τὴν τῆς y δύναμιν. ἀντὶ δὲ y τιθεὶς ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει τὴν ἐγνωσμένην αὐτῆς δύναμιν, ϗ ἐπιλύσας αὐτὴν, θηρεύσῃ ἤδη ϗ τὴν τῆς χ πραγματικὴν δύναμιν.

Ἐπὶ τȣ̃ τετάρτȣ φέρ᾽ εἰπεῖν προβλήματος (443) ἔνθα εἰσὶν ἐξισώσεις δύω $\chi=5y$, ϗ $\chi+\alpha=3y+3\alpha$, ἐν τῇ πρώτῃ μὲν ἡ δύναμις τῆς χ ἐςὶ $5y$, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, $\chi=3y+3\alpha-\alpha=3y+2\alpha$· ἐκ τȣ́των ȣ̃ν τῶν δύω τῆς χ δυνάμεων προκύπτει ἐξίσωσις $5y=3y+2\alpha$, ἔνθα μεταθέσει ϗ ἀναγωγῇ ϗ διαιρέσει $y=10$. ἧς ἀντικαταςαθείσης ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει εὑρίσκεται $\chi=50$

446. Καὶ ἄλλως δὲ τὰ τοιάδε ἐπιλυθήσεται προβλήματα, ἀφαιρέσει ἀμέλει μιᾶς ἐξισώσεως ἀπὸ τῆς ἑτέρας· τὸ γὰρ κατάλοιπον ἔςαι ἐξίσωσις μιᾶς μόνης ἀγνώςȣ περιεκτική.

Κείσθων γὰρ αἱ δύω προεκτεθεῖσαι ἐξισώσεις $\chi=5y$, ϗ $\chi+\alpha=3y+3\alpha$, ἀφαιρῶ τοίνυν πρὸς τὸ δοκȣ̃ν τὴν δευτέραν ἀπὸ τῆς πρώτης, ϗ δὴ λειφθήσεται $-\alpha=2y-3\alpha$· μεταθέσει ϗ ἀναγωγῇ, $2\alpha=2y$, ὅθεν $\alpha=y$, ὡς ϗ διὰ τῶν ἄλλων μεθόδων εὕρηται.

Κανὼν προβλημάτων ἐχόντων πλείȣς ἢ δύω ἐξισώσεις·

440. Θῶμεν ȣ̃ν πρῶτον προβλήματι τριῶν ἐξισώσεων περιεκτικὸν, ϗ δὴ ϗ τριῶν ἀγνώςων ποσοτήτων τῶν χ, y, ω· θηρῶμαι τοιγαρȣ̃ν τὴν δύναμιν τῆς χ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει μόνην αὐτὴν ἀποφαίνων, ϗ ἀντικαθίςημι ταύτην ἐπὶ τῆς δευτέρας· εἰσὶν ἄρα ἐν αὐτῇ μόναι ἄγνωςοι αἱ y, ω. λαμβάνω δὲ ϗ ἐπὶ ταύτης τῆς καινῆς ἐξισώσεως τὴν τῆς y δύναμιν, περιέχȣσαν ἄγνωςον ποσὸν μόνον τὸ ω, ϗ ἀντικαθίςημι ταύτην ἐν τῇ τρί-

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

τῃ ἐξισώσει, ϗ ἀντὶ χ τὴν ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει θηρευθεῖσαν αὐτῆς δύναμιν, ϗ ἐπεὶ ἐν ταύτῃ τῇ δυνάμει εὑρίσκεται υ, ἀντικαθίςημι ἀντὶ τέτε τὴν προειρημένην· ἔτως ἄρα ἐπὶ τῆς τρίτης ταύτης ἐξισώσεως ἐδεμιᾷ ἐντυγχάνω ἀγνώςῳ, ὅτι μὴ τῇ ω· λυθείσης τοίνυν ταύτης, εὑρεθήσεται ἡ τῆς ω δύναμις ἐν ποσοῖς ἐγνωσμένοις.

Ἀντικαθίςημι ἔν ταύτην ἐπὶ τῆς πρὸ αὐτῆς ἐξισώσεως, περιεχέσης ἐν τῇ δυνάμει τῆς υ μόνην ἄγνωςον τὴν ω· ϗ τῇ ἐπιλύσει ταύτης εὑρήσω ἐν γνωςοῖς τὴν τῆς υ· ἀμφοτέρων δὲ τέτων ἀντικαταςαθεισῶν ἀντὶ ω, υ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει, γνώσομαι τελευταῖον ἐκ ταύτης ϗ τὴν χ· δῆλα δὲ τὰ εἰρημένα γενήσεται ὑποδείγμασί τισιν ἐφαρμοσθέντα.

448. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Τρεῖς ἐντεθύμημαι ἀριθμὲς, πατήρ τις ἔφη πρὸς τὲς ἑαυτὲ υἱὲς, ἀποπειρώμενος τῆς ἐπὶ τὰ μαθήματα αὐτῶν ἐπιδόσεως· ὧν ὁ μὲν πρῶτος σὺν τῷ διπλῷ τὲ δευτέρε, ϗ τῷ διπλῷ τὲ τρίτε, ἀποτελεῖ 90· ὁ δὲ δεύτερος σὺν τῷ διπλῷ τὲ πρώτε ϗ τὲ τρίτε, 85· ὁ δὲ τρίτος σὺν διπλοῖς τοῖς ἄλλοις, ποιεῖ 75· τίνες ἄρα, παῖδες ἐμοὶ, εἰσὶν ἔτοι οἱ τρεῖς ἀριθμοί;

Κληθήτω ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς χ, ὁ δεύτερος υ, ὁ δὲ τρίτος ω, ϗ ἔςω $90 = \alpha$, ϗ $85 =$, ϗ $75 = \gamma$· εὔδηλον ἄρα, ὅτι ἡ μὲν πρώτη θέσις ἐςὶ $\chi + 2\upsilon + 2\omega = \alpha$ ἡ δὲ δευτέρα, $\upsilon + 2\chi + 2\omega = \beta$, ἡδὲ γ΄. $\omega + 2\chi + 2\upsilon = \gamma$·

Α΄. Εἰλήφθω ἡ δύναμις τῆς χ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει· $\chi = \alpha - 2\upsilon - 2\omega$ (Α), ϗ ἀντικαταςήτω ἀντὶ χ ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἢ ἔτω γενήσεται $\upsilon + 2\alpha - 4\upsilon - 4\omega + 2\omega = \beta$·

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.λ. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ἀναγωγῇ $2\alpha - 3\psi - 2\omega\beta$· μεταθέσει, $2\alpha - \beta - 2\omega = 3\psi$· ἄρα $\psi = \dfrac{2\alpha - \beta - 2\omega}{3}$ (B).

Β΄. Αὕτη ἡ δύναμις ἀντικαταστήτω ἀντὶ ψ ἐν τῇ τρίτῃ ἐξισώσει, ὡσαύτως καὶ ἡ τῆς χ δύναμις (Α)· καὶ δὴ ἔσται $\omega + 2\alpha + \dfrac{-8\alpha + 4\beta + 8\omega}{3} - 4\omega + \dfrac{4\alpha - 2\beta - 4\omega}{3} = \gamma$· ἐν ᾗ τῶν δύω κλασμάτων κοινὸν ἐχόντων παρονομαστὴν τὸν 3, ἀφαιρετέον τοῦ πρώτου τὸ δεύτερον· κατάλοιπον οὖν ἔσται $-\dfrac{4\alpha + 2\beta + 4\omega}{3}$.

γενήσεται ἄρα ἡ ἐξίσωσις $\omega + 2\alpha - \dfrac{4\alpha + 2\beta + 4\omega}{3} - 4\omega = \gamma$· ἀπαλλαγῇ τῶν κλασμάτων, ἀναγωγῇ τε καὶ μεταθέσει, ἔσται $5\omega = 2\alpha + 2\beta\, 3\gamma$· — ἄρα $\omega = \dfrac{2\alpha + 2\beta - 3\gamma}{5} = 25$.

Εἰσήχθω δὲ αὕτη ἡ δύναμις ἀντὶ ω ἐπὶ τῆς Β ἐξισώσεως, ἥτις ἐμφαίνει τὴν δύναμιν τῆς ψ· ἐκοῦν ἔσται $\psi = \dfrac{2\alpha - \beta - 50}{3} = 15$.

Τέλος δὲ ἀντὶ ω καὶ ψ εἰσαχθεισῶν τῶν κατ' αὐτὰς ἀριθμητικῶν δυνάμεων ἐπὶ τῆς Α΄ ἐξισώσεως, ἔσται $\chi = \alpha - 30 - 50 = 10$· ἐνεθυμήθη ἄρα ὁ πατὴρ τρεῖς ἀριθμοὺς 10, 15, 25.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Τριῶν ἀγρῶν πωληθέντων συλλήβδην δι' ἀργυρίων 120000, ὁ μὲν πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΘΕΜΕΛΗΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

τετίμηνται, ὅσα ὁ τρίτος· ὁ δὲ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος δὶς τοσαῦτα, ὅσα ὁ δεύτερος· πόσα τετίμηται ἄρα ἕκαστος;

ΛΥΣΙΣ. Κληθείσης τῆς τοῦ πρώτου τιμῆς χ, τῆς τοῦ δευτέρου υ, τῆς τοῦ τρίτου ω, καὶ $\alpha = 120000$, ἡ μὲν πρώτη θέσις συνίστησι τὴν ἐξίσωσιν $\chi + \upsilon + \omega = \alpha$, ἡ δὲ δευτέρα, $\chi + \upsilon = \omega$, ἡ δὲ τρίτη $\chi + \omega = 2\upsilon$.

Ληφθείσης δὲ ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τῆς κατὰ τὴν χ δυνάμεως $\chi = \alpha - \upsilon - \omega$ (Ρ), καὶ ἀντὶ χ ἀντικατασάσης ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἔσαι $\alpha - \upsilon - \omega + \upsilon = \omega$· ἀναγωγῇ, καὶ μεταθέσει, $\alpha = 2\omega$, καὶ $\omega = \frac{\alpha}{2} = 60000$ ἀργυρίοις.

Ἀντικατασάσης δὲ ἐπὶ τῆς τρίτης ἐξισώσεως τῆς δυνάμεως τῆς χ, καὶ τῆς ω, οἷαι ἐνταῦθα ἐπορίσθησαν, ἔσαι $\alpha - \upsilon - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 2\upsilon$· ἄρα $3\upsilon = \alpha$· ἄρα $\upsilon = \frac{\alpha}{3} = 40000$ ἀργυρίοις.

Τέλος δὲ εὑρεθείσης καὶ τῆς κατὰ τὴν δευτέραν ἄγνωσον υ δυνάμεως, διὰ τὴν ἰδιαιτέραν φύσιν τᾶδε τοῦ προβλήματος, ἀντικατάσει ταύτης τε καὶ τῆς κατὰ τὴν ω, γενήσεται ἡ πρώτη ἐξίσωσις $\chi = 120000 - 40000 - 60000 = 20000$· εἰσὶν οὖν ἡ μὲν πρώτη τιμὴ 20000, ἡ δὲ δευτέρα 40000, ἡ δὲ τρίτη 60000.

449. ΣΧΟΛΙΟΝ. Δυνατὸν δὲ τὰ ἐκ τριῶν ἐξισώσεων συνεςῶτα προβλήματα ἐπιλύσαι καὶ διὰ τῆς δευτέρας τῶν ἀποδοθεισῶν μεθόδων εἰς λύσιν τῶν ἐκ δυοῖν (445) κατὰ τάδε· ά. εἰλήφθω ἐν ἑκάσῃ τῶν τριῶν ἐξισώσεων ἡ δύναμις τῆς αὐτῆς ἀγνώσου ποσότητος τῆς χ, φέρ εἰπεῖν· β'. γενέσθω μία μὲν ἐξίσωσις ἐκ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας δυνάμεως· ἄλλη δὲ ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης, αἵτινες περιέξουσιν ἑκάσῃ δύω μόνον ἀγνώσους· τὸ δὲ πρόβλημα ἐ-

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Κ. Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.Τ.Π. ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

πιλυθήσεται καθ' ἕνα τινὰ τῶν εἰς ἐπίλυσιν τῶν ἐκ δύω ἐξισώσεων κανόνων.

Ἐπὶ οὖν τῶν τριῶν τοῦ πρώτου προβλήματος ἐξισώσεων (448) εἰλήφθωσαν αἱ τρεῖς δυνάμεις τῆς χ· καὶ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης ἔσται $\chi = \alpha - 2\upsilon - 2\omega$, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, $\chi = \frac{\beta - \upsilon - 2\omega}{2}$, ἐπὶ δὲ τῆς τρίτης, $\chi = \frac{\gamma - \omega - 2\upsilon}{2}$. καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης καὶ δευτέρας δυνάμεως γενέσθω $\alpha - 2\upsilon - 2\omega = \frac{\beta - \upsilon - 2\omega}{2}$ (Μ) ἐκ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης, $\frac{\beta - \upsilon - 2\omega}{2} = \frac{\gamma - \omega - 2\upsilon}{2}$ (Ν) ἢ $\beta - \upsilon - 2\omega = \gamma - \omega - 2\upsilon$.

Ἐν ταύταις οὖν ταῖς δυσὶν ἐξισώσεσι ζητηθήτωσαν αἱ δυνάμεις τῆς υ, καὶ ω ἐν ἐγνωσμέναις ποσότησι· εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς Μ ἐξισώσεως ἡ τῆς υ δύναμις, ἥτις εὑρεθήσεται $\upsilon = \frac{2\alpha - \beta - 2\omega}{3}$· ὡσαύτως εἰλήφθω τῆς αὐτῆς υ ἡ δύναμις κἀπὶ τῆς ἐξισώσεως (Ν) ἥτις εὑρεθήσεται $\upsilon = \gamma - \beta + \omega$ (Π).

Ἐκ δὲ τῶνδε τῶν δυεῖν τῆς υ δυνάμεων συνεστάσθω ἡ ἐξίσωσις $\frac{2\alpha - \beta - 2\omega}{3} = \gamma - \beta + \omega$, ἢ $2\alpha - \beta - 2\omega = 3\gamma - 3\beta + 3\omega$, μεταθέσει καὶ ἀναγωγῇ, $5\omega = 2\alpha + 2\beta - 3\gamma$· ἄρα $\omega = \frac{2\alpha + 2\beta - 3\gamma}{5} = 25$· αὕτη δὲ ἡ τοῦ ω δύναμις ἀντικατεστήτω ἐν τῇ ἐξισώσει Π, ἥτις ἔσται $\upsilon = \gamma - \beta + 25 = 15$· ἐκ τῶν δύω οὖν δυνάμεων 25, καὶ 15 διὰ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρεθήσεται $\chi = 10$.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Τρεῖς ἔμποροι ἔχουσι συλλήβδην μνᾶς 30000· ἀλλὰ τὸ τρίτον τῆς μερίδος τοῦ πρώτου, καὶ τὸ ἔννατον τῆς τοῦ δευτέρου, ἰσοῦται τῷ πέμπτῳ μέρει τῆς τοῦ τρίτου· τὸ δὲ τρίτον τῆς τοῦ δευτέρου σὺν τῷ πεμπτημορίῳ τῆς τοῦ τρίτου ἰσοῦται τῇ μερίδι τοῦ πρώτου· Πόση ἄρ᾽ ἐστὶν ἡ ἑκάστου μερίς;

ΛΥΣΙΣ Α΄. Ἔστω $\alpha = 30000$· ἐκ τοίνυν τῆς πρώτης θέσεως συσταθήσεται ἡ ἐξίσωσις $\chi + \psi + \omega = \alpha$

ἐκ δὲ τῆς δευτέρας . . . . $\frac{\chi}{3} + \frac{\psi}{9} + \frac{\omega}{5}$

ἐκ δὲ δὴ τῆς τρίτης . . . . . $\frac{\psi}{3} + \frac{\omega}{5} = \chi$

Β΄. Ἐκ τῆς πρώτης οὖν ἐξισώσεως ἡ δύναμις τῆς $\chi = \alpha - \psi - \omega$ (Α) ἥτις ἀντὶ χ ἀντικαταστᾶσα ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀποτελεῖ $\frac{\alpha - \psi - \omega}{3} + \frac{\psi}{9} = \frac{\omega}{5}$· ἀπαλλαγῇ τῶν πλασμάτων $45\alpha - 45\psi - 45\omega + 15\psi = 27\omega$· μεταθέσει, $45\alpha = 72\omega + 30\psi$, καὶ $30\psi = 45\alpha - 72\omega$· ἄρα $\psi = \frac{45\alpha - 72\omega}{30}$ (Β.)

Γ΄. Ἡ δὲ τρίτη ἐξίσωσις δι᾽ ἀντικαταστάσεων τῶν κατὰ τὴν ψ καὶ τὴν χ δυνάμεων ἔσται $\frac{45\alpha - 72\omega}{90} + \frac{\omega}{5} = \alpha - \frac{45\alpha + 72\omega}{30} - \omega$· πολλαπλασιασμῷ, καὶ ἀναγωγῇ, καὶ μεταθέσει ἔσται $135\alpha = 270\omega$· ἄρα $\omega = 15000$.

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Δ'. Η' Β ἐξίσωσις ἀντικαταστάσει τῆς κατὰ τὴν ω δυνάμεως γενήσεται $\upsilon = \frac{45\alpha - 72\times 15000}{80} = 9000$.

Τέλος δὲ ἀντικαταστάσει τῶν δυνάμεων τῆς υ καὶ τῆς ω ἐπὶ τῆς 4 ἐξισώσεως προκύψει $\chi = \alpha - 9000 - 15000 = 6000$.

450. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν ὑποτεθῶσιν ὁσαιδηποτοῦν ἄγνωστα, φ, χ, υ, ω κτ., τὴν ἤδη δεδειγμένην καὶ ἑξῆς βαδίζομεν ὁδὸν, ἀντικαθιστῶντες ἐκ διαδοχῆς, ὡς εἴρηται, ἐν ταῖς ἑπομέναις ἐξισώσεσι τὰς δυνάμεις χ, υ κτ. τὰς ἐν ταῖς προτέραις ἐξισώσεσιν εὑρημένας· ἀεὶ γὰρ ἐφιξόμεθα εἰς ἐξίσωσιν μιᾶς μόνης ἀγνώστου περιεκτικὴν, ἧς ἐπιλυθείσης, καὶ τῆς ἐν ταύτῃ τῇ ἐσχάτῃ ἀγνώστου γνωσθείσης, εὐχερῶς τοῦ λοιποῦ ἀναποδίζοντες ἐπὶ τὰς ἄλλας ἐξισώσεις, ὡς ἤδη δέδεικται, γνωσόμεθα καὶ τὰς ἄλλας ἀγνώστους ποσότητας· Προβαλοῦμεν οὖν εἰς ἐπίλυσιν ἓν ἔτι πρόβλημα ἐκ τεσσάρων συγκροτούμενον ἐξισώσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Τέσσαρές τινες ἄγουσιν ὁμοῦ ἔτη 160· ἀλλ' ἡ μὲν ἡλικία τοῦ πρώτου, συνάμα τῇ τοῦ δευτέρου καὶ τῇ τοῦ τρίτου, ἰσοῦται τῇ τοῦ τετάρτου· ἡ δὲ τοῦ δευτέρου, μετὰ τῆς τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου, ἰσοῦται τῷ δεκαπενταπλῷ τῆς τοῦ πρώτου· τέλος δὲ τὸ τριπλοῦν τῆς τοῦ πρώτου σὺν τῇ τοῦ τρίτου καὶ τοῦ τετάρτου ἰσοῦται τῷ πενταπλῷ τῆς τοῦ δευτέρου· πόσα ἐστὶν ἄρα τὰ ἑκάστου ἔτη;

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω $\alpha = 160$ καὶ υ, φ, χ, ψ αἱ τέσσαρες ζητούμεναι ἡλικίαι· ἐκ τούτων οὖν συνίστανται τέσσαρες ἐξισώσεις αἱ ἐφεξῆς . . . $\upsilon+\varphi+\chi+\psi=\alpha$
χρῶμαι τοιγαροῦν τῇ (440) . . . $\upsilon+\varphi+\chi=\psi$
δεδειγμένῃ μεθόδῳ . . . . . $\varphi+\chi+\psi=15\upsilon$
$3\upsilon+\chi+\psi=5\varphi$

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Α΄. Λαμβάνω ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τὴν δύναμιν τῆς υ, ἥτις ἐστὶν $\upsilon = \alpha - \varphi - \chi - \psi$, καὶ ἀντικαθίστημι ταύτην ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἥτις γίνεται $\alpha - \varphi - \chi - \psi + \varphi + \chi = \psi$· μεταθέσει καὶ ἀναγωγῇ, $2\psi = \alpha$· ἄρα $\psi \frac{\alpha}{2}$.

Β΄. Ἀντικαθίστημι ἐν τῇ τρίτῃ ἐξισώσει τὰς δυνάμεις τῆς ψ καὶ υ. καὶ δὴ ἔχω $\varphi + \chi + \frac{\alpha}{2} = 15\alpha - 15\varphi - 15\chi - 15\frac{\alpha}{2}$, μεταθέσει δὲ καὶ ἀναγωγῇ $16\varphi + 16\chi = 15\alpha - \frac{15\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 7\alpha$· ἄρα $\varphi = \frac{7\alpha - 16\chi}{16}$.

Γ΄. Ἀντικαθίστημι εἶτα ἐν τῇ ἐσχάτῃ ἐξισώσει τὰς εὑρημένας δυνάμεις τῆς υ καὶ χ καὶ φ, καὶ δὴ ἔχω $3\alpha - \frac{21\alpha + 48\chi}{16} - 3\chi - \frac{3\alpha}{2} + \chi + \frac{\alpha}{2} = \frac{35\alpha - 80\chi}{16}$, ἀναγωγῇ δέ, $2\alpha - \frac{21\alpha + 48\chi}{16} - 2\chi = \frac{35\alpha - 80\chi}{16}$.

Πολλαπλασιασμῷ διὰ 16 (430), $32\alpha - 21\alpha + 48\chi - 32\chi = 35\alpha - 80\chi$· μεταθέσει καὶ ἀναγωγῇ $96\chi = 24\alpha$· ἄρα $\chi = \frac{24\alpha}{96} = 40$.

Δ΄. Ἀντικαταστάσει ἀντὶ χ τοῦ 40 ἐν $\upsilon = \frac{7\alpha - 16\chi}{16}$ γενήσεται $\upsilon = 30$.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

Ε΄. Η' ἰδία φύσις τοῦδε τοῦ προβλήματος προάγουσα ἐν ἀρχῇ διὰ γνωστῆς ποσότητος τὴν δύναμιν τῆς ψ, ἥτις ἐστὶν $\frac{\alpha}{\Omega} = 80$, ἀντικαταστῆσαι παρακελεύεται τὰς τρεῖς δυνάμεις τῶν φ, καὶ χ καὶ ψ ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\upsilon = \alpha - \varphi - \chi - \psi$· καὶ δὴ εὑρεθήσεται $\chi = 10$.

Οὐκοῦν τοῦ μὲν πρώτου ἡ ἡλικία ἐστὶν ἔτη 10, τοῦ δὲ δευτέρου 30, τοῦ δὲ τρίτου 40, τοῦ δὲ τετάρτου 80.

451. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἵν' ἀριθμὸς δοθεὶς ἀριθμῷ δοθέντι ἰσωθῇ, εἰς πόσον βαθμὸν ὑψωθῆναι ὀφείλει;

Ἔστω ὁ πρῶτος $10 = \alpha$, ὁ δὲ δεύτερος $= \beta$· ὁ δὲ ζητούμενος δείκτης $= \upsilon$· οὐκοῦν ἡ θέσις φησὶν $\alpha^{\upsilon} = \beta$· ἐπεὶ δὲ οἱ ἀριθμοὶ ἴσοι, ἄρα καὶ οἱ αὐτῶν λογάριθμοι ἴσοι ἔσονται· οὐκοῦν $\lambda\alpha^{\upsilon} = \lambda\beta$ καὶ δὴ $\upsilon \cdot \lambda\alpha = \lambda\beta$· ἄρα $\upsilon = \frac{\lambda\beta}{\lambda\alpha}$· ἐὰν οὖν ζητῆται πόσος ἐστὶν ὁ βαθμὸς εἰς ὃν ὑψωθεὶς ὁ 10 γένοιτ' ἂν $= 10000$, ἔσται $\upsilon = \frac{\lambda 10000}{\lambda 10} = \frac{4}{1} = 4$. οὐκοῦν $10^4 = 10000$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

452. Ἀξίωμα. „Η' ἐξίσωσις, ἢ ὁ λόγος τῆς ἰσό„τητος μενεῖ, κἂν ἑκατέρωθεν ἡ αὐτὴ ἐξαχθῇ ῥίζα“ καὶ γὰρ ἰσαλλήλων ὄντων ἑκατέρων τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν (383) καὶ αἱ ῥίζαι αὐτῶν ἰσάλληλοι ἔσονται· ἐπείπερ ἐξαγαγεῖν ῥίζαν ἀπὸ ποσοῦ τινος κυρίως ἐστὶ διελεῖν

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ Π. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΘΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

τόδε τὸ ποσὸν διὰ τῆς ῥίζης, ἵν' εὑρεθῇ πηλίκον ἡ αὐτοῦ ῥίζα (94)· ἐὰν ἄρα ἐκ δυοῖν μελῶν ἐξισώσεως ὁμώνυμος ἐξαχθῇ ῥίζα, ἡ τετραγωνικὴ φέρε, ταὐτὸν ἔσαι, ὡς εἰ καὶ διῃρῦντο ἑκάτερα τὰ μέλη διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ὅπερ ἐπιεικῶς ἥκιςα διαλυμαίνεται τὴν ἐξίσωσιν (393)· ἐκῦν ἐὰν ᾖ $\chi^2=25$, ἔςαι ἄρα καὶ $\sqrt[2]{\chi^2}=\sqrt{25}$, ἢ $\chi=5$, καὶ ἐὰν ᾖ $\chi^3=64$, ἐντεῦθεν ἔςαι καὶ $\chi=\sqrt[3]{64}=4$· ἐρῦμεν ὖν πρῶτον περὶ τῶν ἐξισώσεων τῶν μηδένα τῆς ἀγνώςυ περιεχυσῶν βαθμὸν ἄλλον, ἢ τὸν τετράγωνον.

453. ΚΑΝΩΝ Α΄. Ποίει μόνην τὴν ἄγνωςον ἐπὶ θατέρυ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, μετατιθεὶς ἐπὶ θάτερον πάσας τὰς γνωςὰς, καὶ ἀπαλλάτων αὐτὴν παντὸς συνεργῦ, ἢ παρονομαςῦ, εἰ παρόντες τύχοιεν· ὕσης φέρ' εἰπεῖν $\frac{5\chi^2}{3}+\alpha=\beta$ (A) α΄. μεταθέσει ποίει $\frac{5\chi^2}{3}=\beta-\alpha$ β΄. ἀπαλλαγῇ τῦ κλάσματος, $5\chi^2=3\beta-3\alpha$· γ΄. $\chi^2=\frac{3\beta-3\alpha}{5}$.

454. ΚΑΝΩΝ Β΄. Ἐὰν τὸ ἀπὸ τῆς ἀγνώςυ τετράγωνον λειπτικὸν ᾖ μεταθέσει ἀναδεικτέον αὐτὸ ὑπαρκτικόν· ἐκ γὰρ λειπύσης ποσότητος ῥίζαν τετραγωνικὴν ἐξαγαγεῖν ὐκ ἔνι (175). ἐὰν ὖν ᾖ $\alpha-\chi^2=\beta$, μεταθέσει πρακτέον $\chi^2=\alpha-\beta$.

455. ΚΑΝΩΝ Γ΄. Μονωθέντος ὖν ὕτω τῦ τετραγώνυ, ἐξακτέον ἑκατέρωθεν τὴν τετράγωνον ῥίζαν (452). ὕτως ἐπὶ μὲν τῦ πρώτυ ὑποδείγματος τῆς A ἐξισώσεως ἡκέσης εἰς τὴν $\chi^2=\frac{3\beta-3\alpha}{5}$ γραπτέον $\chi=$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ... ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ... Ε.Υ. ... ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

$\sqrt[2]{\frac{3\beta - 3\alpha}{5}}$, ἐπὶ δὲ τοῦ δευτέρου ἐκ τῆς $\chi^2 = \alpha - \beta$ ἐξακτέον τὴν ῥίζαν, γράφοντας $\chi = \sqrt{\alpha - \beta}$.

456. ΚΑΝΩΝ Δ'. Σύμβολα δὲ προτακτέον τῆς ῥίζης ἀδιαφόρως εἴτε $+$, εἴτε $-$· καὶ γὰρ τῆς $\chi^2 = 16$ οὐχ' ἧττον ἔσαι ῥίζα $\chi = 4$, ἢ $\chi = -4$ (127).

457. Ἐντεῦθεν ἄρα πρόδηλον ὅτι τὰ δευτεροβάθμια προβλήματα διττὴν ὑφίσανται λύσιν, τὴν μὲν ἐν ὑπαρκτικοῖς, διὰ λειπτικῶν δὲ ποσῶν τὴν ἑτέραν.

458. ΚΑΝΩΝ Ε'. Ἅπαν δευτεροβάθμιον πρόβλημα εἰς ἀτοπίαν ἄγον, ἔσαι ἀδύνατον εἰς ἐπίλυσιν· ἐὰν γὰρ ἐπιλυθείσης τῆς ἐξισώσεως κατὰ τοὺς τεθέντας κανόνας ἄγῃ τὸ πρόβλημα εἰς τὸ ἐξαγαγεῖν τετράγωνον ῥίζαν ἀπὸ ποσοῦ λείποντος τουτοῦ ἀδυνάτως ἔχοντος (175) τὸ πρόβλημα ἔσαι ἀδύνατον.

459. ΚΑΝΩΝ ς'. ὅταν πάντες οἱ ὅροι τῆς ἐξισώσεως περιέχωσι τὴν ἄγνωσον, διαιρετέον πάντας διὰ τῆς ἀγνώσου αὐτῆς· καὶ δὴ κάτεισιν ἡ ἐξίσωσις βαθμὸν ἕνα· οὔσης γὰρ $\chi^3 = 25\chi$, ἑκάσου μέλους διὰ χ διαιρεθέντος, ἐκ τριτοβαθμίου ἔξομεν τὴν δευροβάθμιον ἐξίσωσιν $\chi^2 = 25$.

460. ΚΑΝΩΝ Ζ'. Ὅταν ἡ δευτοβάθμιος ἐξίσωσις παρὰ τὸ τῆς ἀγνώσου τετράγωνον περιέχῃ καὶ τὸν πρῶτον βαθμὸν τῆς αὐτῆς ἀγνώσου συγκείμενον συνεργῷ ἢ παρονομασῇ τινι, ἢ καὶ ἀμφοῖν ἅμα, ὡς ἐν $\frac{5\chi^2}{4} - \frac{3\chi}{4} = \alpha$, τηρητέον κανόνας τοὺς ἐφεξῆς.

461. Α'. Ἀπαλλακτέον τὸ ἀπὸ τῆς χ τετράγωνον παντὸς συνεργοῦ τε καὶ παρονομασοῦ, ὡς ἤδη δέδεικται· οὐ-

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

τως ἐν $\frac{5\chi^2}{3} - \frac{3\chi}{4} =$ ἀπαλλακτέον τὸ χ^2 τȣ̃ παρονομαςȣ̃ 3, ἐξ ȣ̃ ἔςαι $20\chi^2 - 9\chi = 12\alpha$ (430). β΄. ϗ τȣ̃ συνεργȣ̃ 20, ὅθεν ἔςαι $\chi^2 - \frac{9\chi}{20} = \frac{12\alpha}{20}$.

462. Β΄. Ἐπεὶ παρὰ τὸ τετράγωνον ἔνεςι τῇ ἐξισώσει ϗ ὁ πρῶτος τῆς ἀγνώςȣ βαθμὸς, εὔδηλον ὡς ἐκ ἂν ἄλλως τὸ πρόβλημα λυθείη, ὅτι μὴ ἐξαχθείσης τῆς τετραγώνȣ ῥίζης ἀπὸ χ^3 συνάμα τῇ χ, εἴτ' ȣ̃ν, ὡς φανερὸν παντὶ τῷ ϗ μικρὸν ἐπιςήσαντι, ἀπὸ τετραγώνȣ ἀτελȣ̃ς, ὅθεν ἡ ἐξαγωγὴ ἀμήχανος προαποδέδεικται.

463. Γ΄. Ἐξεταςέον ἄρα ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως, εἰ παρὰ τὸ ἀπὸ χ τετράγωνον, ϗ τὸν, ᾧ ἔνεςιν ὁ πρῶτος τȣ̃ χ βαθμὸς, ὅρον, ὑπάρχει ϗ ἄλλος ὅρος, ὃς ἂν εἴη τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμισυνεργοῦ τῆς χ τετράγωνον· ἐὰν γὰρ τȣ̃το ὑπάρχῃ, ἐκ τȣ́τȣ τȣ̃ ὅρȣ ϗ τῶν δυοῖν ἄλλων, οἳ περιέχȣσιν ὁ μὲν χ^2, ὁ δὲ χ, συγκροτητέον θάτερον τῶν μελῶν, μετατιθεμένȣς ἐπὶ θάτερον πᾶσαν ἄλλην ποσότητα.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Οὔσης γὰρ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 + \alpha + 6\chi = \beta - 9$, παρατηρῶ, ὡς τὸ -9 μεταθέσει ἔςαι $+9$, εἴτ' ȣ̃ν τετράγωνον ἀπὸ τȣ̃ 3, ἡμίσεως τȣ̃ 6 συνεργȣ̃ τῆς ἀγνώςȣ χ, ὃ δὴ καταγγέλει, ὡς ὁ 9 σὺν τῷ χ^2 ϗ 6χ συνιςῶσι τετράγωνον ἐντελές· μεταθετέον ἄρα τὸν -9 ἐπὶ τὰ δεξιὰ, τὸ δ' α ἀπὶ τὰ ἀριςερὰ· ὅθεν ἔςαι $\chi^2 + 6\chi + 9 = \beta - \alpha$, ἧς τοῦ πρώτου μέλȣς ῥίζα τετράγωνος ἐςὶ $\chi + 3$· ἔςι γὰρ ἐν αὐτῷ τὸ ἀπὸ τȣ̃ πρώτȣ ῥιζικȣ̃ ὅρȣ χ τετράγωνον χ^2, σὺν τῷ δὶς γινομένῳ ὑπὸ τȣ̃ πρώτȣ χ, ϗ τȣ̃ δευτέρȣ 3, εἴτ' ȣ̃ν τῷ 6χ, σὺν τῷ ἀπὸ τȣ̃ δευτέρȣ 3 τετραγώνῳ 9 (89).

Επ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

464. Δ΄. Εἰδὲ τοῦτο μηθὲν παρείη. α΄. τὸ χ^2, ϰ τὸν ὅρον, ᾧ ἔνεστι τὸ χ θετέον μόνα ἐπὶ θάτερα, μεταβιβάζοντας πᾶν ἄλλο ποσὸν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως τὰ ἕτερα. β΄. ληπτέον τὸν τοῦ χ ἡμισυνεργὸν, ϰ τοῦτον τετραγωνίσαντας θετέον ἐν ἑκατέρῳ μέλει τῆς ἐξισώσεως.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Οὔσης ἐξισώσεως τῆς $\chi^2+3\chi=\beta$, ὁρῶμεν, ὡς οὐκ ἔστι τὸ πρῶτον μέλος τετράγωνον τέλειον· ἔστι μὲν γὰρ ῥίζα τοῦ πρώτου ὅρου χ, τοῦ δὲ δευτέρου μὴ παρόντος ϰ τρίτου, εὑρεθήσεται οὐδεμία (89). τί οὖν ποιητέον; ἢ τὸν ἡμισυνεργὸν τῆς χ θεωρητέον ἀεὶ ὡς ὅρον ῥιζικὸν δεύτερον; ἀεὶ γὰρ ἐξέσται ἐκλαμβάνειν τὸν, ᾧ ἔνεστιν τὸ χ ὅρον ὡς τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ διπλοῦ τοῦ πρώτου 2χ, ϰ τοῦ δευτέρου ῥιζικοῦ ὅρου, ταυτὸν εἰπεῖν ὑπὸ τοῦ χ, ϰ τοῦ διπλοῦ τοῦ δευτέρου· ἀναγκαίως ἄρα ἕξομεν τὸν δεύτερον ῥιζικὸν ὅρον λαβόντες τὸν ἡμισυνεργὸν τῆς χ· ἐπὶ οὖν τοῦ προτεθέντος ὑποδείγματος, λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ 3, εἴτ' οὖν $\frac{3}{2}$, ϰ τὸ ἀπὸ τοῦδε τετράγωνον $\frac{9}{4}$ συνάπτομεν ἑκατέρῳ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν· ὅθεν οὐδὲν ὅλως πείσεται ἡ ἐξίσωσις (393)· ϰ δὴ ἔσται $\chi^2+3\chi+\frac{9}{4}=\beta+\frac{9}{4}$· καλείσθω δὲ ἡ πρᾶξις αὕτη τοῦ ἐλλειποῦς τετραγώνου συμπλήρωσις.

465. Ε΄. Συμπληρωθέντος οὖν οὕτω τοῦ τετραγώνου, ἑκατέρωθεν τῆς ἐξισώσεως ἐξακτέον τὴν τετραγώνειον ῥίζαν· ἀλλὰ τοῦ μὲν πρώτου ἤδη ἔγνωσται· ἔστι γὰρ χ σὺν τῷ ἡμισυνεργῷ τῆς χ· τοῦ δὲ δευτέρου σημειωθήσεται· οὕτω τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ῥίζα τετράγωνος ἔσεται

$$\chi+\tfrac{3}{2}=\sqrt{\beta+\tfrac{9}{4}}.$$

466. ϛ΄. ἐξαχθείσης τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ συνιστῶντος τὸ δεύτερον μέλος, ἀναδεικτέον μόνην τὴν χ,

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ... Ε.Υ.Δ της Κ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

μετατιθέντας ἐπὶ θάτερα τὸν δεύτερον ῥιζικὸν ὅρον· ὕτως ἐπὶ τῆς ἐν χερσὶν ἐξισώσεως $\chi + \frac{3}{2} = \sqrt{\beta + \frac{9}{4}}$, ἐὰν ὑποτεθῇ ῥίζα τῦ $\beta + \frac{9}{4}$ ὁ ἀριθμὸς 10, ποιητέον $\chi = 10 - \frac{3}{2} = 8\frac{1}{2}$.

467. Ζ΄. Ὅσον δὲ περὶ τῶν συμβόλων τῆς ῥίζης, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι τῦ συμπληρωθέντος τετραγώνυ ὦσιν ὑπαρκτικοὶ, οἷος ὁ τῦ προτεθέντος τετραγώνυ, ἔξεσαι ἐπίσης ὑποθεῖναι τὴν ῥίζαν, ἤτοι ὑπαρκτικὴν, ἢ λειπτικὴν ὕτω $\sqrt{\chi^2 + 3\chi + \frac{9}{4}} = \pm\sqrt{\beta + \frac{9}{4}}$· ἀποτελεῖται γὰρ ἐπίσης τὸ τετράγωνον $\chi^2 + 3\chi + \frac{9}{4}$ ἀπότε $\chi + \frac{3}{2}$, καὶ ἀπὸ $-\chi - \frac{3}{2}$ (128).

468. Ἐὰν μέντοι ὁ τῆς χ συνεργὸς λειπτικὸς ᾖ, ἔξεσαι ἀδιαφόρως καὶ τῦτο, τὸν μὲν τῶν ὅρων λείποντα, τὸν δ' ὑπάρχοντα ἐνδέξαϑαι, δεῖ μέντοι τῇ τῦ δευτέρυ μέλυς ῥίζῃ προτάξαϑαι τὸ πρὸ τῦ ῥιζικῦ ὅρυ χ ὑποτεθὲν σύμβολον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείϑω γὰρ ἐξίσωσις ἡ $\chi^2 - 4\chi + 4 = \alpha$· ἐνταῦθα τοίνυν τὴν ἑκατέρυ μέλυς ῥίζαν θηρωμένοις ἔξεσαι θεῖναι εἴτε $\chi - 2 = \sqrt{\alpha}$, ἢ $-\chi + 2 = \sqrt{\alpha}$· φημὶ δὴ προτακτέον εἶναι τῦ δευτέρυ μέλυς τὸ πρὸ τῦ χ ὅρυ ὑποτεθὲν σύμβολον· ἵνα δὲ τῦτο πισωθῶμεν, τῦ δευτέρυ ῥιζικῦ ὅρυ ὄντος 2 ἐπὶ τῦ προτεθέντος ὑποδείγματος, θῶμεν τὸν πρῶτον ὅρον $\chi = 5$· τὸ ἄρα ἀπὸ $5 - 2$ τετράγωνον παρέξει τὴν ἐξίσωσιν $+25 - 20 + 4 = 9$· ἐξαγωγῇ ῥίζης, $5 - 2 = \sqrt{9} = 3$, μεταθέσει τῦ -2, $5 = 3 + 2$· εὔδηλον ἄρα ὅτι τῦ $\chi = 5$ ὑπαρκτικῦ ὑποτεθέντος, ἀπονεῖμαι δεῖ τῇ τῦ δευτέρυ μέλυς ῥίζῃ τὸ $+$.

Θῶμεν νῦν τὐναντίον τὸν μὲν $\chi = 5$ λειπτικὸν, ὑπαρκτικὸν δὲ τὸν 2· τὸ ὂν ἀπὸ $-5 + 2$ τετράγωνον, ὡς καὶ πρὸ τῦ, ἀποδώσει τὴν ἐξίσωσιν $+25 - 20 + 4 = 9$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ. ... τ.ΙΙ ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ὅθεν $-5+2=-\sqrt{9}=-3$· μεταθέσει τȢ̃ $+2$, $-5=-3-2=-5$· σαφὲς ἄρα, ὡς ἐὰν ὑποτεθῇ ὁ χ ὅρος λειπτικὸς, προτάξασθαι δεῖ τῆς θατέρȣ μέλȣς ῥίζης τὸ $-$

469. Ἄρα ἐν γένει „τȢ̃ ὅρȣ, ᾧ ἐνυπάρχει ὁ πρῶ„τος τῆς χ βαθμὸς, λείποντος, προτακτέον τῆς ῥίζης τȢ̃ „δευτέρȣ μέλȣς τὸ πρὸ τȢ̃ χ ὑποτεθὲν σύμβολον.“

470. ΣΧΟΛΙΟΝ. Κἀντεῦθεν φανερὸν, ὡς πᾶσα δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις δυοῖν ἐςιν ἐπιλύσεων ἐπιδεκτικὴ, ἤντε ἡ ἄγνωςος μονάζῃ, ἤντε πρὸς ἑαυτῇ ϗ τὴν πρώτȣ βαθμȢ̃ ἄγνωςον προσκειμένην ἔχῃ, ϗ ταύτην εἴτε λείπȣσαν, εἴτε ὑπάρχȣσαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, Ȣ̃ τὰ τέσσαρα πεμπτημόρια τȢ̃ κύβȣ ἴσα εἶεν τῷ ἀπ' αὐτȢ̃ ὀκταπλῷ τετραγώνῳ.

ΛΥΣΙΣ. Κληθέντος χ τȢ̃ ζητȣμένȣ ἀριθμȢ̃, ἔςαι $\frac{4}{5}\chi^3=8\chi^2$· διαιρέσει τῆς ἐξισώσεως διὰ χ, ἔςαι $\frac{4\chi^2}{5}=8\chi$ (134)· ἐπεὶ δὲ χ ἑκατέρωθι παρεςι, διαιρετέον ϗ ταύτην διὰ χ· ἕξȣν $\frac{4}{5}\chi=8$· ὅθεν $4\chi=40$· ἄρα $\chi=10$, ὁ ζητȣ́μενος ἀριθμός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν ἀριθμὸν, Ȣ̃ ὁ τέταρτος βαθμὸς συναφθεὶς τετράκις τῷ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνῳ ἀποτελοίη ἄθροισμα, ἰσȣ́μενον τῷ αὐτῷ τετραγώνῳ, δεκατρὶς εἰλημμένῳ.

ΛΥΣΙΣ. $\chi^4+4\chi^2=13\chi^2$· διαιρέσει διὰ χ^2, $\chi^2+4=13$· ἄρα $\chi^2=13-4=9$· ἄρα $\chi=3$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, Ȣ̃ τετραγωνισθέντος, ἐὰν ἀπὸ τῶν δύω τριτημορίων τȢ̃ τετραγώνȣ ἀφαιρεθῶσι 12, καταλείπονται 12.

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ΛΥΣΙΣ. $\frac{2\chi^2}{3} - \alpha = \alpha$· μεταθέσει (453) τ8 $-\alpha$, $\frac{2\chi^2}{3} = 2\alpha$· πολλαπλασιασμῷ, $2\chi^2 = 6\alpha$, διαιρέσει, $\chi^2 = \frac{6\alpha}{2} = 3\alpha = 36$· ἄρα $\chi = \sqrt{36} = 6$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ἀφ᾽ 8 τῷ τετραγώνῳ ὀκτάκις τ8 αὐτ8 συναφθέντος ἀριθμ8, ϗ ἔτι 16, ἀποτελεῖται ὁ 121.

ΛΥΣΙΣ. $\chi^2 + 8\chi + 16 = \alpha$, ἧς τὸ πρῶτον μέλος τετράγωνον περιέχει τέλειον, ἐςι γὰρ 16 τετράγωνος ἀπὸ 4 ἡμισυνεργ8 τῆς χ. ἔςιν 8ν ἡ τετράγωνος τ8 πρώτ8 μέλ8ς ῥίζα $\chi + 4$ (465)· ἄρα $\chi + 4 = \sqrt{121} = 11$· 8κ8ν $\chi = 11 - 4 = 7$, ἀριθμὸς ὁ ζητ8μενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ᾧτινι δεκαεξάκις εἰλημμένῳ συναφθέντος δὶς τ8 ἀπ᾽ αὐτ8 τετραγών8 ϗ ἔτι 20, ἀποτελεῖται ὁ 150.

ΛΥΣΙΣ. Κληθείτω ὁ ζητ8μενος ἀριθμὸς χ, ϗ 20 $= \alpha$, ϗ $150 = \beta$· ϗ δὴ ἔςαι ἐξίσωσις $2\chi^2 + 16\chi + \alpha = \beta$.

Διαιρέσει δὲ διὰ 2, $\chi^2 + 8\chi + \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$

Ἐπεὶ δὲ αὕτη ἡ ἐξίσωσις 8δένα περιέχει ὅρον δυνάμενον 16, ὅς ἐςι τετράγωνος ἀπὸ 4 ἡμισυνεργ8 τῆς χ· α΄. μεταθετέον τὸν $\frac{\alpha}{2}$· ὅθεν $\chi^2 + 8\chi = \frac{\beta - \alpha}{2}$· β΄. τὸ $\chi^2 + 8\chi$ ἐςι προφανῶς τετράγωνον ἀτελὲς, ᾧπερ ἐνδεῖ τ8 ἀπὸ 4 ἡμισυνεργ8 τῆς χ τετραγών8 16· συναπτέον ἄρα τὸν 16 ἑκατέρῳ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, ϗ δὴ ἔσεται $\chi^2+8\chi+16=\frac{\beta-\alpha}{2}+16$· ἐξακτέον δὲ ἀπὸ τοῦ πρώτου μέλους τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἣν ἴσμεν οὖσαν $\chi+4$· ἐξακτέον δὲ καὶ ἀπὸ τοῦ δευτέρου $\frac{\beta-\alpha}{2}+16=81$· οὐκοῦν $\chi+4+\sqrt{81}=9$· ἄρα $\chi=9-4=5$, ἀριθμὸς ὁ ζητούμενος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ς'. Εὑρεῖν Ἀριθμὸν, ἀφ' οὗ ὁ τετράγωνος ἀφαιρεθεὶς τοῦ ἀπ' αὐτοῦ κύβου καταλείπει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἑξαπλάσιον.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς θέσεως πρόεισιν ἥδε ἡ ἐξίσωσις $\chi^3-\chi^2=6\chi$· διαιρέσει διὰ χ, $\chi^2-\chi=6$, ἐν ᾗ ὑπάρχει τετράγωνον ἀτελὲς τὸ $\chi^2-\chi$, ὅπερ ἵνα συμπληρωθῇ, ληπτέον τὸ ἥμισυ τοῦ 1 συνεργοῦ τῆς χ, εἴτ' οὖν $\frac{1}{2}$, οὗ τὸ τετράγωνον $\frac{1}{4}$ συναπτέον ἑκατέρωσε τῆς ἐξισώσεως· οὐκοῦν ἔσται $\chi^2-\chi+\frac{1}{4}=6+\frac{1}{4}$· ἡ μὲν τοῦ πρώτου μέλους ῥίζα ἐστὶ $+\chi-\frac{1}{2}$· ἐπ' ἐξαγωγῇ δὲ τῆς τοῦ δευτέρου, ἀνακτέον τὸν ὁλοχερῆ 6 εἰς τέταρτα, καὶ τρεπτέον τὸ δεύτερον μέλος εἰς $\frac{25}{4}$, οὗ ῥίζα τετραγώνειος $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$· ἄρα $\chi-\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$· ἄρα (466) $\chi=3$.

471. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Εἴδομεν ἤδη ὡς ὑποτιθεμένης τῇ ποσότητι $\chi^2-\chi+\frac{1}{4}$ ῥίζης τῆς $\chi-\frac{1}{2}$, ἐχρῆν τάξαι τῇ τοῦ δευτέρου μέλους ῥίζῃ τῇ $\frac{5}{2}$ τὸ $+$ σύμβολον, ὃ προτέτακτο τοῦ ὅρου χ, ἀλλ' οὐχ ὃ προστάγη τοῦ $\frac{1}{2}$· εἶχε μέντοι ληφθῆναι τοῦ αὐτοῦ μέλους ἡ δύναμις $-\chi+\frac{1}{2}$ ὡς ῥίζα, ὅτε δὴ, ἵν' ἐπαληθεύσῃ τὸ πρόβλημα, ἐχρῆν προταχθῆναι τῆς ῥίζης τοῦ δευτέρου μέλους τὸ $-$, ὅπερ προϋποτεθείη τῆς χ· οὐκοῦν ἔσται οὕτως $-\chi+\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$, καὶ μεταθέσει τοῦ $+\frac{1}{2}$, ἔσται $-\chi=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=-3$.

Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π
ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζ΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὅπως ἀφαιρεμένε τε̃ ἀπ᾽ αὐτε̃ τετραγώνου, καταλειφθῇ $\frac{6}{27}$.

ΛΥΣΙΣ. Κληθέντος $\frac{6}{27} = \alpha$, ἔσαι $\chi - \chi^2 = \alpha$ μεταθέσει (454), $\chi = \alpha + \chi^2$· ὅθεν $\chi^2 - \chi = -\alpha$· συμπληρώσει τε̃ ἐλλειπε̃ς τετραγώνε, ὡς ἐν τῷ ἀνωτέρῳ ὑποδείγματι, $\chi^2 - \chi + \frac{1}{4} = -\alpha + \frac{1}{4}$· ἐξαγωγῇ ῥίζης ἑκατέρωθεν· $\chi - \frac{1}{2} = \sqrt{-\alpha + \frac{1}{4}} = \sqrt{-\frac{6}{27} + \frac{1}{4}} = \sqrt{-\frac{24}{108} + \frac{27}{108}} = \sqrt{\frac{3}{108}} = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}$· ἄρα $\chi - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$· ἄρα $\chi = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, ὅς ἐςὶν ἀριθμὸς ὁ ζητέμενος· τῷ ὄντι γὰρ ἐὰν ἀπὸ τε̃ $\frac{2}{3}$ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ τε̃ αὐτε̃ τετράγωνον $\frac{4}{9}$ εὑρεθήσεται κατάλοιπον $\frac{6}{27}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η΄. Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὅπως προσθέντες αὐτῷ τὸ τριπλε̃ν αὐτε̃, καὶ ἔτι τὸ ἥμισυ λάβωμεν ἄθροισμα $\frac{3}{4}$ τε̃ ἀπὸ τε̃δε τε̃ ἀριθμε̃ τετραγώνε.

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω χ ὁ ζητέμενος ἀριθμός· ἡ δ᾽ ἐξίσωσις ἔσαι $\chi + 3\chi + \dfrac{\chi}{2} = \dfrac{3\chi^2}{4}$· ἀπαλλαγῇ τῶν κλασμάτων, $8\chi + 24\chi + 4\chi = 6\chi^2$, ἀναγωγῇ, $36\chi = 6\chi^2$· ἄρα $\chi = \frac{36}{6} = 6$.

472. Ἐὰν ἐν τοῖς δευτέρε βαθμε̃ προβλήμασιν ὦσι πλείες ἢ μία ἄγνωςος, καὶ δὴ καὶ ἐξισώσεις μιᾶς πλείες, βαδιςέον ἤδη τὴν αὐτὴν, ἣν κἀν τοῖς πρωτοβαθμίοις προβλήμασιν, ὅ ἐςι θηρευτέον τὴν μιᾶς τινος ἀγνώςε δύναμιν ἐν θατέρᾳ τῶν ἐξισώσεων, καὶ ἀντεισακτέον αὐτὴν ἐπὶ τῆς ἑτέρας· ἔςωσαν γὰρ ἐξισώσεις δύω $2\chi + 3y = \alpha$ καὶ $\chi^2 + y^2 = \beta$· οὐκε̃ν εἰλήφθω ἐν τῇ πρώτῃ ἡ τῆς χ δύναμις, ἥτις ἐςὶν $\dfrac{\alpha - 3y}{2}$, καὶ ἀντικατασήτω ἀντὶ χ^2 ἐν τῇ δευτέρᾳ, ἥτις γενήσεται $\dfrac{\alpha^2 - 6\alpha y + 9y^2}{4} + y^2 = \beta$·

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ... ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ. ... Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

ἀπαλλαγῇ τοῦ κλάσματος, $\alpha^2 - 6\alpha y + 9y^2 + 4y^2 + 4y^2 = 4\beta$, ἢ $\alpha^2 - 6\alpha y + 13y^2 = 4\beta$· ὅθεν $13y^2 - 6\alpha y = 4\beta - \alpha^2$, καὶ διαιρέσει διὰ 13, $y^2 - \frac{6\alpha y}{13} = \frac{4\beta - \alpha^2}{13}$ (461)· τέλος δὲ συμπληρώσει τοῦ ἐλλείποντος τετραγώνου διὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμισυνεργοῦ $\frac{6\alpha}{13}$ τῆς y, εἴτ' οὖν ἀπὸ τοῦ $\frac{3\alpha}{13}$, ἐκπεραίνεται, ὡς ἔθος, τὰ τῆς πράξεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ συνθέτων ἐξισώσεων.

473. Ἔστω $\chi = 2$· οὗτος οὖν ὁ τύπος καλεῖται ἐξίσωσις ἁπλῆ, ἢ πρωτοβάθμιος ἐπεὶ χ ἐπὶ μηδὲν πεπολλαπλασίασαι δείκτην ἔχουσα 1, ὅ ἐστιν, οὖσα πρωτοβάθμιος.

474. Ἐὰν μέντοι λάβωμεν δύω ἐξισώσεις $\chi = 2$, καὶ $\chi = 2$, καὶ ταύτας ἐπ' ἀλλήλας πολλαπλασιάσωμεν, προκύψει καινὴ ἐξίσωσις ἡ $\chi^2 = 4$, ἢ καλεῖται ἐξίσωσις σύνθετος, βαθμοῦ δευτέρου· παράγεται γὰρ ὑπὸ δυεῖν ἁπλῶν ἐξισώσεων (287).

475. Ἐὰν δ' ἐπιπολλαπλασιαθῇ ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις $\chi^2 = 4$ ἐπὶ τὴν ἁπλῆν ἐξίσωσιν $\chi = 2$, ἡ προκύψουσα ἐξίσωσις $\chi^3 = 6$ ἔσαι σύνθετος βαθμοῦ τρίτου ὡς γινομένη ὑπὸ τριῶν ἁπλῶν ἐξισώσεων, καὶ οὕτως ἐφεξῆς· ἐπὶ τούτοις ά. δυνάμεθα ἀποδοῦναι τῇ ἁπλῇ ποσό-

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ
Ε.Υ.Δ της Κ.τ.Π ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006