$\sqrt{\frac{49}{4}})=\sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}+\sqrt[3]{\frac{9}{2}-\frac{7}{2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}+\sqrt[3]{\frac{2}{2}}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1}=2+1=3$, ὅς ἐςιν ἀριθμὸς ὁ ζητέμενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν ὅπως ἡ τȣ̃ ἀπ' αὐτȣ̃ κύβȣ πρὸς τὸ αὐτȣ̃ τριπλȣ̃ν διαφορὰ ᾖ $=2$.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ θέσις τȣ̃ προβλήματος δίδωσι $\chi^3-3\chi=2$, εἴτ' ȣ̃ν $\chi^3-3\chi-2=0$· παραβαλλομένης δὲ ταύτης τῆς ἐξισώσεως πρὸς τὴν γενικὴν $\chi^3-3\alpha\chi-\beta=0$, εὑρίσκεται $3\alpha=3$, εἴτ' ȣ̃ν $\alpha=1$, καὶ $\beta=2$· ȣ̓κȣ̃ν ὁ γενικὸς τύπος $\chi=\sqrt[3]{(\frac{1}{2}\beta+\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\alpha^3})}+\sqrt[3]{(\frac{1}{2}\beta-\sqrt{\frac{\beta^2}{4}-\alpha^3})}$ γενήσεται $\chi=\sqrt[3]{(\frac{2}{2}+\sqrt{\frac{4}{4}-1})}+\sqrt[3]{(\frac{2}{2}-\sqrt{\frac{4}{4}-1})}=\sqrt[3]{\frac{2+0}{2}}+\sqrt[3]{\frac{2-0}{2}}=1+1=2$ ὁ ζητέμενος ἀριθμός.

Οὐκȣ̃ν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις τῇ ἐξευρημένῃ ῥίζῃ διαιρεθεῖσα κάτεισι βαθμὸν ἕνα γινομένη δευτεροβάθμιος, ἧς τὰς ῥίζας ἐξέςαι μὲν λαβεῖν καὶ κατὰ τὰ εἰρημένα (452 κτ)· ἐξέςαι δὲ καὶ ἄλλως ταύτας εὑρεῖν ἐφαρμόζοντας τὰ γνωςὰ γράμματα τῆς τριτοβαθμίȣ τῷ γενικῷ τύπῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὰς κυβικὰς ῥίζας τῆς μονάδος· τȣτὶ δὲ ἵνα γένηται, εὑρητέον πρῶτον τὰς τῆς μονάδος κυβικὰς ῥίζας κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

Ἔςω $\chi^3-1=0$, ἧς διαιρȣμένης ἀκριβῶς διὰ $\chi-1=0$, καὶ πηλίκȣ προϊόντος $\chi^2+\chi+1=0$, ἐκ ταύτης λαβεῖν δυνάμεθα τὰς δύω τετραγωνίȣς ῥίζας κατὰ τὰ εἰρημένα (452, κτ.)· ἐπεὶ γὰρ $\chi^2+\chi+1=0$· ȣ̓κȣ̃ν $\chi^2+\chi=-1$. καὶ συμπληρώσει τȣ̃ ἐλλειπȣ̃ς τετραγώνȣ, $\chi^2+\chi+\frac{1}{4}=-1+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$.

Ἐξαγωγῇ ῥίζης $\chi + \frac{1}{2} = \sqrt{-\frac{3}{4}}$· ἔστι δὲ $\sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ (167) οὐκοῦν $\chi + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, καὶ $\chi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$· ἐπεὶ δὲ ἡ ἑτέρα τετραγωνικὴ ῥίζα ἐστὶ λειπτική, ἔσται $\chi = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ ὥστε αἱ τρεῖς κυβικαὶ ῥίζαι τῆς μονάδος εἰσὶν αἵδε, 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$· ἐὰν οὖν ἐπὶ ταύτας τὰς ῥίζας πολλαπλασιασθῇ ἡ ἐξισώσεώς τινος τριτοβαθμίου μία ῥίζα, προκύψουσιν αἱ τρεῖς αὐτῆς ῥίζαι, ὥσπερ ἀμέλει τοῦ α^2 ἡ ῥίζα α ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἑξῆς ἐπὶ $+1, -1$ ῥίζας τετραγωνικὰς τῆς μονάδος, προκύψουσι $+\alpha, -\alpha$ ῥίζαι τετραγωνικαὶ τοῦ α^2· ταῦτ' ἄρα ἐὰν ὁ γενικὸς τύπος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὰς τρεῖς κυβικὰς τῆς μονάδος ῥίζας, ποιήσει τρεῖς καθολικοὺς τύπους, ἀποχρῶντας πρὸς ἐπίλυσιν παντὸς τριτοβαθμίου προβλήματος· καὶ οὖν ἔσονται

$$\chi = 1 \times \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}\right)} + 1 \times \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}\right)} \cdot \chi = \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}\right)} \times \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2} + \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}\right)} \times \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2} \cdot \chi = \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}\right)} \times \frac{(-1-\sqrt{-3})}{2} + \sqrt[3]{\left(\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}\right)} \times \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}.$$

τοῦ οὖν δευτέρου, φέρε, προβλήματος

ἐπιλυομένου διὰ μὲν τοῦ πρώτου τύπου ἔξεισι ῥίζα $\chi=2$, διὰ δὲ τοῦ δευτέρου, $\chi=-1$, διὰ δὲ τοῦ τρίτου αὖθις $\chi=-1$· ἐὰν οὖν γένηται $\chi-2=0$, καὶ $\chi+1=0$, καὶ $\chi+1=0$· τὸ ἐκ τούτων γινόμενον ἀποδώσει τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν $\chi^3-3\chi-2=0$· εὑρεθήσονται δὲ αἱ αὐταὶ ῥίζαι, καὶ εἰ, εὑρεθείσης ἅπαξ μιᾶς τῶν ῥιζῶν διὰ τοῦ τύπου, τῆς $\chi=2$, διαιρεθῇ διὰ τῆς εὑρημένης ῥίζης $\chi-2=0$ ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις· οὕτω γὰρ γενήσεται $\chi^2+2\chi+1$, ἧς εὑρεθήσεται ῥίζα $\chi=-1$ κατὰ τὰ εἰρημένα (452 κτ.) διὰ δὲ $\chi+1=0$ διαιρεθείσης τῆς $\chi^2+2\chi+1=0$, προκύψει πηλίκον $\chi+1=0$· εὑρίσκονται ἄρα αἱ αὐταὶ ῥίζαι διά τε τῶν γενικῶν τύπων, καὶ διὰ τῆς ἐπιλύσεως τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

500. Ἐπεὶ δὲ πολλάκις ἐξισώσεως τριτοβαθμίου λυομένης διὰ τοῦ γενικοῦ τύπου ἐν ἀριθμοῖς πρόεισι ῥίζα ἀπαιτοῦσα τὴν ἐξωγὴν ῥίζης κυβικῆς, ὥσπερ τῆς $\chi^3-15\chi-4=0$, ῥίζα εὑρίσκεται ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου

ἡ $\chi=\sqrt[3]{(2+\sqrt{-121})}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{-121}}$,

φέρε εἴπωμεν καὶ ὅπως ἂν τύχωμεν ταύτης τῆς ῥίζης.

501. Κείσθω ἐν γένει εὑρεῖν τὴν ῥίζαν τοῦ κυβικοῦ διωνύμου $\kappa+\vartheta\sqrt{\alpha}$· κείσθω οὖν τῆς ζητουμένης ῥίζης τὸ μὲν λογικὸν μέρος εἶναι $=\chi$, τὸ δ' ἄλογον $=\sqrt{\alpha}$, ὅλη οὖν ἡ ζητουμένη ῥίζα ἔσται $\chi+\sqrt{\alpha}$· τοιγαροῦν

$\overline{\chi+\sqrt{\alpha}}^3=\chi^3+3\chi^2\sqrt{\alpha}+3\alpha\chi+\alpha\sqrt{\alpha}$

ὥστε $\chi^3+3\alpha\chi=\kappa$

καὶ $3\chi^2\sqrt{\alpha}+\alpha\sqrt{\alpha}=\vartheta\sqrt{\alpha}$, διαιρέσει δὲ διὰ $\sqrt{\alpha}$

$3\chi^2+\alpha=\vartheta$ μεταθέσει τοῦ α

$3\chi^2 = \vartheta - \alpha$ διαιρέσει διὰ 3

$\chi^2 = \frac{\vartheta - \alpha}{3}$ ἐξαγωγῇ ῥίζης τετραγωνείου

$\chi = \sqrt{\frac{\vartheta - \alpha}{3}}$ ἐνθέντοι.

ά. „Παντὸς δυωνύμου κύβου τὸ λογικὸν μέρος τῆς „ῥίζης ἴσον ἐστὶ τῇ τετραγωνικῇ ῥίζῃ τοῦ συνεργοῦ τῆς ἀ„λόγου πλὴν τῆς ὑποῤῥίζου, διαιρεθείσῃ διὰ 3, οἷον $\chi =$ „$\sqrt{\frac{\vartheta - \alpha}{3}}$."

β΄. „Ἁπάσης δυωνύμου ῥίζης τὸν μὲν τῶν ὅρων ἐ„χούσης λογικὸν, τὸν δ' ἕτερον ἄλογον, εἰς κύβον ἀρθεί„σης, τὸ μὲν λογικὸν αὐτοῦ μέρος ἴσον ἐστὶ τῷ κύβῳ τῷ „ἐκ τοῦ λογικοῦ τῆς ῥίζης μέρους προσλαμβάνοντι τὸ γινό„μενον ὑπὸ τοῦ τριπλοῦ τετραγώνου τῆς ἀλόγου ποσότη„τος, ϗ αὐτοῦ τοῦ λογικοῦ αὐτῆς μέρους· ὁ δὲ συνεργὸς „τῆς ἀλόγου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λογικοῦ τῆς ῥίζης μέρους „τριπλῷ τετραγώνῳ σὺν τῷ ἀπὸ τῆς ἀλόγου ποσότητος „τετραγώνῳ, οἷον $\kappa = \chi^3 + 3\alpha\chi$, ϗ $\vartheta = 3\chi^2 + \alpha$."

502. Κείσθω ἐξαγαγεῖν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ δυωνύμου $-135 + \sqrt{18252}$, εἴτ' οὖν (ἀναγωγῇ ἐφ' ἁπλουστέραν ἔκθεσιν) τοῦ $-135 + 78\sqrt{3}$· δεδόσθω οὖν εἶναι τὴν ζητουμένην ῥίζαν $-\alpha + \mu\sqrt{\gamma}$ (εἴτ' οὖν $-135 = -\alpha$ ϗ $78\sqrt{3} = \mu\sqrt{\gamma}$), ἥτις κυβισθεῖσα γενήσεται $\mu^3\gamma\sqrt{\gamma} - 3\mu^2\alpha\gamma + 3\alpha^2\mu\sqrt{\gamma} - \alpha^3$· ἐπεὶ οὖν ἐστὶ $\sqrt{3} = \sqrt{\gamma}$, ἔσται τὸ ἄλογον τούτου τοῦ κύβου μέρος $\mu^3\gamma\sqrt{\gamma} + 3\alpha^2\mu\sqrt{3} = 3\mu^3\sqrt{3} + 3\alpha^2\mu\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$· ἐὰν οὖν τεθῇ $\mu = 1$, διαιρεθὲν διὰ $\sqrt{3}$, ἔσται $3 + 3\alpha^2 = 78$, ϗ $3\alpha^2 = 75$, ϗ $\alpha^2 = 25$, ϗ $\alpha = 5$· τεθέντος δὲ ἀντὶ α τοῦ 5 ἐν τῷ λογικῷ μέρει τοῦ κύβου ἔσται.

$-\alpha^3 - 3\mu^2\alpha\gamma = -125 - 45 = -170$, ὄντινος ἀπᾴδοντος τῇ περιπτώσει (προσῆκε γὰρ εἶναι -135) δῆλον τὸ μ ἔλασσον εἰλῆφθαι ἢ ὅσον ἔδει· οὐκοῦν τεθήτω $\mu = 2$· ἄρα $\mu\sqrt{\gamma} = 2\sqrt{3}$, καὶ $\mu^3\gamma\sqrt{\gamma} + 3\alpha^2\mu\sqrt{\gamma} = 24\sqrt{3} + 6\alpha^2\sqrt{3} = 78\sqrt{3}$· διαιρέσει διὰ $\sqrt{3}$ γίνεται $24 + 6\alpha^2 = 78$, καὶ $6\alpha^2 = 54$, καὶ $\alpha^2 = 9$, καὶ $\alpha = 3$, ὄντινος ἐν τῷ λογικῷ μέρει τοῦ κύβου ἀντικατασταθέντος, γίνεται $-\alpha^3 - 3\mu^2\alpha\gamma = -27 - 108 = -135$, ὄντινος τῇ περιπτώσει συνᾴδοντος συμπεραίνεται τὴν κυβικὴν ῥίζαν εἶναι $\mu\sqrt{\gamma} - \alpha = 2\sqrt{3} - 3$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἔστω εὑρεῖν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ δυωνύμου $3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}$, εἴτ' οὖν (ἀναγωγῇ ἐφ' ἁπλουστέραν ἔκθεσιν) τοῦ $3 + \frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}$· ἔστω οὖν $\alpha + \mu\sqrt{\gamma} = 3 + \frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}$· καὶ εἰλήφθω ὁ ἀπὸ $\alpha + \mu\sqrt{\gamma}$ κύβος $\alpha^3 + 3\alpha^2\mu\sqrt{\gamma} + 3\alpha\mu^2\gamma + \mu^3\gamma\sqrt{\gamma}$· ἐπειδὲ $\sqrt{\gamma} = \sqrt{-\frac{4}{3}}$, τὸ ἄλογον μέρος ἔσται $3\alpha^2\mu\sqrt{\gamma} + \mu^3\gamma\sqrt{\gamma} = 3\alpha^2\mu\sqrt{-\frac{4}{3}} + \mu^3 \times -\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{-\frac{4}{3}}$· ἐὰν οὖν ληφθῇ $\mu = 1$, καὶ γένηται διαίρεσις διὰ $\sqrt{-\frac{4}{3}}$, ἔσται $3\alpha^2 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$, καὶ $3\alpha^2 = \frac{9}{3}$, καὶ $\alpha^2 = \frac{9}{9}$, καὶ $\alpha = \pm 1$, ὅπερ ἀντικατασταθέντος ἐν τῷ λογικῷ τοῦ κύβου μέρει, ἔσται $\alpha^3 + 3\mu^2\alpha\gamma = -1 + 4 = 3$, ὄντινος τῇ περιπτώσει συνᾴδοντος, ἔσται ἡ ζητουμένη ῥίζα $\alpha + \mu\sqrt{\gamma} = -1 + \sqrt{-\frac{4}{3}}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἔστω ἐξαγαγεῖν ῥίζαν κυβικὴν ἀπὸ δυωνύμου ποσότητος, ἑκάτερον μέρος ἄλογον ἐχούσης τῆς $\sqrt{243} + \sqrt{242}$, εἴτ' οὖν (ἀναγωγῇ ἐφ' ἁπλουστέραν ἔκθεσιν) τῆς $9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$· τεθήτω δὴ τὸ μὲν πρῶτον μέρος τῆς ῥίζης $\sqrt[3]{9\sqrt{3}} = \mu\sqrt{\gamma}$, τὸ δὲ δεύτερον $\sqrt[3]{11\sqrt{2}} = \nu\sqrt{\varepsilon}$· ὅλη δὲ ἡ ῥίζα $\mu\sqrt{\gamma} + \nu\sqrt{\varepsilon}$· ὁ δ' ἀπ' αὐτῆς κύβος $\mu^3\nu\sqrt{\gamma} + 3\mu^2\nu\gamma\sqrt{\varepsilon} + \mu\nu^2\varepsilon\sqrt{\gamma} + \nu^3\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$, καὶ ἐπεὶ $\mu\sqrt{\gamma} = 9\sqrt{3}$, ἔςαι θάτερον μέρος τῆς ῥίζης, $\mu^3\gamma\sqrt{\gamma} + 3\mu\nu^2\varepsilon\sqrt{\gamma} = 3\mu^3\sqrt{3} + 6\mu\nu^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$· τεθέντος δὲ $\mu = 1$, καὶ γενομένης διαιρέσεως διὰ $\sqrt{3}$, γίνεται $3 + 6\nu^2 = 9$, καὶ $6\nu^2 = 6$, καὶ $\nu = 1$, ἧς ἀντὶ ν ἀντικαταςαθείσης, ἐν θατέρῳ μέρει τοῦ κύβου, ἔςαι $3\mu^2\nu\gamma\sqrt{\varepsilon} + \nu^3\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\, 9\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$, οὗτινος τῇ περιπτώσει ὁμολογοῦντος, ἔςαι ἡ ζητουμένη κυβικὴ ῥίζα $\mu\sqrt{\gamma} + \nu\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{3} = \sqrt{2}$.

503. **ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄.** Ἐὰν μὲν ἀντικαταςάσει τῆς εὑρισκομένης δυνάμεως, προκύπτῃ ἀριθμὸς μείζων τοῦ λογικοῦ ἀριθμοῦ, σαφὲς τὴν δύναμιν τοῦ μ ἐλάσσω εἰλῆφθαι, ἢ ὅσην ἔδει, ἐὰν δὲ ἐλάσσων, μείζω· διὸ εἰ ἐν μὲν τῇ ά. περιπτώσει εἴληπται $\mu = 1$, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ $\mu = 2$, τιθέναι προσήκει $\mu = 1\frac{1}{2}$· τούτου δὲ γενομένου, ἐὰν ἀκριβῶς οὐκ ἐξέρχηται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς, δῆλον ὡς τοῦ προκειμένου δυωνύμου ῥίζαν κυβικὴν ἐξενεχθῆναι ἀμήχανον.

504. **ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄.** Εἰς δὲ βάσανον τῆς εὑρημένης ῥίζης, εἰ ἄρα ἀσφαλῶς εὕρηται, ἐξεταςέον μόνον τὸ λογικὸν αὐτῆς μέρος· οὕτω τῆς δυωνύμου ποσότητος $78\sqrt{3} - 135$ ῥίζα εὕρηται ἡ $2\sqrt{3} - 3$· ἐὰν οὖν συναφθῇ ὁ ἀπὸ τοῦ λογικοῦ αὐτῆς μέρους -3 κύβος -27 τῇ αὐτῇ ῥίζῃ τρὶς ληφθείσῃ -9, πολλαπλασιαθείσῃ ἐπὶ τὸ ἀπὸ θατέρου μέρους τετράγωνον 12, εἴτ' οὖν ἐὰν συναφθῇ τῷ -108, ἐπεὶ τὸ ἄθροισμα -135 σύμφωνόν ἐςι τῷ λογικῷ μέρει τῆς δοθείσης δυωνύμου ποσότητος, δῆλον ὅτι εἴληπται ἀσφαλῶς ῥίζα αὐτῆς ἡ $2\sqrt{3} - 3$ (101).

505. **ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄.** Ἄλις δὲ ἔχει τάτε περὶ τȣ̃ γενικȣ̃ κανόνος τῆς ἐπιλύσεως τῶν τριτοβαθμίων προβλημάτων, ϗ δὴ ϗ τὰ περὶ ἐξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀπὸ ποσȣ̃ δυωνύμȣ· τοῖς δέ γε δαψιλέςερον τέτων ἀπολαῦσαι ἐπιθυμȣ̃σιν ἔξεςαι ἀναγνῶναι τȣ̀ς τάτε περὶ τῆς τῶν τριτοβαθμίων προβλημάτων ἐπιλύσεως πλατύτερον πραγματευσαμένȣς, ϗ τύπȣς ἐκδεδωκότας παντοίȣς, ϗ τὰ περὶ τῆς ἀπὸ δυωνύμȣ ποσȣ̃ ἐξαγωγῆς τῶν ῥιζῶν καθολικώτερον ἑρμηνεύσαντας, οἷς ἀμέλει πρόθεσις αὕτη ὑπῆρξε τὰ τῆς ἀναλύσεως μόνα ἐκθέσθαι, βίβλȣς πολυτόμȣς εἰς τȣ̃το συγγραψαμένȣς· ἡμῖν δὲ ἀποχρήσει τὰ πρȣγιάιτατα ὑποςρωννῦσι, ϗ ὧν ἡ γνῶσις πρὸς πᾶν τοιȣτῶδες σύγγραμμα εὐχερῶς τȣ̀ς μετιόντας ποδηγετήσει, εἰπεῖν ἐν βραχέσι ϗ περὶ τῆς γενικῆς ἐπιλύσεως τῶν καθυπερτέρων βαθμῶν, ϗ τέλος ἐπιθεῖναι τῷ περὶ τῶν ἐξισώσεων λόγῳ.

506. Ἔςω ἤδη ἐξίσωσις τεταρτοβάθμιος, ἀπηλλαγμένη τȣ̃ δευτέρȣ αὐτῆς ὅρȣ κατὰ τὰ εἰρημένα (495), ἐν γένει πᾶσαν ἐμφαίνȣσα τεταρτοβάθμιον ἐξίσωσιν, ἡ $\upsilon^4 + \alpha\upsilon^2 + \beta\upsilon + \gamma = 0$, ϗ ὑποτεθείσθω γινομένη ἐκ δύω ἐξισώσεων δευτεροβαθμίων τῶν $\upsilon^2 + \chi\upsilon + \pi$, $\upsilon^2 - \chi\upsilon + \kappa = 0$· ϗ ἐξ αὐτῶν ἴση τῇ δοθείσῃ γενέσθω ἐξίσωσις ἡ

$$\upsilon^4 + \kappa\upsilon^2 + \kappa\chi\upsilon + \pi\kappa = 0,$$
$$\quad -\chi^2 \quad -\pi\chi$$
$$\quad +\pi$$

ἧς παραβαλλομένης τῇ δοθείσῃ, ἔσονται ἐξισώσεις $\kappa + \pi - \chi^2 = \alpha$, ϗ $\kappa\chi - \pi\chi = \beta$, ϗ $\pi\kappa = \gamma$· πολλαπλασιασθείσης δὲ τῆς πρώτης ἐπὶ χ, ϗ συναφθείσης τῇ δευτέρᾳ, γενήσεται $2\kappa\chi - \chi^3 = \alpha\chi + \beta$, ἢ $2\kappa\chi = \alpha\chi + \chi^3 + \beta$, ϗ

$\varkappa = \frac{\alpha\chi + \chi^3 + \beta}{2\chi}$· ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως τοῦ κ ἀντικατασταθείσης ἐν τῇ ἐξισώσει $\pi\varkappa = \gamma$, ἔσται $\pi \times \frac{\alpha\chi + \chi^3 + \beta}{2\chi} = \gamma$, καὶ $\pi = \frac{2\gamma\chi}{\alpha\chi + \chi^3 + \beta}$· ἐν οὖν τῇ ἐξισώσει $\varkappa\chi - \pi\chi = \beta$ ἀντικατασταθεισῶν ἀντὶ κ καὶ π τῶν ἤδη εὑρημένων δυνάμεων, προκύπτει ἐξίσωσις ἡ $\frac{\alpha\chi + \chi^3 + \beta}{2} - \frac{2\gamma\chi^2}{\alpha\chi + \chi^3 + \beta} = \beta$, ἥτις, ἄρσει τῶν κλασμάτων, μεταθέσει τε καὶ ἀναγωγῇ, γίνεται $\chi^6 + 2\alpha\chi^4 + (\alpha^2 - 4\gamma)\chi^2 - \beta^2 = 0$, ἥτις, ἐπεὶ πάντες οἱ δεῖκται διαιρέσιμοι ὑπάρχουσι διὰ 2, ἐπιλυθῆναι δύναται κατὰ τὰς τριτοβαθμίους· ἐὰν γὰρ τεθῇ $\varphi = \chi^2$, ἔσται $\varphi^3 + 2\alpha\varphi^2 + (\alpha^2 - 4\gamma)\varphi - \beta^2 = 0$· καλεῖται δὲ αὕτη ἡ ἐξίσωσις κυβικὴ ἐ ξ η μ μ έ ν η τῆς τεταρτοβαθμίου· ἁπάσης τε εἰδικωτέρας τεταρτοβαθμίου εὑρεῖν δυνάμεθα τὴν αὐτῆς ἐξημμένην κυβικήν· ἔστω γὰρ ἐξίσωσις ἡ $\upsilon^4 - 4\upsilon^2 - 8\upsilon + 35 = 0$· ἔσται τοίνυν $\alpha = -4$, καὶ $\beta = -8$, καὶ $\gamma = 35$· τούτων δὲ τῶν δυνάμεων ἀντικατασταθεισῶν ἐν τῇ γενικῇ ἐξημμένῃ πρόεισι μερικὴ ἡ $\chi^6 - 8\chi^4 - 124\chi^2 - 64 = 0$.

507. Ἐὰν ἐν ταῖς δυσὶ παρακτικαῖς ἐξισώσεσιν $\upsilon^2 + \chi\upsilon + \pi = 0$, $\upsilon^2 - \chi\upsilon + \varkappa = 0$, ἀντὶ π καὶ κ τεθῶσιν αἱ ἄρτι εὑρημέναι αὐτῶν δυνάμεις, προκύψουσιν αἱ ἑξῆς ἐξισώσεις $\upsilon^2 + \chi\upsilon + \frac{2\gamma}{\chi^2 + \alpha + \frac{\beta}{\chi}} = 0$, $\upsilon^2 - \chi\upsilon + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{\beta}{2\chi} = 0$, αἵτινες, τοῦ χ ἐν ἀ-

ριθμοῖς γνωθέντος, ϗ αὐταὶ γνωσταί τε ϗ ὡρισμέναι καθίστανται.

508. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Ἐὰν δὲ ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει ὑπάρχῃ $+ \alpha$, ἑκατέρα τῶν δυεῖν παρακτικῶν πρὸ τοῦ α ἔχει τὸ $+$· ἐὰν δ' ἐκείνη ἔχῃ $- \alpha$, ϗ τούτων ἑκατέρα τὸ α ἔσται μετὰ τοῦ $-$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐξίσωσιν τεταρτοβάθμιον ἐπιλύειν.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἐξίσωσις ἡ $\upsilon^4 - 17\upsilon^2 - 20\upsilon - 6 = 0$, ἧς παραβαλλομένης πρὸς τὴν γενικὴν $\upsilon^4 + \alpha\upsilon^2 + \beta\upsilon + \gamma = 0$, ἔστιν $\alpha = -17$, ϗ $\beta = -20$, ϗ $\gamma = -6$· δι' ὃ δὴ ἡ αὐτῆς ἐξημμένη κυβικὴ ἔσται $\chi^6 - 34\chi^4 + 313\chi^2 - 400 + 0$, ἧς ἐπιλυομένης κατὰ τὰ εἰρημένα εὑρίσκεται $\chi = 4$· ταύτης δὲ τῆς δυνάμεως σὺν ταῖς τῶν α ϗ β ἀντικατασταθεισῶν ἐν ταῖς $\upsilon^2 + \chi\upsilon + \dfrac{2\gamma}{\chi^2 + \alpha + \frac{\beta}{\chi}} = 0$, $\upsilon^2 - \chi\upsilon + \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{2}\alpha + \dfrac{\beta}{2\chi} = 0$, ἔσονται ἡ μὲν $\upsilon^2 + 4\upsilon + \dfrac{-12}{16 - 17 + \frac{-20}{+4}} = \upsilon^2 + 4\upsilon + \dfrac{-12}{16 - 17 - 5} = \upsilon^2 + 4\upsilon + \dfrac{-12}{-6} = \upsilon^2 + 4\upsilon + 2 = 0$, ἡ δ' ἑτέρα $\upsilon^2 - 4\upsilon + 8 - 8\frac{1}{2} + \dfrac{-20}{8} = 0$, εἴτ' οὖν $\upsilon^2 - 4\upsilon - \frac{1}{2} - 2 - \frac{4}{8} = 0$, τουτέστιν $\upsilon^2 - 4\upsilon - 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, ὅ ἐστιν $\upsilon^2 - 4\upsilon - 3 = 0$· τούτων τοίνυν τῶν ἐξισώσεων, ἀμέλει $\upsilon^2 + 4\upsilon + 2 = 0$, ϗ $\upsilon^2 - 4\upsilon - 3 = 0$, κατὰ τὰ δευτεροβάθμια τῶν προβλημάτων ἐπιλυθεισῶν (452, κτ.)

ἀποφέρονται ἐκ μὲν τῆς πρώτης ῥίζαι $-2+\sqrt{2}$, ϗ $-2-\sqrt{κ}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $2+\sqrt{7}$, ϗ $2-\sqrt{7}$, αἵτινές εἰσιν αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς προτεθείσης τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως· ἀλλὰ ϗ μεθόδῳ ἄλλῃ αἱ τεταρτοβάθμιοι τῶν ἐξισώσεων ἐπιλύονται, ἣν τοῖς πρωτοπείροις χαριζόμενοι παραθήσομεν ἐνταῦθα, ἵνα ϗ ταύτην μὴ ἀγνοῶσι.

Ὑποτεθείσθω ἡ τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως ῥίζα $χ=\sqrt{π}+\sqrt{κ}+\sqrt{ρ}$· π δὲ ϗ κ ϗ ρ ἔςωσαν ποσότητες ἐμφαίνουσαι τὰς ῥίζας τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως $τ^3-φτ^2+θτ-η=0$, ὥςε εἶναι $π+κ+ρ=φ$, ϗ $πκ+πρ+κρ=θ$, ϗ $πκρ=η$· τούτου δὲ τεθέντος τετραγωνισθήτω ὁ τύπος $χ=\sqrt{π}+\sqrt{κ}+\sqrt{ρ}$, ἵνα γένηται $χ^2=π+κ+ρ+2\sqrt{πκ}+2\sqrt{πρ}+2\sqrt{κρ}$· ἀλλὰ $π+κ+ρ=φ$ ἀντικαταςάσει ἄρα ϗ μεταθέσει, εὑρεθήσεται $χ^2-φ=2\sqrt{πκ}+2\sqrt{πρ}+2\sqrt{κρ}$, ἥτις τετραγωνισθεῖσα πάλιν γενήσεται $χ^4-2χ^2φ+φφ=4πκ+4πρ+4κρ+8\sqrt{ππκρ}+8\sqrt{πκρρ}$· ἀλλὰ $θ=πκ+πρ+κρ$, ἄρα (ἀντικαταςάσει ϗ μεταθέσει) $χ^4-2φχχ+φφ-4θ=8\sqrt{πκρ}\cdot(\sqrt{π}+\sqrt{κ}+\sqrt{ρ})$ (Α)· ἀλλὰ $πκρ+η$, ϗ $\sqrt{πκρ}=\sqrt{η}$ ἐκ τοῦ ἀκολούθου, ϗ $\sqrt{π}+\sqrt{κ}+\sqrt{ρ}=χ$· ἄρα $χ^4-2φχχ-8χ\times\sqrt{η}+φφ-4θ=0$, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ἐςὶ $χ=\sqrt{π}+\sqrt{κ}+\sqrt{ρ}$, τῶν π, κ, ρ, ῥιζῶν οὐσῶν τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως $τ^3-φτ^2+θτ-η=0$· ἡ τοίνυν τεταρτοβάθμιος ἐξίσωσις, εἰς ἣν ἀφικόμεθα, ἐκληφθῆναι δύναται ὡς καθολική, ἐξὸν ἁπάσης τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως τὸν δεύτερον ὅρον ἐξελεῖν (495)· φέρ᾽ ἴδωμεν οὖν ὅπως ἂν ἐξαχθείησαν αἱ ῥίζαι ταύτης τῆς ἐξισώσεως.

Ἔϛω ἐξίσωσις ἡ $\chi^4 - \alpha\chi^2 - \beta\chi - \gamma = 0$ (B) ἧς ζητοῦνται αἱ ῥίζαι· παραβαλλομένης οὖν ταύτης πρὸς τὴν A, εὑρίσκεται α΄. $2\varphi = \alpha$, ἢ $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. β΄. $8\sqrt{\eta} = \beta$. ἄρα $64\eta = \beta\beta$, καὶ $\eta = \frac{\beta\beta}{64}$. γ΄. $\varphi\varphi - 4\vartheta = -\gamma$, ἢ $\frac{\alpha\alpha}{4} - 4\vartheta + \gamma = 0$, ἢ $\gamma + \frac{\alpha\alpha}{4} = 4\vartheta$; καὶ $\vartheta = \frac{\gamma}{4} + \frac{\alpha\alpha}{16}$· τῶν δὴ δυνάμεων τῶν φ, η, ϑ τῶν ἤδη εὑρημένων, ἀντικαταςαθεισῶν ἐν τῇ τριτοβαθμίῳ ἐξισώσει $\tau^3 - \varphi\tau\tau + \vartheta\tau - \eta = 0$, καὶ ταύτης ἐπιλυθείσης κατὰ τὰ τεταρτοβάθμια τῶν προβλημάτων, καὶ ῥίζας ἔχειν εὑρεθείσης ἐξ ὑποθέσεως τὰς π, κ, ρ, μία τις τῶν ῥιζῶν τῆς ἡμετέρας τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως ἔςαι $\chi = \sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$.

Οὗτος δὲ ὁ τύπος περιέχει τὰς τέσσαρας ῥίζας τῆς προτεθείσης τεταρτοβαθμίου ἐξισώσεως διὰ τὰ παντοῖα σύμβολα, ἃ ἂν προταχθείη τῶν ῥιζικῶν, καὶ ταῦτα δοκοῦν ὀκτὼ δυνάμεις περιέχειν τῆς χ· ἰςέον μέντοι ὅτι $\sqrt{\pi\kappa\rho}$ ὀφείλει εἶναι $= \sqrt{\eta} = \frac{\beta}{8}$· ἐὰν μὲν ἄρα $\frac{\beta}{8}$ ποσότης ᾖ ὑπαρκτική, καὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ποσοτήτων $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\kappa}$, $\sqrt{\rho}$, ἐπάναγκες εἶναι ὑπαρκτικόν· ἵνα δὲ τοῦτο γένηται, ἐξ ἀνάγκης ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει αἱ δυνάμεις τῆς χ ἕξουσι τὰ σύμβολα οὕτω

$$\chi = \sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$$
$$\chi = \sqrt{\pi} - \sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho}$$
$$\chi = -\sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho}$$

$$\chi = -\sqrt{\pi} - \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$$

ἐὰν δὲ $\frac{\beta}{8}$ ποσότης ᾖ ὑπαρκτική, δυνάμεις τῆς χ ἔσονται αἱ ἑξῆς

$$\chi = \sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho}$$
$$\chi = \sqrt{\pi} - \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$$
$$\chi = -\sqrt{\pi} + \sqrt{\kappa} + \sqrt{\rho}$$
$$\chi = -\sqrt{\pi} - \sqrt{\kappa} - \sqrt{\rho}$$

509. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Κατὰ τὸν ἤδη ἐκτεθέντα κανόνα τεταρτοβάθμιον ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου ὅρου ἄμοιρον ἐπιλῦσαι.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἐξίσωσις ἡ $\chi^4 - 25\chi\chi + 60\chi - 36 = 0$· ταύτης οὖν παραβαλλομένης πρὸς τὴν Β εὑρίσκεται $\alpha = 25$, καὶ $\beta = -60$, καὶ $\gamma = 36$· ἀντικαθιστάσθωσαν δὲ αὗται αἱ δυνάμεις ἀντὶ α καὶ β καὶ γ ἐν ταῖς τῶν φ, θ, η, καὶ δὴ ἔσται $\varphi = \frac{25}{2}$, καὶ $\theta = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$, καὶ $\eta = \frac{225}{4}$· καὶ δὴ ἡ τριτοβάθμιος ἐξίσωσις γενήσεται οὕτω $\tau^3 - \frac{25}{2} \cdot \tau^2 + \frac{769}{16}\tau - \frac{225}{4} = 0$. ἵνα δὲ αὐτῇ ἡ ἐξίσωσις τῶν κλασμάτων ἀπαλλαγῇ, γενέσθω $\tau = \frac{\psi}{4}$, καὶ κατὰ τὰ εἰρημένα (494)· ἔσται $\psi^3 - 50\psi^2 + 769\psi - 3600 = 0$, ταύτης οὖν ἐπιλυθείσης (483, 499) εὑρίσκεται πρῶτον $\psi = 9$· τῆς δ' ἐξισώσεως διαιρεθείσης διὰ $\psi - 9 = 0$, καὶ πηλίκου προκύπτοντος $\psi\psi - 41\psi + 400 = 0$, ἢ $\psi\psi - 41\psi = -400$, καὶ ταύτης ἐπιλυθείσης κατὰ τῶν προβλημάτων τὰ δευτεροβάθμια προΐασι $\psi = 16$, καὶ $\psi = 25$· τοιγαροῦν αἱ τρεῖς ῥίζαι τῆς τριτοβαθμίου ἐξισώσεως εἰσὶ $\psi = 9$, καὶ $\psi = 16$, καὶ $\psi = 25$· ἄρα $\tau = \frac{9}{4}$, καὶ $\tau = 4$, καὶ $\tau = \frac{25}{4}$· οὕτως ἄρα ἔχομεν $\pi = \frac{9}{4}$, καὶ $= 4$, καὶ $\rho = \frac{25}{4}$· ἀλλὰ $\sqrt{\pi\kappa\rho} = \sqrt{\eta}$

$=-\frac{1}{2}{}^{5}=\frac{\beta}{8}$, τηρητέον ἄρα ἐν τοῖς ῥιζικοῖς $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{\kappa}$, $\sqrt{\rho}$ τὰ περὶ τῶν συμβόλων ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει εἰρημένα· καὶ ἐπεὶ $\sqrt{\pi}=\frac{3}{2}$, καὶ $\sqrt{\kappa}=2$, καὶ $\sqrt{\rho}=\frac{5}{2}$, αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ἔσονται

$$\chi = \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1$$
$$\chi = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$$
$$\chi = -\frac{3}{2} = 2 + \frac{5}{2} = 3$$
$$\chi = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6$$

Περὶ ἐξισώσεων τῶν καθυπερτέρων βαθμῶν.

510. Ἐνταῦθα ἀποχρήσει ἡμῖν ἐκθέσθαι τὴν μέθοδον, δἰ ἧς μία γοῦν τῶν ῥιζῶν τῶν ἐν τοῖς καθυπερτέροις βαθμοῖς δύναται παρίςασθαι διὰ τύπου παρεμφεροῦς τῷ ἀποδοθέντι περὶ τῶν τριτοβαθμιαίων ἐξισώσεων (499)· καὶ γὰρ οὐδεμία ἐςγε καὶ νῦν ἔγνωςαι μέθοδος, οἵα ἐπιλύειν ἐν ἁπάσῃ περιπτώσει τὰς καθυπερτέρων βαθμῶν ἐξισώσεις. σκεψώμεθα οὖν πρῶτον τίνες ἂν εἶεν τεταρτοβάθμιοι ἐξισώσεις αἱ ταύτῃ τῇ περιπτώσει καθυπαγόμεναι.

Ἔςω $\chi=\mu+\nu$· ἄρα $\chi^4=\mu^4+4\mu^3\nu+6\mu^2\nu^2+4\mu\nu^3+\nu^4$, εἴτ' οὖν $\chi^4=\mu^4=4\mu\nu\times(\mu+\nu)^2+\nu^4$· $-2\mu^2\nu^2$

ἀντὶ δὲ $(\mu+\nu)^2$ ἀντικαταςαθήτω χ^2 καὶ μετατεθήτωσαν πάντες οἱ ὅροι ἐπὶ θάτερα· καὶ δὴ ἔςαι $\chi^4-4\mu\nu\chi^2+2\mu^2\nu^2-\mu^4-\nu^4=0$ ἐξίσωσις, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ἐςὶ $\chi=\mu+\nu$· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ ἐξισώσει ἐν ἀναγκαίως ἀπαιτεῖται, ἵνα μηδεὶς τῆς χ δείκτης ᾖ περιττός.

Ὑποτεθείσθω αὖθις $\chi=\mu+\nu$· καὶ δὴ ἕξομεν $\chi^5=$

$\mu^5 + 5\mu^4\nu + 10\mu^3\nu^2 + 10\mu^2\nu^3 + 5\mu\nu^4 + \nu^5$, εἶτ' οὖν $\chi^5 + \mu^5 + 5\mu\nu(\mu+\nu)^3 + \nu^5$· ἀντὶ δὲ $\mu+\nu$ ἀντικατασταθείσης τῆς χ, καὶ γενομένης μεταθέσεως προκύψει ἐξίσωσις $\chi^5 - 5\mu\nu\chi^3 + 5\mu^2\nu^2\chi - \mu^5 - \nu^5 = 0$, ἐξίσωσις, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ἐστι $\chi = \mu + \nu$· δύω δὲ ταῦτα ἔνεισι ταύτῃ τῇ ἐξισώσει· οὐδεὶς γὰρ δείκτης τῆς χ ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ὁ συνεργὸς τῆς χ πεμπτημόριόν ἐστι τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ συνεργοῦ τῆς χ^3.

Κείσθω πάλιν $\chi = \mu = \nu$· οὐκοῦν ἔσται $\chi^6 = \mu^6 + 6\mu^5\nu + 15\mu^4\nu^2 + 20\mu^3\nu^3 + 15\mu^2\nu^4 + 6\mu\nu^5 + \nu^6$, διατεθείσθω δὲ καὶ αὕτη ἡ ἐξίσωσις οὕτω

$$\begin{aligned} \chi^6 = \mu^6 &+ 6\mu\nu(\mu+\nu)^4 + \nu^6, \\ &- 9\mu^2\nu^2(\mu+\nu)^2 \\ &+ 2\mu^3\nu^3 \end{aligned}$$

ἥτις ἀντικατασταθέντος τοῦ χ ἀντὶ $\mu+\nu$, καὶ μεταθέσεως γενομένης μεταβάλλει εἰς $\chi^6 - 6\mu\nu\chi^4 + 9\mu^2\nu^2\chi^2 - 2\mu^3\nu^3 - \mu^6 - \nu^6 = 0$, ἐξίσωσις, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ἐστι $\chi = \mu + \nu$· ἐν ταύτῃ δὲ τῇ ἐξισώσει οὐδεὶς μὲν δείκτης τῆς χ ἐστὶ περιττὸς, ὁ δὲ συνεργὸς τοῦ χ^2 τεταρτημόριόν ἐστι τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ συνεργοῦ τοῦ χ^4.

Ἐὰν δὲ ζητῆται περὶ τῆς ἑβδόμου βαθμοῦ ἐξισώσεως, εὑρεθήσεται,

$$\begin{aligned} \chi^7 = \mu^7 &+ 7\mu\nu(\mu+\nu)^5 + \nu^7, \\ &- 14\mu^2\nu^2(\mu+\nu)^3 \\ &+ 7\mu^3\nu^3(\mu+\nu) \end{aligned}$$

ἥτις, ἀντικατασταθέντος τοῦ χ ἀντὶ $\mu+\nu$, καὶ μεταθέσεως πραχθείσης γίνεται $\chi^7 - 7\mu\nu\chi^5 + 14\mu^2\nu^2\chi^3 - 7\mu^3\nu^3\chi - \mu^7 - \nu^7 = 0$· ἐξίσωσις, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ὑπάρχει $\chi = \mu + \nu$· ἐν ταύτῃ δὲ, οὐδεὶς μὲν τῶν τῆς χ δεικτῶν ὀφείλει εἶναι ἄρτιος, τὸ δὲ ἑπτημόριον τοῦ τῆς χ^5 συνεργοῦ τετραγωνισθὲν, ϗ ἐπὶ 14 πολλαπλασιασθὲν, δίδωσι τὸν συνεργὸν τȣ̃ $χ^3$, αὐτὸ δὲ τȣ̃το τὸ ἑπτημόριον κυβισθὲν ϗ ἐπὶ 7 πολλαπλασιασθὲν δίδωσι τὸν συνεργὸν τῆς $χ$.

Ὑψώσθω $μ+ν$ εἰς ὄγδοον βαθμὸν, ϗ διατεθείσθω ὡς ἀνωτέρω ἡ ἐξίσωσις· ὐκȣ̃ν ἔςαι $χ^8 = μ^8$
$+ 8μν(μ+ν)^6 × ν^8$ · ἀντικατασαθέντος δὲ τȣ̃ $μ+ν$
$- 20μ^2ν^2(μ+ν)^4$
$+ 16μ^3ν^3(μ+ν)^2$
$- 2μ^4ν^4$
ἀντὶ $χ$ ϗ πάντων τῶν ὅρων μετατεθέντων ἐν θατέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως τῷ πρώτῳ, προελεύσεται ἡ ἐξίσωσις

$$\begin{aligned} χ^8 - 8μνχ^6 + 20μ^2ν^2χ^4 - 16μ^3ν^3χ^2 &+ 2μ^4ν^4 = 0 \\ &- μ^8 \\ &- ν^8 \end{aligned}$$

ταύτης τῆς ἐξισώσεως ἄπεισι χρεὼν πάντας τȣ̀ς περιττάριθμȣς βαθμȣ̀ς τῆς $χ$· τὸ δὲ $\frac{1}{8}$ τȣ̃ συνεργȣ̃ τῆς $χ^6$ τετραγωνισθὲν μὲν ϗ ἐπὶ 20 ἀχθὲν ἀποδιδόναι τὸν συνεργὸν τῆς $χ^4$, κυβισθὲν δὲ ϗ ἐπὶ 16 πολλαπλασιασθὲν, τὸν τȣ̃ $χ^2$.

Τῇ αὐτῇ μεθόδῳ εὑρεθήσεται ἐξίσωσις βαθμȣ̃ ἐννάτȣ, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ἔςαι $χ=μ+ν$· ἰδȣ̀ δὴ ἡ ἐξίσωσις αὕτη

$$χ^9 - 9μνχ^7 + 27μ^2ν^2χ^5 - 30μ^3ν^3χ^3 + 9μ^4ν^4χ - μ^9 - ν^9 = 0$$·

πᾶσαι δὲ αἱ διαληφθεῖσαι ἐξισώσεις ἔχȣσι μίαν τῶν καθ' ἑαυτὰς ῥιζῶν $χ=μ+ν$.

Προφανῶς δὲ καθορᾶται ὡς ταῖς περιτταρίθμοις τῶν ἐξισώσεων πάντες οἱ τῆς $χ$ ἀρτιάριθμοι βαθμοὶ ἄπεισι· τȣ̀ναντίον δὲ, ἐκ τῶν ἀρτιαρίθμων ἐξαφανίζονται πάντες οἱ περιττάριθμοι· ἐὰν δὲ π ἐμφαίνῃ τὸν τῆς ἐξισώσεως βαθμὸν, $-\mu^\pi - \nu^\pi$, ἔςαι ἔσχατος ὅρος κοινὸς ἁπάσαις ταῖς ἐξισώσεσιν· ἐν δὲ ταῖς ἀρτιαρίθμοις τῶν ἐξισώσεων ὁ ἔσχατος ὅρος περιέξει ἔτι καὶ τὴν ποσότητα $2\mu^{\frac{\pi}{2}}\nu^{\frac{\pi}{2}}$· οἱ δὲ ὅροι παρὰ τὺς μ^π, ν^π, οἷς ἀεὶ πρόσεσι τὸ $-$ σύμβολον, ἔχυσιν ἀμοιβαδὸν τὰ σύμβολα $+$, $-$· διὰ ταῦτα δὴ ἐν ταῖς ἀρτιαρίθμοις ἐξισώσεσιν ὁ ὅρος $2\mu^{\frac{\pi}{2}}\nu^{\frac{\pi}{2}}$ ὀφείλει ἔχειν τὸ μὲν $+$ (ἐκληπτέον δὲ ταύτην τὴν ποσότητα ὡς συνεργὸν τῆς χ^0), εἰ π ἀριθμὸς εἴη ἀρτιάκις ἄρτιος, εἴτ' ὖν φύσεως τοιᾶσδε 4, 8, 12, 16 κτ· τὸ δὲ $-$, εἰ π εἴη περισσάκις ἄρτιος, ταυτὸν εἰπεῖν ὕτως ἔχων φύσεως 2, 6, 10, 14, 18 κτ· ἐν δὲ τοῖς συνεργοῖς ἀεὶ εὑρίσκονται κατὰ τὸ ἐφεξῆς $\mu\nu$, $\mu^2\nu^2$, $\mu^3\nu^3$ κτ· $\mu\nu$ πολλαπλασιάζεται ἀεὶ ἐπὶ τὸν δείκτην π· ἵνα δὲ εὑρεθῶσιν οἱ ἀριθμοί, ἐφ' ὓς πολλαπλασιάζονται $\mu^2\nu^2$, $\mu^3\nu^3$ κτ., ὑποτεθείσθω $\chi = \mu + \nu$· ὖκὖν $\chi^2 - 2\mu\nu \begin{smallmatrix}-\mu^2\\ -\nu^2\end{smallmatrix} = 0$, ἧς ἡ μὲν τῶν ῥιζῶν ἐςὶ $= \mu + \nu$, ἁτέρα δὲ $= -\mu - \nu$· ὑποσυναπτομένης δὲ καὶ τῆς τριτοβαθμίυ ἐξισώσεως συςαθήσεται ὁ ἐφεξῆς πίναξ

	$\mu\nu$	$\mu^2\nu^2$	$\mu^3\nu^3$	$\mu^4\nu^4$	$\mu^5\nu^5$	$\mu^6\nu^6$	$\mu^7\nu^7$
Β	2						
Γ	3						
Δ	4	2					
Ε	5	5	2				
ς	6	9					
Ζ	7	14	7				
Η	8	20	16	2			
Θ	9	27	30	9			

I	10	35	50	25	2		
IA	11	44	77	55	11		
IB	12	54	112	105	36	2	
IΓ	13	65	156	182	91	13	
IΔ	14	77	210	294	196	49	2

ἐν μὲν οὖν τῷ πρώτῳ ὁριζοντίῳ χώρῳ ἐτέθησαν $μν$, $μ^2ν^2$, $μ^3ν^3$ κτ. ἐν δὲ τῇ πρώτῃ ὁριζοντίῳ στήλῃ ἑλληνικὰ γράμματα, ἐκδηλοῦντα τὸν βαθμὸν τῆς ἐξισώσεως· οἱ δὲ ἀριθμοὶ οἱ ὑποκείμενοι τοῖς $μν$, $μ^2ν^2$, $μ^3ν^3$ κτ. εἰσὶν οἱ ζητούμενοι πολλαπλασιασταί· σαφὲς οὖν ὡς ἡ στήλη ἡ ἀντίστοιχος τοῖς $μν$ πρόοδός ἐστιν ἀριθμητικὴ ἧς διαφορὰ ἡ 1, ἣν προάγειν δυνάμεθα ἐς ὃ βουλόμεθα· ἕκαστος δὲ ἀριθμὸς τῆς στήλης $μ^2ν^2$ τὸ ἄθροισμά ἐστι τῶν ὅρων τῆς πρὸς δεξιὰν αὐτῆς στήλης τῶν ἐνὶ χώρῳ αὐτοῦ καθυπερτέρων· ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων στηλῶν· διὰ δὲ τουτουῒ τοῦ πίνακος τοῦ ὅσον ἂν τις βούλοιτο προχυθέντος ἄν, εὑρεθήσεται ἐξίσωσις παντὸς βαθμοῦ περιέχουσαν μίαν ῥίζαν $χ=μ+ν$· καλῶ δὲ ταύτην ἐπιλύσιμον.

511. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶσα ἐξίσωσις, ᾗ ἔνδει τῶν ὅρων τῶν ἀρτίου χώρου, καὶ ἧς τῶν ὅρων οἱ συνεργοὶ ἀνάλογόν εἰσι ταῖς ποσότησι $μν$, $μ^2ν^2$ κτ. πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ τοὺς τοῦ ἤδη ἐκτεθέντος πίνακος ἀριθμούς, ἕξει μίαν ῥίζαν ὁμοίαν τῷ τύπῳ. (499).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω γὰρ τεταρτοβάθμιος ἐξίσωσις ἡ $χ^4 \pm 4αχ^2 + 2α^2 - β = 0$, καὶ παραβεβλήσθω πρὸς τὴν ἐπιλύσιμον· καὶ δὴ ἔσται $μν = \mp α$, καὶ $μ^4 + ν^4 = β$, ἐν ᾗ ἀντικατασταθείσης τῆς τοῦ $ν$ δυνάμεως λαμβανομένης ἐκ τῆς προτέρας ἐξισώσεως (ἐπεὶ γὰρ $μν = \mp α$· ἄρα $ν = \frac{\mp α}{μ}$, καὶ $ν^4 = \frac{α^4}{μ^4}$) προκύψει $μ^4 + \frac{α^4}{μ^4}$