τεθύμηται ἄρα ὁ Λιβάνιος 10· ἡ δὲ βάσανος δείκνυσιν ἀσφαλῆ τὴν τȣ̃ προβλήματος λύσιν, ὅτι $10+30+40=80$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄. Πέτρος, Ἰάκωβος ϗ Ἰωάννης ϗ Ἀνδρέας, ἅμα ἄγȣσιν ἔτη 105· ϗ ἡ μὲν τȣ̃ Πέτρȣ ἡλικία τὸ ἥμισύ ἐϛι τῆς τȣ̃ Ἰακώβȣ, τȣ̃ δὲ, τὸ τρίτον τῆς τȣ̃ Ἰωάννȣ· αὐτȣ̃ δὲ, τὸ ἥμισυ τῆς τȣ̃ Ἀνδρέȣ· πόση ἐϛὶν ἡ ἑκάϛȣ τȣ́των ἡλικία;

ΛΥΣΙΣ. Τὸ ζήτημα, καλῶς ἐξετασθὲν κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα (388), φαίνεται ἐπιλυόμενον, ἤτοι δι᾽ ὁλοχερῶν, ἢ διὰ κλασμάτων.

ά. Κληθείσης μὲν γὰρ τῆς τȣ̃ Πέτρȣ ἡλικίας χ, ἥτις ȣ̓̃σα πασῶν ἐλάττων ἐϛὶ τὸ ἥμισυ τῆς τȣ̃ Ἰακώβου, ἡ τȣ̃ Ἰακώβȣ ἔϛαι 2χ, ἧς τὸ τρίτον ȣ̓́σης τῆς τȣ̃ Ἰωάννȣ, ἔϛαι ἡ τȣ̃ Ἰωάννȣ 6χ· τέλος δὲ ταύτης τὸ ἥμισυ ȣ̓́σης τῆς τȣ̃ Ἀνδρέȣ, ἔϛαι ἡ τȣ̃ Ἀνδρέȣ αὐτȣ̃ 12χ· ϗ ἐπεὶ συλλήβδην πᾶσαι αἱ ἡλικίαι συμπληρȣ̃σι 105 ἔτη, ἅπερ κληθήτωσαν α, ἐκ τῆς τȣ̃ προβλήματος θέσεως προκύψει ἡ ἐξίσωσις $\chi+2\chi+6\chi+12\chi=\alpha$· ἀναγωγῇ δὲ, $21\chi=\alpha$· ἄρα (421) $\chi=\frac{\alpha}{21}$

Διαιρεθέντος ἄρα α, εἴτ᾽ ȣ̓̃ν 105, διὰ 21 εὑρεθήσεται $\chi=5$, ἡλικία τȣ̃ νεωτέρȣ· ȣ̓κȣ̃ν τȣ̃ μὲν δευτέρȣ ἔϛαι 10, τȣ̃ δὲ τρίτȣ, 30: τȣ̃ δὲ τετάρτȣ 60, ὧν τὸ ἄθροισμα ἐπ᾽ ἀκριβὲς ἐϛὶν 105.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὁ λογισμὸς τῶν κλασμάτων ἀεὶ ἐπιμηκέϛερός ἐϛι τȣ̃ τῶν ὁλοχερῶν· ἀποπειρασόμεθα μέντοι αὐτίκα ϗ τȣ̃δε, ά. ἵν᾽ ἀείποτ᾽ ἐπὶ τῆς πράξεως ὁ τȣ̃ διὰ κλασμάτων ὄπισθεν τιθῆται τȣ̃ δι᾽ ὁλοχερῶν· β΄. ὅταν ἡ ἐξίσωσις κλάσματα περιέχῃ, κατὰ πρῶτον αὐτῶν αὐτὴν ἀπαλάττωμεν.

β΄. Εἰλήφθω ὡς ἐγνωσμένη μονὰς, ἢ ὡς ὅρος παραθέσεως, ἡ μεγίςη ἡλικία, εἴτ᾽ ὖν ἡ τοῦ Ἀνδρέυ, ἧς αἱ τρεῖς ἄλλαι εἰσὶ κλάσματα, καὶ κληθήτω χ· οὐκῦν ἡ τοῦ Ἰωάννυ ἡλικία, τὸ ἥμισυ οὖσα τῆς τοῦ Ἀνδρέου ἔςαι $\frac{\chi}{2}$· ἡ δὲ τοῦ Ἰακώβυ, τὸ τρίτον οὖσα τῆς τοῦ Ἰωάννυ, ἔσεται $\frac{\chi}{2\times3}=\frac{\chi}{6}$ (Ἀριθ. 203)· τέλος δὲ ἡ τοῦ Πέτρυ, τὸ ἥμισυ οὖσα τῆς τοῦ Ἰακώβυ, ἔσεται $\frac{\chi}{6\times2}=\frac{\chi}{12}$· ἡ δὲ τοῦ προβλήματος θέσις, πάσας τὰς ἡλικίας τάςδε ἰσοῦσθαι βυλομένη τῷ $105=\alpha$, ἐκτεθήσεται διὰ τῆςδε τῆς ἐξισώσεως. $\frac{\chi}{12}+\frac{\chi}{6}+\frac{\chi}{2}+\chi=\alpha$

Πρῶτον οὖν ἀπηλλάχθω τῶν κλασμάτων ἡ ἐξίσωσις, πολλαπλασιαθέντων τῶν μὲν ὁλοχερῶν α καὶ χ ἐπὶ $12\times6\times2$ (429), ἢ ἐπὶ 144. τῶν δὲ κλασμάτων α΄. τοῦ ἀριθμητοῦ χ τοῦ πρώτυ ἐν ἀριςεροῖς κλάσματος ἐπὶ 6×2, ἀποβαλλομένυ τοῦ παρονομαςοῦ 12· ὅθεν 12χ· β΄. τοῦ κατὰ τὸ δεύτερον κλάσμα χ ἐπὶ 12×2· ὅθεν 24χ· γ΄. τοῦ κατὰ τὸ τρίτον, ἐπὶ 12×6· ὅθεν 72χ· γενήσεται οὖν ἡ ἐξίσωσις $12\chi+24\chi+72\chi+144\chi=144\alpha$· ἀναγωγῇ δὲ, $252\chi=144\alpha$· ἄρα $\chi=\frac{144\alpha}{252}$ (420)· ἀλλὰ $\alpha=105$· ἄρα $\chi=\frac{144\times105}{252}=\frac{15120}{252}=60$, ὃς δηλοῖ τὴν τῦ Ἀνδρέυ ἡλικίαν, ἡ δὲ τῦ Ἰωάννυ ἔςαι $\frac{60}{2}=30$, ἡ δὲ τῦ Ἰακώβυ, $\frac{30}{3}=10$, ἡ δὲ τῦ Πέτρὶ $\frac{10}{2} = 5$· αἱ δὲ τέσσαρες αὗται ἡλικίαι ἀποπληρῦσιν ἀκριβῶς τὴν τῦ προβλήματος θέσιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Στρατηγὸς, ἐρωτηθεὶς πόσυς ἄγοι ςρατιώτας, εἴπερ ἔφη, εἶχον τὸ διπλῦν ἔτι ὧν ἔχω, καὶ τὸ δέκατον, καὶ πρὸς τέτοις 7000, εἶχον ἂν σύμπαντας 100000· πόσυς ἄρ' ἦγε μεθ' ἑαυτῦ ςρατιώτας;

ΛΥΣΙΣ. ά. Τὸ πρόβλημα ἐκφραθήσεται „ὁ ἀριθμὸς „τῶν ςρατιωτῶν σὺν τῷ διπλῷ τῦδε τῦ ἀριθμῦ, σὺν τῷ „δεκατημορίῳ αὐτῦ σὺν 7000 ἰσῦται τῷ 100000"· ἔςω ὁ τῶν ςρατιωτῶν ἀριθμὸς χ, ὗ τὸ μὲν διπλῦν $= 2\chi$, τὸ δὲ δεκατημόριον $= \frac{\chi}{10}$· κληθήτω δὲ ὁ μὲν $7000 = \alpha$, ὁ δὲ $100000 = \beta$· ἡ ὗν θέσις τῦ προβλήματος συνίςησι τὴν ἐξίσωσιν· $\chi + 2\chi + \frac{\chi}{10} + \alpha = \beta$, ἢ $3\chi + \frac{\chi}{10} + \alpha = \beta$· ἀπαλλαγῇ τῶν κλασμάτων (424), $30\chi + \chi + 10\,\alpha = 10\,\beta$· ἀναγωγῇ δὲ καὶ μεταθέσει, $31\chi = 10\beta - 10\alpha$· ἄρα $\chi = \frac{10\beta - 10\alpha}{31}$· ἀλλὰ $\beta = 100000$, καὶ $\alpha = 7000$, ἄρα $\chi = \frac{10 \times 100000 - 10 \times 7000}{31} = 30000$, ὁ ἀριθμὸς τῶν τῷ ςρατῷ ἐμπεριλαμβανομένων· ὅθεν συναφθέντων τῷ 30000 τῦτε διπλῦ 60000, καὶ τῦ δεκατημορίυ 3000, καὶ 7000, τὸ ἄθροισμα ἅπαν ἔςαι τῷόντι 100000.

434. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἄνευ δὲ τῶν κλασμάτων, τῦ δεκατημορίυ μὲν τῦ ὅλυ ςρατῦ κληθέντος χ, αὐτῦ δὲ τῦ ςρατῦ 10χ, τῦ δὲ διπλῦ 20χ, ἐκ τῆς θέσεως τῦ προβλήματος ἔςαι $10\chi + 20\chi + \chi + \alpha = \beta$· ἀναγωγῇ δὲ καὶ με-

ταξέσει, $31\chi = \beta - \alpha$, ἄρα τὸ δέκατον τῦ ὅλυ ςρατῦ

$$\chi = \frac{\beta - \alpha}{31},\ \text{ἢ}\ \frac{100000 - 7000}{31} = 3000$$ · ὁ δὲ ὅλος ςρατὸς $3000 \times 10 = 30000$, ὡς ᾗ πρὶν εὕρηται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Ἀντήνωρ εἰς Ἀθήνας παραγενόμενος τῇ μὲν πρώτῃ ἡμέρᾳ ἐδαπάνησε τὸ ἥμισυ ὧν ἔφερε χρημάτων, τῇ δὲ δευτέρᾳ, τὸ τέταρτον, τῇ δὲ τρίτῃ τὸ δέκατον, τῇ δὲ τετάρτῃ τὸ εἰκοςόν· κατελείφθησαν ὖν αὐτῷ μναῖ 10. πόσας ἄρ' ἔφερε μεθ' ἑαυτῦ;

Ἐκφρασθείη ὖν ἡ θέσις τῦ προβλήματος ὕτως (388) „ὁ ἀριθμὸς πασῶν, ὧν εἶχεν ὁ Ἀντήνωρ, μνῶν πρὶν ἀφι„κέσθαι εἰς Ἀθήνας, πλὴν τῦ ἡμίσεως αὐτῶν ᾗ τῦ τε„τάρτυ ᾗ τῦ δεκάτυ ᾗ τῦ εἰκοςῦ, ἐξισῦται μναῖς 10.

Ἔςω ὖν ἅπας μὲν ὁ ἀριθμὸς $= \chi$, τὸ δ' ἥμισυ $\frac{\chi}{2}$, τὸ δὲ τέταρτον $\frac{\chi}{4}$, τὸ δὲ δέκατον $\frac{\chi}{10}$, τὸ δ' εἰκοςὸν $\frac{\chi}{10}$, τὸ δὲ γνωςὸν κατάλοιπον $10 = \alpha$· ἐκ τύτων τοίνυν ἔςαι ἡ ἐξίσωσις $\chi - \frac{\chi}{2} - \frac{\chi}{4} - \frac{\chi}{10} - \frac{\chi}{20} = \alpha$.

Ἀπαλλαγῇ τοίνυν τῶν κλασμάτων κατὰ τὰ προοροθετηθέντα, ἔςαι $1600\chi - 800\chi - 400\chi - 160\chi - 80\chi = 1600\,\alpha$· ἀναγωγῇ δὲ, $160\chi = 1600\,\alpha$· ἄρα $\chi = \frac{1600\,\alpha}{160}$.

ἀλλὰ $\alpha = 10$, ἄρα $\chi = \frac{16000}{160} = 100$· ἐὰν δ' ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ 100 τὰ προδηλωθέντα μέρη ἐν τῷ προβλήματι, καταλειφθήσονται 10.

Ἵνα δὲ κλασμάτων χωρὶς τὸ πρόβλημα ἐπιλυσώμεθα ἔςω $\chi = \frac{1}{20}$ τȣ̃ ἀθροίσματος· ȣ̓κȣ̃ν $2\chi = \frac{1}{10}$ τȣ̃ αὐτȣ̃ ὅλȣ, ϗ $5\chi = \frac{1}{4}$, ϗ $10\chi = \frac{1}{2}$, ϗ $20\chi =$ τῷ ὅλῳ τῶν χρημάτων τȣ̃ Πέτρȣ ἀθροίσματι· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις $20\chi - 10\chi - 5\chi - 2\chi - \chi = \alpha$· ἀναγωγῇ δὲ, $2\chi = \alpha$· ἄρα $\chi = \frac{\alpha}{2} = \frac{10}{2} = 5$· δηλοῖ δὲ τὸ χ τὸ εἰκοςὸν μέρος τῶν χρημάτων, ἄρα $5 \times 20 = 100$ ἔςι τὸ ὅλον τῶν χρημάτων τȣ̃ Ἀντήνωρος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛʹ. Ἐργάτης τις εὕρηται ἔχων τὸ πέμπτον τῶν 9 ἀργυρίων συνάμα τῷ πέμπτῳ τȣ̃ μισθȣ̃, ὃν ἀπηνέγκατο ἐν ἑβδομάσι τρισί· τȣ́τῳ δὲ συνάψας τὸν πέντε ἑβδομάδων μισθὸν, εὕρηται ἔχων ἀργύρια 41· ἐπὶ πόσῳ ȣ̃ν ἑκάστης ἑβδομάδος μεμίσθωται;

ΛΥΣΙΣ. Ἡ θέσις τȣ̃ προβλήματος ἐςιν ἄυτη „τὸ „πέμπτον τῶν 9 ἀργυρίων, ϗ τȣ̃ τριπλȣ̃ ἑβδομιαίȣ μισθȣ̃, „σὺν τῷ πενταπλῷ ἑβδομιαίῳ μισθῷ, ἰσȣ̃ται 41 ἀργυρίοις“. ἔςω ȣ̃ν χ μὲν ὁ ἑβδομιαῖος μισθὸς, α δὲ $= 9$, ϗ $\beta = 41$, ἐξ ὧν κατὰ τὴν θέσιν ἔςαι $\frac{\alpha + 3\chi}{5} + 5\chi = \beta$· ἀπαλλαγῇ τῶν κλασμάτων (424), $\alpha + 3\chi + 25\chi = 5\beta$· μεταθέσει δὲ ϗ ἀναγωγῇ, $28\chi = 5\beta - \alpha$· ἄρα $\chi = \frac{5\beta - \alpha}{28}$,

ἢ $\chi = \frac{5 \times 41 - 9}{28} = 7$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ζʹ. Ποιμήν τις, ἐρωτηθεὶς πόσα βόσκοι πρόβατα, ἡ διαφορὰ, ἔφη, τȣ̃ τετάρτȣ ϗ δεκάτȣ μέρȣς τῶν προβάτων μȣ, ἔςι 15· πόσα τοίνυν ποιμάινει;

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν προβάτων, ϗ $\alpha = 15$· ἡ δὲ θέσις συνίςησι προδήλως τὴν ἐξίσωσιν $\frac{\chi}{4} - \frac{\chi}{10}$

$=\alpha$· ἀπαλλαγῇ δὲ τῶν κλασμάτων, $10\chi - 4\chi = 40\alpha$· ἄρα $6\chi = 40\alpha$, ϗ $\chi = \frac{40\alpha}{6} = \frac{600}{6} = 100$· τόσα ἄρα ποιμάινει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Η΄. Ὁ Ἰωάννης τῇ μὲν πρώτῃ ἡμέρᾳ ἐδαπάνησε 5 ἀργύρια ἔλαττον, ἢ τῇ δευτέρᾳ· τῇ δὲ πρώτῃ ϗ τῇ δευτέρᾳ ὁμȢ, τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης· συλλήϐδην δὲ, 75 ἀργύρια· πόσα Ȣ̃ν ἑκάϛης ἐδαπάνησεν ἡμέρας;

ΛΥΣΙΣ. Ἡ τῆς πρώτης ἡμέρας δαπάνη κληθήτω χ, ϗ ἔϛω $5=\alpha$· ȣ̓κȢ̃ν ἡ τῆς δευτέρας ἔϛαι $\chi+\alpha$, ἡ δὲ τῆς δευτέρας ϗ τῆς πρώτης ἅμα, $2\chi+\alpha$· ἡ δὲ τῆς τρίτης, διπλῆ Ȣ̓̃σα τῶν δύω προτέρων ἡμερῶν, ἔϛαι $4\chi+2\alpha$· ὑποτεθείσης δὲ $\beta=75$, ἔϛαι $2\chi+\alpha+4\chi+2\alpha=\beta$· ἄρα $6\chi+3\alpha=\beta$, ϗ $6\chi=\beta-3\alpha$, ϗ $\chi=\frac{\beta-3\alpha}{6}=\frac{75-15}{6}=10$, ϗ $\chi+\alpha=15$, ϗ $4\chi+2\alpha=50$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Θ΄. Πατήρ τις ἐν τῇ ἑαυτȢ̃ διαθήκῃ Ȣ̓́τως ἀποφάινεται κληρονόμȢς τȢ̀ς ἑαυτȢ̃ ὑȢ̀ς, ὥϛε τὸν μὲν πρεσϐύτατον κομίσαϑαι ἀργύρια 1000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει τῆς παρὰ ταῦτα λοιπῆς περιȢσίας, τὸν δὲ δεύτερον 2000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει τῆς περιλοίπȢ περιȢσίας, μετὰ τὴν ἀφάιρεσιν τῆς τȢ̃ πρώτȢ μερίδος ϗ τῶν 2000, ϗ ἑξῆς ὡσάυτως ἕκαϛον τῶν λοιπῶν ὑέων· ἀλλὰ τέλος ἴσον ἕκαϛος κομισαμενος εὑρέθησαν· πυνθάνομαι Ȣ̃ν, πόση μὲν ἦν ἡ περιȢσία, πόσοιδ' ἦσαν οἱ ὑεῖς;

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω ὅλη μὲν ἡ περιȢσία χ, 1000 δὲ $=\alpha$· ἐπεὶ Ȣ̃ν ὁ πρωτότοκος λήψεται 1000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει τῆς μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν 1000 περιλειπομένης περιȢσίας, ἡ ἀυτȢ̃ μερὶς ἔϛαι $\alpha+\frac{\chi-\alpha}{9}$, ἥτις ἀναγωγῆ εἰς πλείω εὐμάρειαν ἔςαι ($\frac{9\alpha}{9}$ ὄντος $=\alpha$) $\frac{9\alpha+\chi-\alpha}{9}$ $=\frac{8\alpha+\chi}{9}$· κείθω δὲ $\frac{8\alpha+\chi}{9}=\rho$ (403).

Τὸ ὖν κατάλοιπον τῦ χ, ὖ ἀφήρηται ἡ μερὶς ρ, ἔςαι $\chi-\rho$· ἡ δὲ τῦ δευτέρυ, ὖσα 2000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει τῦ $\chi-\rho-2000$, ἔςαι $2\alpha+\frac{\chi-\rho-2\alpha}{9}=\frac{18\alpha+\chi-\rho-2\alpha}{9}$ $=\frac{16\alpha+\chi-\rho}{9}$.

Ἐπεὶ δὲ πάντες ἴσον ἐκομίσαντο, ἔςαι ἄρα ἡ τῦ πρώτυ μερὶς $\frac{8\alpha+\chi}{9}=\frac{16\alpha+\chi-\rho}{9}$ μερίδι τῦ δευτέρυ· ἐπεὶ δὲ ταῦτα τὰ δύω κλάσματα, ἰσάλληλα ὄντα, ἔχυσι τὸν αὐτὸν παρονομαςὴν 9, ἀνάγκη πᾶσα ϗ τὺς ἀριθμητὰς αὐτῶν ἰσῦσθαι ἀλλήλοις· ἔςαι ἄρα $8\alpha+\chi=16\alpha+\chi-\rho$· μεταθέσει δὲ ϗ ἀναγωγῇ· $\rho=8\alpha$.

Ἀντικαταςάσεις δὲ ἀντὶ ρ τῆς προτέρας δυνάμεως $\frac{8\alpha+\chi}{9}$, γενήσεται $\frac{8\alpha+\chi}{9}=8\alpha$· ἄρα $8\alpha+\chi=72\alpha$, ϗ (416) $\chi=72\alpha-8\alpha=64\alpha=64000$ ἀργυρίοις, ἃ ἦν ἡ σύμπασα πατρῴα τῶν υἱέων κληρονομία.

Ἐπεὶ δὲ ἡ τῦ πρωτοτόκυ μερὶς ἰσῦται ταῖς ἑκάςῃ τῶν λοιπῶν, τίθεται δὲ ἐν τῷ προβλήματι ἴση 1000 σὺν τῷ ἐννάτῳ μέρει τῦ 64000 — 1000, εἴτ' ὖν τῦ 63000, ἔςαι ἄρα ἑκάςη μερὶς 8000· διαιρεθέντος τοίνυν τῦ 64000 διὰ 8000, πορισθήσεται ὁ τῶν υἱέων ἀριθμός· εἰσὶν ἄρα υἱεῖς ὀκτώ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀτενῶς ἐπιςήσαντες τῷδε τῷ προβλήματι, γνωσόμεθα ἠ μυρίων ἄλλων ὁμοίων τὴν γένεσιν· ἐὰν γὰρ τεθῇ ὁ μὲν τὰς ἑκατοντάδας, ἢ χιλιάδας, τῶν ἀργυρίων ἐμφαίνων ἀριθμὸς ὁ τετράγωνος εἶναι ἀπὸ τȣ̃ τῶν τέκνων ἀριθμȣ̃, τὸ δὲ πηλίκον μέρος τȣ̃ καταλοίπȣ, ὃ ἐςιν ἐπιπροςεθειμένον ἑκάςῳ, ἔχῃ παρονομαςὴν τὸν ἀριθμὸν τῶν τέκνων σὺν μονάδι, χηματισθήσεται ἅπαν πρόβλημα. Πατήρ τις, φέρ' εἰπεῖν, ἔχει τέκνα ἕξ· ȣ̓κȣ̃ν τεθήτω ἀργύρια 36000· τεθήτω δὲ τὸ δοθὲν τῷ πρώτῳ μέρος 1000 σὺν τῷ ἑπτημορίῳ τῆς παρὰ ταῦτα περιȣσίας, ἠ ἑξῆς, ὡς ἠ ἀνωτέρω· ἠ δὴ τὰ ἓξ τέκνα κομιȣ̃νται μερίδας ἴσας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι'. Δυοῖν σωμάτων τὴν αὐτὴν τρεχόντων ὁδὸν, τȣ̃ δευτέρȣ ταχυτέρȣ ὄντος· τȣ̃ ἀποςήματος, ᾧ ἀλλήλων ἀπέχȣσι, γνωσθέντος, ἠ τȣ̃ λόγȣ τῆς αὐτῶν ταχυτῆτος, ὁρίσαι τὸν τόπον, ȣ̓ τὸ δεύτερον ἀπαντήσει τῷ πρώτῳ.

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω α τὸ ἐγνωσμένον ἀπόςημα, ὃ ἀπέχȣσι τὰ σώματα· χ δὲ τὸ διάςημα, ὃ διέδραμε τὸ πρῶτον σῶμα πρὶν ἀπαντηθῆναι, ἠ ν ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων, εἴτ' ȣ̓̃ν ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐμφαίνων ποσαπλῇ τῆς τȣ̃ πρώτȣ ταχύτητι τρέχει τὸ δεύτερον.

Σαφὲς ȣ̓̃ν ὅτι τὸ δεύτερον σῶμα, ἵν' ἀπαντήσῃ τῷ πρώτῳ, ὀφείλει διελθεῖν τὸ ἀπόςημα α, ᾧ ἀλλήλων ἀφίςανται σὺν τῷ διαςήματι χ, ὃ ὥδευσε τὸ πρῶτον πρὶν ἀπαντηθῆναι· τὸ ἄρα διάςημα, ὃ ὁδεύσει τὸ δεύτερον σῶμα ἕς τ' ἂν ἀπαντήσῃ τῷ πρώτῳ, ἔςαι $\alpha + \chi$.

Ἀλλ' ἔτι τὸ διάςημα $\alpha + \chi$, ὃ διώδευσε τὸ δεύτερον σῶμα, ἔςιν ἴσον τῷ χ διαςήματι τῷ διοδευθέντι ὑπὸ τȣ̃ πρώτȣ τοσάκις, ὁσάκις πλείονι τῆς τȣ̃ πρώτȣ διαδραμεῖται ταχυτῆτι τὸ δεύτερον· ἔςιν ἄρα ἴσον τῷ χ πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ ν, εἴτ' ȣ̓̃ν $\chi \times \nu = \chi\nu$· ἐκ τȣ́των ȣ̓̃ν ἡ ἐξίσωσις $\alpha +$

$\chi = \nu\chi$, ἔκθεσις τῆς γενικῆς τȣ͂ ἀνὰ χεῖρας προβλήματος θέσεως ὑπὲρ παντὸς τȣ́τῳ ὁμοφυȣ͂ς προβλήματος.

Μεταθέσει, $\alpha = \nu\chi - \chi$· ἵνα δὲ μόνη γένηται ἡ χ ἐπὶ θατέρȣ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, ζητητέον, δι ἧς ἂν ποσότητος πολλαπλασιασθεῖσα ἡ χ ἀποδοίη $\nu\chi - \chi$· εὑρίσκεται δὲ (51 κτ.) $\nu - 1$· ἐπ' αὐτὴν γὰρ πολλαπλασιασθεῖσα ἡ χ ἀποτελεῖ $\nu\chi - \chi$· διαιρεθεῖσα ȣ͂ν ἡ ἐν χερσὶν ἐξίσωσις διὰ $\nu - 1$, ἀποδώσει $\chi = \dfrac{\alpha}{\nu - 1}$· λέλυται ἄρα ἐν γένει τὸ πρόβλημα.

Ἐκ δὲ δὴ τȣ́τȣ τȣ͂ γενικȣ͂ τύπȣ $\chi = \dfrac{\alpha}{\nu - 1}$, πάντα τὰ μερικὰ προβλήματα, τὰ τῆς αὐτῆς τῷ προλαβόντι γενικῷ φύσεως, ἐπιλυθήσονται· ἐφαρμοσόμεθα τοίνυν τȣτὶ τρισὶ τοῖς, ἑπομένοις προβλήμασι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΑʹ. Βασιλέως τινὸς πορευομένȣ εἴς τινα πόλιν, γραμματοφόρος, ἀφιςάμενος τȣ͂ χώρȣ, ἔνθα ὑπῆρχεν ὁ βασιλεὺς, τρισὶ λεύγαις, βαδίζων μέντοι ταχυτῆτι τριπλῇ τῆς τȣ͂ βασιλέως, φθάσας ἐνεχείρισεν αὐτῷ ἐπιςολήν· ὁρίσαι τὸν τόπον, ȣ͂ συνήντησε τῷ βασιλεῖ.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπὶ τȣ͂ γενικȣ͂ τύπȣ, τὸ μὲν ἀπόςημα $\alpha = 3$, ὁ δὲ λόγος $\nu = 3$, ἡ δ' ἐξίσωσις ἔςαι $\chi = \dfrac{3}{3 - 1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$· τὸ ἄρα διάςημα, ὃ βαδιεῖται ὁ βασιλεὺς πρὶν συναντηθῇ, ἔςαι λεύγη μία μεθ' ἡμισείας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΒʹ. Τιθεμένȣ τȣ͂ μὲν ὡροδείκτȣ ἐπί τινος δεδομένȣ λεπτȣ͂, τȣ͂ δὲ λεπτοδείκτȣ ἐφ' ἑτέρȣ κ, τȣ́τȣ δεδομένȣ, ὁρίσαι τὸν χῶρον, ἔνθα συναντήσει ὁ λεπτοδείκτης τῷ ὡροδείκτῃ.

ΛΥΣΙΣ. Τῦ λεπτοδείκτυ ταχυτῆτι δωδεκαπλῆ τῆς τῦ ὡροδείκτυ βαδίζοντος, ἔςαι ἐπὶ τῦ γενικῦ τύπυ $\nu = 12$· ἄρα $\chi = \frac{\alpha}{11}$

Οὐκῦν τιθεμένυ, φέρε, τῦ μὲν ὡροδείκτυ ἐπὶ τῶν 11 ὡρῶν, τῦ δὲ λεπτοδείκτυ ἐπὶ τῶν 12, τὸ ἀπ' ἀλλήλων ἀπόςημα ἔςαι $\alpha = 11$, εἴτ' ὗν ἕνδεκα κατατομαὶ, ἃς ὁ λεπτοδείκτης ὀφείλει βαδίσαι ἕς τ' ἂν γένηται ἔνθα νυνὶ κεῖται ὁ ὡροδείκτης· ὀκῦν ἔςαι $\chi = \frac{\alpha}{11} = \frac{11}{11} = 1$, ὅ ἐςιν, ὁ ὡροδείκτης πρὶν συναντηθῆναι τῷ λεπτοδείκτῃ διανύσει ὥραν μίαν· συναντήσυσιν ἄρα ἀλλήλοις κατὰ τὴν μεσημβρίαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΓ'. Σωμάτων δύω, τὴν ἐναντίαν ἀλλήλοις πορευομένων, γινωσκομένυ τῦ ἀπ' ἀλλήλων ἀποςήματος α, ϗ τῦ τῶν ταχυτήτων λόγυ ν, ὁρίσαι τὸν τόπον, ἔνθ' ἂν ἀλλήλοις συναντήσειαν.

ΛΥΣΙΣ. Κληθέντος χ τοῦ δρόμυ, ὃν διήνυσε τὸ ἡττοταχὲς σῶμα, ὁ, ὃν ἐβάδισε τὸ μειζοταχὲς, ἔςαι χ εἰλημμένον τοσάκις, ὁσαπλῆ ἐςιν αὐτῦ ἡ ταχύτης τῆς θατέρυ, εἴτ' ὗν $\chi\nu$· ἀλλὰ ταῦτα τὰ δύω σώματα βαδιῦνται ἅμα τὸ διάςημα α, ᾧ ἀπέχυσιν ἀλλήλων, ἕς τ' ἂν συναντηθῶσιν· ὀκῦν ἔςαι $\chi + \nu\chi = \alpha$· ὀκῦν $\chi = \frac{\alpha}{\nu+1} = \mathrm{P}$ (51), ἐξίσωσις γενικὴ ξυντελῦσα μερικωτέροις προβλήμασιν αὐτῷ ὁμοφυέσιν, οἷον τὸ ἐφεξῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΔ'. Εὐθύφρων ϗ Φίλιππος κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον πορεύονται, ὁ μὲν ἐκ Λαρίσσης εἰς Θεσσαλονίκην, ὁ δὲ Φίλιππος Θεσσαλονίκηθεν εἰς Λάρισσαν· ϗ ὁ μὲν

Εὐθύφρων ταχυτῆτι διπλῆ περιπατεῖ ἢ ὁ Φίλιππος· ἀπέχουσι δ' αἱ πόλεις ἀλλήλων ὥρας 60· ὁρίσαι τὸν τόπον, ἔνθα συναντηθήσονται.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπὶ τῆς P ἐξισώσεως ἐστιν $\alpha = 60$, καὶ $\nu = 2$, ἡ δ' ἐξίσωσις αὐτὴ γίνεται $\chi = \frac{60}{2+1} = \frac{60}{3} = 20$· ἄρα μετὰ παρέλευσιν 20 ὡρῶν συναντήσονται ἀλλήλοις οἱ ὁδοιπόροι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Προβλήματα τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἐκ πλειόνων ἐξισώσεων συγκροτούμενα.

435. Α'. Μιᾶς παρούσης ἀγνώστου ποσότητος, εἰς ἔκθεσιν τῶν θέσεων, καὶ μὴν καὶ λύσιν τοῦ προβλήματος, μιᾶς μόνης ἐξισώσεως χρεία.

Β'. Συχνάκις συμβαίνει, ὡς παρατηρεῖν ἔξεστιν ἐν τοῖς πλείοσι τῶν προεκτεθέντων προβλημάτων, τὴν τοῦ προβλήματος ἔκφρασιν πλειόνων δοκεῖν ἀγνώστων περιεκτικήν, καίτοι πράγματι μιᾶς καὶ μόνης περιεχομένης· γνωσθείσης γὰρ ἅπαξ τῆς κατὰ μίαν ποσότητα δυνάμεως αἱ τῶν λοιπῶν αὐτίκα κατάδηλοι γίνονται.

Ἐπὶ τοῦ πρώτου, φέρε, προβλήματος (412) οὐχ ὅπως ἡ τοῦ πρώτου ἀγροῦ ἠγνοεῖτο τιμή, ἀλλὰ δὴ καὶ αἱ τῶν ἄλλων· ἐκείνης μέντοι γνωσθείσης, αἱ ἄλλαι αὐτόματοι ἠκολούθησαν. ἔστι μέντοι ἐν τούτοις καὶ δυσὶ χρήσασθαι ἀγνώστοις.

436. Ὁ δὲ ὑπὲρ πάντας ἀπαραίτητος κανὼν ἐστιν, ἵν' εὖ ἐκτεθῇ ἡ θέσις, ἢ αἱ θέσεις τοῦ προβλήματος, ἕ-

τοι διὰ μιᾶς, ἢ ϗ διὰ πλειόνων συνεςῶτος ἐξισώσεων· διάφοροι δὲ ὁδοὶ, καίτοι ἐπιτομώτεραι, ἢ ἐπιμηκέςεραι, ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἀγαγεῖν τέλος δύνανται· ὅθεν οἱ Μαθηματικοὶ οὐκ ἀεὶ μιᾷ, ἀλλὰ ϗ πλείοσιν ἐξισώσεσιν, ἐπιλύουσι τὰ προβλήματα.

437. Ὅταν μὲν αἱ προβληματικαὶ θέσεις ἰσάριθμοι ὦσι τοῖς ἀγνώςοις ποσοῖς, τὸ πρόβλημα καλεῖται ὡρισμένον, ὡς ἑκάςης ἀγνώςου μίαν μονίμην τε ϗ ὡρισμένην ἐπιδεχομένης δύναμιν· Τὸ δὲ τοιοῦτο πρόβλημα καθ' ἕνα μόνον τρόπον ἐπιλύεται.

438. Ὅταν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώςων ὑπέρκειται τοῦ τῶν θέσεων, ὡς ἑκάςης ἀγνώςου πολλὰς ὑπερχομένης δυνάμεις, τὸ πρόβλημα ἔςαι ἀόριςον, ϗ πλειόνων ἐπιλύσεων ἐπιδεκτικόν. Ἐὰν, φέρε, προτεθῇ, τίς ἂν εἴη ὁ ἀριθμὸς, ὃς ἐπὶ τρία πολλαπλασιασθεὶς ἀποτελοίη 15; τὸ πρόβλημα ἔςαι ὡρισμένον· εἴγε $3\chi = 15$, ϗ $\chi = \frac{15}{3} = 5$, ἡ μόνη τοῦ χ δύναμις, ὁ μόνος δυνάμενος ἀριθμὸς ἐπιλύσασθαι τὸ πρόβλημα· εἰ δὲ προβληθεῖεν ἀριθμοὶ δύω χ, υ, ὧν τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖ 15, ἡ ἐξίσωσις $\chi + \upsilon = 15$ μυριαχῶς ἂν ἐπιλυθείη· γινομένης γὰρ $\chi = 15 - \upsilon$, παντοίας ἂν ἐπ' ἄπειρον ὑπέλθοι δυνάμεις ὁλοχερεῖς τε ϗ κλασματώδεις, καὶ μὴν ϗ ὑπαρκτικὰς ϗ λειπτικὰς ἡ υ. ἐὰν μὲν γὰρ ὑποτεθῇ $\upsilon = 14\frac{1}{2}$, ἔςαι $\chi = \frac{1}{2}$, ἐὰν δ' $\upsilon = 13$, $\chi = 2$ κτ. ἀλλὰ δὴ οὐχ ἧττον ἐπιλυθήσεται τὸ πρόβλημα, ἐὰν ὑποτεθῇ $\upsilon = 15$, ϗ $\chi = 0$, $\upsilon = 16$, ϗ $\chi = -1$, ϗ ὡσαύτως ἐπ' ἄπειρον· ἀεὶ γὰρ ἐξέςαι εἰπεῖν, ὅτι $\chi + \upsilon = 15$· ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν ἀορίςων προβλημάτων ὕςερον, περὶ δὲ τῶν ὡρισμένων ϗ δὴ ῥητέον.

439. Οἱ ἐπὶ τῶν ἐκ μιᾶς ἐξισώσεως συνεςώτων

προβλημάτων κανόνες τηρητέοι οἱ αὐτοὶ κἀπὶ τῶν ἐκ πλειόνων· τουτοισὶ μέντοι προσδεῖ καὶ εἰδικωτέρου τινὸς κανόνος.

440. Λαβὼν ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τὴν δύναμιν τῆς ἑτέρας τῶν ἀγνώστων, ὡς εἰ καὶ ἐλέλυτο τὸ πρόβλημα τῇ ἐπὶ θάτερα τῆς ἐξισώσεως μονώσει τῆς ἀγνώστου (416 κτ.), ἀντικαθίσαθι ταύτην ἐπὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἀντ' αὐτῆς ταύτης τῆς ἀγνώστου· Τῆς δευτέρας ἐξισώσεως μίαν ἤδη ἄγνωστον περιεχούσης, ἐπίλυσον ταύτην κατὰ τοὺς ἄρτι ἀποδεδομένους κανόνας· μετὰ τοῦτο δὲ, ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως τὴν δύναμιν τῆς ἐν αὐτῇ ἀγνώστου ἐν ἐγνωσμένοις ποσοῖς θηρασάμενος, ἀντικαθίσαθι ἐν τῇ πρώτῃ, ἣν ἐπιλύσας ἕξεις ἐν ἐγνωσμένοις ποσοῖς τὴν δύναμιν τῆς πρώτης ἀγνώστου· ἡ δὲ πρᾶξις καλείσθω Ἀντικατάστασις.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Κείσθων ἐξισώσεις δύω· ποίησον οὖν μόνην τὴν χ ἐπὶ τῆς Α ἐξισώσεως $\chi=\beta-\upsilon-\alpha$· ἀντὶ οὖν χ ἀντικατάστησον ἐν τῇ Β τὴν δύναμιν $\beta-\upsilon-\alpha$, καὶ δὴ ἔσται $\beta-\upsilon-\alpha-2\upsilon=\gamma$, καὶ ἀναγωγῇ $\beta-3\upsilon-\alpha=\gamma$· ἐν ταύτῃ τοίνυν τῇ ἐξισώσει μιᾶς παρούσης ἀγνώστου τῆς υ, ἡ κατ' αὐτὴν δύναμις εὐχερῶς θυρευθήσεται· μεταθέσει γὰρ ἔσται $\beta-\alpha-\gamma=3\upsilon$, καὶ $\upsilon=\dfrac{\beta-\alpha-\gamma}{3}$.

$$\chi+\upsilon+\alpha=\beta \quad (\text{A})$$
$$\chi-2\upsilon=\gamma \quad (\text{B})$$

Ἑξῆς δὲ ἀντικατάστησον ἐν τῇ Α τὴν ἤδη εὑρημένην τῆς υ δύναμιν $\dfrac{\beta-\alpha-\gamma}{3}$ ἀντὶ τῆς υ· καὶ δὴ ἔσται ἡ Α ἐξίσωσις $\chi+\dfrac{\beta-\alpha-\gamma}{3}+\alpha=\beta$.

Ἐπεὶ δ' ἐν ταύτῃ μόνῃ ἔνεςιν ἄγνωςος ἡ χ, ῥᾷςα ἐπιλυθήσεται ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ τὸ ἐν γνωςοῖς εὑρεθῆναι τὴν τῆς χ δύναμιν· ϗ γὰρ ἀπαλλαγῇ μὲν τοῦ κλάσματος ἔςαι $3\chi+\beta-\alpha-\gamma+3\alpha=3\beta$, μεταθέσει δὲ, $3\chi=3\beta-\beta+\alpha+\gamma-3\alpha$, ἀναγωγῇ δὲ, $3\chi=2\beta-2\alpha+\gamma$· διαιρέσει δὲ τέως, $\chi=\frac{2\beta-2\alpha+\gamma}{3}$.

ἐπεὶ δ' ἐκ ταύτης καὶ τῆς υ ἡ δύναμις ῥᾷςα εὑρίσκεται, τὸ πρόβλημα ἄρα ὁλοσχερῶς λέλυται.

441. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος δύω ποσῶν, ϗ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς, εὑρεῖν ἑκάτερον.

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω πρὸς τὸ δοκοῦν τὸ μὲν ἔλαττον χ, τὸ δὲ μεῖζον τῶν ποσῶν υ, ϗ τὸ μὲν ἄθροισμα α, ἡ δὲ διαφορὰ β.

Ὥσπερ οὖν δύω ἄγνωςοι ποσότητες πάρεισι τῷ προβλήματι τῷδε, ἤτε χ ϗ υ· οὕτω δὴ ϗ θέσεις δύω· ϗ ἡ μὲν πρώτη τίθησιν, ὅτι αἱ δύω υ ϗ χ ἅμα ληφθεῖσαι ἀποτελοῦσιν ἐγνωσμένον ἄθροισμα τὸ α, ἐξ ἧς ἀναφύει ἡ ἐξίσωσις $\chi+\upsilon=\alpha$· ἡ δ' ὡς ἡ ὑπεροχὴ, ᾗ ἡ μείζων υ ὑπερέχει τῆς ἐλάττονος χ, ἔςιν ἐγνωσμένη, ϗ ἴση τῇ β. ὅθεν προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $\upsilon-\chi=\beta$.

Συςαθεισῶν οὖν τῶν ἐξισώσεων οὕτω, παρὰ τοὺς γενικοὺς κανόνας (388, 389) χρηςέον ἐνταῦθα ἰδίως ϗ τῇ ἀντικαταςάσει, ἥτις ξυντελεῖ τῇ ἐπιλύσει τῶν ἐκ δύω ἐξισώσεων συνεςηκότων προβλημάτων (441).

Α΄. Ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως θηρευτέον τὴν τῆς χ δύναμιν οὕτω $\chi=\alpha-\upsilon$.

Β΄. Ἀντὶ χ ἐπὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἀντικαταςατέον τὴν ἤδη εὑρημένην αὐτῆς δύναμιν $\alpha-\upsilon$· ἔςαι τοίγων $υ - α + υ = β$· μεταθέσει δὲ ϗ ἀναγωγῇ, $2υ = β + α$· ἄρα $υ = \frac{β+α}{2}$.

Γʹ. Ἀντικαταςατέον ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἀντὶ υ τὴν ἐν γνωςοῖς δύναμιν αὐτῆς $\frac{β+α}{2}$. γενήσεται τοιγαρῦν $χ + \frac{β+α}{2} = α$· ἀπαλλαγῇ τῦ κλάσματος $2χ + β + α = 2α$, μεταθέσει δὲ ϗ ἀναγωγῇ, $2χ = α - β$. ἄρα $χ = \frac{α-β}{2}$.

442. Ἔκφρασις "γινωσκομένυ τοῦ ἀθροίσματος „δύω ποσῶν, ϗ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς, ἡ μὲν μείζων δια„τυπωθήσεται τῷ $\frac{α+β}{2}$, εἴτ' ὖν ἴση ἔςαι τῷ αὐτῶν „ἡμιαθροίσματι σὺν τῇ ἡμιδιαφορᾷ, ἡ δ' ἐλάττων τῷ „$\frac{α-β}{2}$, ὅ ἐςιν, ἴση ἔςαι τῷ ἡμιαθροίσματι πλὴν τῆς „ἡμιδιαφορᾶς".

Ἐκ ταύτης τῆς γενικῆς ἐκφράσεως ἀπαρυόμεθα τὴν τῶν δύω ἑξῆς προβλημάτων, ναὶ μὴν ϗ ἄλλων τύτοις ὁμοφυῶν, ἐπίλυσιν· ὐ μὴν ἀλλὰ τὰ μέγιςα ἡμῖν ἐν τοῖς ἐφεξῆ ξυντελέσει, θεμέθλυ δίκην ϗ βάσεως ὑποτιθεμένη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Βʹ. Πέτρος ϗ Ἰωάννης συνάμα ἐκέρδησαν ἀργύρια 66000· ἀλλ' ὁ Πέτρος πλεῖον τῦ Ἰωάννυ ἀργυρίοις 400· πόσον ἆρ' ἔςι τὸ ἑκάςυ κέρδος.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς γενικῆς ἐκφράσεως ὁ μὲν Πέτρος ἐκέρδησε τὸ ἥμισυ τῶν 66000 σὺν τῷ ἡμίσει τῶν 400, εἴτ' ὖν 33200, ὁ δὲ Ἰωάννης τὸ ἥμισυ τῶν 66000 πλὴν τῦ ἡμίσεως τῶν 400, εἴτ' ὖν 32800· τὸ δὲ ἄθροισμα τύτων ἀκριβῶς ἐςὶ 66000.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Στρατηγοὶ δύω συνάμα ἄγουσι ςρατιώτας 120000· ἀλλὰ τῦ μὲν ὁ ἀριθμὸς τῶν ςρατιωτῶν ὑπερέχει τῦ θατέρυ τῷ 10000· πόσυς ἄρ' ἄγει ἑκάτερος;

ΛΥΣΙΣ. Ο' μὲν τὸ ἥμισυ τῶν 120000 σὺν τῷ ἡμίσει τῶν 10000, εἴτ' ὖν 65000, ὁ δὲ τὸ ἥμισυ τῶν 120000 πλὴν τῦ ἡμίσεως τῶν 10000, εἴτ' ὖν 55000.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ προεκτεθὲν γενικὸν πρόβλημα, ταὐτὸν δὲ ῥητέον καὶ περὶ τῶν εἰδικωτέρων αὐτῷ ὁμοφυῶν, δύναται ἐπιλυθῆναι καὶ διὰ μιᾶς ἐξισώσεως ὕτω (436).

Τῆς ἐλάττονος τῶν δύω ποσοτήτων χ ἰσοδυναμύσης τῇ μείζονι πλὴν τῆς διαφορᾶς β, δυνατὸν ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi + \upsilon = \alpha$ ἀντικαταςῆσαι $\upsilon - \beta$ ἀντὶ χ καὶ τὴν ἐξίσωσιν τρέψαι ἐπὶ $\upsilon - \beta + \upsilon = \alpha$, ἀναγωγῇ δὲ καὶ μεταθέσει $2\upsilon = \alpha + \beta$· ἄρα $\upsilon = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$.

443 ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Πατήρ τις πενταπλασίας ἦγεν ἐνιαυτὺς τῦ υἱῦ αὐτῦ, ὃς οἱ παραμυθύμενος ἔλεγε· μετὰ δεκαετίαν, φίλε πάτερ, οἱ σοὶ ἔσονται τῶν ἐμῶν τριπλάσιοι· πόσους οὖν ἦγεν ὁ Πατὴρ, πόσους δὲ ὁ υἱός;

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω χ ἡ τῦ πατρὸς ἡλικία, υ δὲ ἡ τῦ υἱῦ, καὶ $10 = \alpha$· εἰσὶ δὲ τῷ προβλήματι θέσεις δύω (488), ὧν ἡ μὲν τίθησιν ὡς ἡ τῦ πατρὸς ἡλικία χ ἰσῦται τῇ πενταπλῇ τῦ υἱῦ ἡλικίᾳ υ· ἐκῦν $\chi = 5\upsilon$· ἡ δὲ δευτέρα, ὅτι ὅταν ἡ τῦ πατρὸς ἡλικία χ αὐξηθῇ 10 ἔτεσιν, ἤτοι τῷ α, ἔςαι τριπλῆ τῆς τῦ υἱῦ ἡλικίας υ αὐξηθείσης καὶ αὐτῆς τῷ α· ἐντεῦθεν ἄρα $\chi + \alpha = 3\upsilon + 3\alpha$.

444. ΣΧΟΛΙΟΝ. Φαίνεται μὲν ὡς ἄρα ἐν τῷ δευ-

τέρῳ μέλει ἔδει γραφῆναι $3\psi + \alpha$, ἀλλ' ὁ $3\psi + 3\alpha$· ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ πατρὸς ἡλικία ἐν δέκα ἔτεσι τριπλασιασθήσεται τῆς τοῦ υἱοῦ ἡλικίας, προσλαβούσης καὶ τὸ δέκατον ἔτος, εἴτ' οὖν γενομένης $\psi + \alpha$· ἄρα τρὶς $\psi + \alpha$ ἀποτελεῖ $3\psi + 3\alpha$.

Ἀντικαταστάσει οὖν ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει ἀντὶ χ τοῦ 5ψ, ἔσται $5\psi + \alpha = 3\psi + 3\alpha$· μεταθέσει δέ, $5\psi - 3\psi = 3\alpha - \alpha$, ἀναγωγῇ δέ, $2\psi = 2\alpha$, διαιρέσει δὲ διὰ 2, $\psi = \alpha$· ἄρα ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ, ἣν ἄγει νυνί, ἐστὶν ἐνιαυτῶν δέκα.

Ἀντικαταστήτω δὲ ἀντὶ ψ ὁ 10 ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει· καὶ δὴ ἔσται $5 \times 10 = \chi = 50$· ἄρα ὁ πατὴρ νυνὶ σταδιεύει τὸ πεντηκοστὸν ἔτος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Ἐὰν μοὶ δῷς, ποιμήν τις πρὸς ἕτερον ἔφη ποιμένα, τὰ πεντήκοντα τῶν σῶν προβάτων, ἴσα ἑκάτεροι ποιμανοῦμεν· ἐὰν δέ σοι παράσχω τοσαῦτα τῶν ἐμαυτοῦ, τριπλάσια σὺ τῶν ἐμῶν ἕξεις οἴων· πόσ' ἄρ ἑκάτερος ἐποίμαινε;

ΛΥΣΙΣ. Κληθήτω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν τοῦ πρώτου προβάτων· ψ δὲ ὁ τῶν τοῦ δευτέρου καὶ $50 = \alpha$.

Ἡ μὲν πρώτη θέσις βούλεται, ὡς ὁ ἀριθμὸς χ τῶν τοῦ πρώτου ποιμένος προβάτων αὐξηθεὶς 50, ἤτοι τῷ α, ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν τοῦ δευτέρου ψ μειωθέντι τῇ αὐτῇ ποσότητι α· οὐκοῦν ἔσται $\chi + \alpha = \psi - \alpha$.

Ἡ δὲ δευτέρα, ὅτι ὁ ψ ἀριθμὸς τῶν τοῦ δευτέρου προβάτων, αὐξηθεὶς τῷ α, τριπλάσιος ἔσται τοῦ ἀριθμοῦ χ τῶν τοῦ πρώτου, μειωθέντος τῷ αὐτῷ α· οὐκοῦν $\psi + \alpha = 3\chi - 3\alpha$.

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἔστι $\chi = \psi - 2\alpha$ (440) ἀντὶ οὖν χ ἀντικαταστάντος ἐν τῇ δευτέρᾳ τοῦ $\psi - 2\alpha$, ἔσται $\psi + \alpha = 3\psi - 6\alpha - 3\alpha$· μεταθέσει δὲ καὶ ἀναγωγῇ,

$2y = 10\alpha$ · ἄρα $y = \frac{10\alpha}{2} = 5\alpha = 5 \times 50 = 250$ ·

ἄρα ὁ ἀριθμὸς y τῶν τοῦ δευτέρου ποιμένος προβάτων ἦν 250· ἐν δὲ τῇ πρώτῃ ἐξισώσει ἀντικαταστάντος τοῦ 250 ἀντὶ y, γενήσεται $\chi + \alpha = 250 - \alpha$ · ἄρα $\chi = 250 - 2\alpha = 250 - 100 = 150$ · ταῦτα εἶχεν ἄρα ὁ πρῶτος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ΄. Στρατηγός, ὡρισμένον τινὰ ἀριθμὸν στρατιωτῶν συναγαγεῖν βουλόμενος, ὑπέσχετο τελέσειν ἑκάστῳ ὀβολοὺς 4· ἀλλ' ἐνδέον αὐτῷ ὀβολῶν πρὸς τοῦτο 8, ὑπέσχετο 3· καὶ δὴ ἐκ ταύτης τῆς συνθήκης ἐπλεόνασαν αὐτῷ ὀβολοὶ 4· πόσους οὖν εἶχεν ὁ στρατηγὸς ὀβολούς, καὶ πόσους συνηγάγετο στρατιώτας;

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω χ ὁ τῶν ὀβολῶν ἀριθμός, καὶ y ὁ τῶν στρατιωτῶν, καὶ $8 = \alpha$, καὶ $4 = \beta$.

Τίθεται οὖν α. ὡς ὁ χ τῶν ὀβολῶν ἀριθμὸς αὐξηθεὶς τῷ 8, εἴτ' οὖν τῷ α, ἰσοῦται τῷ τετραπλῷ ἀριθμῷ στρατιωτῶν· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις $\chi + \alpha = 4y$.

Δεύτερον ὅτι ὁ χ μειωθεὶς τῷ $4 = \beta$ ἰσοῦται τῷ τριπλῷ y ἀριθμῷ τῶν στρατιωτῶν· οὐκοῦν $\chi - \beta = 3y$.

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐστὶ $\chi = 4y - \alpha$ · ἀντικαταστάσει τοίνυν γενήσεται ἡ δευτέρα $4y - \alpha - \beta = 3y$ · μεταθέσει, $4y - 3y = \alpha + \beta = 12$ · ἐντεῦθεν ἀντικατάσει ἐπὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρεθήσεται $\chi = 40$.

445. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Διὰ δυεῖν ἐξισώσεων τὰ προβλήματα ἐπιλύεται καὶ οὕτως.

Λάμβανε τὴν δύναμιν τῆς αὐτῆς ἀγνώστου ποσότητος, φέρ' εἰπεῖν, τῆς χ, ἐν ἑκατέρᾳ τῶν δύο ἐξισώσεων, ποιῶν αὐτὴν μόνην· διὰ δὲ τῶν δύο τῆς χ δυνάμεων ποίει ἐξίσωσιν μόνης τῆς y περιεκτικήν, ἣν ἐπιλύσας γνώσῃ τὴν τῆς ψ δύναμιν. ἀντὶ δὲ ψ τιθεὶς ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει τὴν ἐγνωσμένην αὐτῆς δύναμιν, ϗ ἐπιλύσας αὐτήν, θηρεύσῃ ἤδη ϗ τὴν τῆς χ πραγματικὴν δύναμιν.

Ἐπὶ τȣ̃ τετάρτȣ φέρ᾽ εἰπεῖν προβλήματος (443) ἔνθα εἰσὶν ἐξισώσεις δύω $\chi=5\psi$, ϗ $\chi+\alpha=3\psi+3\alpha$, ἐν τῇ πρώτῃ μὲν ἡ δύναμις τῆς χ ἐςὶ 5ψ, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ, $\chi=3\psi+3\alpha-\alpha=3\psi+2\alpha$· ἐκ τȣ́των ȣ̃ν τῶν δύω τῆς χ δυνάμεων προκύπτει ἐξίσωσις $5\psi=3\psi+2\alpha$, ἔνθα μεταθέσει ϗ ἀναγωγῇ ϗ διαιρέσει $\psi=10$. ἧς ἀντικατας αθείσης ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει εὑρίσκεται $\chi=50$

446. Καὶ ἄλλως δὲ τὰ τοιάδε ἐπιλυθήσεται προβλήματα, ἀφαιρέσει ἀμέλει μιᾶς ἐξισώσεως ἀπὸ τῆς ἑτέρας· τὸ γὰρ κατάλοιπον ἔςαι ἐξίσωσις μιᾶς μόνης ἀγνώςȣ περιεκτική.

Κείσθων γὰρ αἱ δύω προεκτεθεῖσαι ἐξισώσεις $\chi=5\psi$, ϗ $\chi+\alpha=3\psi+3\alpha$, ἀφαιρῶ τοίνυν πρὸς τὸ δοκȣ̃ν τὴν δευτέραν ἀπὸ τῆς πρώτης, ϗ δὴ λειφθήσεται $-\alpha=2\psi-3\alpha$· μεταθέσει ϗ ἀναγωγῇ, $2\alpha=2\psi$, ὅθεν $\alpha=\psi$, ὡς ϗ διὰ τῶν ἄλλων μεθόδων εὕρηται.

Κανὼν προβλημάτων ἐχόντων πλείȣς ἢ δύω ἐξισώσεις·

440. Θῶμεν ȣ̃ν πρῶτον προβλήματι τριῶν ἐξισώσεων περιεκτικὸν, ϗ δὴ ϗ τριῶν ἀγνώςων ποσοτήτων τῶν χ, ψ, ω· θηρῶμαι τοιγαρȣ̃ν τὴν δύναμιν τῆς χ ἐν τῇ πρώτῃ ἐξισώσει μόνην αὐτὴν ἀποφαίνων, ϗ ἀντικαθίςημι ταύτην ἐπὶ τῆς δευτέρας· εἰσὶν ἄρα ἐν αὐτῇ μόναι ἄγνωςοι αἱ ψ, ω. λαμβάνω δὲ ϗ ἐπὶ ταύτης τῆς καινῆς ἐξισώσεως τὴν τῆς ψ δύναμιν, περιέχȣσαν ἄγνωςον ποσὸν μόνον τὸ ω, ϗ ἀντικαθίςημι ταύτην ἐν τῇ τρί-