ȣ̓ν ἐκληφθεῖσα, ϗ περιορισμῶν ἄτερ· τῷ μέντοι ζητȣ̃ντι μόνας ποσότητας ὑπαρκτικὰς ἄπειροι ἐπιλύσεως ἐξαιρȣ̃νται τρόποι· ἄπειροι δὲ ϗ τῷ θέλοντι μόνον ὁλοχερεῖς· ϗ ȣ̔́τω περιγραφήσεται ἡ ἐπίλυσις τρόποις μόνον τέσσαρσι ϗ δέκα, $1 + 14, 2 + 13$ κτλ.· ἐπιεικῶς γὰρ εἰ κόμμα τι ἀνθρώπων 15, ἐξ ἀνδρῶν ἅμα ϗ γυναικῶν συμπληρῶτο ἀορίςως, καί τις ὅσοι μὲν ἐκεῖνοι, ὅσαι δ' αὗται εἴησαν πύθοιτο, ȣ̓δένα κλασματώδη ἀριθμὸν τὸ πρόβλημα ὑποςήσεται· ȣ̓ γὰρ ἐξέςαι εἰπεῖν ὡς ἦν ἥμισυς ἀνὴρ, ϗ $14\frac{1}{2}$ γυναῖκες.

519. Παρὰ τοίνυν τὰ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ εἰρημένα

ἐπὶ τῆς μεθόδȣ τῆς συγκράσεως, ϗ τὰ ἐνταῦθα ἐπὶ τῶν ἄλλων ἀορίςων προβλημάτων, ἀποδώσομεν ἔτι περὶ τούτων τὴν ἐφεξῆς γενικὴν Μέθοδον.

520. α΄. Μίαν τινὰ τῶν ἀγνώςων ἀναδεικτέον μόνην ἐπὶ θατέρȣ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν.

521. β΄. Πρὸς τὸ δοκῦν ἀφοσιωτέον τῇ ἐπὶ θάτερα ἀγνώςῳ δύναμίν τινα μὴ ἀντιπίπτȣσαν τῷ προβλήματι· ϗ ἐκ τȣ́τȣ ἕψεται ἡ τῆς μόνης ἐπὶ θάτερα ἀγνώςȣ δύναμις· ἐντεῦθεν δὲ ποριωθήσεται ϗ ἡ τῆς τρίτης· ἰδȣ̀ δὴ μία τις λύσις τȣ̃ προβλήματος.

522. γ΄. Ἀποδοτέον ἔτι τῇ μὴ μόνῃ ἀγνώςῳ ποσότητι ἄλλην τινὰ δύναμιν, οἵαν μὴ ἀντιπίπτειν τῷ προβλήματι· κἀκ τȣ́τȣ συναχθήσεται ἄλλη τῆς μόνης ἀγνώςȣ δύναμις· δευτέρα αὕτη τȣ̃ προβλήματος λύσις.

523. Καὶ ἐφεξῆς πρακτέον ὡσαύτως, ἐς ὃ ἀφικώμεθα ἐπ᾽ ἀριθμὸν μεγιςον, ἢ ἐλάχιςον, ἔνθ᾽ ἂν ἴδοιμεν, ὡς ἅπασα τȣ̃ προβλήματος λύσις ἄλλη ὑπάρχει ἀδύνατος.

524. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἄνθρωποι 20 ἐμισθώσαντο ναῦν ἀργυρίων 58· ϗ οἱ μὲν ἄνδρες αὐτῶν ἐτέλεσαν 4 ἕκαςος· ἑκάςη δὲ τῶν γυναικῶν, 3· τῶν δὲ παιδίων, 1· πόσοι ἆρ᾽ ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες, καὶ παιδία πόσα;

ΛΥΣΙΣ. Δύω εἰσὶ δήπȣ ἐνταῦθα αἱ θέσεις· ϗ ἡ μὲν πρώτη τίθησιν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν χ, ϗ τῶν γυναικῶν ψ, ϗ τῶν παιδίων ω, ἐξισȣ̃σαι τῷ 20, ὅ ἐςιν $\chi + \psi + \omega = 20$· ἡ δευτέρα, ὅτι ὁ τετράκις εἰλημμένος ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, ϗ ὁ τρὶς τῶν γυναικῶν, ϗ ὁ ἅπαξ τῶν παιδίων, συμπληρȣ̃σιν ἀργύρια 58, ὅ ἐςι $4\chi + 3\psi + \omega = 58$.

Τοιγαρȣ̃ν ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἡ δύναμις τῆς

χ ἔςι $\chi = 20 - \upsilon - \omega$, ἥτις ἀντὶ χ ἀντικαταςᾶσα ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀποτελεῖ αὐτὴν $80 - 4\upsilon - 4\omega + 3\upsilon + \omega = 58$, ἀναγωγῇ δὲ $80 - \upsilon - 3\omega = 58$· μεταθέσει δὲ ϗ ἀναγωγῇ $22 - \upsilon = 3\omega$· ἄρα $\omega = \frac{22 - \upsilon}{3}$

Φυλακτέον δὲ μὴ ἀποδῶμεν τῇ υ δύναμίν τινα, ἥτις ἀφαιρεθεῖσα ἀπὸ 22 καταλείπει τι, ὃ διαιρεθὲν διὰ 3 δίδωσι δύναμιν τῆς ω κλασματικὴν (518)· ὑποτεθέντος οὖν $\upsilon = 1$, τὸ κατάλοιπον $\frac{21}{3} = 7$ ἀναδίδωσι τὴν τῆς ω δύναμιν.

Αὗται δὲ αἱ δυνάμεις τῆς υ ϗ ω εἰσαχθεῖσαι ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi + \upsilon + \omega = 20$, ἀναδιδόασι 12 δύναμιν τῆς χ· οὐκοῦν ἦσαν ἐπὶ τῆς νηὸς 12 μὲν ἄνδρες, 1 δὲ γυνὴ, ϗ παιδία 7· εἴγε $1 \times 3 + 7 \times 1 + 12 \times 4 = 58$· πρώτη λύσις τοῦ προβλήματος.

Τιθεμένης δὲ $\upsilon = 2$, ἢ $= 3$, τὸ κατάλοιπον τοῦ 22, διαιρεθὲν διὰ 3, ἀπεργάζεται κλάσμα· τιθεμένης μέντοι $\upsilon = 4$, τὸ κατάλοιπον 18 διαιρούμενον διὰ 3 δίδωσιν $6 = \omega$, ϗ δὴ $\chi = 10$· ἦσαν ἄρα οὕτως ἄνδρες μὲν 10 γυναῖκες δὲ 4, ϗ παιδία 6· ϗ ἐξ αὐτῶν γένοιτ' ἂν $4 \times 3 + 6 \times 1 + 10 \times 4 = 58$· δευτέρα ἐπίλυσις.

Αἱ δυνάμεις 5 ϗ 6 ἀνοίκειοι εὑρίσκωνται τῇ υ· τιθεμένης μέντοι $\upsilon = 7$, ἡ δύναμις τῆς ω ἔςαι $\frac{15}{3} = 5$, ἡ δὲ $\chi = 8$· ἦσαν ἄρα 8 μὲν ἄνδρες, 7 δὲ γυναῖκες, παιδία δὲ 5. τρίτη ἐπίλυσις.

Αἱ δυνάμεις 8 ϗ 9 ἀποδοκιμαςέαι ὑπὲρ τῆς υ· ἀλλὰ 10 ἐφαρμόττων τῇ υ δίδωσιν $6 = \chi$ ϗ $4 = \omega$· τετάρτη δὴ αὕτη λύσις.

Ἐὰν τεθῇ $13 = \upsilon$, ἔςαι $3 = \omega$, καὶ $4 = \chi$· πέμπτη ἐπίλυσις.

Ἐὰν τεθῇ $16 = \upsilon$, ἔςαι $2 = \omega$, καὶ $2 = \chi$· ἕκτη καὶ ἐσχάτη ἐπίλυσις· ἐκ γὰρ 17 καὶ 18 κλασματικαὶ προέρχονται δυνάμεις, ἐκ δὲ 19, πρόεισιν $1 = \omega$, καὶ $0 = \chi$

ΣΧΟΛΙΟΝ. Εὐχερῶς κατανοεῖται, ὡς τὸ προτεθὲν πρόβλημα ὁμοφυὲς ὑπάρχει τοῖς τῆς καλουμένης μεθόδου τῆς συγκράσεως (Ἀριθ. 283. καὶ ἑξῆς)· ἡ ἄρα προηγουμένη μέθοδος γενικῶς ἐφαρμοσθῆναι δυνήσεται τοῖς τοιοῖσδε τὴν φύσιν προβλήμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τρεῖς ἀριθμοὺς εὑρεῖν, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα εἴη 174, μεταξὺ δ᾽ ἀλλήλων ἡ αὐτὴ διαφορά.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςωσαν χ, υ, ω οἱ τρεῖς ἄγνωςοι ἀριθμοὶ, καὶ $174 = \alpha$.

Ἡ μὲν οὖν πρώτη θέσις ἐςὶ $\chi + \upsilon + \omega = \alpha$, ἡ δὲ δευτέρα $\chi - \upsilon = \upsilon - \omega$.

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως μεταθέσει γενομένης $\chi = \alpha - \upsilon - \omega$, εἰσαχθείσης τῆς κατὰ τὴν χ δυνάμεως ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἔςαι $\alpha - \upsilon - \omega - \upsilon = \upsilon - \omega$· ἄρα $\alpha = 3\upsilon$ καὶ $\upsilon = \frac{\alpha}{3} = 58$.

Ἀντικαταςήτω ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἡ τῆς υ δύναμις, καὶ δὴ ἔςαι $\chi + \frac{\alpha}{3} + \omega = \alpha$· ἄρα $\chi = \alpha - \frac{\alpha}{3} - \omega$, ἢ $\chi = 116 - \omega$.

Ὠκειώσθω πρὸς τὸ δοκοῦν δύναμις τῇ ω, ἐλάττων μέντοι ἢ ἡ 58 δύναμις τῆς υ, ὑποτιθεμένοις μείζω μὲν τὴν χ, μέσην δὲ τὴν υ, ἐλάττω δὲ πασῶν τὴν ω· ταύτης δὲ ἀπὸ 116 ἀφαιρεθείσης, καταλειφθήσεται ἀεὶ ἡ τῆς χ δύναμις· ἐὰν γὰρ ᾖ $\omega = 1$ ἔςαι $\chi = 115$· καὶ δὴ α′. $115 + 58 + 1 = 174$· β′. $115 - 58 = 57$, ϗ $58 - 1 = 57$.

Τὸ δὲ πρόβλημα ἐπιλυθήσεται ϗ ἂν ὑποτεθῇ $\omega = \frac{1}{4}$, ϗ ἡ ἑπομένως $\chi = 115\frac{3}{4}$· ϗ ὡς γὰρ ἔσαι $\div\ 115\frac{3}{4}$· 58· $\frac{1}{4}$· δῆλον ἄρα, ὅτι τὸ πρόβλημα τόδε τοσαχῶς λυθήσεται, ὅσοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουσι μεταξὺ 58 ϗ 0 εἴτε κλασματίαι, εἴτε τῶν ὁλοχερῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ′. Ἀριθμοὺς εὑρεῖν δύω χ, ψ, ὑφ᾽ ὧν τὸ γινόμενον διαιρεθὲν διὰ τῆς μεταξὺ αὐτῶν διαφορᾶς ω παρέχοι $13\frac{1}{3}$.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ θέσις ἐςὶν, ὅτι $\frac{\chi\psi}{\omega} = 13\frac{1}{3}$ (Π)· ἐπεὶ δὲ ἡ ἐξίσωσις τρεῖς μὲν περιέχει ἀγνώςους, μίαν δὲ ἐγνωσμένην, ἀποδεδόσθω τὸ κατ᾽ ἀρχὰς μιᾷ τινι τῶνδε τῶν ἀγνώςων τῇ ψ, φέρε, δύναμίς τις πρὸς τὸ δοκοῦν, φέρε ἡ 5· ὑποτιθεμένου δὲ $\chi > \psi$, ἔσαι $\chi = 5 - \omega = \psi - \omega$· οὐκοῦν $\chi\psi = 25 + 5\omega$· ἡ δὲ Π ἐξίσωσις ἔσαι $\frac{25 + 5\omega}{\omega} = 13\frac{1}{3}$· ἀφανισμῷ τοῦ κλάσματος, $75 + 15\omega = 40\omega$· ἢ $75 = 25\omega$· ἄρα $\omega = \frac{75}{25} = 3$.

Εἰσαχθεισῶν δὲ ἐπὶ τῆς Π ἐξισώσεως τῶν δυνάμεων 5 ϗ 3 ἀντὶ ψ ϗ ω, ἔσαι $\frac{\chi \times 5}{3} = 13\frac{1}{3}$· ἄρα $\chi \times 5 = 40$ (125)· ἄρα $\chi = \frac{40}{5} = 8$.

Οἱ ζητούμενοι ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ εἰσὶν 8, 5, 3· ἔςι γὰρ $\frac{8 \times 5}{3} = 13\frac{1}{3}$.

Ἐὰν δὲ ἀντὶ 5 τεθῇ ἑτέρα τις δύναμις τῆς ψ, φέρ᾽ εἰπεῖν, 6, 4, κτ., τῆς πράξεως ὡσαύτως ἐκπερανθείσης ποριοθήσονται καὶ ἄλλοι δύω ἀριθμοὶ, οἳ σὺν τῷ κατὰ τὸ δοκοῦν ληφθέντι πληρώσουσι τὴν τοῦ προβλήματος θέσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τοῦ λογισμοῦ τῆς ὡς ἀπείρου θεωρουμένης ποσότητος.

525. Ἄπειρον ποσότητα καλῶ, ἧς μείζονα ἐπινοῆσαι οὐ δυνάμεθα· τοὐναντίον δὲ Ἀπείρως ἐλαχίστην, ἢ ἀπειροστὴν, τὴν ἁπάσης δεδομένης ἐλάττονα.

526. α΄. Ἄρα τὸ ἄπειρον περιέχει ἅπαν ὡρισμένον ποσὸν ἀπειράκις εἰλημμένον· ἄλλως γὰρ πολλαπλασιαζομένου τοῦδε τοῦ ποσοῦ ἐπὶ τὸν πεπερασμένον ἀριθμὸν τὸν ἐμφαίνοντα, ὁσάκις τουτὶ ἐμπεριέχεται τῷ ἀπείρῳ, ἀποληφθήσεται (Αριθ. 107.) ἀντὶ τοῦ ἀπείρου ποσόν τι πεπερασμένον, ὅπερ ἀντίκειται τῷ τοῦ ἀπείρου ὁρισμῷ.

527. β΄. Ἐξέσαι ἐπινοῆσαι τά τε ἄπειρα καὶ τὰ ἀπειροστὰ ἐν ἀπείροις τάξεσιν· εἰ γὰρ διαγνωσθῶσιν αἱ τῶν ἀπείρων τάξεις διὰ τῶν παντοίων δεικτῶν, ὧν ἔχειν δύναται τὸ σημεῖον ∞, δυνάμεθα ἐπινοῆσαι $\infty \times \infty = \infty^2$· καταφανὲς ὂν, ὅτι $\infty, = \infty^1$ ἐμφαίνει ἄπειρον πρώτης τάξεως· ∞^2 δὲ, ἄπειρον δευτέρας τάξεως· ὡσαύτως $\infty^2 \times \infty = \infty^3$· $\infty^3 \times \infty = \infty^4$· ἐντεῦθεν ἄρα ἀναφύεται θαυμασίως ἄπειρος πρόοδος παντοίας τάξεως ἀπείρων $\div\!\!\div$

$$\infty^1 : \infty^2 : \infty^3 : \infty^4 : \infty^5 \ldots\ldots \infty^\infty$$ · ὡσαύτως $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} =$

$\frac{1}{\infty^2}$. $\frac{1}{\infty^2} \times \frac{1}{\infty^1} = \frac{1}{\infty^3}$ κτλ. ὅθεν ἡ πρόοδος συγκειμένη ἐξ [illegible] ἀπείρων τάξεων ἐν $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} : \frac{1}{\infty^3} . \frac{1}{\infty^4} : \frac{1}{\infty^5}$

$. . . . . \frac{1}{\infty^n} .$

528. Τὸ πρώτης τάξεως ἄπειρον ἀπειράκις ἐμπεριέχεται τῷ δευτέρας τάξεως· τὸ πρῶτον ἄρα ἐςὶν ἀπειροςὸν μέρος τοῦ δευτέρου, εἴτ᾽ οὖν ἀπείρως μικρὸν πρὸς γοῦν τὸ δεύτερον· ταυτὸν δὲ ῥητέον καὶ περὶ δευτεροταγοῦς ἀπείρου παραβαλλομένου πρὸς τριτοταγές· ἐν γένει δὲ ἅπαν ἄπειρον ἀπείρως τυγχάνει μικρὸν ἀναφερόμενον πρὸς ἄλλο καθυπερτέρας τάξεως· τοὐναντίον δὲ τὸ πρώτης τάξεως ἀπειροςὸν ἀπειράκις ἐςὶ περιεκτικὸν ἀπειροςοῦ δευτεροταγοῦς, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

529. Ἐὰν προςεθῇ τῷ ἀπείρῳ, ἢ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ, ἄπειρόν τι τάξεως κατωτέρας, τὸ πρῶτον ἄπειρον διαμενεῖ ἀμετάτρεπτον· καὶ γὰρ πᾶν κατωτέρας τάξεως ἄπειρον οὐδέν ἐςιν ἀλλ᾽ ἢ ἀπειροςὸν μέρος τοῦ ὑπερτέρας τάξεως ἀπείρου (528)· οὐκοῦν ἐὰν τῷ δευτέρῳ προςεθῇ, ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ᾽ αὐτοῦ, τὸ δεύτερον αὐξηθήσεται, ἢ μειωθήσεται, ἀπείρως μικρῷ ποσῷ· ἐὰν ἄρα τὸ δεύτερον ἐκληφθῇ τὸ αὐτὸ, ὡς καὶ πρὸ τοῦ, ἡ ἀπάτη ἀπείρως οὖσα μικρὰ δυνήσεται ὡς μηδὲν ἐκλογισθῆναι.

530. Τῇ αὐτῇ τοῦ συλλογίζεσθαι ἐφόδῳ καταφαίνεται α. ἅπαν ἄπειρον σὺν ἢ πλὴν ἀριθμοῦ τινος, ἢ ὁτουοῦν ἀπείρως μικροῦ ποσοῦ, μενεῖ τὸ αὐτὸ, εἴτ᾽ οὖν οὔτε αὐξηθὲν μεγεθυνθήσεται, οὔτε ἀφαιρεθὲν, σμικρυνθήσεται· β. ἅπας ἀριθμὸς πεπερασμένος σὺν ἢ πλὴν ἀπειροςοῦ ἄτρεπτος ἔσεται.

531. Ἐὰν ἐπ᾽ ἄπειρον ποσὸν ἄπειρον πολλαπλασιασθῇ, τὸ γινόμενον ἔςαι ἄπειρον τάξεως ἐμφαινομένης ὑπὸ

τοῦ ἀθροίσματος τῶν δεικτῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου, καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ· $\infty \times \infty = \infty^2$· $\infty^2 \times \infty^2 = \infty^4$ (40).

532. Τὸ ἄπειρον πολλαπλασιασθὲν ἐπ' ἀριθμὸν πεπερασμένον, δέον τούτῳ γίνεσθαι μεῖζον ἢ πρότερον, ἔσται ἔνεισι μονάδες τῷ πεπερασμένῳ πολλαπλασιαστῇ, (Ἀριθ. 72) τὸ δὲ ἐπὶ τῆς αὐτῆς, ἧς καὶ πρὶν ἦν, μένει τάξεως· μ οὖν κληθέντος τοῦ πεπερασμένου ἀριθμοῦ, ἔσται $\infty \times \mu = \mu\infty$· ἄρα $\mu\infty$ τῆς αὐτῆς ἐστι τάξεως, ἧς καὶ τὸ ∞ (527).

533. Τὸ ἐπ' ἄπειρον καὶ ἀπειροστοῦ γινόμενον ἐξισοῦται 1· καὶ γὰρ $\infty \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty \times 1}{\infty} = 1$ (57).

534. Τὸ ὑπὸ παντὸς ἀριθμοῦ καὶ τοῦ $\frac{1}{\infty}$ γινόμενον ἐξισοῦται ἀπειροστῷ μέρει τοῦδε τοῦ ἀριθμοῦ· τοῦ γὰρ πεπερασμένου τοῦδε ἀριθμοῦ κληθέντος α, ἔσται $\alpha \times \frac{1}{\infty} = \frac{\alpha \times 1}{\infty}$ (Ἀριθ. 192) $= \frac{\alpha}{\infty}$.

535. Ἐὰν ἄπειρον διαιρεθῇ δι' ὁμοταγοῦς ἀπείρου, μήτε συνεργὸν, μήτε παρωνυμικὸν ἔχοντος, τὸ πηλίκον ἔσται ἴσον μονάδι· εἴγε $\frac{\infty^\mu}{\infty^\mu} = 1$· ἐὰν δὲ ἄπειρον δι' ἀπείρου ἐλαττονταγοῦς διαιρεθῇ, τὸ πηλίκον ἔσται ἄπειρον ἔχον δείκτην τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ διαφέρει ὁ τοῦ διαιρετέου δείκτης τοῦ κατὰ τὸν διαιρέτην· $\frac{\infty^4}{\infty^2} = \infty^2$· καὶ δὴ καὶ

$\frac{\infty^3}{\infty^3} = \infty^0$.

530. Τὸ ἄπειρον διαιρεθὲν δι' ὁποσοῦν πεπερασμένου

ἀριθμῷ τοῦ π, τὸ πηλίκον φέρει $\frac{\infty^2}{\pi}$ μένει ἀεὶ ἄπειρον ὁ-μοταγὲς τῷ ἐν ἀρχῇ ληφθέντι (527)· ἐὰν δὲ διαιρεθῇ δι᾽ ἀπειροστοῦ, ἀποτελεῖται ἄπειρον, οὗ τὴν τάξιν ἐμφαίνει ὁ τοῦ διαιροῦντος ἀπειροστοῦ δείκτης σὺν μονάδι· ∞ οὖν διαιρεθὲν διὰ $\frac{1}{\infty}$ ἰσοῦται τῷ $\frac{\infty}{1} \times \frac{\infty}{1} = \frac{\infty^2}{1} = \infty^2$.

537. Κἂν δὲ 1 διαιρεθῇ διὰ $\frac{1}{\infty}$, πηλίκον ἐστὶ ∞, ἐπεὶ γὰρ $1 = \frac{1}{1}$· οὐκοῦν 1 διαιρεθὲν διὰ $\frac{1}{\infty}$, $= \frac{1}{1} \times \frac{\infty}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$.

538. Κἂν ἄρα πεπερασμένος ὁστισοῦν ἀριθμὸς διαιρεθῇ διὰ $\frac{1}{\infty}$, τὸ πηλίκον ἐστὶ τοσάκις ἄπειρον, ὅσων μονάδων περιεκτικὸς ὑπάρχει ὁ διαιρετέος· 4 γὰρ διαιρεθεὶς διὰ $\frac{1}{\infty} = \frac{4}{1} \times \frac{\infty}{1} = \frac{4\infty}{1} = 4\infty$.

539. Κἂν 0 ληφθῇ ὡς ποσὸν ἀπειροστόν, ἐστι $\frac{1}{0} = \infty$, καὶ $0 = \frac{1}{\infty}$· ἀλλὰ γὰρ τὸ 0 οὐκ ἐκδεκτέον ὡς καθαρὸν μηδέν· ἢ οὐκ ἂν εἴη $\frac{1}{0} = \infty$, ὡς ὀρθῶς πάνυ συνεῖδεν ὁ σοφὸς Εὔλερος· ἐφ᾽ ἁπάσης γὰρ διαιρέσεως ἐπάναγκες παρεῖναι ποσότητα, ἣ καλεῖται διαιρετέος, καὶ ἄλλην, ἣ διαιρέτης ἤκουσεν, ἄμφω δὲ ὁμοφυεῖς· εἰ τοίνυν μὴ εἴη ποσότης τὸ 0, οὐδὲ τὸ πηλίκον τὸ διαιρέσει τῆς 1 διὰ 0 εἴη ἂν ποσόν.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ποσότης ἐστὶν ἡ αὐξήσεως καὶ μειώσεως ἐπιδεκτική (Ἀριθ. 2.)· οὐκ ἄρα εἰπεῖν ἂν ἔχοιμεν τὸ ἄπειρον ποσότητα εἶναι, ἢ προσέλαβεν ἁπάσας τὰς δυνατὰς ἐπαυξήσεις· οὕτω γὰρ τοῦ ποσότητα εἶναι ἐκπίπτει· ἄλλως τε οἴδαμεν ὡς πᾶσα ποσότης μεγεθύνεται προστιθεμένης καὶ τῆς ἐλαχίστης ποσότητος.