ἀπαλλαγῇ τῦ κλάσματος, $\alpha^2 - 6\alpha y + 9y^2 + 4y^2 + 4y^2 = 4\beta$, ἢ $\alpha^2 - 6\alpha y + 13y^2 = 4\beta$· ὅθεν $13y^2 - 6\alpha y = 4\beta - \alpha^2$, ἢ διαιρέσει διὰ 13, $y^2 - \frac{6\alpha y}{13} = \frac{4\beta - \alpha^2}{13}$ (461)· τέλος δὲ συμπληρώσει τῦ ἐλλείποντος τετραγώνυ διὰ τῦ τετραγώνυ τῦ ἀπὸ τῦ ἡμισυνεργῦ $\frac{6\alpha}{13}$ τῆς y, εἴτ' ἦν ἀπὸ τῦ $\frac{3\alpha}{13}$, ἐκπεραίνεται, ὡς ἔθος, τὰ τῆς πράξεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ συνθέτων ἐξισώσεων.

473. Ἔςω $\chi = 2$· ὗτος ἦν ὁ τύπος καλεῖται ἐξίσωσις ἁπλῆ, ἢ πρωτοβάθμιος ἐπεὶ χ ἐπὶ μηδὲν πεπολλαπλασίασαι δείκτην ἔχυσα 1, ὅ ἐςιν, ὖσα πρωτοβάθμιος.

474. Ἐὰν μέντοι λάβωμεν δύω ἐξισώσεις $\chi = 2$, ἢ $\chi = 2$, ἢ ταύτας ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιάσωμεν, προκύψει καινὴ ἐξίσωσις ἡ $\chi^2 = 4$, ἢ καλεῖται ἐξίσωσις σύνθετος, βαθμῦ δευτέρυ· παράγεται γὰρ ὑπὸ δυεῖν ἁπλῶν ἐξισώσεων (287).

475. Ἐὰν δ' ἐπιπολλαπλασιαθῇ ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις $\chi^2 = 4$ ἐπὶ τὴν ἁπλῆν ἐξίσωσιν $\chi = 2$, ἡ προκύψυσα ἐξίσωσις $\chi^3 = 6$ ἔςαι σύνθετος βαθμῦ τρίτυ ὡς γινομένη ὑπὸ τριῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων, ἢ ὕτως ἐφεξῆς· ἐπὶ τύτοις ά. δυνάμεθα ἀποδῦναι τῇ ἁπλῇ ποσό-

τητι χ τῇ ἐν συνθέτῳ τινὶ ἐγκειμένῃ, ποικίλας δυνάμεις ὑπαρκτικὰς, ἢ λειπτικὰς, ἢ ϗ ἀναμὶξ· β΄. δυνάμεις κατ᾽ ἐπίνοιαν, ἢ ἀνυπάρκτȣς, οἷαι αἱ $\sqrt[2]{-\alpha}$ (175) ἢ $\sqrt[4]{-\beta}$· κτλ.

Δῶμεν ȣ̓ν τῇ χ τὰς ἑξῆς δυνάμεις· $\chi=2$, $\chi=3$, $\chi=4$, ϗ διὰ τὸν αὐτίκα γνωσθησόμενον λόγον μεταθέσει τρέψωμεν αὐτὰς εἰς τὰς δὲ $\chi-2=0$, $\chi-3=0$, $\chi-4=0$· ἐὰν ȣ̓ν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπ᾽ ἀλλήλας αἱ δύω πρότεραι ἐξισώσεις $\chi-2=0$, $\chi-3=0$, προκύψει ἐξίσωσις σύνθετος δευτεροβάθμιος ἡ $\chi^2-2\chi-3\chi+2\times 3=0$.

476. Ἵνα δὲ γενικώτερον προβαίνοι ἡ Μέθοδος, ἔϛω $\pi=2$, $\kappa=3$, $\rho=4$, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως· ἔσονται ȣ̓ν αἱ ἐξισώσεις $\chi-\pi=0$, $\chi-\kappa=0$, $\chi-\rho=0$, $\chi-\sigma=0$ κτλ. πολλαπλασιασθήτωσαν δὲ ἐπ᾽ ἀλλήλας πρῶτον αἱ δύω πρότεραι ἐξισώσεις, ὅθεν προκύψει $\chi^2-\pi\chi-\kappa\chi+\pi\kappa=0$ (Β) ἐξίσωσις σύνθετος δευτεροβάθμιος, εἴγε ὁ μείζων τῶν ἐν αὐτῇ τῆς χ βαθμῶν ἐϛὶ τετράγωνος (391)· εἶτα πολλαπλασιασθήτω αὕτη ἐπὶ τὴν τρίτην ἁπλῆν ἐξίσωσιν $\chi-\rho=0$· ϗ δὴ προκύψει $\chi^3-\pi\chi^2-\kappa\chi^2-\rho\chi^2+\pi\kappa\chi+\pi\rho\chi+\kappa\rho\chi-\pi\kappa\rho=0$ (Δ) ἐξίσωσις σύνθετος βαθμȣ͂ τρίτȣ· γίνεται γὰρ ὑπὸ τριῶν ἁπλῶν, ὅ,τε μείζων τῶν ἐν αὐτῇ τῆς χ βαθμῶν ἔϛι κύβος.

477. Ἐντεῦθεν ἄρα ἐν γένει πᾶσα σύνθετος ἐξίσωσις ἔϛαι βαθμȣ͂ ἐκδηλȣμένȣ ὑπὸ τȣ͂ ἀριθμȣ͂ τῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων, ὑφ᾽ ὧν παράγεται, ϗ δὴ ἑπομένως ὑπὸ τῶν διαφόρων δυνάμεων τῆς ἀγνώϛȣ χ, αἵτινες εἰσὶν αἱ διάφοροι ῥίζαι τῆς συνθέτȣ ἐξισώσεως.

478. Ἐξισώσεως συνθέτου ὅρος καλεῖται, τὸ συμπλήρωμα πάντων τῶν ὅρων, ἐν οἷς ἡ ἄγνωστος τὸν αὐτὸν ἔχει δείκτην· οὕτω τῆς προλαβέσης συνθέτου ἐξισώσεως Δ, εἷς μὲν ὅρος ἐστὶν ὁ $-\pi\chi^2 - \kappa\chi^2 - \rho\chi^2$ ἕτερος δὲ ὁ $+\pi\kappa\chi + \pi\rho\chi + \kappa\rho\chi$.

479. Εὐδιαθετεῖν ἐξίσωσιν ἐστι διατάττειν τοὺς κατ' αὐτὴν ὅρους οὕτως, ὡς τοὺς δείκτας αὐτῶν ἀλληλοδιαδόχως προϊέναι κατὰ τὴν σειρὰν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὡς ἐπὶ τῆς Δ ἐξισώσεως (476) ὁ μὲν τοῦ πρώτου ὅρου δείκτης ἐστι 3, ὁ δὲ τοῦ δευτέρου 2, ὁ δὲ τοῦ τρίτου 1.

Πᾶσα εὔτακτος ἐξίσωσις ἐστιν, ἤτοι πλήρης, εἴπερ μὴ διακόπτεται ἡ σειρὰ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐν τοῖς δείκταις, ὡς ἐστιν ἡ Δ ἐξίσωσις, ἢ μὴ πλήρης, εἴπερ διακόπτοιτο, οἷα ἐστὶν ἡ ἐξίσωσις $\chi^3 - \pi\kappa\rho = 0$, ἧς ἄπεισιν ὅ,τε δεύτερος, καὶ τρίτος ὅρος, εἴτ' οὖν χ^2, καὶ χ.

480. Ἐντεῦθεν ἄρα πᾶσα πλήρης ἐξίσωσις τοσούτων εὐμοιρεῖ ὅρων, ὅσων καὶ ῥιζῶν σὺν ἑνί· ἡ γὰρ προλαβοῦσα ἐξίσωσις Β (476) δευτέρου οὖσα βαθμοῦ, ὅ ἐστι δύω περιέχουσα ῥίζας, ὅρων τριῶν ἐστι περιεκτική· ἡ δὲ Δ τριτόῤῥιζος οὖσα, τέσσαρας περιέχει ὅρους, εἴγε $-\pi\kappa\rho = -\pi\kappa\rho\chi^0$ (59).

481. Ἁπάσης ἁπλῆς ἐξισώσεως, ἐξ ἧς τὸ δεύτερον μέλος ἐγενέτο $= 0$ διὰ μεταθέσεως, αἱ ῥίζαι, εἴτ' οὖν δυνάμεις τῆς ἀγνώστου, ὑπάρχουσαι μὲν, τὸ $-$, λείπουσαι δὲ τὸ $+$ προτεταγμένον ἑαυτῶν ἔχουσιν· ἐντεῦθεν ἄρα.

482. Ἤτοι πᾶσαι αἱ ῥίζαι εἰσὶ λειπτικαὶ, καὶ δὴ οἱ ὅροι πάντες ἔξουσι τὸ $+$, ἢ πᾶσαι ὑπαρκτικαὶ, καὶ τοῖς ὅροις προσκείσεται ἀμοιβαδὸν $+$, $-$

483. Ἐν γένει δὲ τοσάκις ἀφ' ἑκάστου ἐπὶ ἕκαστον ὅρον ἀμειφθήσεται τὸ σύμβολον, ὅσαι εἰσὶν αἱ ὑπαρκτικαὶ ῥίζαι· τοσάκις δὲ ἀφ' ἑκάστου ἐφ' ἕκαστον τὸ αὐτὸ παρακολουθήσει, ὅσαι αἱ λειπτικαί· ἐπὶ γὰρ τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 - 3\chi^2 - 10\chi + 24 = 0$ (Ζ), ἧς δύω μὲν εἰσὶ ῥίζαι ὑπαρκτικαὶ αἱ $+2$, $+4$, μία δὲ λειπτικὴ ἡ -3, δύω μέν εἰσιν ἀμοιβαὶ τοῦ συμβόλου $+-$, $-+$, μία δὲ τοῦ αὐτοῦ παρακολούθησις, $-$, $-$

484. Ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν, εἴτ' οὖν αἱ ὑπαρκτικαὶ δυνάμεις ἐξισοῦνται τῷ ἀθροίσματι τῶν λειπτικῶν, καὶ δὴ τότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου ὅρου ἐλλείπεται· ὡς δῆλον ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^3 - 28\chi - 48 = 0$ ἥτις γίνεται ὑπὸ τῶν $\chi - 6 = 0$, καὶ $\chi + 2 = 0$, καὶ $\chi + 4 = 0$· ἢ τὸ τῶν ὑπαρκτικῶν τοῦ τῶν λειπτικῶν ὑπερέχει, ὅτε καὶ ὁ δεύτερος ὅρος λειπτικὸς γίνεται, ὡς πρόδηλον ἐκ τῆς Ζ ἐξισώσεως· ἢ ἔλαττον, ὅτε δὴ καὶ ὑπαρκτικὸς γίνεται ὁ δεύτερος ὅρος, ὡς ἰδεῖν ἔνεστιν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 + 2\chi - 24 = 0$ γινομένης ὑπὸ $\chi - 4 = 0$, $\chi + 6 = 0$.

Ἐκ δὴ τούτων τῶν παρατηρήσεων ὁδηγηθῆναι δυνησόμεθα εἰς τὴν τῶν ῥιζῶν, εἴτ' οὖν τῶν ὑπαρκτικῶν, ἢ λειπτικῶν δυνάμεων τῆς ἀγνώστου εὕρεσιν.

485. Πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ ἐσχάτου ἀμοιροῦσα ὅρου, εἴτ' οὖν τοῦ γνωστῶν μόνων ποσῶν περιεκτικοῦ, ἐκληπτέα ἐστὶν ὡς βαθμοῦ ὑποδεεστέρου, ἢ τοῦ ὡρισμένου τῷ μεγίστῳ τῆς ἀγνώστου δείκτῃ· καὶ γὰρ τῆς ἀγνώστου χ τὸ τηνικαῦτα πᾶσι τοῖς ὅροις ἀνυπαρκτούσης, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι διὰ χ διαιρεθῶσιν, ἡ ἐξίσωσις κάτεισι βαθμὸν ἕνα (459)· οὕτως ἡ $\chi^4 - 28\chi^2 - 48\chi = 0$ οὐκ ἔστι τεταρτοβάθμιος ἐξίσω-

σις, εἴγε πάντας τὲς ὅρες διαιρεθεῖσα διὰ χ, γενήσεται
$\chi^3 - 28\chi - 48 = 0$.

486. Συνεργὸς ὅρε καλεῖται τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γνωςῶν ποσοτήτων, ὑφ' ὧν ϗ τῆς ἀγνώςε παράγεται ὁ καλέμενος ὅρος τῆς συνθέτε ἐξισώσεως (478)· ὅτω τῆς ἐξισώσεως Δ (476), $-\pi-\kappa-\rho$ ἐςὶν ὁ συνεργὸς τῦ δευτέρε ὅρε τῆς ἐξισώσεως, ϗ $\pi\kappa+\pi\rho+\kappa\rho$ ὁ συνεργὸς τῦ τρίτε.

487. Πᾶσα ἄρα εὔτακτος ϗ πλήρης ἐξίσωσις συνεργὸν τῦ μὲν δευτέρε αὐτῆς ὅρε ἔχει τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως, ἢ τῶν τῆς χ δυνάμεων· τῦ δὲ τρίτε, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ὑπὸ τῶν αὐτῶν ῥιζῶν, ἀνὰ δύω λαμβανομένων· τῦ δὲ τετάρτε, τὸ γινόμενον ὑφ' ἁπασῶν ὁμῦ τῶν ῥιζῶν, εἴπερ ἡ ἐξίσωσις τρίτε εἴη βαθμῦ· ὅτω τῆς Δ ἐξισώσεως, ἧς ῥίζαι αἱ π, κ, ρ, συνεργὸς μὲν τῦ δευτέρε ὅρε ἐςὶ $-\pi-\kappa-\rho$, συνεργὸς δὲ τῦ τρίτε ἐςὶ $\pi\kappa+\pi\rho+\kappa\rho$· τῦ δ' ἐσχάτε, $-\pi\kappa\rho$.

Ταῦτα δὲ κρατεῖ κἀπὶ τριτοβαθμίε ϗ εὐτάκτε ἐξισώσεως· ἐν αὐτῇ γὰρ τῦ τετάρτε ὅρε συνεργὸς ἂν εἴη τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ὑπὸ πασῶν τῶν ῥιζῶν σὺν δύω λαμβανομένων, ϗ ἐφεξῆς ὡσαύτως.

Περὶ ἐπιλύσεως τῶν συνθέτων ἐξισώσεων.

488. Ἐπιλύειν ἐξίσωσιν σύνθετον εὑρίσκειν ἐςὶ τὰς διαφόρες δυνάμεις τῆς ἀγνώςε αἵτινες εἰσὶ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως· ἐπεὶ δὲ ὁ ἔσχατος ὅρος τὸ ὑφ' ἁπασῶν τῶν ῥιζῶν συνίςησι γινόμενον, εὑρετέον ἀμέσως ἅπαντας τέτε τὲς διαιρέτας κατὰ τόνδε τὸν τρόπον.

489. Ἵν' εὑρεθεῖεν ἅπαντες φέρ' εἰπεῖν οἱ διαιρέται

τȣ͂ 660 διῃρήσθω πρῶτον διὰ τȣ͂ πρώτȣ ἀριθμȣ͂ 2 (Ἀριθ. 80)· καὶ δὴ ἔςαι δίχα λειψάνȣ πηλίκον 330, ὃς πάλιν διῃρήσθω διὰ 2· τὸ δ' ἐντεῦθεν πηλίκον 165, μὴ δυνάμενον ἔτι διὰ 2 διαιρεθῆναι, διῃρήσθω διὰ 3· τὸ δ' ἐκ τȣ́των πηλίκον 55, διὰ 3 ἀδιαίρετον ὂν, διῃρήσθω διὰ τȣ͂ πρώτȣ ἀριθμȣ͂ 5· ὅθεν πρόεισι πηλίκον 11, ὃς μὴ διαιρȣ́μενος δι' ἄλλȣ παρὰ τὴν 1 καὶ αὐτὸν τȣ͂τον τὸν 11, διῃρήσθω διὰ 11· πηλίκον δὲ ἔσεται 1.

Πρῶτοι ȣ͂ν ἀριθμοὶ διαιρέται τȣ͂ 660 παρὰ τὴν πάντας τȣ̀ς ἀριθμȣ̀ς διαιρȣ͂σαν 1 (Ἀριθ. 78) εἰσὶν οἵδε 2, 2, 3, 5, 11.

Εἰς δὲ εὕρεσιν τῶν πολλαπλῶν ἀριθμῶν τῶν διαιρȣ́ντων καὶ αὐτῶν τὸν 660, πεπολλαπλασιάσθων οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ διαιρέται εὑρεθέντες ȣ̔́τως.

α΄. Ἀνὰ δύω· $2\times2=4$· $2\times3=6$· $2\times5=10$· $2\times11=22$· β΄. ἀνὰ τρεῖς· $2\times2\times3=12$, $2\times2\times5=20$· $2\times2\times11=44$· $2\times3\times5=30$· $2\times3\times11=66$· $2\times5\times11=110$· $3\times5\times11=165$· γ΄. δὲ ἀνὰ τέσσαρας· $2\times2\times3\times5=60$· $2\times2\times3\times11=132$· $2\times2\times5\times11=220$· $2\times3\times5\times11=330$· τελευταῖον δὲ ἀνὰ πέντε· $2\times2\times3\times5\times11=660$· πάντες ἄρα οἱ διαιρέται τȣ͂ 660 ἔσονται 1, 2, 3, 5, 11, 4, 6, 10, 22, 15, 33, 55, 12, 20, 44, 30, 66, 110, 165, 60, 132, 220, 330, 660.

Ὁ δὲ λόγος ταύτης τῆς πράξεως ἐςὶν, ὅτι ὁ 660 γινόμενος ὑπὸ $1\times2\times2\times3\times5\times11$, ἐὰν ἐκ διαδοχῆς διαιρεθῇ διὰ 1, 2, 2, 3, 5, 11, ἀποβήσεται τελευτῶν 1· ὁ αὐτὸς δὲ ἀριθμὸς, πολλαπλȣ͂ς ὢν καὶ τȣ͂ 2×2, καὶ $2\times2\times3$ κτλ. λειψάνȣ ἄτερ διαιρεθήσεται δι' ἑκάςȣ τῶνδε τῶν γινομένων.

490. α'. Εὑρεθέντων ἐν ὅτω πάντων τῶν διαιρετῶν τῦ ἐσχάτε ὅρε τῆς ἐξισώσεως, ἀντικατασήτωσαν, ἀρξαμέναις ἐκ τῶν ἐλαττόνων, ἕκασος ἀντὶ χ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως, νῦν μὲν ὡς ὑπαρκτικοὶ, νῦν δὲ ὡς λειπτικοὶ (475) ὃς δ' ἂν ἀντικατασαθεὶς ἀντὶ χ ποιῇ τὴν ἐξίσωσιν ἴσην 0, ἔσαι ἔτος μία τις τῶν ἀληθῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως· ὡς ἐπιλύειν οἷατε ἔσα τὸ πρόβλημα.

β'. Ἐκ τῆς εὑρεθείσης δὲ ῥίζης συνεσάσθω ἐξίσωσις μετὰ τῦ συμβόλε +, ἢ −, ὅπως ἔχει δηλονότι λείψεως, ἢ ὑπάρξεως, ἡ εὑρεθεῖσα ῥίζα· ἐὰν γὰρ φέρε εὑρεθῇ ῥίζα + 3, γενέσθω ἐξίσωσις $\chi - 3 = 0$· ἐπεὶ δὲ ἡ σύνθετος ἐξίσωσις, πολλαπλῆ ἔσα ϗ ταύτης τῆς ἁπλῆς ἐξισώσεως, διαιρέσιμος ἂν εἴη δι' αὐτῆς ταύτης· διῃρήσθω δι' αὐτῆς· ϗ δὴ ὅτως ἡ σύνθετος ἐξίσωσις κατελεύσεται βαθμὸν ἕνα.

491. γ'. Ἐπὶ τῆς συνθέτε ἐξισώσεως, τῆς ὅτω βαθμὸν ἕνα κατελθέσης, ἀντικατασαθήτωσαν αὖθις ἀντὶ χ πάντες οἱ εὑρεθέντες τῦ ἐσχάτε ὅρε διαιρέται, πλὴν τῶν ἀνοικείων φανέντων ἐπὶ τῆς πρώτης πράξεως, ὁ δ' ἀποτελῶν τὴν ἐξίσωσιν $= 0$, νέαν ϗ αὐτὸς συσήσας ἐξίσωσιν, διαιρείτω τὴν σύνθετον ἐξίσωσιν, ἤδη καταχθεῖσαν· ϗ δὴ ὅτω ϗ αὕτη κάτεισι βαθμὸν ἕνα.

δ'. Ἐπανειλήφθω ὡσαύτως τὰ τῆς πράξεως, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις βαθμῦ τρίτε ὑπερτέρα ᾖ, ἐς ὃ τὸ πηλίκον ἐξίσωσις ὑπάρχοι δευτεροβάθμιος, ἥτις ἐπιλυθήτω κατὰ τὴν ἀποδοθεῖσαν μέθοδον (452 κτ).

έ. Διὰ τῦ γινομένε ὑπὸ τῶν εὑρεθεισῶν ῥιζῶν διῃρήσθω ὁ ἔσχατος τῆς συνθέτε ἐξισώσεως ὅρος· τὸ δὲ πηλίκον ἔσαι ἡ ἐσχάτη ζητεμένη ῥίζα· ἐπαισθητότερον δὲ ταῦτα πάντα φανήσεται δι' ὑποδειγμάτων.

ϛʹ. Ἐν γένει μέντοι, ἐὰν ὁ μέγιστος βαθμὸς τῆς ἀγνώστου συνεργόντινα ἔχῃ, ἀπηλλάχθω τούτου πρὶν τῶν διαιρετῶν λαβεῖν ἀπόπειραν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Αʹ. Εὑρεῖν Ἀριθμὸν, ἀφ᾽ οὗ ὁ τετράγωνος ἑνδεκάκις ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ τοῦ κατ᾽ αὐτὸν κύβου, προστεθέντος τριακονταοκτάκις τοῦ αὐτοῦ, καταλείπει 40.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ ἐξίσωσις ἐστι $\chi^3 - 11\chi^2 + 38\chi = 40$· μεταθέσει· $\chi^3 - 11\chi^2 + 38\chi - 40 = 0$ (A)· αʹ. εὑρεθήτωσαν οἱ τοῦ 40 διαιρέται (489) οἵτινές εἰσιν 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40. βʹ. $+1$, -1 ἀντὶ χ εἰσαχθέντες ἥκιστα ἄγουσιν ἐπὶ 0 τὴν ἐξίσωσιν· οὐκοῦν ἀντικαταστήτω ἀντὶ χ, $+2$· τοιγαροῦν $\chi^3 = +8$, καὶ $-11\chi^2 = -44$, καὶ $+38\chi = 76$· ἀντὶ οὖν τῆς A ἐξισώσεως προκύπτει οὕτως ἡ $8 - 44 + 76 - 40 = 0$· οὐκοῦν $+2$ ἐστι μία τις τῶν ἀληθῶν ῥιζῶν τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως.

Παρατηρῶν δὲ, ὡς ἀντὶ χ ἀντικατασάντος τοῦ -2, γίνεται ἡ ἐξίσωσις $-8 - 44 - 76 - 40 = -168$ ἀντὶ $= 0$, συνάγω ὅτι -2 οὐκ ἐστι μία τῶν ῥιζῶν· βʹ. γενέσθω ἐκ τῆς εὑρεθείσης ῥίζης $+2$ ἡ ἐξίσωσις $\chi - 2 = 0$, καὶ δι᾽ αὐτῆς διῃρήσθω ἡ A ἐξίσωσις κατὰ τοὺς ἐκτεθέντας τῆς συμβολικῆς διαιρέσεως κανόνας (63. ὑπόδ. Βʹ.)· καὶ δὴ ἔσται πηλίκον $\chi^2 - 9\chi + 20 = 0$, ὃ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ὄν, ἐπιλελύσθω κατὰ τοὺς περὶ τῶν τοιούτων προαποδεδομένους κανόνας· ἵνα δὲ τοῦτο γένηται, μετατεθείσθω ὁ 20 καὶ μενάτω ἡ ἐξίσωσις μόνη οὕτω $\chi^2 - 9\chi = -20$, ἐφ᾽ ἧς συμπληρώσει τοῦ ἐλλειποῦς τετραγώνου, καὶ ῥίζης ἐξαγωγῇ, εὑρεθήσεται $\chi = 5$, ἡ δευτέρα ζητουμένη ῥίζα.

Ἀλλὰ γὰρ ἡ A ἐξίσωσις τριτοβάθμιος οὖσα τρεῖς περιέχειν ὀφείλει ῥίζας (477)· ὁ δὲ τρίτος ὅρος 40 ἐστι τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω εὑρεθεισῶν ῥιζῶν 2×5 ϗ τῆς ζητεμένης τρίτης (487)· ἐκεῖν διῃρήσθω ὁ 40 διὰ 10, τὸ δὲ πηλίκον 4 ἔςαι ἡ ζητεμένη τρίτη ῥίζα.

Εὕρηνται ἄρα τρεῖς ἀριθμοὶ 2, 4, ϗ 5, ὧν ἕκαςος ἀποπληροῖ τὴν τε προβλήματος θέσιν, ὡς ἑκάςῳ ἀποπειραθέντι τέτων συνιδεῖν ἔξεςι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Ἐπιλύσαι τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4 + 15\chi^3 + 71\chi^2 = -105\chi$, ταυτὸν εἰπεῖν τὴν $\chi^4 + 15\chi^3 + 71\chi^2 + 105\chi = 0$ (P)

ΛΥΣΙΣ. ά. διαιρέσει διὰ χ κατήχθω ἡ P ἐξίσωσις ἐπὶ βαθμὸν τρίτον· $\chi^3 + 15\chi^2 + 71\chi + 105 = 0$· β΄. πάντων τῶν κατ' αὐτὴν ὅρων ὑπαρκτικῶν ὄντων, πάσας τὰς ῥίζας αὐτῆς λειπτικὰς χρεὼν εἶναι (482)· εὑρεθέντων ἓν τῶν διαιρετῶν ἁπάντων τε 105, τῇ αὐτῇ μεθόδῳ, ὡς ἀνωτέρω, χρησάμενοι, εὑρήσομεν τρεῖς ῥίζας -3, -5, -7, ὧν ἑκάςη ἀποπληροῖ τὴν θέσιν τε προβλήματος· ϗ γὰρ -3 φέρ' εἰπεῖν ἀντὶ χ εἰσαχθεὶς ποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν $+81 - 405 + 639 - 315 = 0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν ὅπως ὁ διπλες αὐτε κύβος σὺν τῷ γινομένῳ ὑπ' αὐτε τε ἀριθμε καὶ τε 234 ἀποτελῇ 648.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ ἐξίσωσις ἐςι $2\chi^3 + 234\chi = 648$, ἢ $2\chi^3 - 234\chi - 648 = 0$· ά. ἀπαλλακτέον τε 2 συνεργε τὸν $2\chi^3$ διαιρέσει ἁπάσης τῆς ἐξισώσεως διὰ 2· ἔςιν ἓν $\chi^3 - 117\chi - 324 = 0$ (Z). β΄. ἐξ ἁπάντων τῶν τε 324 διαιρετῶν ὁ -3 ἀποτελεῖ τὴν ἐξίσωσιν $= 0$, ἄρα $\chi + 3 = 0$ διαιρείτω τὴν Z ἐξίσωσιν· ὅθεν ἔςαι πηλίκον $\chi^2 - 3\chi - 108 = 0$ (63, ὑπόδειγ. Γ΄.).

Αὕτη δὲ ἐπιλελύσθω κατὰ τὰ δευτοβάθμια τῶν προβλημάτων $\chi^2 - 3\chi = 108$

συμπληρώσει· $\chi^2 - 3\chi + \frac{9}{4} = 108 + \frac{9}{4}$

ἐξαγωγῇ ῥίζης $\chi - \frac{3}{2} = \sqrt{108 + \frac{9}{4}}$

$$\chi - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{432}{4} + \frac{9}{4}}$$

$$\chi - \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{441}{4}} = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$$

οὐκοῦν $\chi - \frac{3}{2} = 10\frac{1}{2}$· ἄρα $\chi = 10\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 12$.

Ἐπεὶ δὲ ἐλλείπει ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ἐξισώσεως Ζ (479) ἡ ζητουμένη τρίτη ῥίζα ὀφείλει εἶναι λειπτικὴ (484) καὶ συναπτομμένη τῇ πρώτῃ ῥίζῃ -3 ἐξισοῦσθαι τῷ ἀθροίσματι τῶν ὑπαρκτικῶν ῥιζῶν, ἢ τῇ δευτέρᾳ ὑπαρκτικῇ ῥίζῃ 12· ἔσται ἄρα αὕτη ὁ -9.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν ὅπως εἰ ἀπὸ τοῦ τρὶς εἰλημμένου αὐτοῦ πέμπτου βαθμοῦ σὺν τῷ ἑξαπλῷ αὐτοῦ κύβῳ ἀφαιρεθείη δωδεκάκις ὁ τέταρτος αὐτοῦ βαθμὸς, τὸ κατάλοιπον ἐξισοῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου, καὶ τοῦ 24.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστιν ἐκ τούτων ἡ ἐξίσωσις $3\chi^5 - 12\chi^4 + 6\chi^3 = 24\chi^2$· διαιρέσει πάντων τῶν ὅρων διὰ χ^2, $3\chi^3 - 12\chi^2 + 6\chi = 24$, ἐξίσωσις τριτοβάθμιος, ἥτις μεταθέσει γίνεται $3\chi^3 - 12\chi^2 + 6\chi - 24 = 0$ (Μ). ἀπαλλαγῇ τοῦ συνεργοῦ 3, $\chi^3 - 4\chi^2 + 2\chi - 8 = 0$ (Α) ἀντικαταστάσει οὖν τοῦ $+4$ ἑνὸς τῶν τοῦ 8 διαιρετῶν, ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ τὸ μηδὲν οἰχομένη ἀποδέχεται ὡς ἑαυτῆς ῥίζαν τὸν $+4$.

Διαιρεθείσης οὖν τῆς Α ἐξισώσεως διὰ $\chi - 4 = 0$, πηλίκον προκύψει ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος ἡ $\chi^2 + 2 = 0$· ἄρα $\chi^2 = -2$· ἄρα $\chi = +\sqrt{-2}$, καὶ $-\sqrt{-2}$, ποσότητες ἀνύπαρκτοι, αἵτινες εἰσὶν αἱ δύο λοιπαὶ ζητούμεναι ῥίζαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ Μεταχηματισμȣ̃ τῶν ἐξισώσεων, καὶ τῆς διὰ γενικῶν τύπων αὐτῶν ἐπιλύσεως.

492. Ἵνα δὲ ϛοιχειώδεις καὶ γενικȣ̀ς τύπȣς τȣ̃ πάσαν ἐξίσωσιν ἐπιλύειν ἐξενέγκωμεν, ἀνάγκη διὰ βραχέων ἀποδȣ̃ναι τὰ περὶ τῶν καλȣμένων μεταχηματισμῶν τῶν ἐξισώσεων.

493. Α΄. οὖν εἰς πλείω εὐμάρειαν οἱ πολυώνυμοι καὶ πολυγράμματοι συνεργοὶ τῶν ἐξισώσεων λαμβάνονται μονώνυμοί τε καὶ μονογράμματοι· κείσθω γὰρ ἐξίσωσις τριτοβάθμιος ἡ

$$\begin{array}{llll} \upsilon^3 & +\alpha\upsilon & +\alpha\beta\upsilon & +\alpha\beta\gamma=0, \\ & +\beta & +\alpha\gamma & \\ & \gamma & +\beta\gamma & \end{array}$$

ἐὰν οὖν ὑποτεθῇ $\alpha+\beta+\gamma=\kappa$, καὶ $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\pi$, καὶ $\alpha\beta\gamma=\rho$, ὁ γενικὸς τύπος τῆς τριτοβαθμίȣ ἐξισώσεως ἔϛαι $\upsilon^3+\kappa\upsilon^2+\pi\upsilon+\rho=0$.

494. Β΄. Ἵνα ἐξίσωσιν, ἧς πάντες οἱ ὅροι πλὴν τȣ̃ πρώτȣ κλασματικοὶ εἶεν, τῶν κατὰ τὰ κλάσματα παρονομαϛῶν ἀπαλλάξωμεν, μηδένα προθέμενοι συνεργὸν τῷ πρώτῳ αὐτῆς ὅρῳ, εἰλήφθω ἀντὶ τῆς ἀγνώϛȣ ἑτέρα ἄγνωϛος διῃρημένη τῷ γινομένῳ ὑπὸ πάντων τῶν παρονομαϛῶν ἐπ᾽ ἀλλήλȣς πολλαπλασιασθέντων, καὶ πᾶσα ἡ ἐξίσωσις πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸν παρονομαϛὴν τοῦ πρώτȣ ὅρȣ.

Ἔςω ἐξίσωσις ἡ $v^3 - \frac{\alpha v^2}{\beta} + \frac{\alpha\alpha v}{\gamma} + \frac{\alpha^3}{\delta} = 0$ ὑπότε.

θείσθω τοίνυν $v = \frac{\chi}{\beta\gamma\delta}$, ϗ ἀντὶ υ ἀντικαταςάσης ἐν τῇ ἐξισώσει τῆς ποσότητος $\frac{\chi}{\beta\gamma\delta}$, ἔςαι $\frac{\chi^3}{\beta^3\gamma^3\delta^3} - \frac{\alpha\chi^2}{\beta^3\gamma^2\delta^2} + \frac{\alpha\alpha\chi}{\beta\gamma\gamma\delta} + \frac{\alpha^3}{\delta} = 0$· ἕκαςος δὲ τῶν ὅρων ταύτης τῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ $\beta^3\gamma^3\delta^3$ παρονομαςὴν τοῦ πρώτου ὅρου, ϗ δὴ γενήσεται $\chi^3 - \alpha\gamma\delta\chi^2 + \alpha^2\beta^2\gamma\delta^2\chi + \alpha^3\beta^3\gamma^3\delta^2 = 0$.

Ἐὰν δὲ ᾖ $\beta=\gamma=\delta$, ἀπόχρη μόνον λαβεῖν $v = \frac{\chi}{\beta}$.

ἔςω γὰρ ἐξίσωσις ἡ $v^3 - \frac{3v^2}{2} + \frac{11}{2} = 0$, ϗ εἰλήφθω $v = \frac{\chi}{2}$· τοιγαροῦν ἀντικαταςάσει τῆς $\frac{\chi}{2}$ ἀντὶ υ, γενήσεται ἐξίσωσις $\frac{\chi^3}{8} - \frac{3\chi^2}{2.2} + \frac{6\chi}{2.2} + \frac{11}{2} = 0$. ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ 8 γενήσεται· $\frac{8\chi^3}{8} + \frac{24\chi^2}{4} + \frac{48\chi}{4} + \frac{88}{2} = 0$· ἀναγωγῇ τῶν κλασμάτων ἐφ' ἁπλουςέραν ἔκθεσιν, $\chi^3 - 6\chi^2 + 12\chi + 44 = 0$.

465. Γ'. Ἵνα ἐξισώσεως ὁ δεύτερος ὅρος ἐξαφανισθῇ, εἰλήφθω ἄγνωςος καινὴ τῇ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως ἰσουμένη, ἐὰν προσλάβῃ μετ' ἐναντίου συμβόλου τὸν συνεργὸν τοῦ δευτέρου ὅρου διαιρεθέντα διὰ τοῦ δείκτου τοῦ πρώτου

ὅρε· ἔςω ἐξίσωσις $\upsilon^2+6\upsilon-16=0$· εἰλήφθω ὖν $\upsilon=\chi-\frac{6}{2}=\chi-3$, κ̀ ἀντὶ υ ἀντικαταςήτω ἐν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει· ὐκῦν ἔςαι

$$\begin{array}{rl} \upsilon^2 & =\chi^2-6\chi+9\\ +6\upsilon & = \quad +6\chi-18\\ -16 & = \quad\quad -16 \\ \hline & \chi^2 \quad * \quad -25=0\end{array}$$

ἐξίσωσις τῦ δευτέρου ὅρου ἐλλείπυσα, εἰδ' ὁ δεύτερος ὅρος ἑκάτερον ἔχει τὸ σύμβολον $+$ κ̀ $-$, ὡς ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon^2-\alpha\upsilon+\beta\upsilon-\alpha\beta=0$· εἰλήφθω ὡσαύτως ὁ συνεργὸς $-\alpha\times\beta$, κ̀ διῃρήσθω διὰ 2, $-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta$, κ̀ ἄγνωςος ποσότης τὸ πηλίκον τῦτὶ μετ' ἐναντίων συμβόλων προσλαβῦσα ἰσέσθω τῇ ἐπὶ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ἀγνώςῳ· εἰτ' ὖν γενέσθω $\upsilon\times\chi+\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$, κ̀ τῆς ἀντικαταςάσεως γενομένης προκύψει ἐξίσωσις ἡ ἐφεξῆς

$$\begin{array}{r|l} \upsilon^2 & =\chi^2+\alpha\chi-\beta\chi+\frac{1}{4}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha\beta+\frac{1}{4}\beta^2 \\ \left.\begin{array}{r}-\alpha\\+\beta\end{array}\right\}\cdot\upsilon & = \quad -\alpha\chi+\beta\chi-\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha\beta-\frac{1}{2}\beta^2 \\ -\alpha\beta & = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad -\alpha\beta \\ \hline & \chi^2 \quad * \quad -\frac{1}{4}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha\beta-\frac{1}{4}\beta^2=0 \end{array}$$

496. Δ'. Ἵνα δὲ ἐξίσωσιν ῥιζικῶν ἀπαλλάξωμεν ποσοτήτων, ὐ καθ' ἕνα τρόπον ἀεὶ τύτυ ἐν ἐπιτεύξει γινόμεθα· δι' ὃ πλείω παραληφθήσεται ὑποδείγματα πρὸς διασάφησιν τῶν διαφόρων τρόπων.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Προκειμένης ὖν ἐξισώσεως τῆς $\upsilon^3-5\upsilon+\sqrt{2}=0$ ἵν' αὐτὴν τῦ $\sqrt{2}$ ἀπαλλάξωμεν εἰλήφθω $\chi\sqrt{2}=\upsilon$, καὶ τῆς δυνάμεως ταύτης ἀντὶ υ ἀντικατασταθείσης ἔσται

$$\begin{aligned} \upsilon^3 &= 2\chi^3\sqrt{2} \\ -5\upsilon &= -5\chi\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} &= +\sqrt{2} \\ \hline & \quad 2\chi^3\sqrt{2}-5\chi\sqrt{2}+\sqrt{2} \end{aligned}$$

διαιρεθέντων δὲ ἁπάντων τῶν ὅρων διὰ $\sqrt{2}$ προκύψει ἐξίσωσις ῥιζικῶν ἀπηλλαγμένη ἡ $2\chi^3 - 5\chi \times 1 = 0$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἔστιν ὅτε πρόοδος γεωμετρικὴ συνίσταται ἐκ τῶν ῥιζικῶν, ἐφ᾽ ἣν πολλαπλασιασθεῖσα ἡ ἐξίσωσις τῶν ἀλόγων ποσῶν ἀπαλλάττεται· οὕτως

$$\begin{array}{ccccc} \upsilon^4 + & 2\alpha\upsilon^3\sqrt{2} + & 5\alpha\beta\upsilon^2 - & \alpha^3\upsilon\sqrt{8} - & 2\alpha^2\beta^2 = 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 & \sqrt{8} & 4 \\ \hline \chi^4 + & 4\alpha\chi^3 + & 10\alpha\beta\chi^2 - & 8\alpha^3\chi - & 8\alpha^2\beta^2 = 0 \end{array}$$

ταύτης δὲ τῆς ἐξισώσεως τὰς ῥίζας διελεῖν ἀνάγκη διὰ τοῦ $\sqrt{2}$, ἵν᾽ ἀπολάβωμεν τὰς τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, εἴγε $\chi = \upsilon\sqrt{2}$ (ἐξ ὑποθέσεως).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Πολλάκις δὲ ὅλη ἡ ἐξίσωσις τῇ τῶν ῥιζικῶν ποσῶν γεωμετρικῇ προόδῳ διαιρέσιμος ὑπάρχει· οἷον

$$\begin{array}{cccc} \upsilon^3 - & \alpha\upsilon^2\sqrt[3]{2} + & \alpha\beta\upsilon\sqrt[3]{32} - & \alpha^2\beta = 0 \\ 1 & \sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{4} & 2 \\ \hline \chi^3 - & \alpha\chi^2 + & 2\alpha\beta\chi & -\frac{1}{2}\alpha^2\beta = 0 \end{array}$$

ἔστι δὲ ἐπὶ ταύτης τῆς ἐξισώσεως $\chi = \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ'. Ἔξεστι δ᾽ ἀπαλλάξαι ἐξίσωσιν τῶν ῥιζικῶν ὑποτιθέντας τοὺς ῥιζικοὺς ὅρους ἴσους γράμμασι·

τύτων δὲ ἕκαςον θατέρῳ τῆς ἐξισώσεως μέλει τιθέντας, ἢ πᾶσαν τὴν ἐξίσωσιν ἐπὶ βαθμὸν ἐξαίροντας τὸν ἐμφαινόμενον ὑπὸ τῦ ἐπισήμυ· κειμένης ὖν ἐξισώσεως τῆς

$$υ^3 - υ\sqrt{α} + \sqrt{β} = 0$$

ὑποτεθείσθω $\sqrt{α} = κ$, ἢ $\sqrt{β} = π$, ἢ δὴ ἡ ἐξίσωσις τραπήσεται ἐπὶ τήνδε $υ^3 - κυ + π = 0$· μετατεθείσθω τοίνυν τὸ κυ, εἶτ᾽ ὖν γενέσθω $κυ = υ^3 + π$, ἢ ἐπεὶ $\sqrt{α} = κ$ ἅπασα ἡ ἐξίσωσις ἤρθω εἰς δεύτερον βαθμὸν $κ^2υ^2 = υ^6 + 2πυ^3 + π^2$· ἢ μετατεθείσθω ἢ τὸ $2πυ^3$, $2πυ^3 = κ^2υ^2 - υ^6 - π^2$· καὶ ὅλη πάλιν ἡ ἐξίσωσις τετραγωνισθήτω· ὐκῦν ἔςαι

$$4π^2υ^6 = κ^4υ^4 - 2κ^2υ^8 + υ^{12} - 2κ^2π^2υ^2 + 2π^2υ^6 + π^4,$$

εἴτ᾽ ὖν

$$υ^{12} - 2κ^2υ^8 - 2π^2υ^6 + κ^4υ^4 - 2κ^2π^2υ^2 + π^4 = 0$$

τέλος δὲ ἡ τὸν ἐλάχιςον ἐν τῇ ἐξισώσει δείκτην ἔχυσα $υ^2$ γενέσθω $= χ$, καὶ δὴ κάτεισιν ἡ ἐξίσωσις εἰς βαθμὸν ἕκτον

$$χ^6 - 2κ^2χ^4 + 2π^2χ^3 + κ^4χ^2 - 2κ^2π^2χ + π^4 = 0$$

ἀντικαταςαθεισῶν δὲ ἐν ταύτῃ τῇ ἐξισώσει τῶν δυνάμεων $α$, $α^2$, $β$, $β^2$ ἀντὶ $κ^2$, $κ^4$, $π^2$, $π^4$ προκύψει ἐξίσωσις ῥιζικῶν ἀπηλλαγμένη ἡ

$$χ^6 - 2αχ^4 + 2βχ^3 + α^2χ^2 - 2αβχ + β^2 = 0$$

δῆλον δὲ, ὡς ἐὰν ὦσι τὰ ῥιζικὰ κυβικὰ, τὰ τῆς ἐξισώσεως μέλη ἐξαρτέον ἐπὶ τρίτον βαθμόν.

497. Ε΄. Ἵνα δὲ τὰς τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ῥίζας ἐπὶ ποσὸν δοθὲν πολλαπλασιάσωμεν, εἴτ᾽ ὖν τὰς τῆς $υ^3 - αυ^2 - β^2υ + ααβ = 0$ ἐπὶ τὸ $γ$, εἰλήφθω $γυ = χ$, εἴτ᾽ ὖν $υ = \frac{χ}{γ}$, ἀντὶ ὖν $υ$ ἀντικαταςαθέντος τῦ $\frac{χ}{γ}$, προ-

κύψει καινὴ ἐξίσωσις ἡ $\frac{\chi^3}{\gamma^3} - \frac{\alpha\chi^2}{\gamma^2} - \frac{\beta^2\chi}{\gamma} + \alpha\beta\beta = 0$, ἥτις πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ γ^3, ἀναγωγῇ γενήσεται $\chi^3 - \alpha\gamma\chi^2 - \beta\beta\gamma^2\chi + \alpha\beta\beta\gamma^3 = 0$, ἧς περ ῥίζαι αἱ $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, $-\beta\gamma$. Ἔστω αὖθις ἐξίσωσις ἡ $\upsilon^3 - 6\upsilon^3 + 11\upsilon - 6 =$, ἧς τὰς ῥίζας $+1$, $+2$, $+3$ πολλαπλασιάσαι πρόκειται ἐπὶ 2· γενέσθω τοίνυν $\upsilon = \frac{\chi}{2}$, καὶ ἀντὶ υ ἀντικατασταθέντος τοῦ $\frac{\chi}{2}$ προκύψει ἐξίσωσις ἡ $\frac{\chi^3}{8} - \frac{6\chi^2}{4} + \frac{11\chi}{2} - 6 = 0$, ἣ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ 8, ἀναγωγῇ γενήσεται $\chi^3 - 12\chi^2 + 44\chi - 48 = 0$, ἧς ῥίζαι $+2$, $+4$, $+6$.

Δῆλον οὖν ἐκ τούτων, ὡς ἵν' ἐξίσωσις πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ποσότητα τὴν δοθεῖσαν, ἀποχρήσει ταύτην πολλαπλασιάσαι ἐπὶ γεωμετρικὴν πρόοδον, ἧς πρῶτος μὲν ὅρος 1. πηλίκον δὲ τοῦ λόγου ἡ δεδομένη ποσότης· οὕτω τῶν ἐκτεθέντων ἤδη ὑποδειγμάτων ληφθείσης ἀγνώστου τῆς χ, τὸ μὲν πρῶτον ἔσται

$$\begin{array}{l} \chi^3 - \alpha\chi^2 - \beta^2\chi + \alpha\beta\beta = 0 \\ \div\!\div 1 : \gamma : \gamma^2 : \gamma^3 \\ \hline \chi^3 - \alpha\gamma\chi^2 - \beta^2\gamma^2\chi + \alpha\beta\beta\gamma\gamma\gamma = 0, \end{array}$$

τὸ δὲ δεύτερον,

$$\begin{array}{l} \chi^3 - 6\chi^2 + 11\chi - 6 = 0 \\ \div\!\div 1 : 2 : 4 : 8 \\ \hline \chi^3 \quad 12\chi^2 + 44\chi - 48 = 0 \end{array}$$

498. ς'. Ἵνα δὲ τὰς τῆς δοθείσης ἐξισώσεως $\upsilon^3 - \alpha\upsilon^2 - \beta^2\upsilon + \alpha\beta\beta = 0$ ῥίζας $+\alpha$, $+\beta$, $-\beta$ ποσό-

τητι δοθείσῃ τῇ $+\gamma$ διέλωμεν, γεγονέτω $\frac{\upsilon}{\gamma}=\chi$, εἶτ' οὖν $\upsilon=\gamma\chi$, καὶ δι' ἀντικαταστάσεως ἔσαι $\gamma^3\chi^3 - \alpha\gamma^2\chi^2 - \beta^2\gamma\chi + \alpha\beta\beta = 0$· ἑκάστου δὲ τῶν ταύτης ὅρων διαιρεθέντος διὰ γ^3 προκύψει ἐξίσωσις ἡ $\chi^3 - \frac{\alpha\chi^2}{\gamma} - \frac{\beta^2\chi}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta\beta}{\gamma^3} = 0$, ἧς ῥίζαι αἱ $+\frac{\alpha}{\gamma}$, $+\frac{\beta}{\gamma}$, $-\frac{\beta}{\gamma}$. κατάδηλον τοίνυν, ὡς ἵν' ἐξισώσεως αἱ ῥίζαι διὰ ποσότητος δεδομένης διαιρεθῶσιν, ἀπόχρη μόνον εἰ πᾶσα διαιρεθείη διὰ προόδου γεωμετρικῆς, ἧς ὁ μὲν πρῶτος ὅρος εἴη μονὰς, πηλίκον δὲ ἡ δοθεῖσα ποσότης· ἐὰν γὰρ ἑτέρα ἄγνωστος ἡ χ ληφθῇ, καὶ πρόοδος γεωμετρικὴ $\div 1 : \gamma : \gamma^2 : \gamma^3$ κτλ, ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις προκύψει διὰ διαιρέσεως

$$\begin{array}{l} \chi^3 - \alpha\chi^2 - \beta^2\chi + \alpha\beta\beta = 0 \\ \div\, 1 \;:\; \gamma \;:\; \gamma^2 \;:\; \gamma^3 \\ \hline \chi^3 - \frac{\alpha\gamma\chi^2}{\gamma} - \frac{\beta^2\gamma^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha\beta\beta}{\gamma^3} = 0 \end{array}$$

Τούτων οὕτω προδιατεθέντων, φέρε πρῶτον τὸν γενικὸν τύπον τῆς τῶν τριτοβαθμίων (ἐφ' ὧν καὶ μόνων ἐντελῶς ἐφαρμόζεται) προβλημάτων ἐπιλύσεως ἐξενέγκωμεν.

499. Ἔσω οὖν ἐξίσωσις τριτοβάθμιος κλασμάτων, καὶ ποσῶν ῥιζικῶν, καὶ δὴ καὶ τοῦ δευτέρου ὅρου, ἀπηλλαγμένη (494, 495, 496) ἡ $\chi^3 - 3\alpha\chi - \beta = 0$· καὶ ὑποτεθείσθω $\chi=\mu+\nu$· ἄρα $\chi^3 = \mu^3 + 3\mu\nu(\mu+\nu) + \nu^3$· ἀντὶ δὲ $\mu+\nu$ τεθέντος χ, ἔσαι $\chi^3 = \mu^3 + 3\mu\nu\chi + \nu^3$, καὶ μεταθέσει, $\chi^3 - 3\mu\nu\chi - \mu^3 - \nu^3 = 0$· ταύτης δὲ

τῆς ἐξισώσεως τῇ προτεθείσῃ παραβαλλομένης ὅρον πρὸς ὅρον εὑρίσκεται $\mu\nu = \alpha$, καὶ $\mu^3 + \nu^3 = \beta$· ἀλλ' ἐκ $\mu\nu = \alpha$, πρόεισι $\nu^3 = \frac{\alpha^3}{\mu^3}$· ἄρα $\mu^3 + \frac{\alpha^3}{\mu^3} = \beta$, ἢ πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ μ^3 γίνεται $\mu^6 + \alpha^3 = \mu^3\beta$, καὶ μεταθέσει, $\mu^6 - \beta\mu^3 = -\alpha^3$, ἥτις ἐπιλυθῆναι δύναται κατὰ τὰς δευτεροβαθμίους τῶν ἐξισώσεων οὕτω.

$$\mu^6 - \beta\mu^3 = -\alpha^3$$

συμπληρ. $\qquad \frac{1}{4}\beta\beta = \quad \frac{1}{4}\beta\beta$

$$\mu^6 - \beta\mu^3 + \tfrac{1}{4}\beta\beta = \tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3$$

$$\mu^3 - \tfrac{1}{2}\beta = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3}$$

$$\mu^3 = \tfrac{1}{2}\beta \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3}$$

$$\mu = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}\beta \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3}\right)}$$

ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἐξισώσει $\mu^3 + \nu^3 = \beta$ ἀντὶ τῆς δυνάμεως τοῦ ν ἀντικατασταθῇ ἡ τοῦ μ, λαμβανομένη ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\mu\nu = \alpha$, εὑρίσκεται $\nu = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}\beta \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3}\right)}$· ἄρα $\chi = \mu + \nu = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}\beta + \sqrt{\tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{4}\beta - \sqrt{\tfrac{1}{4}\beta\beta - \alpha^3}\right)}$· ἀπονέμεται δὲ τῇ μὲν τῶν τετραγωνικῶν ποσοτήτων τὸ $+$, θατέρᾳ δὲ τὸ $-$, διὰ τοῦτο· ἐπεὶ γὰρ $\mu^3 \times \nu^3 = \alpha^3$, ὡς ἀνωτέρω καταφαίνεται, εἰκὸς εἶναι καὶ $\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta}{4} - \alpha^3} \times \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta}{4} - \alpha^3} = \alpha^3$· τοῦτο οὖν ἀληθεύει μὲν ἐναντίως ἐχόντων τῶν πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ συμβόλου συμβόλων· ψευδὲς δ' ἐξελέγχεται ὁμοίων ὄντων· ἐκεῖνο μὲν γὰρ ἐκ τῆς πράξεως αὐτίκα δῆλον καθίσταται.

$$\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}$$

$$\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha^3}$$

$$\frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\beta}{4} - \alpha^3}$$

$$- \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{\beta}{4} - \alpha^3} \quad - \frac{\beta^2}{4} + \alpha^3$$

$$\frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} + \alpha^3 = \alpha^3 .$$

ἐὰν δ' ὁμοίως ἐχόντων τῶν συμβόλων τὰ τῆς πράξεως διαπερανθῇ, ὀυδέ ποτε τὸ γινόμενον ἰσοδυναμήσει τῷ α^3· κατὰ τοῦτον τοίνυν τὸν τύπον κείσθω ἐπιλῦσαι τὰ ἐφεξῆς προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Εὑρεῖν ἀριθμὸν, ὅπως ἑξάκις λαμβανόμενος σὺν ἐννέα ἰσῶται τῷ ἀφ' αὐτοῦ κύβῳ.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ φύσις τοῦ προβλήματος δίδωσι $\chi^3 = 6\chi + 9$, εἴτ' οὖν $\chi^3 - 6\chi - 9 = 0$· παρατιθεμένης οὖν ταύτης τῆς ἐξισώσεως πρὸς τὴν $\chi^3 - 3\alpha\chi - \beta = 0$, ἔςι $3\alpha = 6$, καὶ $\alpha = 2$, καὶ $\beta = 9$· ἀντικαταςαθεισῶν οὖν τούτων τῶν δυνάμεων ἐν τῷ τύπῳ $\chi = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha^3})} + \sqrt[3]{(-\beta + \sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 - \alpha^3})}$, προκύψει $\chi = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{81}{4} - 8} + \sqrt{(\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - 8})} = \sqrt[3]{(\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81 - 32}{4}})} + \sqrt{(\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81 - 32}{4}})} = \sqrt[3]{(\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}})} + \sqrt[3]{(\frac{9}{2} -}$

$\sqrt{\tfrac{49}{4}})=\sqrt[3]{\tfrac{9}{2}+\tfrac{7}{2}}+\sqrt[3]{\tfrac{9}{2}-\tfrac{7}{2}}=\sqrt[3]{\tfrac{16}{2}}+\sqrt[3]{\tfrac{2}{2}}=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1}=2+1=3$, ὅς ἐστιν ἀριθμὸς ὁ ζητούμενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν ὅπως ἡ τοῦ ἀπ' αὐτοῦ κύβου πρὸς τὸ αὐτοῦ τριπλοῦν διαφορὰ ᾖ $= 2$.

ΛΥΣΙΣ. Ἡ θέσις τοῦ προβλήματος δίδωσι $\chi^3 - 3\chi = 2$, εἴτ' οὖν $\chi^3 - 3\chi - 2 = 0$· παραβαλλομένης δὲ ταύτης τῆς ἐξισώσεως πρὸς τὴν γενικὴν $\chi^3 - 3\alpha\chi - \beta = 0$, εὑρίσκεται $3\alpha = 3$, εἴτ' οὖν $\alpha = 1$, καὶ $\beta = 2$· οὐκοῦν ὁ γενικὸς τύπος $\chi = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}\beta+\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^3})}+\sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}\beta-\sqrt{\tfrac{\beta^2}{4}-\alpha^3})}$ γενήσεται $\chi = \sqrt[3]{(\tfrac{2}{2}+\sqrt{\tfrac{4}{4}-1})}+\sqrt[3]{(\tfrac{2}{2}-\sqrt{\tfrac{4}{4}-1})}=\sqrt[3]{\tfrac{2+0}{2}}+\sqrt[3]{\tfrac{2-0}{2}}=1+1=2$ ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

Οὐκοῦν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις τῇ ἐξευρημένῃ ῥίζῃ διαιρεθεῖσα κάτεισι βαθμὸν ἕνα γινομένη δευτεροβάθμιος, ἧς τὰς ῥίζας ἐξέσται μὲν λαβεῖν καὶ κατὰ τὰ εἰρημένα (452 κτ)· ἐξέσται δὲ καὶ ἄλλως ταύτας εὑρεῖν ἐφαρμόζοντας τὰ γνωστὰ γράμματα τῆς τριτοβαθμίου τῷ γενικῷ τύπῳ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ τὰς κυβικὰς ῥίζας τῆς μονάδος· τουτὶ δὲ ἵνα γένηται, εὑρητέον πρῶτον τὰς τῆς μονάδος κυβικὰς ῥίζας κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

Ἔστω $\chi^3 - 1 = 0$, ἧς διαιρουμένης ἀκριβῶς διὰ $\chi - 1 = 0$, καὶ πηλίκου προϊόντος $\chi^2 + \chi + 1 = 0$, ἐκ ταύτης λαβεῖν δυνάμεθα τὰς δύο τετραγωνίους ῥίζας κατὰ τὰ εἰρημένα (452, κτ.)· ἐπεὶ γὰρ $\chi^2 + \chi + 1 = 0$· οὐκοῦν $\chi^2 + \chi = -1$. καὶ συμπληρώσει τοῦ ἐλλειποῦς τετραγώνου, $\chi^2 + \chi + \tfrac{1}{4} = -1 + \tfrac{1}{4} = -\tfrac{3}{4}$.