ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ

Περὶ Ἐξισώσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ τῶν γενικῶς ἐπὶ τῶν ἐξισώσεων θεωρȣμένων.

383. Ἐξίσωσις ἐςὶν ὁ λόγος τῆς ἰσότητος, ὃν πρὸς ἀλλήλας ἔχȣσι ποσότητες δύω, ἐκδηλέμενος διὰ τȣ̃ συμβόλȣ =· ὅτως ἡ ἔκθεσις $3 + 5 = 2 + 6$ ἐςὶν ἐξίσωσις, ἐφ᾽ ἧς ἀναγινώσκομεν: 3 σὺν 5 ἴσον τῷ 2 σὺν 6· πάντες μὲν οἱ πρὸς ἀριςερὰν τȣ̃ = συμβόλȣ κείμενοι ὅροι, συνάμα λαμβανόμενοι, καλȣ̃νται πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως· πάντες δὲ οἱ πρὸς δεξιὰν, μέλος δεύτερον· ἐπὶ ȣ̃ν τῆς παρȣ́σης ἐξισώσεως πρῶτον μὲν ὑπάρχει μέλος $3 + 5$, δεύτερον δὲ $2 + 6$.

384. Ἡ τέχνη τȣ̃ διὰ τῶν ἐξισώσεων ποικίλα προβλήματα, διὰ ποσῶν προβαλλόμενα, ἐπιλύειν καλεῖται Ἀνάλυσις, ἐπείπερ, ὡς παντὶ δῆλον ἔςαι, ἐπιλύεται τὸ πρόβλημα, ἀναλυομένης, εἴτ ȣ̃ν ἐφ᾽ ἁπλȣςέραν ἔκθεσιν ἡκȣ́σης, τῆς ζητȣμένης ποσότητος.

385. Λύσις προβλήματος ἐςὶν ἡ εὕρεσις τῆς δυνάμεως ἑνὸς ἢ πλειόνων ἀγνώςων ποσῶν· ἀλλ᾽ ȣ̓δεμία ποσότητος ἀγνώςȣ εὑρεθήσεται δύναμις, ἐὰν μὴ ἡ ἀγνω-

ςος αὕτη ἐπὶ θατέρȣ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν μεταβιβασθῇ, ἐπὶ θατέρȣ μόνων τῶν γνωςῶν ποσοτήτων κειμένων· τῷόντι γὰρ αὕτη τὸ πρὶν ἀγνοȣμένη, ἐὰν ἴση εὑρεθῇ ἐγνωσμέναις ποσότησι, γνώριμος ἀποκαταςαθήσεται· ἐὰν, φέρε, ἀγάγωμεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς τȣ̃το $\chi = 3 + 2$, ἡ δύναμις τῆς χ ἀπολύτως γνωςὴ καταςαθήσεται.

386. Δῆλον δὲ, ὡς γνῶναι τὸ ἄγνωςον ἄλλως ȣ̓ δυνησόμεθα, εἰμὴ διά τινων σχέσεων, ἃς ὑποτίθεται ἔχειν πρὸς τὰ ἐγνωσμένα· αὗται δὲ αἱ ὑποτιθέμεναι σχέσεις ὀνομάζονται θ έ σ ε ι ς, ἢ δ ι δ ό μ ε ν α τοῦ προβλήματος.

387. Εἰς παντὸς προβλήματος διὰ τῶν ἐξισώσεων ἐπίλυσιν, τριῶν τȣτωνὶ ἀναγκαίως δεήσει.

388. Α΄. Ἐξεταςέον λίαν ἐπιμελῶς τὸ ζήτημα, ἵν' ἐντεῦθεν ἐκδηλῶσαι ἔχωμεν τὰς θέσεις τȣ̃ προβλήματος, εἴτ' ȣ̓̃ν τὰς τῶν ἀγνώςων πρὸς τὰ ἐγνωσμένα σχέσεις· ἀλλ' ἐπὶ τȣ̃το ἀμήχανον ἀποδȣ̃ναι γενικόν τινα κανόνα· ἔνθεν μέντοι τὸ εὐφυὲς ϗ ἀγχίνȣν, ἔνθεν δὲ τὸ ἐμμελὲς τῆς ἐγγυμνάσεως τȣ̃ ἐπιλύοντος, ταυτὶ ἐκτελέσαι δυνήσονται.

389. Β΄. Μετὰ τȣ̃το δὲ, τὰς σχέσεις ταύτας ἐκθετέον δι' ἐξισώσεως, ὅ ἐςιν, ἐκφραςέον ταύτας διὰ συμβολικῆς, ȣ̃τως εἰπεῖν, ἑρμηνείας, παριςῶντας διὰ τῶν δεόντων ςοιχείων τάς τε ἀγνώςȣς, ϗ ἐγνωσμένας ποσότητας· διὰ δὲ πλείω σαφήνειαν τῆς ἐκθέσεως τὰς αὐτὰς ποσότητας, ἢ τὰ ὅμοια μέρη τῆς αὐτῆς ποσότητος τῷ αὐτῷ ἐκδηλωτέον γράμματι, προτιθέντας αὐτῷ, εἰ δέοι, συνεργόν τινα, ἢ παρονομαςὴν κληθείσης, φέρε, ποσότητός τινος χ, τὸ μὲν διπλȣ̃ν αὐτῆς ἐκθετέον διὰ $2\,\chi$, τὸ δέ τὸ τρίτον διὰ $\frac{\chi}{3}$ κτ.

390. Τοῦ προβλήματος οὕτως ἐξισώσει ἐμπεριληφθέντος, λείπεται ἐξῆς παντοίως ἀποπειρᾶσθαι ταύτης τῆς ἐξισώσεως, ὅ ἐστι διαφόρους ἐπ' αὐτῆς ποιεῖν μεταλλαγὰς, ἀφορώσας εἰς τὸ τῶν ἄλλων ἀπαλλαγῆναι τὴν ἄγνωστον, ὅ ἐστιν, εἰς τὸ ποιῆσαι, τὴν μὲν ἄγνωστον εἶναι ἐπὶ θατέρου τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως, ἐπὶ θατέρου δὲ τὰς ἐγνωσμένας· τοὺς δ' ἐπὶ τῆς τρίτης ταύτης πράξεως κανόνας καὶ δὴ ἀποδώσομεν.

391. Τὸ πρόβλημα *πρωτοβάθμιον* ὀνομάζεται, ὅταν ἡ ἄγνωστος χ ἐπὶ πρῶτον βαθμὸν ὑψωμένη ᾖ· *δευτεροβάθμιον* δὲ, ὅταν ὁ μείζων βαθμὸς τῶν τῆς ἀγνώστου ᾖ τετράγωνος, καὶ ἐξῆς ὡσαύτως· οὕτως $\alpha+\chi=\alpha\beta$ ἐστι πρόβλημα, ἡ ἐξίσωσις πρωτοβάθμιος, ἀλλὰ $\alpha+\chi^3-\beta\chi=\gamma$ ἐστιν ἐξίσωσις τριτοβάθμιος.

392. Τὸ πρόβλημα δύναται, ἢ μίαν ἐξίσωσιν ἔχειν, ἐὰν ᾖ μία ἡ θέσις, ἢ πλείους, ἐὰν ὦσι πλείους· ἐσθ' ὅτε μέντοι δι' ἐμμελῶν ἐπιστάσεων ἐν τοῖς ἀγνώστοις τε καὶ γνωστοῖς γινομένων, ἐπιλυθῆναι δύναται διὰ μιᾶς ἐξισώσεως, ὃ ἄλλως ἐπιλύεται διὰ πλειόνων.

Πρόβλημα λύειν εὑρίσκειν ἐστὶν, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων συνιδεῖν παντὶ ἔξεστιν, ἐν γνωστοῖς τὴν ἀγνώστου ποσοῦ δύναμιν ἢ πασῶν τῶν ἐμπεριεχομένων ἀγνώστων· *ἐξίσωσιν δ' ἐπιλύειν*, τὸ ἄγνωστον ἐστι γνῶναι, ποιοῦντας αὐτὸ μὲν μονάζειν ἐπὶ θατέρου τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, ὡς ἰσούμενον ταῖς ἐπὶ θατέρου ἐγνωσμέναις· λαβεῖν μέντοι τὴν ἀγνώστου τινὸς δύναμιν ποιεῖν ἐστιν αὐτὸ μονάζειν ἐπὶ θατέρου τῶν μελῶν, κἂν ἐγνωσμέναι ὦσιν αἱ ἐν θατέρῳ, κἂν ἄγνωστοι.

393. Ἀναμνηστέον μέντοι ἐνταῦθα τοῦ (Ἀριθ. 13, 14) ἐκτεθέντος ἀξιώματος, εἴτ' οὖν ὁ λόγος ὁ τῆς ἰσότητος οὐδεμίαν ὑπομένει τροπὴν, κἂν ἑκατέρῳ μέλει προστεθῇ,

κἂν ἀφ' ἑκατέρε τὸ αὐτὸ ποσὸν ἀφαιρεθῇ· εἴτε ἑκάτερον ἐπὶ τὸ αὐτὸ ποσὸν πολλαπλασιασθῇ, εἴτε διὰ τῦ αὐτῦ διαιρεθῇ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Ἔκθεσις τῶν ἀρχοειδῶν μεταχηματισμῶν, τῶν γενέσθαι δυναμένων ἔντε ταῖς ἐξισώσεσι κἂν ταῖς ἀναλογίαις.

394. Ἡ τῦ εὐκαίρως χρῆσθαι ποικίλοις μεταχηματισμοῖς κατὰ τὴν χρείαν τῦ προκειμένυ ἔντε ἐξισώσεσι, καὶ ἐν ἀναλογίαις, ναὶ μὴν καὶ τῦ ἀνάγειν, ἐξισώσεις μὲν εἰς ἀναλογίας, ταύτας δ' ἀνάπαλιν ἐς ἐκείνας, τέχνη, ἅπαντα, ὡς εἰπεῖν, ῥαδιυργεῖ, ὐχ ὅπως τὰ εἰς ἐπίλυσιν τῶν δυσχερεςάτων προβλημάτων, ἀλλὰ καὶ εἰς ἁπάσας μικρῦ τὰς δείξεις τῆς τε συνήθυς καὶ δὴ καὶ τῆς ὑψηλοτέρας Γεωμετρίας.

Ἔδει ἄρα ὑποβαλεῖν ταῖς τῶν πρωτοπείρων ὄψεσιν ἰδέαν τινὰ τῶνδε τῶν μεταχηματισμῶν τῶν εἰς πλείω χρῆσιν τοῖς Μαθηματικοῖς ἡκόντων, ἵν', ὡσπερεὶ τύτοις οἰκειωθέντες, ἠδύναντο εὐκαίρως χρήσασθαι αὐτοῖς ἐν ἅπαντι τῷ τῶν μαθηματικῶν ςαδίῳ, τῆς αὐτῶν ἀπονάμενοι χρήσεως· παραπέμψομεν δὲ τὸν μετιόντα εἰς τὺς χώρυς, ἔνθα προδέδεικται ἑκάςη μέθοδος· ἀλλ' ἀντὶ γὰρ γραμμάτων ἀντεισακτέον τῷ βυλομένῳ ἀριθμὺς, ἵν' ἐναργέςερον παριςᾶται ἁπάσης συμβολικῆς ἐκθέσεως ὁ νῦς.

395. ά. Ἔςω $\alpha = \beta$· ἐκῦν ά. $\alpha - \beta = 0$ (Ἀριθ. 15)· β'. $\beta - \alpha = 0$· γ'. $\alpha + \beta = 2\beta$, ἢ $\beta + \alpha$

$= 2\alpha \cdot$ δ΄. $\alpha + \nu = \beta + \nu$, ἢ $\alpha - \nu = \beta - \nu$ (393)· ἢ $\nu - \alpha = \nu - \beta$· έ. $\alpha + \nu - \nu - \beta = 0$ (Ἀριθ. 15).

396. β΄. Ἔςω $\alpha = \beta$· ἐκεῦν ά. $\alpha : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : 1$ (240), ἐντεῦθεν ἄρα $\alpha = \frac{\sqrt{\beta} \times \sqrt{\beta}}{1} = \frac{\beta}{1}$, ἢ $\sqrt{\beta} = \frac{\alpha \times 1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$ ἢ $1 = \frac{\sqrt{\beta} \times \sqrt{\beta}}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$ (252, 253).

397. γ΄. Ἔςω $\alpha^2 = \beta$· ἐκεῦν $\sqrt[2]{\beta} = \sqrt[2]{\alpha}$ (118) κ̀ ἐν γένει $\sqrt[\pi]{\alpha} = \sqrt[\pi]{\beta}$· ἄρα $\alpha : \sqrt[\pi]{\alpha} :: \sqrt[\pi]{\beta} : 1$ (240). ἢ $\sqrt[\pi]{\alpha} : 1 :: \alpha : \sqrt[\pi]{\beta}$.

398. δ΄. Ἔςω $\alpha = \beta$· ἄρα $\alpha^2 = \beta^2$ (78) κ̀ ἐν γένει $\alpha^\pi = \beta^\pi$· ἄρα $\alpha : \beta :: \beta : \alpha$ (240)· ἄρα $\alpha = \frac{\beta^2}{\alpha}$ κ̀ $\beta = \frac{\alpha^2}{\beta}$ (253)· ἐν γένει δὲ ἔςαι $\alpha^\pi : \beta^\pi :: \beta^\pi : \alpha^\pi$· ὅθεν $\alpha^\pi : \beta^\pi - \alpha^\pi :: \beta^\pi : \alpha^\pi - \beta^\pi$ κτ.

399. έ. Ἔςω $\alpha = \sqrt[2]{\beta}$· ἄρα $\alpha^2 = \beta$ (78, 118)· ἄρα $\alpha : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : \alpha$ (240) ἄρα $\alpha = \frac{\beta}{\alpha}$, κ̀ $\sqrt{\beta} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\beta}}$ (250) κ̀ ἐν γένει ἐὰν ἦ $\alpha = \sqrt[\pi]{\beta}$, ἔςαι $\alpha^\pi = \beta$.

400. ϛ΄. Ἔςω $\sqrt{\alpha} = \beta$· ἄρα ά. $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : 1$ (240)· ὅθεν $\sqrt{\alpha} = \frac{\beta}{1}$ ἢ $1 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$· β΄. $\sqrt{\alpha} = \beta$, ὅθεν $\alpha = \beta^2$· ἐκεῦν $\alpha : \beta :: \beta : 1$· ὅθεν $\alpha = \frac{\beta^2}{1}$, ἢ $\beta = \frac{\alpha}{\beta}$, ἐκ τούτων δὲ κ̀ $\alpha + \beta : \beta :: \beta + 1 : 1$ κτ. (244).

401. ζ΄. Ἔςω $\alpha = \beta$· ἄρα $2\alpha = 2\beta$· κ̀ ἐν γέ-

νει $\nu\alpha = \nu\beta$ (301)· ἄρα ά. $\nu : \beta :: \nu : \alpha$· β΄. $\nu = \frac{\beta\nu}{\alpha}$, ꙋ $\alpha = \frac{\beta\nu}{\nu}$ (250) γ΄. $\nu : \beta + \nu :: \nu : \alpha + \nu$, ἢ $\nu - \beta : \beta :: \nu - \alpha : \alpha$ κτ. (244).

402. ή. Ἔϛω $\alpha = \beta$· ὑκῦν $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$ ꙋ ἐν γένει $\frac{\alpha}{\nu} = \frac{\beta}{\nu}$ (Πόρισμ. τῦ 258), ἄρα ά. $\frac{\alpha}{\nu} : \frac{\beta}{\nu} :: \alpha : \beta$ (258)· ἄρα β΄. τεθέντος $\frac{\alpha}{\nu} = \mathrm{P}$, ꙋ $\frac{\beta}{\nu} = \varrho$, ἔϛαι $\beta = \frac{\alpha\varrho}{\mathrm{P}}$, ꙋ $\alpha = \frac{\beta\mathrm{P}}{\varrho}$ (250).

403. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπὶ τῦ ἐϛχάτυ τῦδε ὑποδείγματος παρατηρητέον, ὡς ὅταν σημειῦν δέῃ κλάσματος διὰ κλάσματος διαίρεσιν, ἢ ꙋ δὶ ὁλοχερῦς, ἐκθετέον ἕκαϛον κλάσμα δὶ ἑνὸς μόνυ γράμματος· τυτὶ δὲ ὐχ' ὅπως τὴν τῦ νέυ πηλίκυ ἔκθεσιν, ἀλλὰ ꙋ τὴν λύσιν τῦ προβλήματος ὐκ ἄν τις εἴποι ὅσον ἐξευμαρίζει.

404. ϑ΄. Ἔϛω $\nu\alpha = \beta$· ὑκῦν $\alpha = \frac{\beta}{\nu}$ (100), ἢ $\nu = \frac{\beta}{\alpha}$ ἄρα ꙋ $\alpha : \beta :: 1 : \nu$ (240) ὑκῦν $\frac{\alpha\nu}{\beta} = 1$ (250)· ἐκ τῦ $\nu\alpha = \beta$ ἀποφέρεται ꙋ $\alpha : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : \nu$ (240)· ἄρα $\alpha = \frac{\sqrt{\beta} \times \sqrt{\beta}}{\nu}$, ꙋ $\frac{\alpha\nu}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\beta}$

405. ί. Ἔϛω $\alpha = \nu\beta$· ἄρα $\nu = \frac{\alpha}{\beta}$, καὶ $\beta = \frac{\alpha}{\nu}$ (Ἀριθ. 108) ἄρα ꙋ $\nu : \sqrt{\alpha} :: \sqrt{\alpha} : \beta$· ὅθεν $\sqrt{\alpha} = \frac{\beta\nu}{\sqrt{\alpha}}$ (250).

406. ιά. Ἔςω $\alpha = \frac{\beta}{\nu}$, ἄρα $\alpha\nu = \beta$ (107)· ἄρα ϗ $\nu = \frac{\beta}{\alpha}$ (Ἀριθ. 108)· ἄρα τελευταῖον $\alpha : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\beta} : \nu$.

407. ιβ'. Ἔςω $\frac{\alpha}{\nu} = \beta$· ἄρα ά. $\alpha = \beta\nu$ (Ἀριθ. 107)· β'. $\nu = \frac{\alpha}{\beta}$ · γ'. $\beta : \sqrt{\alpha} :: \sqrt{\alpha} : \nu$.

408. ιγ'. Ἔςω $\alpha\nu = \beta\gamma$· ἄρα ά. $\alpha = \frac{\beta\gamma}{\nu}$· β'. $\nu = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$· γ'. $\beta = \frac{\alpha\nu}{\gamma}$· δ'. $\gamma = \frac{\alpha\nu}{\beta}$ (250).

409. ιδ'. Ἔςω $\alpha\nu = \beta\gamma$· ἄρα ά. $\frac{\alpha\nu}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\nu}{\gamma}$ (291) β'. $\alpha : \beta :: \gamma : \nu$· γ'. $\nu : \gamma :: \beta : \alpha$

ιέ. Ἔςω $\frac{\alpha}{\nu} = \frac{\beta}{\gamma}$· ἄρα ά. $\alpha : \nu :: \beta : \gamma$ (185)· β'. $\alpha = \frac{\beta\nu}{\gamma}$, $\gamma = \frac{\beta\nu}{\alpha}$, $\nu = \frac{\alpha\gamma}{\beta}$, ϗ $\beta = \frac{\alpha\gamma}{\nu}$ (250)· γ'. $\frac{\alpha \times \nu\gamma}{\nu} = \frac{\beta \times \nu\gamma}{\gamma}$ (393)· ἄρα $\alpha\gamma = \beta\nu$ (58).

410. ις'. Ἀναλόγως δὲ τέτοις ϗ ἄπειρα ἄλλα ἀπενέγκασθαι δυνησόμεθα· κείσθω γὰρ παραδείγματος χάριν ἡ ἀναλογία $\alpha : \beta :: \gamma : \nu$ (P), ὅθεν ἀρυόμεθα τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\nu = \beta\gamma$ (409), ἥτις ἀκριβῶς παρίςησιν ἣν ἄντις βέληται ἀναλογίαν· ἐπιτρέπεται γὰρ πάντα μὲν πρῶτον ἀναλογίας ὅρον ἐμφαίνειν διὰ α, πάντα δὲ δεύ-

τερον διὰ β· οὐκοῦν ἐκ τῆς Ρ ἀναλογίας ἀριθμοῦ μονονὲκ ἐπέκεινα ἄλλας ἐξαγαγεῖν δυνησόμεθα· καὶ γὰρ, ἵνα παρῶ τὰς ὀκτὼ διαφόρους ἐκείνας διαθέσεις (242), ἃς ὑπελθεῖν ἔξεσαι τοῖς ὅροις τοῖς δε, καὶ μὴν καὶ τὰς προσθέσει, ἢ ἀφαιρέσει, ἀνακυπτέσας (242), διαιροῦντες, ἢ πολλαπλασιάζοντες αὐτοὺς δι ἀριθμῶν διαφόρων ἐς ἄπειρον (246, 247), ἀπειραρίθμους ἀναλογίας ἀποτελέσομεν ἐν ὅροις πράγματι ἀλλήλων διενηνοχόσι· οὐ μὴν ἀλλὰ τῷδε τῷ τῶν βαθμῶν σχηματισμῷ, καὶ τῇ ἀπ' αὐτῶν ἐξαγωγῇ τῶν ῥιζῶν, ἄλλας ἀπειραρίθμους ἀναλογίας ἀποισόμεθα ἐν ὅροις δυνάμει διαφόροις ἀλλήλων· οἷαίπερ εἰσὶν αἵδε· $\alpha^2 : \beta^2 :: \gamma^2 : \nu^2$, $\alpha^3 : \beta^3 :: \gamma^3 : \nu^3$, κτ., ἢ $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} :: \sqrt{\gamma} : \sqrt{\nu}$, $\sqrt[3]{\alpha} : \sqrt[3]{\beta} :: \sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{\nu}$ κτ. (263).

411. ιζ. Οὐκ ἔσιν οὕτως ἁπλῆ ἐξίσωσις, οἷα ἡ $\alpha = \beta$, ἀφ' ἧς οὐκ ἔσιν ἀπολαβεῖν ἀναλογίαν τινὰ, καὶ ἐκ ταύτης ἀπειραρίθμους ἑτέρας· ἑκάση ἄρα τῶνδε τῶν ἀναλογιῶν ἀποδώσει καινὴν ἐξίσωσιν, εἴτ' οὖν τὴν ἔκθεσιν τῆς τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσων ἰσότητος (238)· οὐκ ἔσιν ἄρα ἁπλῆ ἐς τοσοῦτον ἐξίσωσις, ὥσε ἀπ' αὐτῆς ἀπειραρίθμους ἄλλας μὴ ἀπαρύεσθαι.

412. ιή. Τοὐναντίον δὲ, ὁσαιδηποτοῦν ἀναλογίαι, εἰς μίαν μόνην ἀναλογίαν, καὶ μὴν καὶ ἐξίσωσιν ἀναχθῆναι δυνήσονται· πολλαπλασιασμῷ γὰρ, ἢ διαιρέσει, ὅρου δι ὅρου, ἑκάσου διὰ τοῦ ἑαυτῷ ὁμοταγοῦς, τὰ τέσσαρα γινόμενα, ἢ πηλίκα, ἀποδώσουσιν ἀναλογίαν καὶ δὴ καὶ ἐξίσωσιν (262)· ἔσωσαν γὰρ αἱ τρεῖς ἀναλογίαι· πολλαπλασιάσαντες οὖν πάντας μὲν τοὺς πρώτους ὅρους ἐπ' ἀλλήλους, πάντας δὲ τοὺς δευτέρους, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως ἕξομεν

$$\alpha : \beta :: \gamma : \delta$$
$$\varepsilon : \zeta :: \vartheta : \eta$$
$$\underline{\iota : \kappa :: \mu : \nu}$$
$$\alpha\varepsilon\iota : \beta\zeta\kappa :: \gamma\vartheta\mu : \delta\eta\nu$$

μὲν μίαν μόνην ἀναλογίαν αει : βζκ : : γθμ : δην (262) ἥτις προβάλλει τὴν ἐξίσωσιν αειδην = βζκγθμ (238).

413. Ὡσαύτως δὲ ὅσας δηποτοῦν ἐξισώσεις συνάψει τῶν πρώτων ϗ δευτέρων μελῶν ἐπὶ μίαν ἀναγαγεῖν δυνησόμεθα (393)· οὕτως αἱ πέντε ἐξισώσεις αἱ ἐνταῦθα ἐκκείμεναι μίαν τὴν Ρ ἀπαρτίσουσι.

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \beta \\
\gamma &= \delta \\
\varepsilon &= \zeta \\
\vartheta &= \eta \\
\iota &= \kappa \\
\hline
\alpha+\gamma+\varepsilon+\vartheta+\iota &= \beta+\delta+\zeta+\eta+\kappa \quad (\mathrm{P}).
\end{aligned}
$$

414. Ὁπηνίκα ἄρα τὸ πρόβλημα πλείους περιέχει ἐξισώσεις, ἔξεσαι συνάψασι τοὺς τοῦ πρώτου μέλους ὅρους μεθ' ὃ τοὺς τοῦ δευτέρου, μίαν μόνην ἐξ αὐτῶν συστήσασθαι ἐξίσωσιν· ὃ δὴ ἐν οὐκ εὐαρίθμοις περιπτώσεσιν ἐξευμαρίζει τὴν τοῦ προβλήματος λύσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ πρωτοβαθμίων προβλημάτων, μιᾷ μόνῃ συνεστηκότων ἐξισώσει.

415. Μέθοδος γενική· Τὴν τῆς ἀγνώστου ποσότητος, εἴτ' οὖν ζητουμένης, χ πρὸς τὰς ἐγνωσμένας σχέσιν ἢ σχέσεις, συμβολικῶς, ταὐτὸν εἰπεῖν δι' ἐξισώσεως ἐκθέμενοι, μονήρη γενέσθαι ποιοῦμεν τὴν ἄγνωστον χ, ἐπὶ θατέρου μόνων κειμένων τῶν γνωρίμων· οὗτινος δὴ ἐν ἐπιτεύξει ἐσόμεθα μιᾷ ἢ ϗ πλείοσι τῶν ἑξῆς πράξεων.

416. Α. Ἐὰν ἡ ἄγνωστος μετὰ μιᾶς, ἢ πλειόνων γνωρίμων, ἀθροισμάτι ἐμφαίνῃ, προσθέσει, ἢ ἀφαιρέσει μονήρη αὐτὴν ἐργαζόμεθα, μετατιθέντες ἐπὶ θάτερα τῆς ἐξισώσεως πάσας τὰς γνωρίμους ποσότητας τὰς σὺν αὐτῇ μετ' ἐναντίων σημείων· ὃ καλείσθω **Μετάθεσις**.

Οὕτως ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi+4=10$, μετατίθημι τὸν $+4$ ἐπὶ τὰ δεξιὰ τοῦ $=$ σημείου, μεταλλάττων τὸ $+$ σύμβολον εἰς $-$· ἔσται οὖν $\chi=10-4$.

Ἴδε δὴ ὁ τῆς μεταθέσεως λόγος· ἐὰν γὰρ ἑκατέρωθεν τῆς ἐξισώσεως $\chi+4=10$ ἀφαιρεθῇ ἡ ποσότης $+4$, ἡ μὲν ἐξίσωσις ἔσται $\chi+4-4=10-4$, ὁ δὲ τῆς ἰσότητος λόγος ἥκιστα λυμανθήσεται (393)· ἐκεῖν γράφοντες $\chi=10-4$ οὐδὲν ἦτον ἀφαιροῦμεν ἑκατέρωθεν τῆς ἐξισώσεως τὴν $+4$ ποσότητα· εἴγε ἡ ἐξίσωσις $\chi+4-4=10-4$ ἀναγωγῇ ἀποτελεῖται $\chi=10-4$, ὡς ἤδη γέγραπται· ἐὰν δὲ ἡ ἐξίσωσις $\chi-4=10$, μετατίθημι ἐπὶ θάτερα τῆς ἐξισώσεως τὴν 4 ποσότητα, μεταβάλλων τὸ $-$ ἐπὶ $+$, ὅπερ τὴν μὲν ἐξίσωσιν ἀποτελεῖ $\chi=10+4$, τὸν δὲ λόγον τῆς ἰσότητος κατέχει ἀπήμαντον· οὐ γὰρ οὐδὲν ἄλλο ὅτι μὴ τὴν $+4$ ποσότητα ἑκατέρωθι τῆς ἐξισώσεως συνήψαμεν (393)· ἐὰν δὲ πραγματικῶς $+4$ προστεθῇ ἑκατέρῳ τῶν ἐξισώσεως $\chi-4=10$ μελῶν, γενήσεται $\chi-4+4=10+4$, ἥτις δι' ἀναγωγῆς ἀποκαθίσταται $\chi=10+4$, ὥσπερ αὐτὴν ἐγράψαμεν διὰ μεταθέσεως.

Ἐὰν ἄρα ἡ $\chi+\alpha-\beta=\gamma$ μεταθέσει δυνάμεθα μονήρη ποιῆσαι τὴν χ, γράφοντες $\chi=\gamma-\alpha+\beta$· οὕτω γὰρ τὴν μὲν ποσότητα β ἑκατέρωσε συνήψαμεν, τὴν δὲ α ἑκατέρωθεν ἀφείλομεν τῆς ἐξισώσεως.

417. Καὶ τοίνυν ἐὰν ἡ ἄγνωστος χ εὑρεθῇ ἐφ' ἑκά-

τερα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέλη, ἐπεὶ χρὴ ἐπὶ θατέρου μόνην γενέσθαι, δυνησόμεθα, μηδεμίαν τῆς ἰσότητος ὑποστάσης τροπὴν, μεταβιβάζειν τὴν ἄγνωστον, ἔνθα κέοιτ' ἂν αὕτη μετὰ συνεργοῦ μείζονος· ἐὰν γὰρ ᾖ $2\chi+\alpha=\beta+\chi$, μετατίθεμεν πρῶτον τὸ α· ὅθεν ἔσται $2\chi=\beta-\alpha+\chi$, μετατίθεμεν εἶτα δεξιόθεν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ τὸ $+\chi$· ὅθεν ἔσται $2\chi-\chi=\beta-\alpha$, καὶ ἀναγωγῇ, $\chi=\beta-\alpha$.

418. Ἐὰν δ' ἐφ' ἑκατέρου τῶν μελῶν τὸν αὐτὸν ἔχῃ συνεργὸν ἡ ἄγνωστος μετὰ συμβόλων ἀντιθέτων, μετατίθεμεν τὴν λειπτικὴν ἐπὶ τὴν ὑπάρχουσαν, ἵν' ἡ ἄγνωστος μονάσασα μείνῃ ὑπάρχουσα· οὕτως ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $2\chi=\alpha-2\chi$, μετατίθεμεν τὴν -2χ ἐπὶ θάτερα, πορίζόμενοι τὴν ἐξίσωσιν $2\chi+2\chi=\alpha$, εἶτ' οὖν $4\chi=\alpha$.

419. Ἐν γένει δὲ, ὅταν λειπτικὴ ὑπάρχῃ ἡ ἄγνωστος, ἀποτελοῦμεν αὐτὴν ὑπαρκτικὴν διὰ μεταθέσεως· ἐὰν οὖν ᾖ $\alpha+\beta=\gamma-\chi$, ποιοῦμεν $\chi+\alpha+\beta=\gamma$· ὅθεν $\chi=\gamma-\alpha-\beta$.

420. Β'. Ἐὰν ἡ ἄγνωστος μετ' ἀγνώστου γινόμενόν τι παρέχῃ, διαιρετέον ἑκάτερον τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν διὰ τῆς τὴν ἄγνωστον πολλαπλασιαζούσης ποσότητος· ἐπὶ $4\chi=\alpha$, ἵνα μόνην ποιήσωμεν τὴν χ διαιροῦμεν διὰ 4 τήν τε 4χ καὶ τὴν α, γράφοντες $\frac{4\chi}{4}=\frac{\alpha}{4}$· ἀλλὰ $\frac{4\chi}{4}=\chi$· ἡ ἄρα ἐξίσωσις φανήσεται $\chi=\frac{\alpha}{4}$ (393).

421. Ἐκ δὲ δὴ τούτου τοῦ κανόνος ἀπογεννᾶται ἐν τῇ πράξει βραχύτερος ἄλλος ὅδε. ,,Ὅταν ἡ ἄγνωστος παρι-
,,στᾷ τι γινόμενον, γραπτέον μὲν τὴν ἄγνωστον μόνην, δι-

„αἱρετέον δὲ τοὺς ἄλλους ὅρους τῆς ἐξισώσεως διὰ τῆς πο-
„σότητος τῆς τὴν ἄγνωστον πολλαπλασιαζούσης“· οὕτως ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρωθι ὑποδείγματος $4\chi=\alpha$, ἐπείπερ ἔγνωσται ὡς 4χ διαιρεθὲν διὰ 4 παρέξεται χ, γράφομεν

$$\chi=\frac{\alpha}{4}.$$

422. Ταυτὸν δὲ ἔσται, κἂν ἀντ' ἀριθμοῦ γράμμα πολλαπλασιάζῃ τὴν ἄγνωστον· οὔσης γὰρ $\alpha\chi=\beta+\gamma$, γράφομεν $\chi=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$. ἐὰν δ' ᾖ $\alpha\chi+\beta\chi+\gamma\chi=\delta-\zeta$, παρατηροῦντες ὅτι οἱ τρεῖς τοῦ πρώτου μέλους ὅροι οὐδέν εἰσιν ἀλλ' ἢ τὸ γινόμενον ὑπὸ χ καὶ $\alpha+\beta+\gamma$ (68. ά.) ἀπαλλάττομεν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τὴν χ διὰ διαιρέσεως γράφοντες $\chi=\frac{\delta-\zeta}{\alpha+\beta+\gamma}$. τῆς δ' ἀγνώστου χ ἴσης εὑρεθείσης γνωσταῖς ποσότησι ταῖς ἐπὶ θάτερα, τὸ πρόβλημα ἐπιλέλυται (5)· ἐὰν δ' ᾖ ἐξίσωσις ἡ $\alpha\chi-\beta\chi+\alpha\gamma=\delta-\zeta\chi$, τὴν χ μονάζουσαν καταστήσομεν οὕτω· ά. μετατίθεμεν $-\zeta\chi$ ἐπ' ἀριστερά, καὶ $+\alpha\gamma$ ἐπὶ τὰ δεξιὰ γράφοντες $\alpha\chi-\beta\chi+\zeta\chi=\delta-\alpha\gamma$· β΄. γράφομεν τὴν χ μόνην ἐπὶ τοῦ πρώτου μέλους, διαιροῦντες τὸ δεύτερον διὰ $\alpha-\beta+\zeta$ πολλαπλασιαστοῦ τῆς ἀγνώστου· καὶ δὴ ἕξομεν $\chi=\frac{\delta-\alpha\gamma}{\alpha-\beta+\zeta}$.

423. Γ. „Ἐὰν ἡ ἄγνωστος κλάσματι ἐφαίνῃ μεθ'
„ἑτέρας ποσότητος, ἀπαλλάξομεν αὐτήν, πολλαπλασιά-
„ζοντες πάντας τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὴν τὸ ἄγ-
„νωστον διαιροῦσαν ποσότητα“.

Ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi}{5}=\alpha$, ἑκάτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὴν τὸ ἄγνωστον διαιρῦσαν ποσότητα 5· ἔσαι ἂν $\frac{5\chi}{5}=5\alpha$· ἀλλὰ $\frac{5\chi}{5}=\chi$· ἀποτελεσθήσεται ἄρα ἡ ἐξίσωσις $\chi=5\alpha$.

424. Διὰ πολλαπλασιασμῦ τοίνυν ἁπλῆς τῆς χ γινομένης ἐπὶ θατέρυ τῶν μελῶν, συνάγομεν ἐξῆς ἐν τῇ πράξει κανόνα „ὅταν ἡ ἄγνωσος διὰ ποσότητος ἄλλης „διαιρῆται, γραπτέον αὐτὴν ἁπλῶς ὡς ὁλοχερῆ, πολλα„πλασιασέον δὲ πάντας τὺς λοιπὺς τῆς ἐξισώσεως ὅρυς διὰ „τῆς τὴν ἄγνωσον διαιρύσης ποσότητος“· ἐπὶ ὗν τῦ ἀνωτέρω ὑποδείγματος $\frac{\chi}{5}=\alpha$, γράφομεν ὕτω $\chi=5\alpha$· ταὐτὸν δὲ γενήσεται, κἂν ἡ διαιρῦσα τὴν ἄγνωσον ἔντι τῶν γραμμάτων ὑπάρχῃ. ἐπὶ γὰρ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\chi}{\alpha}=\beta$, γράφομεν $\chi=\alpha\beta$.

425. Συμβὰν δὲ τὴν ἄγνωσον τὸν τῦ παρονομασῦ χῶρον ἐπέχειν ἐπὶ τῦ κλάσματος, ὡς ἐν $\frac{\alpha}{\chi}=\beta$, κατὰ τόνδε τὸν κανόνα τὸ α μονάσει ἐπὶ τῦ πρώτυ τῆς ἐξισώσεως μέλυς, τὸ δὲ δεύτερον μέλος β πολλαπλασιασθήσεται ἐπὶ χ· ὅθεν ἔσαι $\alpha=\beta\chi$, ἔνθα διαιρέσει διὰ β προκύψει $\frac{\alpha}{\beta}=\chi$ (420).

426. Ἐν γένει δὲ χρώμεθα τῷ πολλαπλασιασμῷ, ἡνίκα ἆραί τι κλάσμα ἐκ τῆς ἐξισώσεως βυλόμεθα· ἔχοντες γὰρ $\chi+\frac{3}{4}=\alpha$, ἐὰν ἆραι ἐντεῦθεν τὸ $\frac{3}{4}$ κλάσμα

βυλώμεθα, πολλαπλασιάζομεν πᾶσαν τὴν ἐξίσωσιν ἐπὶ 4 γράφοντες $4\chi+3=4\alpha$· ἵνα δ' ἐκπερανθῇ ἡ ἐπίλυσις ταύτης τῆς ἐξισώσεως, γράφομεν τὸ πρῶτον $4\chi=4\alpha-3$ (416), εἶτα $\chi=\frac{4\alpha-3}{4}$ (420).

427. Ἀλλὰ πλείοσι γὰρ ἐντυχόντες κλάσμασιν, ἅπαντα ἀφανιῦμεν, πολλαπλασιάσαντες ἑκάτερα τὰ τῆς ἐξισώσεως μέλη ἐπὶ τὸ γινόμενον ὑφ' ἁπάντων τῶν παρονομαςῶν· ὕτως ἐὰν ᾖ $\chi+\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{5}=\alpha$, πολλαπλασιαθεῖσα πᾶσα ἡ ἐξίσωσις ἐπὶ 40, γενήσεται $40\chi+\frac{40\chi}{2}+\frac{40\chi}{4}+\frac{40\chi}{5}=40\alpha$ (Ἀρ. 191)· ἐπεὶ δὲ $\frac{40\chi}{2}=20\chi$, ϗ $\frac{40\chi}{4}=10\chi$, ϗ $\frac{40\chi}{5}=8\chi$· ἔςαι ἄρα $40\chi+20\chi+10\chi+8\chi=40\alpha$, καὶ ἀναγωγῇ τῶν ὁμοίων ὅρων (30) $78\chi=40\alpha$· ἄρα $\chi=\frac{40\alpha}{78}$ (420).

Ἔχεις δὲ ϗ τὸν λόγον ταύτης τῆς πράξεως· πολλαπλασιαθέντος μὲν γὰρ ἑκατέρυ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν ἐπὶ 40, γινόμενον ὑφ ἁπάντων τῶν παρονομαςῶν, ὁ τῆς ἰσότητος λόγος ἀμετακίνητος μεμένηκε (393)· παρὰ ταῦτα δὲ, ἐπείπερ ὁ ἑκάςυ κλάσματος παρονομαςὴς ἦν εἷς τῶν ποιητῶν τῦ 40 ἀριθμῦ, ἐφ' ὃν ἐπολλαπλασιάσθησαν ἅπαντες οἱ τῶν κλασμάτων ἀριθμηταὶ· ἅπας ἄρα ἀριθμητὴς πολλαπλασθεὶς ἐπὶ 40, διαιρέσιμος εἶναι ὀφείλει λεῖψαι ἄτερ διὰ τῦ κατ' αὐτὸν παρονομαςῦ· γινομένης δὲ τῆς διαιρέσεως ταύτης, πάντα τὰ κλάσματα ἀφανισθῆναι ἐπάναγκες (Ἀριθ. 108).

428. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπείπερ πολλαπλασιάζοντες, φέρ' εἰπεῖν, τὸν ὅρον $\frac{\chi}{2}$ ἐπὶ $2\times4\times5$, ὅθεν γίνεται $\frac{40\chi}{2}$, διαιρεῖν ὀφείλομεν τὸν ἀριθμητὴν 40χ διὰ 2, ὅ, τε ἐπὶ 2 πολλαπλασιασμὸς, ἀλλὰ ϗ ἡ διὰ 2 διαίρεσις, ἄχρηςα δήπε τυγχάνεσιν· ἀποχρήσειεν ἄρα, εἰ πολλαπλασιάσαιμεν τὸν ἀριθμητὴν χ ἐπὶ 4×5, γινόμενον ὑπὸ δύω παρονομαςῶν ἄλλων κλασμάτων, ἀποβαλλομένε ἄρδην τῦ 2 παρονομαςῦ· ὅθεν αὐτίκα προκύψει 20χ, ὅπερ μετὰ πράξεις τινὰς ἄλλως εὑρίσκεται· ταὐτὸν δὲ νοητέον ϗ περὶ τῶν λοιπῶν κλασμάτων, τῶν τῇ προτεθείσῃ ἐξισώσει ἐμπεριεχομένων· ὅθεν ἀναφύει ἐπὶ τῆς πράξεως κανὼν ἐπιτομώτερος.

429. „Ὅταν ἐξίσωσίς τις πλείω περιέχῃ κλάσμα„τα, δίχα τινὸς μετακινήσεως τῆς ἰσότητος, πολλαπλα„σιαςέον πάντας τὲς τῶν κλασμάτων ἀριθμητὰς, ἕκαςον ἐπὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν παρονομαςῶν τῶν ἄλλων, ἀπο„τιθεμένες πάμπαν τὸν ἑκάςε παρονομαςήν“· ἐπὶ τῆς προτεθείσης ἕν ἐξισώσεως $\chi+\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{5}=\alpha$, πολλαπλασιαϑήτων τό,τε ὁλοχερὲς χ ϗ τὸ ὁλοχερὲς α ἐπὶ 40, γινόμενον ὑπὸ πάντων τῶν παρονομαςῶν· ἀλλὰ ά. $\frac{\chi}{2}$ πολλαπλασιαϑήτω ἐπὶ 4×5, ἀποῤῥιπτομένε τῦ κατ' αὐτὸ παρονομαςῦ· ὅθεν ἔςαι 20χ· β΄. $\frac{\chi}{4}$ πολ-

λαπλασιασθήτω ἐπὶ 2×5· ὅθεν 10χ· γ΄. $\frac{\chi}{5}$ ἐπὶ 2×4· ὅθεν 8χ· ἡ δ' ἐξίσωσις ἀμέσως διὰ τούτου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται $40\chi + 20\chi + 10\chi + 8\chi = 40\alpha$, ἔνθ' ἄλλως προσέδει καὶ διαιρέσεως.

Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἐξαλειφθησομένου κλάσματος ἄλλη ποσότης ᾖ παρὰ τὴν ἄγνωστον χ, μετιτέον αὐτὴν καθάπερ εἴρηται περὶ τῆς ἀγνώστου χ, μηδόλως πολλαπλασιάζοντας ἐπὶ τὸν οἰκεῖον αὐτῆς παρονομαστήν (424).

430. Ἐντεῦθεν ἄρα ἡνίκ' ἂν δύω μόνα κλάσματα ἐξισώσει τινὶ παρῶσιν, εἰς ἀπάλειψιν αὐτῶν πολλαπλασιαστέον τὸν ἑκατέρου ἀριθμητὴν ἐπὶ τὸν θατέρου παρονομαστήν, τὰ δ' ἐνυπάρχοντα ὁλοχερῆ ἐπὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω παρονομαστῶν.

Προκειμένης φέρε ἐξισώσεως τῆς $\chi + \frac{\chi}{3} = \alpha + \frac{\chi}{4}$, πολλαπλασιασθήτω πρῶτον τὰ ὁλοχερῆ χ καὶ α ἐπὶ 3×4, γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω παρονομαστῶν, εἶτα ὁ μὲν ἀριθμητὴς $\frac{\chi}{3}$ (παρορωμένου δήπου τοῦ παρονομαστοῦ 3) ἐπὶ τὸν 4 παρονομαστήν· ὅθεν ἔσται 4χ· ὁ δὲ $\frac{\chi}{4}$ ἐπὶ τὸν 3 παρονομαστήν· ὅθεν 3χ· ἡ οὖν προτεθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $12\chi + 4\chi = 12\alpha + 3\chi$· μεταθέσει δὲ τοῦ 3χ, καὶ ἀναγωγῇ, $13\chi = 12\alpha$ (416)· ὅθεν $\chi = \frac{12\alpha}{13}$ (420).

Συμβὰν δὲ ἐντυχεῖν δυσὶ κλάσμασι, τὸν αὐτὸν ἔχουσι παρονομαστήν, ἀποχρήσει μόνον τὰ ὁλοχερῆ πολλαπλασιάσαι ἐπὶ τὸν παρονομαστήν· ἐὰν οὖν ᾖ $\frac{20}{5} + \frac{10}{5} = 6$, πολλαπλασιαθήτω μόνος ὁ 6 ἐπὶ 5· ἡ δ' ἐξίσωσις ἔσεται $20 + 10 = 30$.

431. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἔςι μὲν ἦν τὸ πάντων τῶν τῆς Μαθηματικῆς μερῶν χρησιμώτατόν τε ϗ τερπνότατον ἀναμφιλέκτως ἡ Ἀνάλυσις, ἧς τὲς κανόνας ϗ μεθόδȣς ἐκτενέςερον ἀποδȣ͂ναι ἔδοξε· δεῖ δὲ ταῦτα ἐπαισθητότεράτε ϗ εὐκρινέςερα ἀπεργάσασθαι, προθεμένȣς ἔςιν ἅτινα προβλημάτια, ὡς ἡ λύσις τῆς τῶν προεκτεθειμένων ἤδη θεωρίας ἐξέχεται.

432. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ὠνήσατό τις ἀγρȣ̀ς τρεῖς, ὧν ὁ μὲν δεύτερος τετίμηται τȣ͂ διπλȣ͂ τῆς τȣ͂ πρώτου τιμῆς, ὁ δὲ τρίτος τȣ͂ τριπλȣ͂ τῆς τȣ͂ δευτέρȣ· ἡ δὲ ὁλικὴ τῶν τριῶν τιμὴ ἔςιν 63000 ἀργύρια· πόσȣ ἄρα τετίμηται ἕκαςος;

ΛΥΣΙΣ ϗ ΣΧΟΛΙΟΝ. Τȣτὶ τὸ πρόβλημα ϗ τὰ τȣ́τῳ ὁμοφυῆ ἐπιλυθῆναι δύνανται ϗ διὰ τῆς μεθόδȣ τῆς ψευδȣ͂ς ὑποθέσεως (Ἀριθ. 264). ὡς ȣ͂ν ἐκεῖθι 1 κέκληται ἡ πασῶν ἐλάττων ποσότης, ȣ̃τως ἐνταῦθα κληθήσεται χ ἡ ἐλάττων τῶν τριῶν τιμὴ, εἴτ' ȣ͂ν ἡ τȣ͂ πρώτου ἀγρȣ͂· ἡ δὲ δευτέρα, τὸ διπλȣ͂ν ȣ̃σα τῆς πρώτης, ἔσεται 2χ· ἡ δὲ τρίτη, τριπλῆ ȣ̃σα τῆς δευτέρας, δηλωθήσεται διὰ 6χ· ἀλλ' αἱ τρεῖς ἅμα τιμαὶ συμπληρȣ͂σιν ἀργύρια 63000· κληθείσης ἄρα τῆς γνωςῆς ποσότητος $63000 = \alpha$, τὸ ζήτημα ἐξετασθὲν κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα (388) ἐκτεθήσεται συμβολικῶς· κατὰ δὲ τὸν δεύτερον κανόνα (389), ἐπειδὴ ἡ θέσις τȣ͂ προβλήματος ἐθέλει τὴν ἐλάττονα ποσότητα χ σὺν τῷ αὐτῆς διπλῷ 2χ, σὺν τῷ τριπλῷ τῆς δευτέρας 6χ, ἐξισȣ͂σθαι τῷ α, συςαθήσεται ἄρα ἡ ἐξίσωσις $\chi + 2\chi + 6\chi = \alpha$.

Τȣ͂ τοίνυν προβλήματος ἐξισώσει ȣ̃τω περιγραφείτος λείπεται τὴν ἄγνωςον χ, εἴτ' ὖν τὴν ἐλάττω τιμὴν, μόνην ποιῆσαι γενέσθαι ἐπὶ θατέρυ τῶν τῆς ἐξισώσεως μελῶν, ἐν δὲ θατέρῳ μόνας ὑπάρχειν τὰς ἐγνωσμένας (390). τυτὶ ὖν μετελευσόμεθα τόνδε τὸν τρόπον.

Α΄. Ἀναγωγῇ τῶν ὁμοίων ὅρων (30) ποιῦμεν $9\chi = \alpha$. Β΄. διαιρέσει δὲ ἁπάσης τῆς ἐξισώσεως διὰ 9, $\chi = \frac{\alpha}{9}$ (421)· καὶ δὴ τὸ πρόβλημα λέλυται· ἐπεὶ γὰρ $\alpha = 63000$, καὶ $\chi = \frac{\alpha}{9}$, διαιρετέον ἀριθμητικῶς 63000 διὰ 9· εὑρεθήσεται τοίνυν ὁ πρῶτος ἀγρὸς τετιμημένος ἀργυρίων 7000· ὁ δὲ δεύτερος $2 \times 7000 = 14000$, ὁ δὲ τρίτος $3 \times 14000 = 42000$.

433. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ δὲ βάσανος τῆς τῦ προβλήματος λύσεως γίνεται, ἐὰν δειχθῇ τὸ ἀποτέλεσμα συμφωνῦν τῇ θέσει, ἢ ταῖς θέσεσι, τῦ προβλήματος.

Ἐπὶ γὰρ τῦ προτεθέντος ὑποδείγματος, ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi = 7000$, εἴτ' ὖν ἡ ἐλάττων τιμὴ, συναφθῇ δὲ αὐτῇ τὸ διπλῦν, ἤ ἡ τῦ δευτέρυ τιμὴ, εἴτ' ὖν 14000, ἐπιπροςεθῇ δὲ καὶ τὸ τῆς δευτέρας τιμῆς τριπλάσιον, εἴτ' ὖν 42000, τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα ἐξισωθήσεται τῷ προτεθέντι ἀριθμῷ 63000, ὥσπερ βύλεται ἡ τῦ προβλήματος θέσις· ἀσφαλῶς ἄρα τὸ πρόβλημα λέλυται.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Λιβάνιος διενθυμηθεὶς ἀριθμόν τινα, ἐὰν, ἔφη, τῷδε συναφθῇ τὸ τριπλῦν αὐτῦ, καὶ δὴ καὶ τὸ τετραπλῦν, ἔςαι τὸ ὁλικὸν ἄθροισμα 80. Τίς ἄρ' ἐςὶν ὗτος ὁ ἀριθμός;

ΛΥΣΙΣ. Εὔδηλον ὡς τοδὶ τῷ προλαβόντι ἐςὶν ὁμοφυές· συςαθήσεται ὖν ἐπὶ τύτυ ἡ ἐξίσωσις $\chi + 3\chi + 4\chi = 80$· ἀναγωγῇ δὲ, $8\chi = 80$: ἄρα $\chi = \frac{80}{8} = 10$· διεντεθύμηται ἄρα ὁ Λιβάνιος 10· ἡ δὲ βάσανος δείκνυσιν ἀσφαλῆ τὴν τῦ προβλήματος λύσιν, ὅτι $10+30+40=80$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ'. Πέτρος, Ἰάκωβος ϗ Ἰωάννης ϗ Ἀνδρέας, ἅμα ἄγυσιν ἔτη 105· ϗ ἡ μὲν τῦ Πέτρυ ἡλικία τὸ ἥμισύ ἐςι τῆς τῦ Ἰακώβυ, τῦ δὲ, τὸ τρίτον τῆς τῦ Ἰωάννυ· αὐτῦ δὲ, τὸ ἥμισυ τῆς τῦ Ἀνδρέυ· πόση ἐςὶν ἡ ἑκάςυ τύτων ἡλικία;

ΛΥΣΙΣ. Τὸ ζήτημα, καλῶς ἐξετασθὲν κατὰ τὸν πρῶτον κανόνα (388), φαίνεται ἐπιλυόμενον, ἤτοι δι' ὁλοχερῶν, ἢ διὰ κλασμάτων.

ά. Κληθείσης μὲν γὰρ τῆς τῦ Πέτρυ ἡλικίας χ, ἥτις ὖσα πασῶν ἐλάττων ἐςὶ τὸ ἥμισυ τῆς τῦ Ἰακώβου, ἡ τῦ Ἰακώβυ ἔςαι 2χ, ἧς τὸ τρίτον ὔσης τῆς τῦ Ἰωάννυ, ἔςαι ἡ τῦ Ἰωάννυ 6χ· τέλος δὲ ταύτης τὸ ἥμισυ ὔσης τῆς τῦ Ἀνδρέυ, ἔςαι ἡ τῦ Ἀνδρέυ αὐτῦ 12χ· ϗ ἐπεὶ συλλήβδην πᾶσαι αἱ ἡλικίαι συμπληρῦσι 105 ἔτη, ἅπερ κληθήτωσαν α, ἐκ τῆς τῦ προβλήματος θέσεως προκύψει ἡ ἐξίσωσις $\chi+2\chi+6\chi+12\chi=\alpha$· ἀναγωγῇ δὲ, $21\chi=\alpha$· ἄρα (421) $\chi=\frac{\alpha}{21}$

Διαιρεθέντος ἄρα α, εἴτ' ὖν 105, διὰ 21 εὑρεθήσεται $\chi=5$, ἡλικία τῦ νεωτέρυ· ὖκῦν τῦ μὲν δευτέρυ ἔςαι 10, τῦ δὲ τρίτυ, 30: τῦ δὲ τετάρτυ 60, ὧν τὸ ἄθροισμα ἐπ' ἀκριβὲς ἐςὶν 105.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο' λογισμὸς τῶν κλασμάτων ἀεὶ ἐπιμηκέςερός ἐςι τῦ τῶν ὁλοχερῶν· ἀποπειρασόμεθα μέντοι αὐτίκα ϗ τῦδε, ά. ἵν' ἀείποτ' ἐπὶ τῆς πράξεως ὁ τῦ διὰ κλασμάτων ὄπισθεν τιθῆται τῦ δι' ὁλοχερῶν· β'. ὅταν ἡ ἐξίσωσις κλάσματα περιέχῃ, κατὰ πρῶτον αὐτῶν αὐτὴν ἀπαλάττωμεν.