δοθεὶς 3,797299, ὅς ἐςὶ μεταξὺ τȣ̃ κατὰ τὸν 6271 ϗ τȣ̃ κατὰ τὸν 6270· ὁ τȣ́τȣ ἄρα ἀριθμὸς ἔςιν 6270 μετάτινος κλάσματος, ȣ̃τινος εὑρεθέντος κατὰ τὸν ἄρτι δεδειγμένον τρόπον (341) ἐκπορίζεται ὁ ἀριθμὸς 6270 + $\frac{31}{89}$· ἀλλὰ γὰρ διὰ τὰ ἀπὸ τȣ̃ ἐν ἀρχῇ δεδομένȣ λογαρίθμȣ ἀφαιρεθέντα ἓξ δεκαδικὰ, πολλαπλασιαςέον τὸν 6270 + $\frac{31}{89}$ ἐπὶ 1000000 (Ἀριθ. 200)· ἔςιν ἄρα ὁ τȣ̃ ἐν ἀρχῇ δοθέντος λογαρίθμȣ ἀριθμὸς 6270000000 + $\frac{31000000}{89}$, εἴτ' ȣ̃ν ἀναγωγῇ τȣ̃ κλάσματος ἐφ' ὁλοχερῆ 6270449275 + $\frac{25}{89}$.

343. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛʹ.** Λειπτικȣ̃ λογαρίθμȣ δοθέντος, εὑρεῖν τὸν οἰκεῖον αὐτȣ̃ ἀριθμόν.

ΛΥΣΙΣ. Ἀνάγκη πᾶσα κλάσμα εἶναι τὸν ἀριθμὸν τόνδε, τῆς μονάδος ἔλαττον (333)· ἔςω τοίνυν δοθεὶς λογάριθμος ὁ — 3,029789· συναπτέον ȣ̃ν τῷ τȣ́τȣ χαρακτηριςικῷ — 3, μονάδας τινὰς ὑπαρκτικὰς, φέρ' εἰπεῖν, 5· ἢ ὅπερ ταὐτὸ, ἀφαιρετέον τὸν 3,029789 ἀπὸ τȣ̃ 5,000000· ȣ̓κȣ̃ν καταλειφθήσεται 1,970211 λογάριθμος ἀριθμȣ̃, κειμένȣ ἐν τοῖς πίναξι μεταξὺ 93 ϗ 94. Θῶμεν ȣ̃ν ὡς ἔςιν ὁ ζητȣ́μενος· ἐπεὶ δὲ 5 συνήψαμεν τῷ τȣ̃ δοθέντος λογαρίθμȣ χαρακτηριςικῷ, ἐκ τȣ́τȣ χρὴ τὸν 93 διὰ 100000 διελεῖν (334). τὸ ἄρα κλάσμα $\frac{93}{100000}$ ἔςιν ἀριθμὸς, ὃς ἐζητεῖτο πλὴν $\frac{1}{100000}$ περίπȣ.

Χρῆσις τῶν Λογαρίθμων.

344. Αʹ. Δυνάμεθα δι' αὐτῶν τȣ́ςτε βαθμȣ̀ς σχηματίζειν, ϗ τὰς αὐτῶν ῥίζας ἐξάγειν.

345. Ἵν' εὕρωμεν, φέρε, τὸν ἀπὸ ἀριθμȣ̃ τινος τετράγωνον, διπλασιάζομεν τὸν αὐτȣ̃ λογάριθμον· ὁ δὲ ἀριθμὸς τȣ̃ διπλȣ̃ τȣ́τȣ λογαρίθμȣ ἔςαι ὁ ζητȣ́μενος τε-

τράγωνος· ὕτως ἵν' εὕρωμεν τὸν ἀπὸ 139 τετράγωνον, διπλασιάζομεν τὸν αὐτῦ λογαριθμον, ὃν εὑρίσκομεν ἐν τοῖς πίναξιν ὄντα 2, 1430148· ὁ δὲ τύτυ διπλῦς 4, 2860296, ἔςαι λογάριθμος ἐν τοῖς πίναξι τῦ 19321, ὅς ἐςιν ὁ ἀπὸ 139 τετράγωνος (317).

346. Ἵν' εὕρωμεν τὸν ἀριθμῦ τινος κύβον, τριπλασιάζομεν τὸν αὐτῦ λογάριθμον· ϗ ἐν γένει, ἵνα πάντα ἀριθμῦ παντὸς βαθμὸν θηρευσώμεθα, πολλαπλασιάζομεν τὸν τῦ ἀριθμῦ λογάριθμον ἐπὶ τὸν δείκτην (317).

Ἵνα, φέρε, τὸν τέταρτον τῦ 11 εὕρωμεν βαθμὸν, ζητῦμεν ἐν τοῖς πίναξι τὸν τῦ 11 λογάριθμον, ὅς ἐςιν 1, 0413927· τῦτον τετραπλασιάζοντες (317), εὑρίσκομεν ἐν τοῖς πίναξι τὸν 4, 1655708, λογάριθμον ὄντα ὡς ἔγγιςα τῦ 14641, ἥτις ἐςὶν ἡ τετάρτη ζητυμένη τῦ 11 δύναμις.

347. Β΄. Τὐναντίον δὲ, πρὸς ῥίζης ἁπάσης ἀπὸ παντὸς ἀριθμῦ ἐξαγωγὴν, διαιρῦμεν διὰ τῦ ἐπισήμυ τὸν λογάριθμον τῦ προτιθεμένυ ἀριθμῦ (318), ὅ ἐςι λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τῦδε τῦ λογαρίθμυ πρὸς ἐξαγωγὴν τετραγωνικῆς ῥίζης, τὸ τρίτον πρὸς ἐξαγωγὴν κυβικῆς, ϗ ἑξῆς ὕτως.

Ἵνα φέρ' εἰπεῖν εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τῦ 13824 λαμβάνομεν τὸ τρίτον τῦ κατὰ τὸν δε τὸν ἀριθμὸν ἐν τοῖς κανονίοις κειμένυ λογαρίθμυ 4, 1406336, εἴτ' ῦν τὸν 1, 3802112, ὅς εὑρίσκεται ἐν τοῖς κανονίοις λογάριθμος τῦ 24, ἥτις ἐςὶν ἡ ζητυμένη κυβικὴ ῥίζα (118).

348. Γ΄. Διὰ τῶν λογαρίθμων, τὸν μὲν πολλαπλασμὸν εἰς πρόσθεσιν, τὴν δὲ διαίρεσιν εἰς ἀφαίρεσιν τρέψαι δυνάμεθα κατὰ τάδε.

Κείσθω γὰρ πολλαπλασιάσαι τὸν 320 ἐπὶ 27.

λαμβάνοντες ἓν ἐκ τῶν κανονίων τὲς τῶν δύω ἀριθμῶν λογαρίθμες, εἴτ' ἓν τὸν 2,5051499 ἠ 1,4313638, ἠ συνάπτοντες αὐτὲς, εὑρίσκομεν ἐν τοῖς κανονίοις τὸ τέτων ἄθροισμα 3,9365137 λογάριθμον ὄντα τῆ 8640, ὃς ἐςὶ τὸ γινόμενον, ὃ ἐζητεῖτο (315).

349. Ἵνα δὲ διέλωμεν 4500 διὰ 18, ἀφαιρῦμεν τὸν τῆ διαιρέτε 18 λογάριθμον ἀπὸ τῆ κατὰ τὸν 4500 διαιρετέον· ἡ ἓν διαφορὰ 2,3979400 εὑρίσκεται ἐν τοῖς πίναξι λογάριθμος τῆ 250, ὅς ἐςι τὸ ζητέμενον πηλίκον.

350. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰςέον μέντοι ὡς αἱ διὰ τῶν λογαρίθμων ἆυται ἀποτελέμεναι πράξεις ἐκ εἰσὶν ἀεὶ ἀκριβῶς ἀσφαλεῖς, διὰ τὰ ὁποιαῦν περεμπίπτοντα τοῖς λογαρίθμοις ἄφευκτα διαπτώματα (330).

351. Δ΄. Ἐντεῦθεν ἄρα δυνάμεθα διὰ τῶν λογαρίθμων μετατρέψαι ἅπασαν γεωμετρικὴν τῶν τριῶν μέθοδον, εἰς ἀριθμητικὴν, ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν εἰσάγοντες τὲς αὐτῶν λογαρίθμες· ἠ συνάψει μὲν ἀντὶ πολλαπλασιασμῦ, ἀφαιρέσει δὲ ἀντὶ διαιρέσεως χρώμενοι (207).

Δι' ἑνὸς ὑποδείγματος τὸ πᾶν διαλευκανθήσεται· κείσθω γὰρ ἐκτελέσαι τὴν γεωμετρικὴν τῶν τριῶν μέθοδον $250 : 1000 :: 19 : \chi$· ἀντὶ ἓν τῶν 250, ἠ 1000 ἠ 19 ἀντικατας αθήτωσαν οἱ κατ' αὐτὲς λογάριθμοι, ἠ ἕτω γενέσθω ἡ ἀριθμητικὴ τῶν τριῶν μέθοδος 2,3979400· 3,0000000· 1,2787536· χ (207)· συνάψει τοίνυν τῶν μέσων, γίνεται 4,2787536, ἓ ἀφαιρέσει τοῦ γνωςῦ ἄκρε εὑρίσκεται διαφορὰ 1,8808136 λογάριθμος, ἓ ἀριθμὸς εὑρίσκεται ἐπὶ τῶν κανονίων ὁ 76, ἄκρος ὃς ἐζητεῖτο ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας $250 : 1000 :: 19 : \chi = 76$ (240).

352. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Φανήσεται ἐν τῇ Τριγωνο-

μετρίᾳ, ὡς αὕτη ἡ τῆς γεωμετρικῆς ἐπὶ τὴν ἀριθμητικὴν μέθοδον τῶν τριῶν μεταβολὴ ἐκ ὀλίγον ἐπιτέμνει τὰς πράξεις.

353. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ὅταν μὴ μεγάλης ἀκριβείας δεώμεθα, τῶν ἐν 8 δεκαδικοῖς λογαρίθμων παραλιμπάνειν δυνάμεθα τὰ δύω ἐν δεξιοῖς ἔσχατα· μελήσει δὲ μόνον, ἐὰν οἱ δύω ἔσχατοι ὅροι ὑπερέχωσι τῦ 50, αὔξειν μονάδι τὸ ἐν δεξιοῖς πρῶτον τῶν περιλειπομένων δεκαδικῶν.

Ὡς δ᾽ αὕτως ἐν γένει, ὅταν ἡ τῦ ἐσχάτυ δεκαδικῦ διαίρεσις καταλοίπυ ἄτερ μὴ ἐκτελῆται, τὸ δὲ κατάλοιπον μεῖζον ᾖ τῦ ἡμίσεως διαιρέτυ, αὐξητέον τὸ πηλίκον μονάδι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐπὶ τῦ λογαρίθμυ 2,70251380, ἐὰν ἀποβαλεῖν βυλώμεθα τὰ δύω ἔσχατα δεκαδικὰ 80, γράφειν εἰκὸς 4 ἀντὶ τῦ 3 ἐσχάτυ ὅρυ· ὅθεν ἔσαι 2,702514· ὁ γὰρ 80 πρὸς τὸν 3 ἀναφερόμενος ἰσοδυναμεῖ τῷ $\frac{8}{100}$ (Ἀριθ. 231) ἐκεῖν ἐὰν μὲν τεθῇ 4 ἀντὶ 3, ὁ ἀριθμὸς 4 ἔσαι μείζων τῦ ζητυμένυ τῷ $\frac{2}{100}$· ἐὰν δὲ μείνῃ ὁ 3, ἔσαι ἐλάττων τῦ δικαίυ τῷ $\frac{8}{100}$· ἐλάσσων ἄρα ἔσαι ἡ ἀπάτη ἐὰν γράψωμεν 4 ἀντὶ 3, ἀποῤῥίψαντες τὸν 80· ἀλλ᾽ ἐὰν γὰρ τὰ δύω ἔσχατα δεκαδικὰ ὦσι 50, ὡς ἐπὶ τῦ 2,70251350, ἀδιάφορον ἔσαι ἀποῤῥίψαντας τὸ 50 εἴτε ἐάσαι 3, ὃς ἔσαι ἐλάσσων τῦ δικαίυ τῷ $\frac{5}{100} = \frac{1}{2}$, ἢ θεῖναι 4, ὃς ἔσαι μείζων τῷ αὐτῷ $\frac{5}{100} = \frac{1}{2}$.

Ἵνα δὲ λάβωμεν τὸ πέμπτον τῦ 4,02315709, γράφομεν 0,80463142· ἐὰν μὲν γὰρ ληφθῇ 2 ὡς πέμπτον τῦ 9, ὁ 2 ἔσαι μείζων τῷ $\frac{1}{5}$· ἐὰν δὲ ληφθῇ 1, ἔσαι ἔλαττον τῦ δικαίυ τῷ $\frac{4}{5}$.

354. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Ἐν τῷ ἐφεξῆς Κεφαλαίῳ

φανήσεται πλείων τις ἡ χρῆσις, ϗ περισατικωτέρα δὲ, ἡ τῶν λογαρίθμων.

Μέθοδος γενικὴ τοῦ ἐξάγειν ὡντινωνδήποτε ποσοτήτων ῥίζας ὑπερτέρας τοῦ τρίτου βαθμοῦ.

355. Ἅπας βαθμὸς, οὗ ἂν ὁ δείκτης τοῦ 2 πολλαπλάσιος εἴη, θεωρεῖσθαι ἔχει ὡς τετράγωνον· οὕτως α^4 θεωρηθείη ἂν ὡς τετράγωνον ἀπὸ ῥίζης α^2. εἴγε $\alpha^2 \times \alpha^2 = \alpha^4$· ὡσαύτως δὲ α^6 θεωρηθείη ἂν ὡς τὸ ἀπὸ α^3 τετράγωνον, ϗ α^8 ὡς τὸ ἀπὸ α^4 κτ. οὐκ ἄλλως δὲ ἐκλαβεῖν ὡς κύβον δυνάμεθα πάντα βαθμὸν, οὗ ἂν ὁ δείκτης εἴη τοῦ 3 πολλαπλοῦς· α^3 γάρ ἐστιν ὁ τοῦ α κύβος, α^6 δὲ ὁ τοῦ α^2, α^9 ὁ τοῦ α^3 κτ. ἔξεστι ἄρα διὰ τῆς ἐν ἔθει θεωρίας τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ἢ κυβικῆς ῥίζης, α. εὑρεῖν ἀπόνως τὴν παντὸς βαθμοῦ ῥίζαν, διαιροῦντας ἅπαξ ἢ πλεονάκις τὸν δείκτην διὰ 2, ἢ διὰ 3, ἕς τ' ἂν γένηται = 1· β'. ἀναγαγεῖν εἰς κατωτέρας δυνάμεις τὰς, ὧν ὁ δείκτης διαιρέσιμος ᾖ διὰ 2, ἢ 3, κἂν μὴ διὰ τῆς διαιρέσεως ταύτης γένηται = 1.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω ἐξαγαγεῖν τὴν τετάρτην ῥίζαν τοῦ 390625· ἐξάγομεν οὖν τούτου πρῶτον τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν = 625, εἶτα ταύτης τῆς καινῆς ῥίζης τὴν ῥίζαν αὖθις τὴν τετραγώνειον = 15· ὡσαύτως ἐπὶ $\sqrt[12]{244140625}$, ἐξάγομεν πρῶτον τὴν κυβικὴν ῥίζαν 625· β'. $\sqrt[2]{625}=25$. γ'. $\sqrt[2]{25}=5$, ἡ δωδεκάτη ζητουμένη ῥίζα· ἐπὶ δὲ $\sqrt[14]{100000000000000}$, λαμβάνομεν $\sqrt[2]{100000000000000} = 10000000$ ἑβδόμην ῥίζαν τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ.

356. Ἀλλὰ γὰρ ἡ μέθοδος αὕτη, ὥσπερ ῥάστη τὴν πρᾶξιν, ἔνθ᾽ ἂν ἐξῇ χώραν ἔχειν, οὕτω καὶ θαυμάσιος· ἀχρηστεῖ μέντοι α. ἐπὶ τῶν βαθμῶν, ὧν ὁ δείκτης μήτε τοῦ 2, μήτε τοῦ 3 πολλαπλάσιος εἴη, οἷοί εἰσιν οἱ πέμπτοι, ἕβδομοι κτ. βαθμοί· β. καὶ ἐφ᾽ ὧν ὁ δείκτης τῇ διὰ 2 ἢ 3 διαιρέσει οὐ γίνεται = 1, ὡς ἐπὶ τῆς ιδ. δυνάμεως.

357. Ἡ μὲν οὖν ἐξαγωγὴ τῶν ῥιζῶν παντὸς συμβολικοῦ βαθμοῦ ἀτεχνῶς εὐμαρεστάτη πέφυκεν· ὑποτυπώσαντες γὰρ πρὸ ὀφθαλμῶν τὴν σειρὰν πάντων τῶν ὅρων, ὧν ἔχειν ὀφείλει ὁ προκείμενος βαθμὸς, δυωνύμου (106) τριωνύμου κτ ῥίζης (117), ἀταλαιπώρως ἕκαστον ῥιζικὸν ὅρον εὑρήσομεν.

358. Ἐπὶ δὲ τῶν ἀριθμητικῶν ποσοτήτων τὸν αὐτὸν σχεδιάσαντες συμβολικὸν τύπον, ὃς ἐμφαίνει πάντας τοὺς ὅρους, τοὺς ἐμπεριειλημμένους τῷ προκειμένῳ ἀπὸ δυωνύμου ῥίζης βαθμῷ (113) καὶ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διαστείλαντες εἰς κόμματα, ὧν ἕκαστον ἐκ δεξιῶν ἀρχῆς γινομένης, περιέχει τόσους χαρακτῆρας, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ ἐπίσημον τῆς ἐξαγομένης ῥίζης, ζητοῦμεν τὴν μεγίστην ῥίζαν τοῦ πρώτου ἐν ἀριστεροῖς κόμματος, καὶ τὸν αὐτῆς ἀφαιροῦμεν βαθμὸν, καὶ τἄλλα πάντα διεκπεραίνομεν τοῖς ἤδη ὑποτυπωθεῖσι (133, 140) τὰς πράξεις ἀναλόγως ἐπαναλαμβάνοντες, ἢ καὶ διὰ τοῦ δυωνύμου τύπου ἐπὶ δύναμιν κλασματικὴν αἰρομένου (153).

359. Ἀλλὰ γὰρ οὐκ ἄντις εἴποι ὅσῳ ῥάδιον πᾶσα ῥίζα διὰ τῶν λογαρίθμων ἐξάγεται· κἂν (τῶν βαθμῶν δήπου ἀτελῶν ὄντων) ἀγαπήσαιμεν μόνῃ τῇ ὁλοχερεῖ ῥίζῃ· αὐτίκα γὰρ τὴν ἀτελῆ κυβικὴν ῥίζαν τοῦ 9285 εὑρίσκομεν, λαμβάνοντες τοῦ κατ᾽ αὐτὸν λογαρίθμου τὸ τρίτον = 1, 322594, ὅς ἐστιν ὅτι ἔγγιστα λογάριθμος τοῦ 21 τῆς ζητουμένης ἐν ὁλοχερέσιν ἀτελοῦς ῥίζης· κἂν προσεπιζητήσαιμεν καὶ δεκαδικάτινα, καὶ τηνικάδε ἡ ῥίζα ὡς ὁλοχερὴς

ἔσεται μικρός τις ἀριθμὸς· ἵνα φέρε ἐξαγάγωμεν τὴν ἑβδόμην ῥίζαν τῦ 8086, τὸ ἕβδομον τῦ κατ' αὐτὸν λογαρίθμυ ἔςιν = 0,558248, ᾧ τινι τιθέντες χαρακτηριςικὸν τὸν 3, ἀπολαμβάνομεν καινὸν λογάριθμον 3,558248, ἐπανήκοντα ὡς ἔγγιςα τῷ 3616, = 3,616 (334) ῥίζη ἐγγίςη τῦ 8086· ἀλλ' εἴπερ βυλομένοις ᾖ προθεῖναι τῇ ῥίζῃ δεκαδικὰ τοσάδε, ὥςτε ὑπερβαίνειν τῶν ἐν τοῖς πίναξιν ἀπαντώντων ἀριθμῶν, ἐπὶ τῦτο τῷ ἐφεξῆς χρησόμεθα τρόπῳ.

360. Ἔςω ἐξαγαγεῖν τὴν πέμπτην ῥίζαν τῦ 9970, ῦ λογάριθμος = 3,998695, ῦ τὸ πέμπτον = 0,799739· τεθήτω ῦν χαρακτηριςικὸν ὁ 3· ϗ εὑρεθήσεται διὰ προσεγγίσεως 6305, ταὐτὸν εἰπεῖν 6,305 (334) ῦ ὁ ἐν τοῖς κανονίοις λογάριθμος = 0,799685 ἐλάττων ἐςὶ τῦ 0,799739 λογαρίθμυ, ἐξ ἓξ συγκειμένυ δεκαδικῶν, ϗ δὴ ἐγγύτερος ἢ ἐκεῖνος τῆς ἀληθῦς ῥίζης τῇ διαφορᾷ 54.

Ἐπὶ τύτοις τὰ 6305 ϗ 6306 ἐχόντων 69 διαφορὰν τῶν καθ' ἑαυτὺς λογαρίθμων (ὡς ἰδεῖν ἔνεςιν ἐν τοῖς κανονίοις) 6,3050, ϗ 6,3060 ἔξυσιν ὡσαύτως 69 διαφορὰν τῶν καθ' ἑαυτοὺς λογαρίθμων· καὶ γὰρ ὁ μὲν τοῦ 6305 λογάριθμος ἔσεται ὁ 3,799685, ὁ δὲ τῦ 63050 ἔςαι ὁ 4,799685· ἀλλὰ διὰ τὰ τρία δεκαδικὰ τὰ ἐν τῷ ἀριθμῷ 6,305, ϗ διὰ τὰ ἐν τῷ 6,3050 τέσσαρα, ἀποκοπτέον τὺς χαρακτηριςικὺς 3 ϗ 4· ϗ δὴ ἔσονται ἰσάλληλοι ῦτοι οἱ λογάριθμοι· ταυτὸν δὲ κρατεῖ κἀπὶ τῦ λογαρίθμυ τῦ 6,306 ϗ τῦ 6,3060· ῦτως 6,3050 ϗ 6,3060 ἔχυσι τὴν αὐτὴν τῶν λογαρίθμων διαφορὰν = 69, ἣν ἔχυσι ϗ οἱ τῶν 63050, ϗ 63060.

Ἐκ δὲ δὴ τύτων βασανίζομεν τὸ πρῶτον ζητύμενον δεκαδικὸν 9 διὰ τῆς ἐξῆς τῶν τριῶν μεθόδυ: 10 : 69 : : 9 : x, ὅπερ ἐςὶν ἡ μεταξὺ τῶν 63050, 63060 ἀριθμῶν διαφορὰ 10, πρὸς τὴν τῶν κατ' αὐτοὺς λογαρίθμων διαφορὰν 69, ὡς τὸ βασανιζόμενον δεκαδικὸν 9, πρὸς χ, ἥτις ἐςὶν ἡ ζητουμένη μεταξὺ τοῦ κατὰ τὸν 63050 λογαρίθμου, καὶ τοῦ κατὰ τὸν 63060 σὺν ζητουμένῳ τινὶ δεκαδικῷ διαφορά· ἔςιν ἄρα χ = 62 $\frac{1}{10}$.

Ἀλλὰ πᾶσα δύναμις τοῦ χ ὑπερέχουσα τὸν 54, ὅς ἐςιν ὑπεροχὴ τοῦ λογαρίθμου τῆς ἀληθοῦς ῥίζης ὑπὲρ τὸν λογάριθμον τοῦ 6,305, ἔςαι λίαν μεγάλη· καὶ γὰρ συναφθείσης τῷ τοῦ 6,305 λογαρίθμῳ, γενήσεται λογάριθμος ἀριθμοῦ τὴν ἀληθῆ ὑπερβαίνοντος ῥίζαν· οὐκοῦν βασανιθήτω ὁ 8· 10:69::8:χ=55 $\frac{2}{10}$· βασανιθήτω εἶτα ὁ 7· 10:69 ::7:χ=48 $\frac{3}{10}$, ἥςτινος μὴ ὑπερκειμένης τοῦ 54, ἔςαι ὁ 7 τὸ πρῶτον ζητούμενον δεκαδικόν· ὑπὲρ δὲ τοῦ δευτέρου, βασανιθήτω αὖθις νέος 9 (*) 100:69::79:χ=45 $\frac{51}{100}$, ἧς ὑπερεχούσης τὸν 54, ἐξητάσθω ὁ 8· 100:69::78:χ = 53 $\frac{82}{100}$· 8 ἄρα ἔςαι τὸ δεύτερον δεκαδικόν· ὑπὲρ δὲ τοῦ τρίτου γενέσθω ὡσαύτως, 1000:69::789:χ=54 $\frac{441}{1000}$, βασάνων δὲ ἑξῆς γινομένων, μόνος ὁ 2 εὑρίσκεται καλῶς ἔχων· οὐκοῦν ἡ μᾶλλον τῆς ἀληθοῦς ἐγγὺς γινομένη πέμπτη ῥίζα τοῦ 9970, ἐκτιθεμένη διὰ χαρακτήρων ἑπτά, ἔςιν 6,305782· ὃ δὴ πρόδηλον· καὶ γὰρ ὁ ζητούμενος λογάριθμος τοῦ προτεθέντος ἤδη ἀριθμοῦ ἔςιν = 0,799738 $\frac{958}{1000}$ (337), ἐλάσσων τοῦ λογαρίθμου 0,799739 τῆς ζητουμένης ῥίζης·

(*) Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν, δι' ἧς βασανίζεται ἕκαςον γραφησόμενον δεκαδικόν, ἔχει πρῶτον μὲν ὅρον τὴν 1 σὺν τοσούτοις 0, ὅσα εἰσὶ τὰ προςεθειμένα τῷ δοθέντι ἀριθμῷ 6305 δεκαδικὰ σὺν τῷ βασανιζομένῳ· δεύτερον δὲ ὅρον τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν τῶν λογαρίθμων· τρίτον δὲ τὰ προςτιθέμενα δεκαδικὰ σὺν τῷ βασανιζομένῳ.

ἐὰν δ᾽ ὗτος αὐξηθῇ μονάδι ἐν τῇ ἐχάτῃ τάξει τῶν δεκαδικῶν = 6,305783, ὁ αὐτȣ̃ εὑρεθεὶς (337) λογάριθμος = 0,799739 $\frac{37}{100}$ ὑπερέξει τὸν τῆς ζητȣμένης ῥίζης λογάριθμον.

Ἵν᾽ ἄρα γνωθῇ εἰ μήτις ἀπάτη παρενέπεσε τὰ δεκαδικὰ τιθεμένοις, ἀρκεῖ σκοπεῖν, εἰ ὁ τȣ̃ ὁλικȣ̃ ἀριθμȣ̃ εὑρεθεὶς λογάριθμος μὴ εἴη ἐλάσσων τȣ̃ πεμπτημορίȣ (ἐπὶ τȣ̃ ἐν χερσὶν ἀμέλει ὑποδείγματος) τȣ̃ λογαρίθμȣ τȣ̃ προβληθέντος βαθμȣ̃, καὶ εἰ τȣ̃ ἀριθμȣ̃ τȣ̃δε αὐξηθέντος μονάδι, ὁ κατ᾽ αὐτὸν λογάριθμος μὴ εἴη μείζων τȣ̃δε τȣ̃ πεμπτημορίȣ.

361. Βȣλομένοις δὲ ἐξαγαγεῖν ῥίζαν ἀριθμȣ̃ μείζονος τῶν ἐν τοῖς κανονίοις, τὴν κυβικὴν, φέρ᾽ εἰπεῖν, τȣ̃ 89700 950, ζητητέον τὸ πρῶτον τὸν αὐτȣ̃ λογάριθμον (338), = 7,952796 $\frac{666}{1000}$, ȣ̃ τριτημόριον ὅτι ἔγγιςα = 2,650 932 $\frac{22}{100}$ (*)· αὐξȣμένȣ δὲ ἑξῆς μονάδι τȣ̃ κατὰ τόδε τὸ τρίτον χαρακτηριςικȣ̃, ἔςαι 3,65 κτ. λογάριθμος χεδόντι τοῦ 4476· ἀποκοπέντος δ᾽ ἐκ δεξιῶν τȣ̃δε τοῦ ἀριθμοῦ ἑνὸς δεκαδικοῦ, διὰ τὴν τῷ χαρακτηριςικῷ προςεθεῖσαν μονάδα, ἀποτελεῖται 447,6· τέλος δὲ ληφθήσεται ὁ τοῦδε τοῦ καινοῦ ἀριθμοῦ λογάριθμος = 2,650890, ἐλάττων τοῦ τῆς ῥίζης ἀληθοῦς λογαρίθμου 2,650932 $\frac{22}{100}$ τῇ διαφορᾷ 42 $\frac{22}{100}$. Τῆς δὲ τῶν μεταξὺ 44760, καὶ 44770 λογαρίθμων διαφορᾶς οὔσης 97, γένοιτ᾽ ἂν ἐνταῦθα 10 : 97 :: 9 : x (360)· ἐπαναληφθείη δὲ τὰ τῆς πράξεως, ὥς περ ἐπὶ τοῦ πρώτου ὑποδείγματος, ὀλιγωρουμένης ἀεὶ τῆς τοῦ x δυνάμεως τῆς ὑπερκειμένης τοῦ 42 $\frac{22}{100}$.

(*) Διαιρῶ τὸν τȣ̃ $\frac{66}{100}$ ἀριθμητὴν, ἵνα γίνηται καὶ τὸ τρίτον τȣ̃ κλάσματος δεκαδικὸν (Ἀριθ. 222).

362. Ἐν δὲ τοῖς καθόλυ ὑπολογισμοῖς, ὅπως ἂν εἴη χρηςέον τοῖς λογαρίθμοις, ἴδωμεν διὰ βραχέων· αὐτίκα ὖν ἡ λέξις λογάριθμος τῷ λ σημαίνεται προτιθεμένῳ τῆς ποσότητος, ἧς ἐςι λογάριθμος· οἷον λα τὸν τῦ α ἐμφαίνει λογάριθμον· λχ, τὸν τῦ χ, κτ. ἐπεὶ δὲ οἱ λογάριθμοι δεικταί εἰσι βαθμῶν (313), τοῖς τῶν δεικτῶν ἰδιώμασι τὸν νῦν προσέχοντες ὑποσυνάψομεν τὰ ἐφεξῆς· ἐὰν τοίνυν παραγόμενον ζητῆται ἐκ πολλῶν ποσοτήτων, ἐκδηλωθῆναι δύναται διὰ τῆς τῶν λογαρίθμων προσθέσεως· ὕτως οὖν αβγ ἐκδηλωθῆναι δύναται διὰ λα+λβ+λγ, ὁ 3γδ λογαριθμικῶς ἂν παραςαίη διὰ λ3+λγ+λδ· τῆς δὲ πολυωνύμυ ποσότητος νμ+α —χ δηλωθήσεται ὕτω λ (νμ+α—χ), ἧπυ δῆλον· ἡ δὲ διαίρεσις τῶν ποσοτήτων λογαριθμικῶς δι' ἀφαιρέσεως παρίςαται· οἷον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ παραςαθῆναι λογαριθμικῶς δύναται λα — λβ (55)· ἡ δὲ ποσότης $\frac{\alpha\mu}{\rho}$ παραςαθῆναι δύναται ὕτω λα+λμ—λρ· τὸ δὲ $\frac{\gamma\delta}{\nu\rho}$ ὕτω (λγ +λδ) — (λν+λρ)· τυτέςι τὺς λογαρίθμυς τῶν ποιητῶν τῦ διαιρέτυ συνάπτοντες, ἀφαιρῦμεν ἀπὸ τῦ ἀθροίσματος τῶν κατὰ τὺς ποιητὰς τῦ διαιρετέυ λογαρίθμων· τὸ δὲ $\frac{\beta\zeta-\mu\rho}{2\nu}$ ὕτω λ (βζ—μρ) — (λ2+λν).

363. Ἐπειδὴ ποσότητες εἰς βαθμοὺς ἐξαίρονται, πολλαπλασιαζομένων τῶν τῶν ποσοτήτων δεικτῶν ἐπὶ τὸν τῶν βαθμῶν δείκτην (82)· ἐὰν α ὑψωτέον προκέηται ἐπὶ τὸν δεύτερον βαθμὸν λογαριθμικῶς, δηλωθήσεται διὰ τῦ τύπυ 2λα· τὸν δὲ χ^3 δηλώσει ὁ τύπος 3λχ· τὸ

δὲ χ^{ν} ὁ νλχ· τὸν δὲ $\alpha^{\nu-2}$ ὁ νλα — 2λα· ἔστι γὰρ $\alpha^{\nu-2}=\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{2}}$ (163)· τὸ δὲ $\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{2}}$ λογαριθμικῶς ἂν παρασταίη λνα — 2λα (362)· ἐκ δὲ τούτων καὶ ἕτερά τινα σχήματα κατανοῆσαι δυνάμεθα· οἷον τὴν $\alpha^{\nu-\mu}\chi\omega$ λογαριθμικῶς παρίστησιν ἡ $\nu\lambda\alpha - \mu\lambda\alpha + \lambda\chi + \lambda\omega$· τὴν δὲ $\alpha^{\nu}\chi^{3-\nu}\mu$ ἡ $\nu\lambda\alpha + 3\lambda\chi - \nu\lambda\chi + \lambda\mu$· τὴν δὲ $\alpha^{\nu}\mu^{-3}$ ἡ $\nu\lambda\alpha - 3\lambda\mu$· ἔστι γὰρ $\alpha^{\nu}\mu^{-3}=\frac{\alpha^{\nu}1}{\mu^{3}}=\frac{\alpha^{\nu}}{\mu^{3}}$ (149)·

τὴν $\chi^{\frac{3}{4}}$ λογαριθμικῶς ἐμφαίνει ἡ $\frac{3}{4}\lambda\chi=\frac{3\lambda\chi}{4}$, ὃ ἔστι πολλαπλασιαστέον τὸν τοῦ χ λογάριθμον ἐπὶ 3, τὸν δὲ παραγόμενον διαιρετέον διὰ 4, καὶ τοῦ προκύπτοντος λογαρίθμου ζητητέον τὸν ἀριθμόν, ὁρισθείσης δήπου πρότερον τῆς δυνάμεως τοῦ χ· ἔστω γὰρ $\chi=36$· οὐκοῦν $\chi^{\frac{3}{4}}=36^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{36^{3}}$ (219)· καὶ λογαριθμικῶς $\frac{3\lambda.36}{4}$· ἐπεὶ δὲ ἐκ τῶν κανονίων ἔστι $\lambda 36 = 1,5563025$, ὃς πολλαπλασιασθεὶς μὲν ἐπὶ 3 ποιεῖ 4,6689075, διαιρεθεὶς δὲ διὰ 4, δίδωσι πηλίκον 1,1672268, ᾧτινι ἀντιστοιχεῖ ἐν τοῖς κανονίοις ἀριθμὸς 14,7· ἄρα $36^{\frac{3}{4}}$, ἢ $\sqrt[4]{36^{3}} = 14,7$

ὡσαύτως ὁ τύπος $\frac{\chi^{\nu}}{\mu}$ λογαριθμικῶς ἂν ἐκτεθείη $\frac{\nu\lambda\chi}{\mu}$, καὶ $(\nu\mu+\rho\chi)^{\frac{3}{4}}$ ἐκτεθείη $\frac{3}{4}\lambda(\nu\mu+\rho\chi)$ κτ.

364. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Γεωμετρικῆς προόδου δοθέντος τοῦ πρώτου ὅρου α, καὶ τοῦ ἐσχάτου ω, καὶ τοῦ πηλίκου μ, εὑρεῖν λογαριθμικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων χ

ΛΥΣΙΣ. Ἔστιν $\omega=\alpha\mu^{\chi-1}$ (262)· ὃ λογαριθμικῶς ἂν ἐκτεθείη (362)

$$\begin{array}{l} \lambda\omega=\lambda\alpha+\chi\lambda\mu-\lambda\mu \\ \quad\;\; +\lambda\mu \qquad\quad +\lambda\mu \\ \hline \end{array}$$

$$\lambda\omega + \lambda\mu = \lambda\alpha + \chi\lambda\mu \quad (\text{Α'ριθ. 13})$$
$$-\lambda\alpha \qquad -\lambda\alpha$$

$$\lambda\omega + \lambda\mu - \lambda\alpha = \chi\lambda\mu \quad (\text{Α'ριθ. 14})$$

διαιρέσει διὰ λμ

$$\frac{\lambda\omega + \lambda\mu - \lambda\alpha}{\lambda\mu} = \frac{\chi\lambda\mu}{\lambda\mu} \quad (219)$$

εἴτ' ὖν $\dfrac{\lambda\omega + \lambda\mu - \lambda\alpha}{\lambda\mu} = \chi$

τῦτ' ἔςι $\dfrac{(\lambda\omega - \lambda\alpha)}{\lambda\mu} + \dfrac{\lambda\mu}{\lambda\mu} = \chi$, ταυτὸν εἰπεῖν

$\dfrac{(\lambda\omega - \lambda\alpha)}{\lambda\mu} + 1 = \chi$· τύπος λογαριθμικὸς τῦ ζητυμένυ ἀριθμῦ τῶν ὅρων χ. ἔςω ὖν $\alpha = 2$, ϗ $\omega = 1458$, ϗ $\mu = 3$· ἔςαι ὖν κατὰ τὸν ἤδη ἐξενεχθέντα τύπον $\chi = \dfrac{(\lambda.1458 - \lambda 2)}{\lambda 3} + 1$· ἔςι δὲ ἐκ τῶν λογαριθμικῶν κανονίων

$$\lambda.1458 = 3{,}1637575$$

ὁ δὲ ἀφαιρεθησόμενος $\lambda.2 = 0{,}3010300$

$$2{,}8627275$$

ἔςι δὲ $\lambda.3 = 0{,}4771212$· διῃρήσθω τοίνυν 2,8627275 διὰ 0,4771212

$$\begin{array}{l|l} 28627275 & 6 \\ 4771212 & \end{array}$$

πηλίκον ὖν πρόεισιν 6, ἀλογυμένυ τῦ λειψάνυ 5· ὐ γὰρ ἂν ἐπ' ἀκριβὲς εὑρεθείη πηλίκον ἐν τοῖς λογαρίθμοις. ὐκῦν $6 + 1 = \chi =$ τῷ ζητυμένῳ τῶν ὅρων ἀριθμῷ· ὐκῦν οἱ μὲν ὅροι τῆς προόδυ εἰσὶν 7· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει ὕτω ∺ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458· ἐκ τύτυ δὴ τοῦ προβλήματος, ᾧ ὅμοια, εἴπῃ παρείκοι, συστήσειέ τις, ὅσ' ἂν βούληται, ἡλίκη ἡ τῶν λογαριθμικῶν τύπων χρῆσις, κατάδηλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ μεγεθῶν συμμέτρων καὶ ἀσυμμέτρων.

365. Πᾶσα μὲν ποσότης δυναμένη δι' ἀριθμοῦ εἴτε ὁλοσχεροῦς, εἴτε κλασματώδους παρίστασθαι, λογικὴ ποσότης καλεῖται, οἷον 4 ὀργυιαί, $\frac{2}{3}$ ὀργυιᾶς· τοὐναντίον δὲ ἡ διὰ μηδενὸς ἀριθμοῦ ἐκτιθεμένη, ἄλογος, ἢ ἄρρητος ὀνομάζεται· τοιαῦται εἰσίν, ὡς δειχθήσεται, αἱ ῥίζαι πάντων τῶν ἀριθμῶν 2, 3 κτ, οἵτινες οὐκ εἰσὶ βαθμοὶ ἐντελεῖς ἀφ' ὁλοσχεροῦς ἀριθμοῦ.

366. Δύω μεγέθη πρὸς ἄλληλα παραβαλλόμενα, σύμμετρα μὲν ἀλλήλοις λέγονται, ἢ ἐν λόγῳ, ὃν ἔχει ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ὅταν ὁ λόγος αὐτῶν ἢ τὸ πηλίκον ἀκριβῶς ἐκτίθεσθαι ἔχῃ δι' ἀριθμοῦ ὁλοσχεροῦς, ἢ κλασματώδους· τοὐναντίον δέ, ἀσύμμετρα, ἢ ἐν λόγῳ ἀρρήτῳ, ὅταν ὁ λόγος αὐτῶν διὰ μηδενὸς ἔχῃ ἀριθμοῦ ἐκδηλοῦσθαι· τοιαύτη ἐστὶ πᾶσα ῥίζα βαθμοῦ ἀτελοῦς, παραβαλλομένη πρὸς αὐτὸν τὸν βαθμόν· οὕτως οὖν $\sqrt[2]{2}$ καὶ 2, ἢ $\sqrt[2]{2}$ καὶ 3 εἰσὶ ποσὰ ἀλλήλοις ἀσύμμετρα, ἢ ἐν λόγῳ ἀρρήτῳ.

Ἀλλ' εἰ καὶ βαθμοὶ δύω ἀτελεῖς ἀλλήλοις εἰσὶν ἀσύμμετροι, αἱ ἄρρητοι αὐτῶν ῥίζαι οὐκ εἰσὶ παρὰ τοῦτο καὶ αὐταὶ ἀσύμμετροι· ἔστωσαν γὰρ δύω βαθμοὶ ἀτελεῖς 32, 50· ἐπεὶ οὖν δυνάμεθα θεωρεῖν τὸν μὲν 32 ὡς τὸ διπλοῦν τοῦ ἀπὸ 4 τετραγώνου, εἴτ' οὖν $4^2 \times 2$, τὸν δὲ 50 ὡς τὸ διπλοῦν τοῦ ἀπὸ 5 τετραγώνου, εἴτ' οὖν $= 5^2 \times 2$, ἄρα ῥίζα μὲν τοῦ 32 ἔσται $4 \times \sqrt{2}$, ἡ δὲ τοῦ 50, $5 \times \sqrt{2}$· φημὶ οὖν ὡς αὗται αἱ δύω ἄῤῥητοι ῥίζαι $4 \times \sqrt{2}$, $5 \times \sqrt{2}$, εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας σύμμετροι· εἰσὶ γὰρ δύω γινόμενα, οἷς κοινὸς ὁ $\sqrt{2}$ παράγων· ἄρα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχουσιν, ὃν οἱ ἕτεροι παράγοντες 4, καὶ 5, εἴτ' οὖν ἐστι $4 \times \sqrt{2} : 5\sqrt{2} :: 4 : 5$ (306).

367. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄.** *Ἐὰν ποσὸν, τέλειος βαθμὸς ὑπάρχον, πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕτερον ποσὸν, ὑπάρχον καὶ αὐτὸ βαθμὸς τέλειος, ἔσται καὶ τὸ γινόμενον ἐξ αὐτῶν βαθμὸς αὐτοῖς ὁμοταγής.*

ΔΕΙΞΙΣ. Καὶ γὰρ $\alpha^2\beta^2$ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω τετραγώνων α^2, β^2, ἐστι καὶ αὐτὸ τετράγωνον τέλειον· εἴγε ἔχει ῥίζαν τετραγωνικὴν τελείαν τὴν $\alpha^{\frac{2}{2}}\beta^{\frac{2}{2}} = \alpha\beta$· καὶ αὖ $\alpha^3\beta^6$ γινόμενον ὑπὸ τῶν δύω κύβων α^3, β^6 καὶ αὐτό ἐστι κύβος ἐντελὴς ἔχων ἐντελῆ κυβικὴν ῥίζαν τὴν $\alpha^{\frac{3}{3}}\beta^{\frac{6}{3}} = \alpha\beta^2$· ἐν γένει δὲ, ἐὰν α^μ καὶ β^ν ὑποτεθῶσι δύω βαθμοὶ ὁμοταγεῖς π, ὥσπερ ἡ αὐτῶν ὁμοβάθμιος ἐντελὴς ῥίζα λαμβάνεται διὰ τῶν $\alpha^{\frac{\mu}{\pi}}$, καὶ $\beta^{\frac{\nu}{\pi}}$ (124) ὡσαύτως τοῦ ὑπ' αὐτῶν γινομένου $\alpha^\mu\beta^\nu$ ἔσται ἐντελὴς ὁμοβάθμιος ῥίζα ἡ $\alpha^{\frac{\mu}{\pi}}\beta^{\frac{\nu}{\pi}}$ Ο. Ε. Δ.

368. **ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄.** *Ἐὰν βαθμὸς ἐντελὴς ἐπὶ βαθμὸν ὁμοταγῆ ἀτελῆ πολλαπλασιασθῇ, τὸ γινόμενον οὐ δύναται εἶναι βαθμὸς τέλειος ὁμοταγής.*

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω α^μ βαθμὸς ὁστισοῦν τέλειος καὶ β^ν βαθμὸς αὐτῷ ὁμοταγὴς ἀτελῶς ἔχων, καὶ π δείκτης τοῦ βαθμοῦ· φημὶ δὴ, ὡς ἐνταῦθα τὸ γινόμενον $\alpha^\mu\beta^\nu$ οὐκ ἂν εἴη βαθμὸς π ἐντελής· ἔςω γάρ· οὐκοῦν ἔςαι ῥίζα τελεία ἡ $\alpha^{\frac{\mu}{\pi}}\beta^{\frac{\nu}{\pi}}$· τουτὶ δὲ τοῦ γινομένου διὰ $\alpha^{\frac{\mu}{\pi}}$ διαιρεθέντος, προκύψει $\beta^{\frac{\nu}{\pi}}$ ῥίζα ἐντελὴς τοῦ β^{ν} βαθμοῦ· ὑψωθεῖσα οὖν αὕτη ἐπὶ τὸν π βαθμὸν ἔςαι $\beta^{\frac{\nu\pi}{\pi}} = \beta^{\nu}$, βαθμὸς ἐντελὴς (82) κατὰ τῆς ὑποθέσεως. Ο. Ε. Δ.

369. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τετράγωνος ἀριθμὸς οὐκ ἂν εἴη διπλοῦς, τριπλοῦς, πενταπλοῦς κτ. ἑτέρου τετραγώνου· ἢ πολλαπλασιασθέντος τοῦ ἐλάσσονος τετραγώνου ἐπὶ 2, 3, 5 κτ, ἀτελεῖς τετραγώνους, προκύψει ὁ μείζων τετράγωνος, ὡς ἐντελής, ὅπερ ἄτοπον (368)· κύβος δὲ ἀριθμὸς οὐ δύναται εἶναι διπλοῦς, τριπλοῦς, τετραπλοῦς ἑτέρου κύβου· ἄλλως γὰρ πολλαπλασιασθέντος τοῦ ἐλάσσονος ἐπὶ τοὺς ἀτελεῖς κύβους 2, 3, 4 κτ, πορισθήσεται γινόμενον κύβος τέλειος, ὅπερ ἄρτι ἀδυνάτως ἔχον ἐξήλεγκται· ἐν γένει δὲ „ἅπας βαθμὸς τέλειος οὐκ ἂν εἴη πολ„λαπλοῦς ἑτέρου ἀριθμοῦ, ὅτι μὴ βαθμοῦ τελείου ἑαυτῷ ὁ„μοταγοῦς.“

370. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἅπας βαθμὸς ἀφ᾽ οὑτινοσοῦν ἀριθμοῦ οὐ διαιρεῖται δι᾽ ἀριθμῶν πρώτων ἄλλων, εἰμὴ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἀφ᾽ οὗ ὡς ῥίζης παρῆκται.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω πᾶς ἀριθμὸς ἐκτεθειμένος διὰ αβ, ὃς ὑποτεθείσθω μὴ ἔχειν ἄλλους ἀριθμοὺς διαιρέτας, εἰμὴ τοὺς δύω παράγοντας α, β (ἐξαιρουμένης μέντοι ἀεὶ τῆς μονάδος)· φημὶ δὴ ὡς ὁ τοῦ αβ κύβος αααβββ, φέρ᾽ εἰπεῖν, οὐκ ἔχει ἄλλους διαιρέτας, εἰμὴ τοὺς αὐτοὺς α, β· ἐξῃρήσθω δὲ, ὅτι διὰ αα, καὶ ββ διαιρεῖται· οὗτοι γὰρ προδήλως, πολλαπλοῖ ὄντες, τοῦ πρώτου εἶναι ἐξίςανται. Ο. Ε. Δ.

371. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** Δύω μεγέθη α ϗ β κοινῦ ἀμοιρῦντα διαιρέτυ (πλὴν τῆς μονάδος), εἰς ὃν ἂν ὑψωθῶσι βαθμὸν, κοινὸν διαιρέτην ὐχ ἕξυσιν· ἅπας γὰρ δήπυ διαιρέτης ἐςὶν ἀριθμὸς πρῶτος, ἢ πρώτυ πολλαπλῦς· ἀλλ' εἰς ὃν ἂν ἕκαςον τύτων ὑψωθῇ βαθμὸν, ὐχ' ἕξυσι διαιρέτην ἀριθμὸν πρῶτον, ὔτε μὴν πρώτυ πολλαπλῦν (370). ἄρα οἱ δύω ὗτοι ἀριθμοὶ κοινὸν διαιρέτην ὐχ' ἕξυσι.

372. **ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'.** Ἅπαν κλάσμα τῆς μονάδος ἔλαττον, ἢ μεῖζον μὲν, μὴ δυνάμενον δὲ ἐπ' ἀκριβὲς εἰς ὁλοχερῆ ἀναχθῆναι, ἐφ' ὃν ἂν ὑψωθῇ βαθμὸν, ὁλοχερεῖ ὐ μὴ ἐξισωθήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ. Καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον τὸ θεώρημα ἐπὶ κλασμάτων τῆς μονάδος ἐλασσόνων (87). ἀλλ' ὑπὲρ τῶν μονάδος μὲν μειζόνων, ἀναχθῆναι μέντοι λειψάνυ δίχα μὴ δυναμένων ἐφ' ὁλοχερῆ· ά. ἐξέςαι τὸ κλάσμα εἰς ἁπλυςέρυς ὅρυς ἀγαγεῖν, καίτοι μὴ παρεχομένυς δίχα τυ λειψάνυ ὁλοχερῆ ποσότητα· ὡς $\frac{\alpha}{\beta}$· β'. ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐξ ὑποθέσεως δι' ὁλοχερῦς ποσῦ ἐκδηλωθῆναι ὐ δύναται, ἐπεὶ β τὸ α ἄνευ λειψάνυ διελεῖν ὐ δύναται, ὡς μὴ ὂν κοινὸς διαιρέτης ἑαυτῦτε ϗ τῦ α· ἀλλὰ ϗ ἐφ' ὁντιναῦν ὑψωθέντα βαθμὸν α ϗ β, κοινὸν διαιρέτην ὐχ' ἕξυσιν (371). ἄρα ὐ δέποτε τὸ β, ἐφ' ὃν ἂν ὑψωθῇ βαθμὸν, διαιρεῖν δυνήσεται ἄνευ λειψάνυ τὸ α ἐπὶ τὸν αὐτὸν ὑψωθέν· ἄρα. Ο. Ε. Δ.

373. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.** Δι' ὐδενὸς ἄρα ἀριθμῦ ἐκτεθῆναι δύναται ἡ ῥίζα παντὸς ὁλοχερῦς ποσῦ, ὃ μὴ εἴη βαθμὸς ἐντελὴς ποσότητος ὁλοχερῦς· αὕτη γὰρ ἡ ῥίζα ὐκ ἂν εἴη ὔτε ὁλοχερὴς (εἰ γὰρ ἦν, πολλαπλασιαθεῖσα

ἐφ᾽ ἑαυτὴν παρεῖχεν ἂν ἐντελῆ βαθμὸν, κατὰ τῆς ὑποθέσεως), ὔτε κλάσμα τῆς μονάδος ἔλαττον, οὔτε μεῖζον μὲν τῆς μονάδος, ὁλοσχερεῖ δὲ ἐπ᾽ ἀκριβὲς μὴ ἐξισύμενον (327).

374. ΠΟΡΙΣΜΑ Β᾽. Ἡ ῥίζα παντὸς κλάσματος ἀναχθέντος ἐφ᾽ ἁπλυςέραν ἔκθεσιν, ἐὰν ὅ, τε ἀριθμητὴς αὐτῦ ᾒ ὁ παρονομαςὴς μὴ ὦσι βαθμοὶ ἐντελεῖς ποσῦ ὁλοσχερῦς, ἔςαι ᾒ αὐτὴ ἄλογος.

ΚΕΦΑΛ. ΔΕΚΑΤΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ διαφόρυ διαθέσεως καὶ συντάξεως.

375. Ἐὰν ζητηθῇ ποσαχῶς ἂν διατεθεῖεν ποσάτινα δεδομένα συνάματε λαμβανόμενα, ᾒ ἅπαξ ἕκαςον ἐν ἑκάςῃ διαθέσει, τῦτὶ καλέισθω μεταλλαγὴ διαθέσεως· ἐὰν δὲ ζητηθῇ ποσαχῶς ἂν συζευχθεῖεν ποσάτινα, ἀνὰ δύω, ἀνὰ τρία κτ., λαμβανόμενα, τῦτὶ ὀνομαζέσθω τάξις.

376. Διὰ μὲν τῆς πρώτης μεθόδυ, δύω μεγέθη α, β διχῶς ἂν διατεθῆναι ἔχοιεν, αβ, βα· τρία δὲ α, β, γ, ἑξαχῶς· εἴγε τιθεμένυ ἐκ διαδοχῆς ἐν ἀρχῇ ἑκάςυ τῶν τριῶν μεγεθῶν, τὰ λοιπὰ δύω ἐν ἑκάςῃ περιπτώσει δύω ἀμείψυσι διαθέσεις· οἷον· αβγ, αγβ, βαγ, βγα, γαβ, γβα· τέσσαρα δὲ, α, β, γ, δ, ἀμείψυσιν 24 διαθέσεις· ἑκάςυ γὰρ ἐν ἀρχῇ τῆς διαθέσεως κειμένυ κατὰ διαδοχὴν, ἄλλα τρία ἐν ἑκάςῃ περιπτώσει ἀμείψυσι διαθέσεις 6. ἔςι δὲ $6 \times 4 = 24$. ὡσάυτως πέντε μεγέθη τὰ α, β, γ, δ, ε, ἀμειβυσι διαθέσεις $24 \times 5 = 120$, ᾒ ὕτως ἐφεξῆς· ἐντεῦθεν ἄρα ἐν γένει.

377. Α΄. „Μεγέθη ἀριθμοῦ ὑπερτέρου ἀμείβουσι το„σάσδε διαθέσεις, ὅσας δηλοῖ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δια„θέσεων, ὧν ἐπιδέχονται μεγέθη ἀριθμοῦ, ἀμέσως ἐ„λάσσονος, καὶ αὐτοῦ τοῦ ὑπερτέρου ἀριθμοῦ". οὕτως ὁ ἀριθμὸς τῶν δυνατῶν διαθέσεων τριῶν μεγεθῶν ἐστὶ τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν δυνατῶν διαθέσεων δύω μεγεθῶν, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 3, = 6, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

378. Β΄. Ἵν' εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν διαθέσεων, ἃς ἀμείβουσιν ὁσαδηποτοῦν μεγέθη, εἰλήφθω ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1 . 2 . 3 . 4 . κτ., καὶ γεγράφθω 1 μὲν ὑπὸ τὴν 1, ἑξῆς δὲ τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ δευτέρου μείζονος ὅρου 2, καὶ τοῦ πρώτου ἐλάττονος ἀριθμοῦ 1, εἴτ' οὖν 2, γεγράφθω ὑπὸ τὸν 2· τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τοῦ τρίτου ἀριθμοῦ 3 καὶ τοῦ δευτέρου 2, εἴτ' οὖν 6, γεγράφθω ὑπὸ τὸν 3· τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ἐφεξῆς ἀνωτέρου ἀριθμοῦ 4, καὶ τοῦ κατωτέρου 6, εἴτ' οὖν $4 \times 6 = 24$ γεγράφθω ὑπὸ τὸν 4, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως· καὶ δὴ ἕκαστος ὑποκείμενος ἀριθμὸς δηλώσει τὰς δυνατὰς διαθέσεις τοῦ ὑπερκειμένου οὕτως.

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	6	24	120	720	5040	40320

9	10	11	12
362880	3628800	39916800	479001600

379. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Ὀνόματος κυρίου δοθέντος, ἐκ τῶν ἐν αὐτῷ γραμμάτων εὑρεῖν ἅπαντας τοὺς δυνατοὺς ἀναγραμματισμούς.

ΛΥΣΙΣ. Ζητοῦνται ἐνταῦθα πᾶσαι αἱ λέξεις χρήσιμοί τε καὶ ἄχρηστοι, ἃς ἀποτελοίη τὰ ὀνόματός τινος γράμματα διὰ τῶν ἐν αὐτοῖς διαφόρων διαθέσεων· ἔστω οὖν τὸ ὄνομα Δῆμος, οὗπερ, ἐπεὶ περιέχει γράμματα

5, αἱ διαθέσεις ἔσονται 120· τούτων οὖν διακριτέον τὰς ἐν χρήσει τῶν ἀχρήστων λέξεων· καὶ αἱ ἐν χρήσει δηλώσουσι πάντας τοὺς δυνατοὺς τοῦ ὀνόματος ἀναγραμματισμούς.

380. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν ποσαχῶς ἄντις διάθειτο ἐπὶ τραπέζης δώδεκα ἐστιωμένους.

ΛΥΣΙΣ. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης προόδου, κατίδοι τις ἄν, ὃ ἂν ἀπίθανον δόξειεν, εἰμὴ προὐδέδεικτο, ὡς οὕτοι κατακλιθῆναι δυνήσονται κατὰ 479001600 τρόπους.

381. Διὰ δὲ τῆς κληθείσης μεθόδου τῆς συντάξεως (375) 2 μεγέθη τὰ α, β, ἀνὰ δύω λαμβανόμενα, συντάξεις ἀποτελοῦσι τέσσαρας, αα, ββ, αβ, βα· τρία δὲ σὺν δύω λαμβανόμενα, ἐννέα, α, β, γ· αα, ββ, γγ, αβ, αγ, βα, βγ, γα, γβ· ἐν γένει δὲ „τῶν μεγεθῶν, ἀνὰ δύω μὲν λαμ„βανομένων, οἱ συνδυασμοὶ ἔσονται ἰσάριθμοι τῷ τετρα„γώνῳ τῷ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μεγεθῶν·“ τὰ δὲ τρία α, β, γ, σύντρια λαμβανόμενα, ἀποτελοῦσι συντάξεις 27 τάς δε ααα, ααβ, ααγ, αββ, αβγ, αγγ, βαα, βαβ, βαγ, βββ, ββγ, βγγ· γαα, γαβ, γαγ· γββ, γβγ, γγγ· αβα, αγα, αγβ· ββα, βγα, βγβ· γγα, γβα, γγβ.

382. Ἐν γένει ἄρα „ποσῶν τινων μεγεθῶν δεδομέ„νων καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἐμφαίνοντος, καθ᾽ ὅσα συνταχθήσε„ται, αἱ δυναταὶ συντάξεις ἰσάριθμοι ἔσονται τῷ τῶν με„γεθῶν ἀριθμῷ, ὑψωθέντι εἰς βαθμὸν, οὗ δείκτης ἐστὶν ὁ ἀ„ριθμὸς ὁ ἐμφαίνων, καθ᾽ ὅσα συνταχθήσεται τὰ μεγέ„θη“· οὕτως οὖν 10 μεγέθη, φέρε, ἀνὰ 5 λαμβανόμενα, ἀποτελοῦσι συντάξεις τοσαύτας, ὅσας μονάδας περιέχει ὁ 10 εἰς πέμπτον ὑψωθεὶς βαθμὸν, εἴτ᾽ οὖν 100000· 15 δὲ μεγέθη, ἀνὰ 4 λαμβανόμενα, συντάξεις ἀποτελοῦσι $\overline{15}^4 = 50625$.