

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

## Περί Πολυέδρων.

470. Γωνία σερεά καλεῖται, ἣτις ἐκ τῆς συνδρομῆς τῶν κορυφῶν πλειόνων ἐπιπέδων γωνιῶν, ἀλλήλαις προσκεκλιμένων, συνίσταται· ταιαῖδε εἰσὶν αἱ τῶν πυραμίδων κορυφαί, αἱ τῶν πρισμαίων γωνίαι κτλ.

Αἱ σερεαὶ γωνίαι, αἱ ὑπὸ ἰσαριθμῶν ἢ ὡσαύτως κειμένων ἐπιπέδων γωνιῶν, ὧν αἱ ὁμόλογαι ἀλλήλαις ἴσαι, περιεχόμεναι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ.

Μέτρον γωνίας σερεᾶς ἐστὶ σφαῖρα, ὡς περ ἐπιπέδου κύκλος· διὸ ἐπινοητέον αἰ τὴν κορυφὴν τῆς σερεᾶς γωνίας κεῖσθαι ἐν τῷ κέντρῳ σφαίρας, ἥς ἡ ἀκτὶς πρὸς τὸ δοκῆν παραλαμβάνεται· τέτα δὲ τεθέντος, ἐκάστη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν τὴν σερεᾶν συνιστωσῶν, ἐν ἐπιπέδῳ ἔσεται κύκλος μεγίστος τῆς σφαίρας, ἢ μέτρον μὲν ἔξει τὸ αὐτὸ τόξον τὸ ὑπὸ τῶν σκελῶν αὐτῆς ἀπολαμβάνομεσαν, βάσιν δὲ τὴν χορδὴν τῆ καταμετρῆντος τόξου· μέτρον ἄρα σερεᾶς γωνίας ἐστὶ τὸ ἄθροισμα τῶν βηθμῶν τῶν τόξων, ἅπερ αἱ βάσεις τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ταύτην συνιστωσῶν ὑποτείνουσιν· ἐπεὶ δὲ ἐκάστη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν τὴν σερεᾶν συγκροτουσῶν κοινὰς ἔχει τὰς πλευρὰς πρὸς ἐκατέραν τῶν προσεχῶς κειμένων ἐπιπέδων γωνιῶν, δῆλον ὅτι ἢ τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων, τῶν τὰς ἐπιπέδους ταύτας γωνίας καταμετρῆντων ἀλλήλοις συζεύγνυνται, ὡς περ ἀμέλει ἢ αἱ αὐτῶν χορδαὶ, ἢ πολύγωνόντι συνισῶσιν, ὑπὸ τῆς ἐξ αὐτῶν συγκροτουμένης περιμέτρου περιεχόμενον, ὅπερ βάσις ἐστὶ τῆς σερεᾶς γωνίας.

471. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄.** Τριῶν τετάρτισον γωνιῶν ἐπιπέδων χρεῖα εἰς σύστασιν σφαιᾶς· τὸ γὰρ ἀπλύσατον τῶν πολυγώνων, τῶν βάσις εἶναι δυναμένω τῆς σφαιᾶς γωνίας, ἔσι τὸ τρίγωνον.

472. **ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄.** Τὴν μεγίστην τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν τὴν σφαιᾶν συνισωσῶν, ἐλάσσονα δεῖν εἶναι τῆ τῶν λοιπῶν ἀθροίσματος.

**ΔΕΙΞΙΣ.** Εἰ γὰρ εἴη ἴση, καὶ τὸ ταύτην καταμετρῆν τόξον τῆς σφαιᾶς ἴσον ἂν ἦν τῷ ἀθροίσματι τῶν τόξων τῶν τὰς λοιπὰς καταμετρῶντων· τύτῃ δὲ τεθέντος, τὰ λοιπὰ τόξα ἄλλως ἢκ ἂν ἐφικνοῖτο τῶν περάτων τῆ τὴν μεγίστην καταμετρῆντος γωνίαν, ὥσε ἀλλήλαις συνάπτεσθαι, ἢ συμπεσόντα ἐκείνω· ἅπαντα ἄρα τὰ τόξα ταῦτα, καὶ δὴ καὶ αἱ τῶν χορδαὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἂν εἶεν ἐπιπέδω, ὅπερ τῆ τῆς σφαιᾶς γωνίας καταμετρήσει διαμάχεται· πολλῷ μᾶλλον ἄτοπον τὸ τὴν μεγίστην τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν μείζονα τῆ τῶν λοιπῶν ἀθροίσματος ὑποτεθῆναι· ἔτω γὰρ ἕδὲ ἔχει ὅλως τὰ τόξα κατὰ τὰ αὐτῶν πέρατα ἀλλήλοις συνέρχεσθαι.

473. **ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄.** Τὸ ἀθροισμα ἀπασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν τὴν σφαιᾶν συνισωσῶν, ἐλάσσον εἶναι δεῖν ἢ  $360^\circ$ .

**ΔΕΙΞΙΣ.** Ἐὰν γὰρ ὑποτεθῆ ἴσον εἶναι  $360^\circ$ , τὰ τόξα τῆς σφαιᾶς, καὶ τὰς ἐπιπέδων γωνίας καταμετρεῖ συζευχθέντι ἀλλήλοις, μεγίστη κύκλι περιφέρειαν ἀκριβῶς συμπληρώσει, καὶ αἱ ἀπασῶν ἄρα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν κορυφαί, συγελθῆσαι ἀλλήλαις, ἔσονται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδω, καὶ ἡκιστὰ σφαιᾶν γωνίαν ποιήσασιν· ἔρα κτ. Ο. Ε. Δ.

474. **ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄.** Ἐὰν δύο σφαιαὶ γωνίαι Α, Β, ἐκ τριῶν ἐπιπέδων ἐκατέρα συνισάμεναι, τὰς δύο ἐπι-

πέδες Β, Δ ταῖς δυσὶν ἐπιπέδοις β, δ ἴσας ἔχωσιν ἑκατέραν ἑκατέρα, καὶ ἐπίσης ἀλλήλαις προσκεκλιμένας, καὶ ἡ τρίτη τῇ τρίτῃ ἴση ἔσται, καὶ αἱ σερραὶ αὐταὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

**ΔΕΙΞΙΣ.** Οὐσῶν γὰρ τῶν πλευρῶν ἀπασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἀλλήλαις ἴσων (ἔστι γὰρ ἡ σερραὶ γωνία ἐν κέντρῳ σφαίρας, ἧς ἐφικνύνται τῆς ἐπιφανείας αἱ πλευραὶ (470)), δῆλον ὅτι δι' αὐτὸ τῆτο καὶ διὰ τὸ ἐπίσης ὑποτιθεσθαι ἀλλήλαις προσκεκλιμένας τὰς δύο ἐπιπέδους γωνίας Β, Δ (ἐξαιρουμένης τῆς τρίτης) γωνίαν τινὰ ὁμῶς ποιῆσιν, ἀκριβῶς ἐν ἑαυτῇ τὴν ὑπὸ τῶν ὁμολόγων β, δ συνισαμένην χωρῆσαν· τὰ πάντα γὰρ ἴση ὑποτιθεται· αἱ κοίλαι ἄρα αὐταὶ γωνίαι ἔκ' ἂν εἶχον συγκλείεσθαι, εἴπερ ἄνισοι εἶεν αἱ ἕτεραι δύο ἐπίπεδοι γωνίαι· ἔσεται ἄρα ἀνάγκη τὰς δύο ταύτας σερραὶς Α, α ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

**475. ΣΧΟΛΙΟΝ.** Τῷ αὐτῷ τρόπῳ δειχθήσεται, ὅτι καὶ δύο σερραὶ γωνία, ὑπὸ τεσσάρων συνισάμεναι ἐπιπέδων, ἔχωσι τὰς τρεῖς ἐπιπέδους ταῖς τρισὶν ἴσας ἑκάστην ἑκάστη, καὶ ὡσαύτως κειμένας, καὶ ἡ τετάρτη τῇ τετάρτῃ ἔσεται ἴση, καὶ ἡ σερραὶ ὅλη ὅλη τῇ σερραῖ· τῆτο αὐτὸ κρατεῖ καὶ ἐπὶ τῶν σερραῶν γωνιῶν τῶν ὑπὸ 5, 6, 7, κτ. ἐπιπέδων συνισαμένων.

**476. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄.** Εἰς πολυέδρου σύστασιν τεσσάρων τὸλάχιστον ἐπιπέδων χρεία· τρία γὰρ ἐπίπεδα ἀλλήλοισι ὀκωσῆν συζευχθέντα τὴν σερραὶν ποιῆσι γωνίαν (471)· δεῖ ἄρα ἑνὸς ἔτι ἵνα τὸ χωρίον πανταχόθεν περικλειθῆ, καὶ διασάσῃς τρεῖς τὸ πολυέδρον οὕτως· ἄρα κτλ.

**477. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤ΄.** Πᾶν πολυέδρον ἢ δύναται ἔλαττες, ἢ τέσσαρας ἔχειν γωνίας.

**ΔΕΙΞΙΣ.** Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν τῆν σερραὶν γωνίαν

συνιστώντων ἐπιπέδων κενὸν ἀπολειπόμενον χωρίον ἔσι ὅλημα, τρεῖς τελάχισον ἔχον γωνίας· εἰ ἄρα περικλειωθῆ, τρεῖς σερεαὶ γωνίαι ἐντεῦθεν ἀναρῶσονται· τὸ πολυέδρον ἄρα τέτταρας σερεᾶς γωνίας ἔχειν ἐπάναγκες.

478. **ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ΄.** Πέντε μόνα εἰσὶ τὰ κανονικὰ πολυέδρα, τρία μὲν, ὧν τὰ ἐπίπεδα εἰσὶν ἰσοπλευρὰ τρίγωνα· ἐν δὲ, ἢ τὰ ἐπίπεδα τετράγωνα, ἢ ἐν, ἢ πεντάγωνα εἰσὶ κανονικά.

**ΔΕΙΞΙΣ.** Ἐπεὶ γὰρ εἰς σύσασιν σερεᾶς γωνίας τριῶν ἐπιπέδων χρεῖα (471)· ἢ σερεὰ γωνία ὑπὸ ἐπιπέδων, αἵπερ εἶεν ὁμῶς  $360^\circ$ , ἢκ ἂν ἔχει συσῆναι (473), δῆλον ὅτι πενταχῶς μόνον αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν κανονικῶν πολυγώνων, τὴν σερεὰν συνισῶσι γωνίαν· α'. ἐπεὶ ἢ τῆ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνία εἰσὶν  $60^\circ$ , τρεῖς ἄρα τῦτων ἀλλήλαις συνελθῆσαι γωνίαν σερεὰν  $= 180^\circ$  συνισῶσι, ἢ ἐπομένως ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων σερεὸν κανονικὸν συνίσταται, ὅπερ καλεῖται τετράεδρον· β'. τέτταρες γωνίαι ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίαν σερεὰν  $= 240^\circ$  ποιῶσιν· ὀκτῶ ἄρα τοιαύδε τρίγωνα, ἀλλήλοις συζευχθέντα, κανονικὸν σῶμα ὀκτάεδρον συνισῶσι· γ'. πέντε γωνίαι ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀλλήλαις συνελθῆσαι γωνίαν σερεὰν  $= 300^\circ$  συνισῶσιν· εἴκοσι ἄρα τοιούτων τριγώνων ἀλλήλοις συναφθέντων, ἀποφέρεται σερεὸν εἰκοσάεδρον καλούμενον· ὑπὸ γεμῆν ἕξ γωνιῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων γωνία σερεὰ ἢκ ἂν ἔχει συσῆναι· ἕξ γὰρ τοι ἐπίπεδοι τοιαῖδε γωνίαι  $360^\circ$  ποιῶσι· ἢ εἰσὶν ἄρα ἅπαντα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ (473)· δ'. ἢ τῆ τετραγώνου γωνία εἰσὶ μοιρῶν  $90^\circ$ · τρεῖς ἄρα συνελθῆσαι γωνίαι σερεὰν ποιῶσι μοιρῶν  $270^\circ$ · ἢ ἐπομένως ἐκ τετραγώνων ἕξ ἀποφέρεται σερεὸν, ὃ καλεῖται ἕξάεδρον, ἢ ἰδίῳ ὀνόματι κύβος· τέσσαρες μὲντοι

τοιαίδε γωνίαι σερεάν ἢ συνισῶσι· τετράκις γὰρ  $90^\circ$  εἰν ἴσον  $360^\circ$ · εἰ ἢ τῷ κανονικῷ πενταγώνῳ γωνία μοιρῶν εἰν  $180^\circ$ · τρεῖς ἄρα τύτων συναφθεῖσαι σερεάν γωνίαν ποιῶσι μοιρῶν  $324^\circ$ · ἐνθεντοὶ ἐκ πενταγώνων δώδεκα ἀποφέρεται σῶμα κανονικόν δωδεκάεδρον· τέτταρες δὲ τῷ πενταγώνῳ γωνίαι ποιῶσι μοίρας  $432$ , ἢ ἐπομένως σερεάν γωνίαν ἢ συγκροτῶσι· τέλος δὲ τῆς τῷ κανονικῷ ἑξαγώνῳ γωνίας ἑσῆς μοιρῶν  $120$ , τρεῖς ἅμα τοιαίδε ληφθεῖσαι ποιῶσι  $360^\circ$ · γωνία ἄρα σερεὰ ἐκ τύτων ἢ συσθῆσεται· ἢ δὴ ἢδ' ἐκ πλειόνων κανονικῶν ἑξαγώνων πολυέδρον· τάντων εἰσιν εἶπειν ἢ περὶ τῶν ἑπταγώνων, ὀκταγώνων κτλ· εἶδη ἄρα κανονικῶν σωμάτων, παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε, ἢ συσθῆσεται. Ο. Ε. Δ.

479. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τῷ πρωτοπείρω, τὰ περὶ τῶν κανονικῶν πολυέδρων ὧδε ρηθέντα μετιόντι, ἐπάναγκες ἔχειν ἀνά χειρας κανονικὰ πολυέδρα ἐκ χάρτου σερόυ, ἢ εἰς διάφορα ἐπίπεδα ἐκτετμημένῃ· ὅτω γὰρ ῥῆσα τὴν τῶν πολυέδρων κατασκευὴν μηχανήσεται.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Β'. ΤΟΜΟΥ.

# ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΙΩΔΗΣ.

Τῶν ἐν τῷ Β'. Τόμῳ περιεχομένων.



Σελ.

## ΣΤΜΒΟΛ. ΛΟΓ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ Β'.

Κεφάλαιον Θ'.	Περὶ λογαριθμῶν . . . . .	1
— — Ι'.	Περὶ μεγεθῶν συμμετρῶν καὶ ἀ- συμμετρῶν . . . . .	30
— — ΙΑ'.	Περὶ διαφορῆς διαθέσεως καὶ συν- τάξεως . . . . .	34

## ΣΤΜΒΟΛΙΚΟΤ ΛΟΓΙΣΜΟΤ ΤΜΗΜΑ Γ'.

Κεφάλαιον Α'.	Περὶ ἐξισώσεων ἐν γένει . . . . .	37
— — Β'.	Ἐκθεσις τῶν ἀρχοειδῶν μετα- χηματισμῶν . . . . .	40
— — Γ'.	Περὶ πρωτοβαθμίων προβλημάτων . . . . .	45
— — Δ'.	Προβλήματα τῆς Α'. βαθμ. ἐκ πλειόν. ἐξισ. . . . .	65
— — Ε'.	Περὶ ἐξισώσεων τῆς Β'. βαθμῆς . . . . .	81
— — ς'.	Περὶ συνθέτων ἐξισώσεων . . . . .	91
— — Ζ'.	Περὶ γενικ. τύπων τῶν ἐξισ. . . . .	101
— — Η'.	Περὶ ἀορίστων προβλημάτων . . . . .	133
— — Θ'.	Περὶ ἀπείρου ποσότητος . . . . .	139
— — Ι'.	Περὶ σειρῶν . . . . .	143

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Α'.

Κεφάλαιον Α'.	Ἀρχαὶ τῆς Γεωμ. καὶ περὶ γραμμῶν μῶν . . . . .	169
— — Β'.	Περὶ τῆς κύκλου . . . . .	175
— — Γ'.	Περὶ εὐθειῶν καθέτων καὶ πλαγίων . . . . .	185
— — Δ'.	Περὶ μέτρων τῶν γωνιῶν . . . . .	189
— — Ε'.	Παντοίων γωνιῶν ἐκτίμησις . . . . .	192
— — ς'.	Περὶ τῆς καθέτου . . . . .	195
— — Ζ'.	Περὶ παραλλήλων εὐθειῶν . . . . .	201
— — Η'.	Περὶ εὐθειῶν ἀναφερ. πρὸς τὸν κύκλον . . . . .	208
— — Θ'.	Περὶ δυνάμ. γωνιῶν τῶν ἐν τῷ κύκλῳ . . . . .	216

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Β΄.

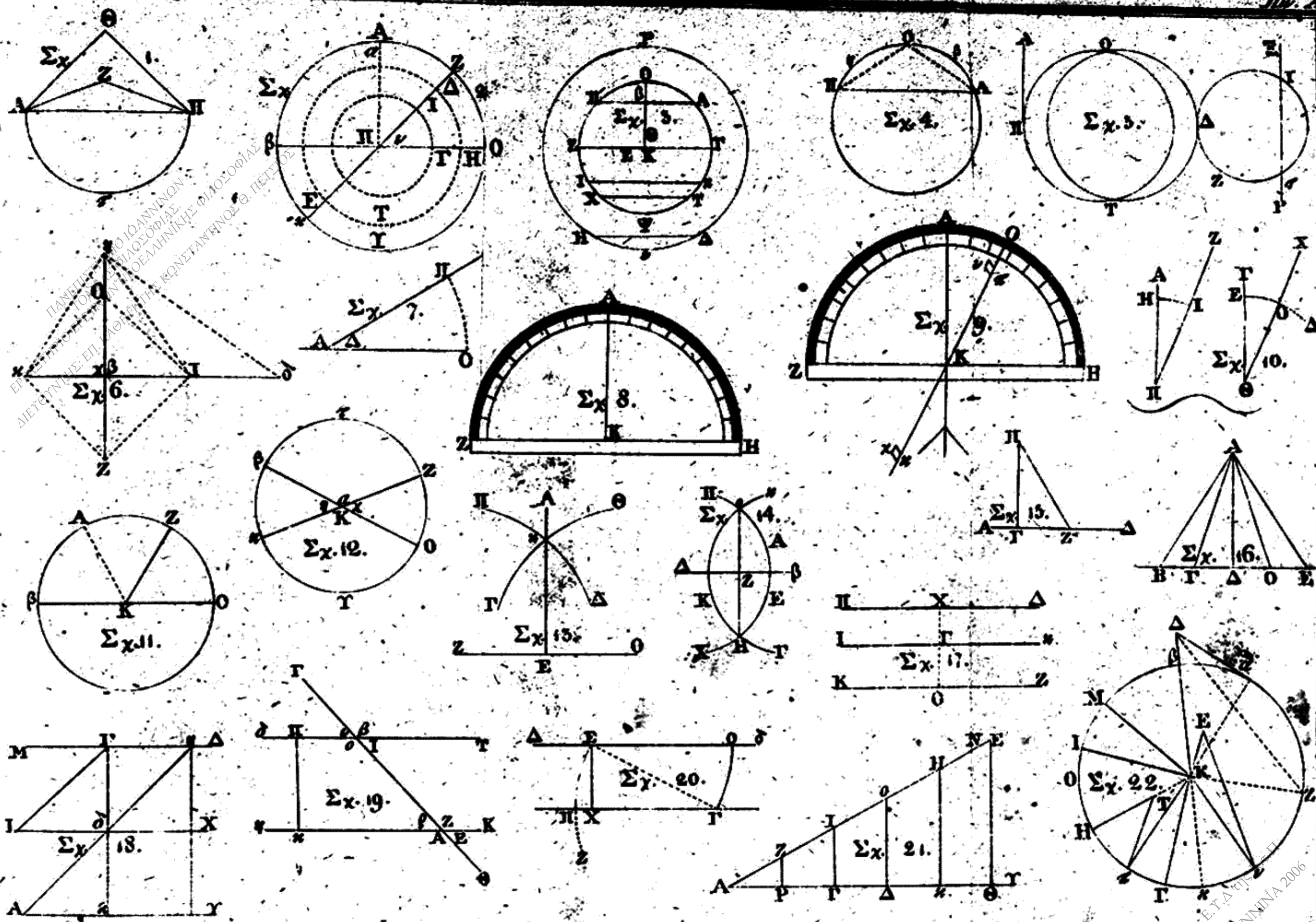
<b>Κεφάλαιον</b>		<b>Α΄. Περι σχημάτων . . . . .</b>	<b>226</b>
—	—	<b>Β΄. Περι τριγώνων . . . . .</b>	<b>228</b>
—	—	<b>Γ΄. Περι ὁμοίων τριγώνων . . . . .</b>	<b>234</b>
—	—	<b>Δ΄. Περι ἴσων τριγώνων . . . . .</b>	<b>235</b>
—	—	<b>Ε΄. Περι τετραπλεύρων . . . . .</b>	<b>239</b>
—	—	<b>ς΄. Περι πολυγώνων ἐν γένει . . . . .</b>	<b>244</b>
—	—	<b>Ζ΄. Περι τῆς δυνάμεως τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου . . . . .</b>	<b>251</b>
—	—	<b>Η΄. Περι καταμετρήσεως τῶν ἐπι- φανειῶν . . . . .</b>	<b>253</b>
—	—	<b>Θ΄. Περι ἐπιφανείας πολυγώνων . . . . .</b>	<b>261</b>
—	—	<b>Ι΄. Περι ἰσοπεριμέτρων σχημάτων . . . . .</b>	<b>264</b>

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Γ΄.

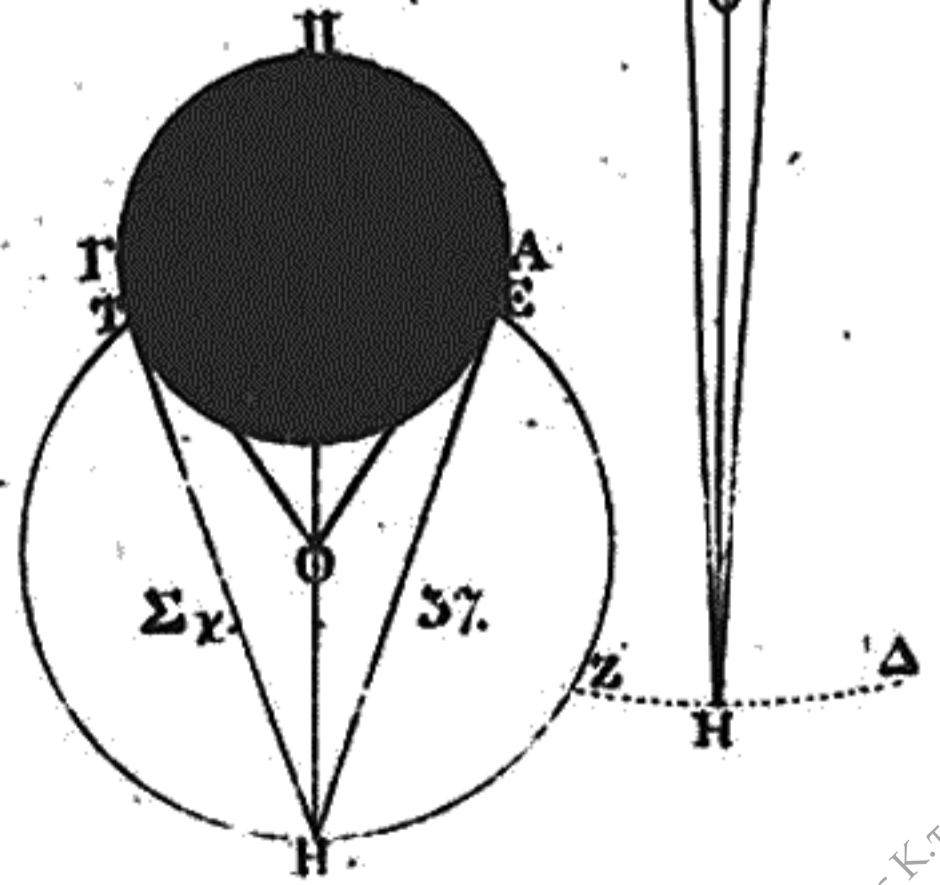
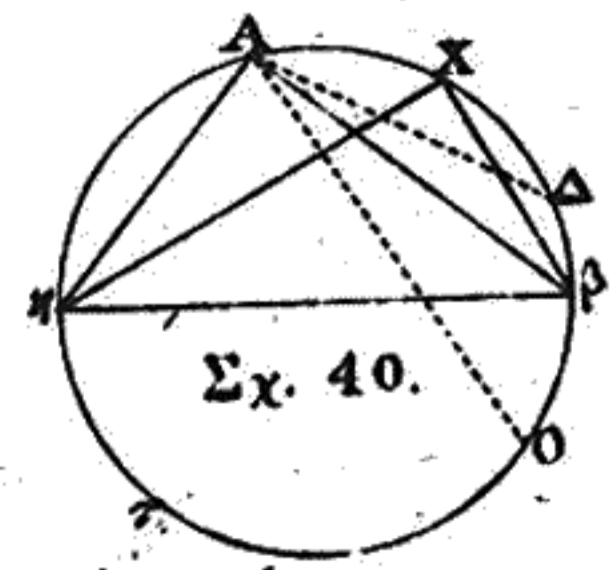
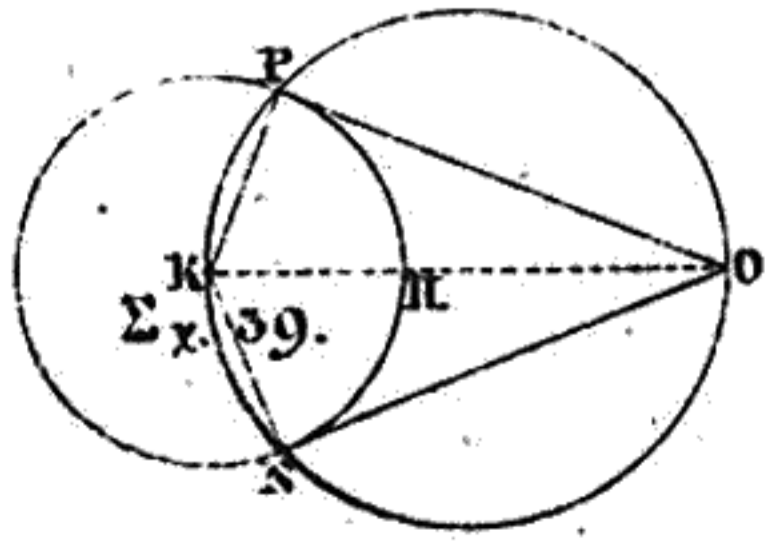
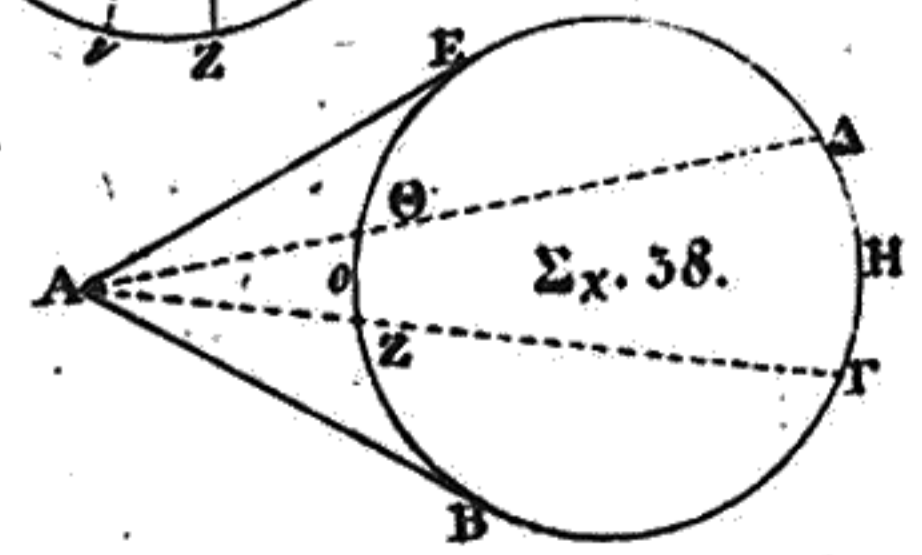
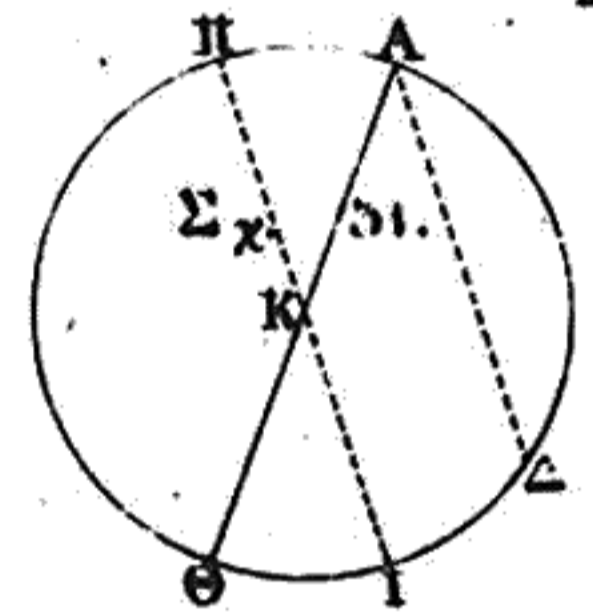
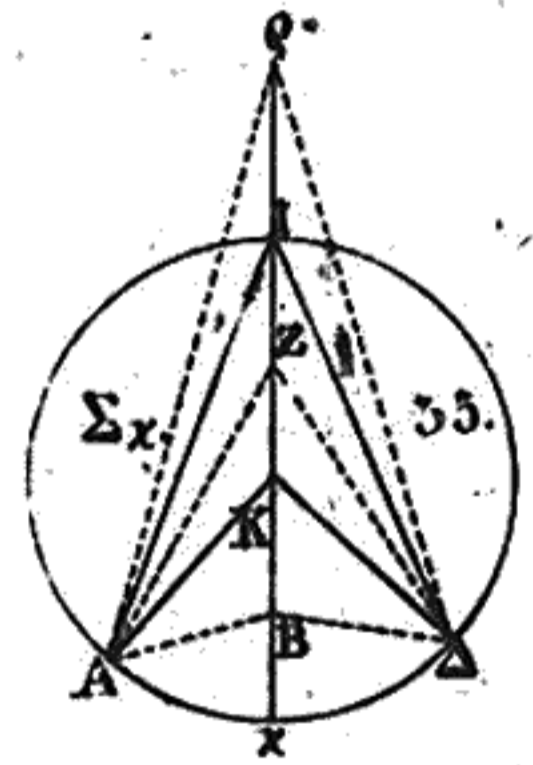
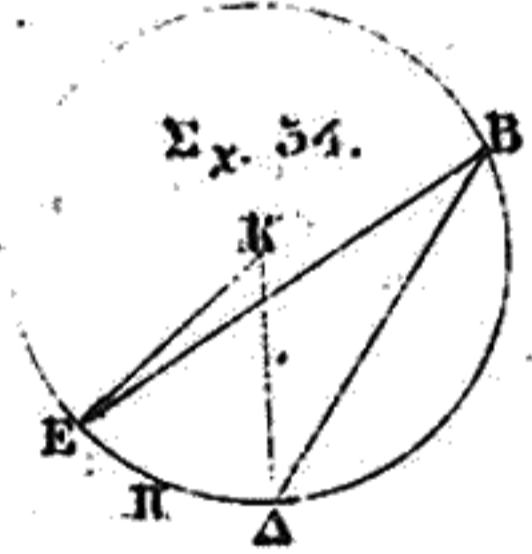
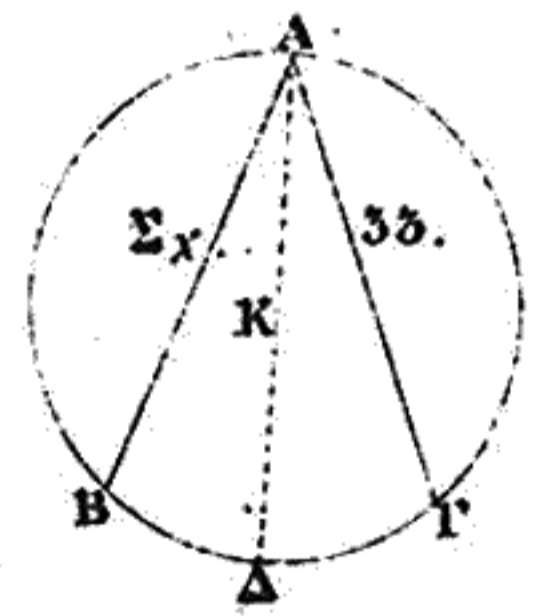
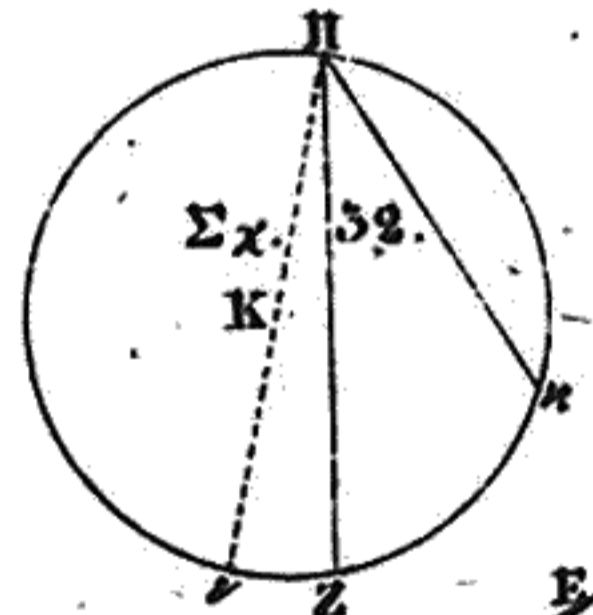
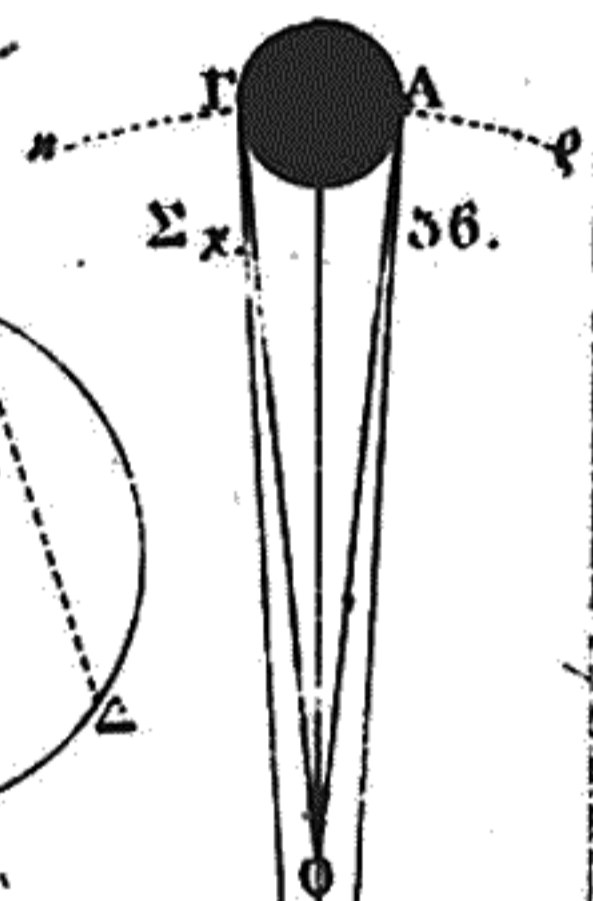
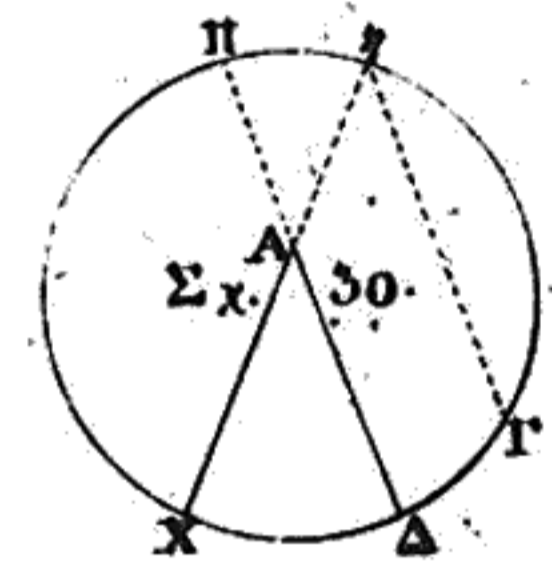
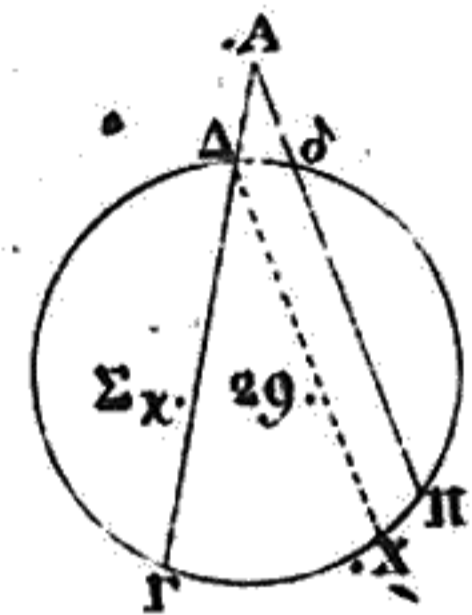
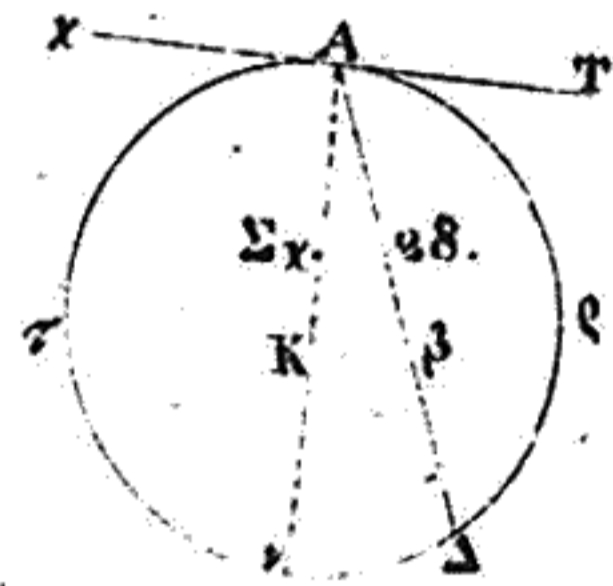
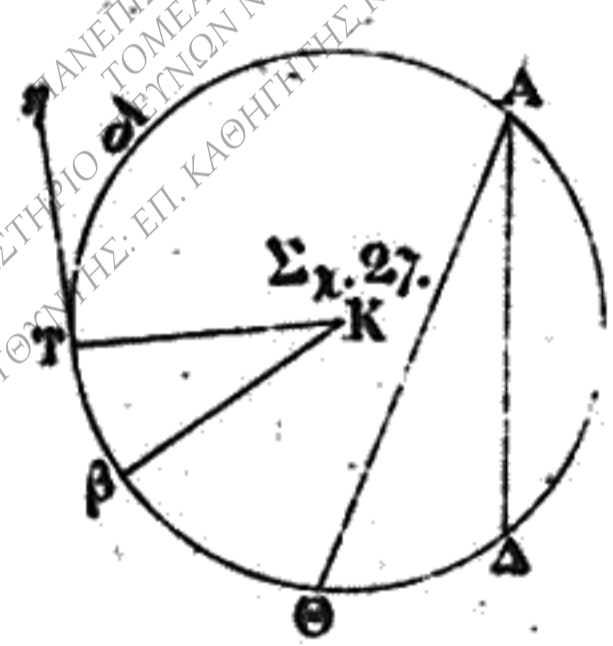
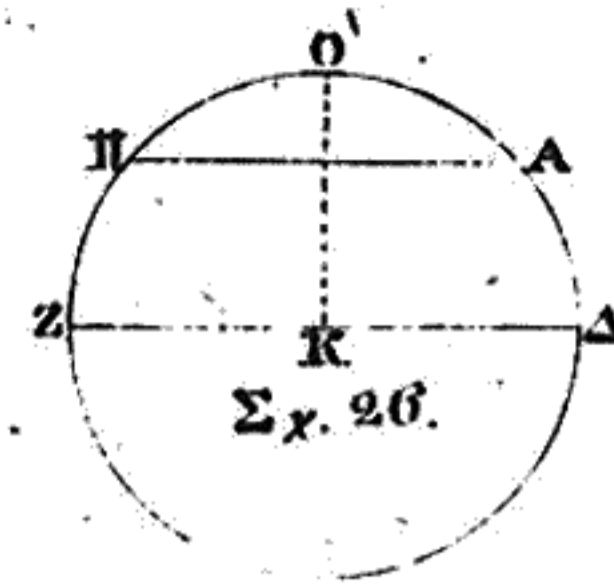
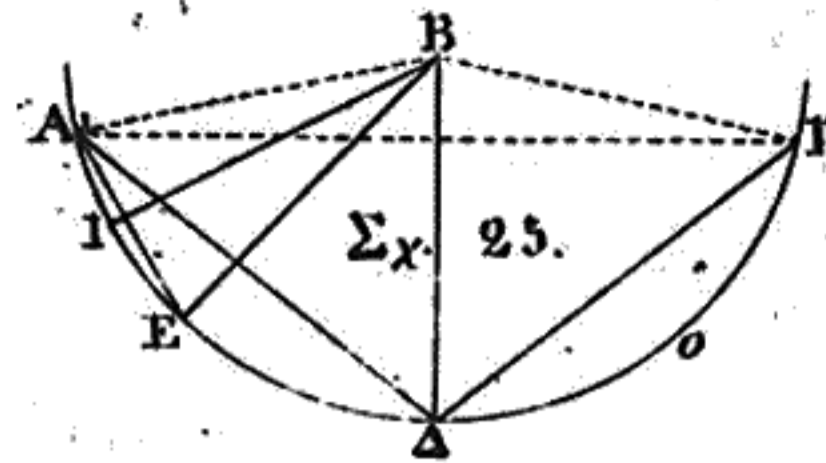
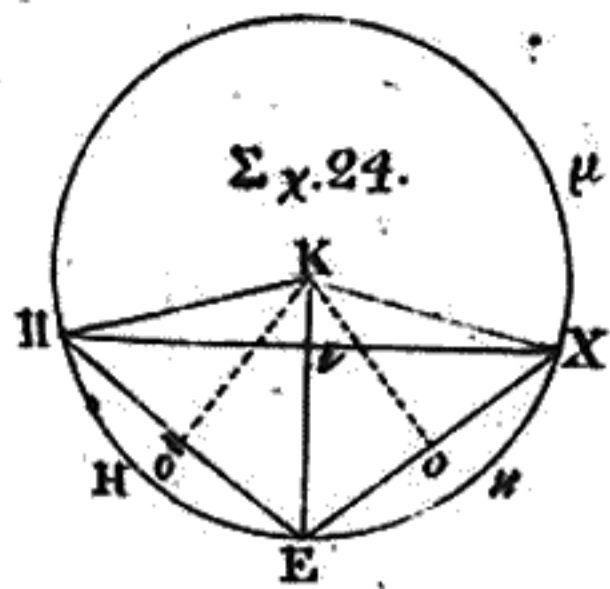
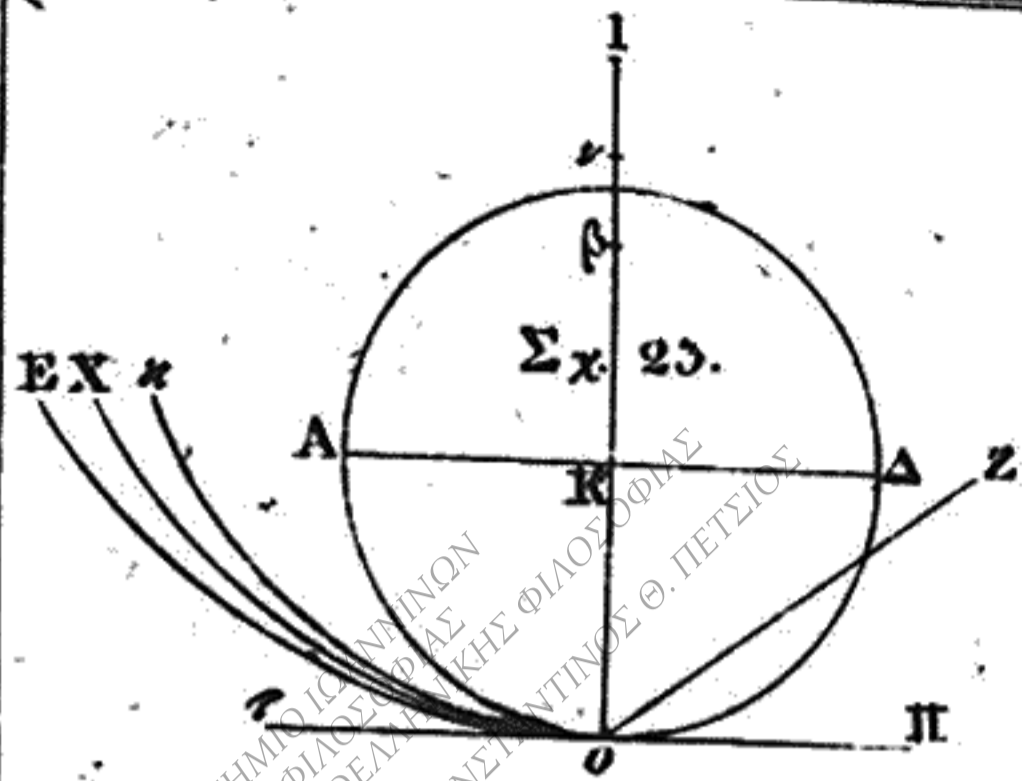
<b>Κεφάλαιον</b>		<b>Α΄. Περι ἀναλογίας τῶν γραμμῶν. . . . .</b>	<b>266</b>
—	—	<b>Β΄. Περι ἀναλογίας τῶν ὁμοίων τρι- γώνων . . . . .</b>	<b>274</b>
—	—	<b>Γ΄. Περι ὀρθογωνίου τριγώνου . . . . .</b>	<b>282</b>
—	—	<b>Δ΄. Περι ἀναγωγῆς τῶν πολυγώνων. . . . .</b>	<b>289</b>
—	—	<b>Ε΄. Περι τῆς τετραγωνισμῆς τῆς κύκλου . . . . .</b>	<b>292</b>
—	—	<b>ς΄. Περι γεωμετρικῆς κλίμακος καὶ ἀναλογικῆς διαθῆτης . . . . .</b>	<b>299</b>
—	—	<b>Ζ΄. Περι ὁμοίων σχημάτων . . . . .</b>	<b>302</b>
—	—	<b>Η΄. Περι ἐπιφανειῶν ὡς ἐπιπέδων θεωρημένων . . . . .</b>	<b>310</b>

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΜΗΜΑ Δ΄.

<b>Κεφάλαιον</b>		<b>Α΄. Περι γενέσεως τῶν σφαιρῶν . . . . .</b>	<b>314</b>
—	—	<b>Β΄. Περι ἐπιφανείας τῶν σφαιρῶν . . . . .</b>	<b>318</b>
—	—	<b>Γ΄. Περι τῆς τῶν σφαιρῶν σωμάτων σφαιρότητας . . . . .</b>	<b>324</b>
—	—	<b>Δ΄. Περι πολυέδρων . . . . .</b>	<b>330</b>







ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ  
 ΤΟΜΕΑΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ  
 ΕΡΕΥΝΩΝ ΝΕΟΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ  
 ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ: ΕΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Θ. ΠΕΤΣΙΟΣ

Εκδόσεις Κ.τ.Π.  
 ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2006

