ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Στερεωμετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ·

Περὶ γενέσεως τῶν στερεῶν.

418. Στερεωμετρία ἐστὶν ἐπιστήμη τῶν στερεῶν· στερεὸν δὲ ἔκτασις, μῆκος, πλάτος, καὶ βάθος ἔχουσα· στερεότης δὲ, ἡ χωρητικότης αὐτοῦ, τὸ μᾶλλον, ἢ ἧττον ἐκτετάσθαι κατὰ ταῦτα τὰ τρία.

419. Ἐὰν ἡ ΓΔΖΙ (σχ. 99) ἐπιφάνεια, ἀπειροστὸν ὅσον ἔχουσα πύκνωμα, ἐπινοηθῇ παραλλήλως ἑαυτῇ ἀνιοῦσα μέχρι τῆς ΑΒΟΕ ἐπιφανείας, καὶ ἐν τῷ ἀνιέναι καταλείπουσα τοσαύτας ἐπιφανείας ἑαυτῇ ὁμοίας, ὅσα διαβήματα ἀπειροστὰ διανύει, ἀπογεννήσει διὰ τῆς ἀνόδου ταύτης στερεὸν τὸ ΖΔΑΕ, ὃ καλεῖται πρίσμα· ἑκάστη δὲ τῶν αὐτῆς πλευρῶν ΓΖ καταγράψει καὶ αὕτη παραλληλόγραμμον ΓΖΑΟ, ΖΟΕΙ, κτλ.· αἱ δὲ καταλειπόμεναι αὐτῆς ἀναβαινούσης ἐπιφάνειαι ΓΔΖΙ ἔσονται στοιχεῖα τοῦ στερεοῦ· ὥστε πρίσμα ἐστὶ στερεὸν, ὑπὸ δυοῖν ἴσων καὶ παραλλήλων βάσεων ΓΔΖΙ, ΑΒΟΕ περατούμενον, καὶ διὰ παντὸς τοῦ μήκους ὁμοίως ἔχον πυκνότητος.

Ἐὰν δὲ ἡ γεννήτρια βάσις παραλληλόγραμμον ᾖ σχῆμα, τὸ εὐτεῦθεν ἀπογεννώμεον πρίσμα καλεῖται παραλληλεπίπεδον.

420. Ἐὰν μέντοι τῆς ἐπιφανείας ΓΔΖΙ (σχ. 100) ἀνιούσης μέχρι τοῦ Α, ἑκάστη τῶν αὐτῆς πλευρῶν ΖΓ μεθ' ἕκαστον διάβημα ἐλαττῶται κατ' ἀριθμητικὸν λόγον, ἕως οὗ ἐπὶ τὸ Α ἀφικόμεναι γένωνται ἄπειροσαὶ, καὶ ἑπομένως συμπέσωσιν ἀλλήλαις κατὰ τὸ σημεῖον Α, ἡ ΓΔΖΙ ἐπιφάνεια ἀπογεννήσει οὕτω στερεὸν τὸ ΑΓΔΖΙ, ὃ καλεῖται πυραμὶς, ἀφ' ἑκάστης δὲ τῶν αὐτῆς πλευρῶν τρίγωνον ἀπογεννηθήσεται τὸ ΖΓΑ.

421. Ἡ δὲ ΓΔΖΙ βάσις γεννήτρια ἀκούει τοῦ στερεοῦ· ἡ δὲ πυραμὶς, τριγωνικὴ μὲν, ἐὰν ᾖ ἡ γεννήτρια βάσις τρίγωνον, τετραγωνικὴ δὲ, ἐὰν τετράγωνον, πεντάγωνος δὲ, ἐὰν πεντάγωνον κτλ.

422. Πρίσμα, οὗ αἱ μὲν γωνίαι εἰσὶν ὀρθαὶ, ἴσαι δὲ πᾶσαι αἱ πλευραὶ ΓΖ, ΖΟ, κτλ. καλεῖται κύβος· ὥστε κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν, ὑπὸ ἓξ ἐπιπέδων περατούμενον ἴσων καὶ παραλλήλων.

Πρίσμα, οὗ ἡ γεννήτρια βάσις ἐστὶ κύκλος ΑΒΓΔ, καλεῖται κύλινδρος (σχ. 101)· πυραμὶς δὲ, ἧς ἡ γεννήτρια βάσις ΒΓΔΤ ἐστὶ κύκλος, κῶνος (σχ. 102).

423. Ὕψος στερεοῦ ἐστιν ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν βάσιν καταγομένη κάθετος ΑΓ (σχ. 99) ἢ ΑΜ (σχ. 103). Ἄξων δὲ, πρίσματος μέν ἐστιν εὐθεῖα ἡ Πη (σχ. 99), καταγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς ὕπερθεν βάσεως ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς ἔνερθεν· πυραμίδος δὲ, ἡ Αη (σχ. 100), ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὸ κέντρον η τῆς κατ' αὐτὴν βάσεως.

424. Πυραμίδος ἀπόθετος ἀκούει ἡ ΑΒ κάθετος

ἡ ἀπὸ τῆς Α κορυφῆς ἐπὶ μίαν τῶν αὐτῆς πλευρῶν ΙΔ καταγομένη.

Ὀρθὸν μὲν καλεῖται τὸ ςερεὸν, ὅταν ὁ Πη ἄξων κάθετος ἐφεςήκῃ τῇ αὐτῦ βάσει· πλάγιον δὲ, ὅταν πλάγιος· (σχ. 99, 100).

425. Πυραμὶς ΑΒΓΔ (σχ. 104) κόλυρος λέγεται, ὅταν ᾖ τετμημένη δι' ἐπιπέδυ τῦ ΙΗΤ.

426. Ἐν γένει δὲ τὰ ὑπὸ ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν πεgρατέμενα ςερεὰ, κοινῇ μὲν καλεῖται πολύεδρα, ἰδίᾳ δὲ τετράεδρον, πεντάεδρον, ἑξάεδρον, κτλ., ἕκαςον κατὰ λόγον τῶν ἐπιπέδων, οἷς περατῦται· ὧν δὲ, αἱ μὲν γωνίαι πᾶσαι ἀλλήλαις ἴσαι, τὰ δὲ ἐπίπεδα κανονικὰ πολύγωνα, ϗ ὁμοειδῆ, ϗ ἰσάλληλα, ἐκεῖνα πολύεδρα καλεῖται κανονικά.

427. Ἐὰν ἡμικύκλιον τὸ ΜΟΔ περὶ τὴν αὐτῦ διάμετρον περιενεχθῇ, ϗ μεθ' ἕκαςον αὐτῦ διάβημα καταλίπῃ ἡμικύκλιον αὐτῷ ὅμοιον (σχ. 105), τὸ ἐξ αὐτῦ ἀπογεννώμενον ςερεὸν καλεῖται σφαῖρα· ἡ δὲ ΜΔ εὐθεῖα, τῆς σφαίρας διάμετρος, ἢ ἄξων, τὰ δὲ σημεῖα Μ, Δ, πόλοι καλῦνται τῆς σφαίρας.

428. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ ΗΚ ἀπόςημα, καθ' ὃ σημεῖόν τι τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τὸ Η ἀπὸ τῦ Κ κέντρυ ἀφέςηκε, ἔςιν ἀκτὶς τῦ γεννῶντος ἡμικυκλίυ ΜΟΔ· ἔςιν ἄρα ἡ σφαῖρα ςερεὸν, ὗ τῆς ἐπιφανείας ἅπαντα τὰ σημεῖα ἐπίσης ἀφέςηκεν ἐσωτερικῦ αὐτῆς σημείυ, ὃ καλεῖται κέντρον.

429. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Σφαίρας ἄρα ἅπασαι αἱ ἀκτῖνες ΚΗ, ΚΔ, ἅπασαι ἑπομένως αἱ διάμετροι, διπλαῖ ὗσαι τῶν ἀκτίνων, εἰσὶν ἴσαι.

430. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Τῦ ΜΟΔ περὶ τὴν ΔΜ πε-

ριαγομένυ, ἕκαςον σημεῖον Ο, δ, κτλ. καταγράφει προδήλως κύκλον περὶ ἓν τῆς διαμέτρυ σημεῖον Κ, Ζ, κτλ. ὡς περὶ κέντρον· καὶ ὁ μὲν ὑπὸ τῦ τῆς ἀκτῖνος ΟΚ πέρατος Ο καταγραφόμενος, πάντων τέ ἐςι μείζων καὶ εἰς ἴσα τὴν σφαῖραν διχοτομεῖ· δι' ὃ καὶ μέγας κύκλος ἀκύει· οἱ δὲ ἄλλοι, παραλλήλως γραφόμενοι τῷ μεγάλῳ, τοσύτῳ γίνονται ἐλάττυς, ὅσῳ μᾶλλον τῶν Δ, Μ πόλων ἐγγίζυσιν· θεωρῦνται δὲ ἅπαντες ὡς ςοιχεῖα τῆς σφαίρας.

431. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ὥςε ἐὰν σφαῖρα τμηθῇ δι' ἐπιπέδυ καθέτυ τῷ ἄξονι ΜΔ, ἡ τομὴ ἔςαι κύκλος (412), γεγραμμένος δι' ἑνός τινος τῶν σημείων τῦ ΜΟΔ· ἐπεὶ ἄρα πᾶσα διάμετρος τῆς σφαίρας ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ἄξων, περὶ ὃν περιήνεκται τὸ ἀπογεννῶν ἡμικύκλιον, καὶ πᾶν ἐπίπεδον τὴν σφαῖραν τέμνον ἀναγκαίως ἐςὶ κάθετον μιᾷ τινι ἀκτῖνι, καὶ ἑπομένως καὶ διαμέτρῳ· ἄπασα τομὴ τῆς σφαίρας, δι' ἐπιπέδυ γινομένη, ἔσεται κύκλος.

432. Ἐὰν τὸ ὕτω τὴν σφαῖραν τέμνον ἐπίπεδον διὰ τῦ κέντρυ διήκῃ, ἑκάτερον τμῆμα καλεῖται ἡμισφαίριον· ἐὰν δὲ μὴ διὰ τῦ κέντρυ, ἁπλῶς τμῆμα σφαιρικόν.

433. Τομεὺς δὲ σφαίρας καλεῖται ἀπόμοιρα σφαιρικὴ, ὑπὸ μέρυς τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἀπολαμβανόμενον καὶ τομέων κυκλικῶν, οἷος ὁ ΟΔΚ (σχ. 105.).

434. Ἐὰν δὲ τὸ ΤΙΜ (σχ. 106) ὡς ἡμιπολύγωνον κανονικὸν ἐκληφθῇ, ἐξ ἀπείρων συνεςὼς πλευρῶν (257)· ἑκάςη αὐτῦ πλευρὰ ΠΙ ἐπακήκυσα ἔςαι ἐνί τινι τραπεζίῳ ΖΕΠΙ, ὅπερ ἐν τῇ περιαγωγῇ τῦ ΤΙΜ ἀπογεννήσει κῶνον κόλυρον τὸν ΑΟΠΙ· Τὰ ἄρα σφαίρας ςοι-

χεῖα θεωρηθῆναι δύνανται, ὡς εἴπερ ἦσαν ἄπειροι κῶνοι κόλυροι, ὧν ὕψη ΖΕ εἰσὶν αὐτὰ τὰ ἀπειροςὰ τῦ ἄξονος μέρη, ἃ ἀντιςοιχεῖ τῇ ΠΙ πλευρᾷ τῦ πολυγώνυ· ἐκ. ἦν ὁ ἄξων ἐςὶ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὑψῶν τῶν κώνων.

435. Τέλος δὲ θεωρηθῆναι ἔχει ἡ σφαῖρα ἢ ὡς συντεθειμένη ἐξ ἀπειροπληθῶν τετραγωνικῶν πυραμίδων, ἐχυσῶν, τὴν μὲν κορυφὴν ἐν τῷ κέντρῳ, τὰς δὲ βάσεις ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας· τῶν γὰρ τετραγώνων, ἃ συνιςῶσι τὰς τῶν πυραμίδων βάσεις, ὄντων ἀπειροςῶν, ἡ ἀπόθετος ἀπὸ τῦ κέντρυ ὡς ἀπὸ κορυφῆς (424) ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως ἀχθεῖσα, ἔςαι παρὰ μικρὸν ὕψος τῆς πυραμίδος· ὑποτεθέντων ἄρα τῶν δε ςοιχείων, ἥκις' ἂν λυμανθείη ἡ τῶν τῆς σφαίρας ἀκτίνων ἰσότης.

436. Ὅμοια ςερεὰ καλῦνται, ὧν αἱ πλευραὶ ἰσάριθμοί τε εἰσὶ, ἢ συνιςῶσι γωνίας τὰς ἀντιςοίχυς ἴσας, ἢ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ ὁμόλογοι· ὥςε μόνῳ τῷ μεγέθει τῶν πλευρῶν, ἢ ἑπομένως τῇ ςερεότητι, διαφέρειν ἀλλήλων τὰ ὅμοια ςερεά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ ἐπιφανείας τῶν ςερεῶν.

437. ΟΡΙΣΜΟΣ. Στερεῦ παράπλευρος ἐπιφάνεια καλεῖται ἡ περατῦσα τὸ ςερεὸν ἄνευ τῆς ὕπερθεν ἢ ἔνερθεν ἐπιφανείας· ὕτω παράπλευρος ἐπιφάνεια τῦ ΑΕΓΙ πρίσματος ἐςὶ τὰ τέσσαρα παραλληλόγραμμα ΑΟΓΖ, ΔΒΓΔ, ΒΕΔΙ, ἢ ΟΕΖΙ, ἀλογυμένων τῶν δύο ΑΒΟΕ, ἢ ΓΔΖΙ, τῦ ἀνωτέρυ φημὶ ἢ κατωτέρυ.

438. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ παντὸς ὀρθοῦ πρίσματος, ϗ ἑπομένως ὀρθοῦ κυλίνδρου, παράπλευρος ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τῆς κατ' αὐτὸ βάσεως ΓΔΖΙ, ϗ τοῦ ΓΑ ὕψους (σχ. 99).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστι γὰρ αὕτη τὸ συμπλήρωμα πασῶν τῶν περιμέτρων τῶν ὑπὸ τοῦ ΓΔΖΙ ἀπογεννωμένων πολυγώνων· τὸν δὲ ἀριθμὸν αὐτῶν, εἴτ' οὖν τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν, ἐμφαίνει τὸ ὕψος ΓΑ. Ο. Ε. Δ.

439. ΠΟΡΙΣΜΑ. Συνάπτοντες δὲ τῷ γινομένῳ τὰς δύω ἐπιφανείας ἀνωτέραν τε καὶ κατωτέραν, ἢ τὸ διπλοῦν τῆς ΓΔΖΙ βάσεως, ἕξομεν τὴν ὁλικὴν τοῦ πρίσματος ἐπιφάνειαν.

Ἵν' οὖν εὑρεθῇ ἡ πρίσματος ὀρθοῦ, φέρ' εἰπεῖν τοῦ ΑΕΓΙ, ἐπιφάνεια, μετρηθήτω πρῶτον ἡ περίμετρος ΓΔΖΙ, ϗ πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ τὸ ΑΓ ὕψος· εἶτα πολλαπλασιασθήτω ἡ ΓΖ πλευρὰ ἐπὶ τὴν ΓΔ ἀχθεῖσαν πρὸς ὀρθὰς, εἰμὴ ἦν, τῇ ΓΖ, ϗ τὸ διπλοῦν τοῦ γινομένου τοῦδε συνήφθω τῷ προτέρῳ γινομένῳ· ϗ δὴ οὕτω ποριωθήσεται ἡ ὁλικὴ τοῦ πρίσματος ἐπιφάνεια.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Βάσιν δ' ἀκούοντες, ἐπὶ μὲν τῶν ἐπιφανειῶν εὐθεῖαν ἐννοοῦμεν ὡς τὴν ΓΖ, ἐπὶ δὲ στερεῶν ὅλην ἐπιφάνειαν, ὡς τὴν ΓΔΖΙ.

440. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ πάσης ὀρθῆς πυραμίδος ΑΓΔΖΙ, κανονικὸν πολύγωνον βάσιν ἐχούσης, ἐπιφάνεια, ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἀποθέτου, ϗ τῆς ἡμιπεριμέτρου τῆς ΓΔΖΙ βάσεως (σχ. 100).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἴση γάρ ἐστιν αὕτη τῷ ἀθροίσματι πάντων τῶν τριγώνων, ἃ καταγράφει κινούμενον τὸ ἀπογεννῶν πολύγωνον ΓΔΖΙ διὰ τῶν ἑαυτοῦ πλευρῶν· ἀλλὰ πυραμίδος ὀρθῆς, κανονικὸν πολύγωνον βάσιν ἐχούσης, πάντα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἰσὶν ἴσα, ὡς δῆλον· ἕκαςον δὲ τρίγωνον ΑΔΙ ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμιβάσεως ΔΙ ϗ τῆς ἀποθέτυ ΑΒ (285)· ἄρα τὸ πάντων τῶν τριγώνων ἄθροισμα ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων ΔΙ, ΔΓ κτλ., ἢ τῆς ἡμιπεριμέτρυ τῆς κατὰ τὴν πυραμίδα βάσεως, ϗ τῆς ἀποθέτυ Ο. Ε. Δ.

441. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τύτῳ δὲ συναφθείσης τῆς ΓΔΖΙ βάσεως, εὑρεθήσεται ὅλη τῆς πυραμίδος ἡ ἐπιφάνεια.

442. ΠΟΡΙΣΜΑ Β. Ὥςε ἡ τῦ ὀρθῦ κώνυ παράπλευρος ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἀποθέτυ ϗ τῦ τῆς βάσεως ἡμικυκλίυ ΒΓΔΤ.

443. Ἐὰν τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (σχ. 102.) περιενεχθῇ περὶ τὸν ΑΔ μένοντα ἄξονα, τὸ ἐντεῦθεν ἀπογεννώμενον ςερεὸν ΑΒΓΔΤ ἔςαι κῶνος· ὑφ' ἑκάςυ δὲ τῶν τῦ τριγώνυ ςοιχείων ΒΤ. ΕΟ, κτλ. κύκλοι γραφήσονται ΒΓΔΤ, ΙΜΟχ, κτλ., ὧν αὐτὰ ἔσονται διάμετροι· ἐπεὶ δὲ ὅμοιά εἰσι τὰ ΑΙΟ, ΑΒΓ τρίγωνα, ἔςιν ΙΟ : ΒΓ :: ΑΖ : ΑΔ (321), τυτέςιν „αἱ διάμε„μετροι ΙΟ, ΒΓ τῶν ἐν κώνῳ κύκλων, ὡς τὰ ἀπὸ τῆς „κορυφῆς Α μέχρις αὐτῶν τῶν κύκλων ἀποςήματα Α„Ζ, ΑΔ."

Ἀλλὰ τὰ ἀποςήματα ΑΖ, κτλ. τῶν κύκλων συνεχῶς αὔξυσι κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 1. 2. 3. 4. 5 κτ. ἐντεῦθεν ἄρα τὰ ἑξῆς ὑποσυνάξομεν, ἃ ἡμῖν εἰς ἀρχὰς τῶν ἐν τοῖς ἑξῆς προκαταβληθήσεται.

444. α΄. Αἱ διάμετροι, ἢ αἱ περιφέρειαι, τῶν ἀλληλοδιαδόχων κύκλων, οἵτινες ςοιχεῖά εἰσι τῦ κώνυ, συγκροτῦσι πρόοδον ἀριθμητικήν.

β. Οἱ κύκλοι ΙΜΟχ, ΒΓΔΤ ὄντες πρὸς ἀλλήλυς ὡς τὰ ἀπὸ τῶν κατ' αὐτὺς διαμέτρων τετράγωνα (398), ἔσονται ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἰς αὐτὺς τὺς κύκλυς ἀποςημάτων.

445. γ'. Ἡ ἴσον τῆς τε κορυφῆς Α ἢ τῆς βάσεως ΒΓΔΤ ἀπέχυσα περιφέρεια ἴση ἐςὶ τῷ ἡμιαθροίσματι τῆς ἐλαχίςης πρὸς τῇ κορυφῇ περιφερείας Α, ἢ τῆς κατωτάτης περιφερείας ΒΓΔΤ (Συμβ. λογ. 202), εἴτ' ὖν τῷ ἡμίσει τῆς κατωτάτης περιφερείας· ἄπειρος γὰρ ὢν ὁ τῶν τῆς ἀριθμητικῆς προόδυ ὅρων ἀριθμὸς ὡς περιττὸς θεωρεῖσθαι δύναται.

446. δ'. Ἐὰν ὁ ὀρθὸς κῶνος ΑΒΓ διὰ ἐπιπέδυ τοῦ ΡΠη παραλλήλυ τῇ βάσει τμηθῇ, αἱ κατάλοιποι περιφέρειαι συςήσυσι ἢ αὗται ἄπειρον ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἧς μόνον ἀφωρίσθησαν οἱ πρῶτοι τῶν ὅρων· ὐκῦν αὖθις ἡ ΙΟ περιφέρεια, ἡ ἴσον ἀπέχυσα τῶν δύω περιφερειῶν ΒΓ, ΡΠ, ἰσῦται τῷ αὐτῶν ἡμιαθροίσματι.

447. Ἐπεὶ ἡ ἡμιπεριφέρεια τῆς κωνικῆς βάσεως ἴση ἐςὶ τῇ ἴσον ἀπεχύσῃ τῆς κορυφῆς ἢ αὐτῆς τῆς βάσεως περιφερείᾳ (445)· ὐκῦν ἡ παράπλευρος τῦ κώνυ ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἀποθέτυ καὶ τῆς ἴσον ἀπεχύσης περιφερείας (442).

448. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Πυραμίδος ὀρθῆς ἢ κανονικῆς τῆς ΗΙΤΓΒΔ (σχ. 104.), τετμημένης διὰ ἐπιπέδυ τῇ βάσει παραλλήλυ τῦ ΗΙΤ, ἡ κατάλοιπος παράπλευρος ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῇ ἡμιπεριμέτρῳ τῇ τομῆς ΗΙΤ, ἢ τῇ ἡμιπεριμέτρῳ τῆς βάσεως ΒΓΔ, πολλαπλασιασθείσαις ἐπὶ τὸ ΙΠ κατάλοιπον τῆς ἀποθέτυ ΑΠ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν ταύτῃ γὰρ τῇ πυραμίδι πάντα τὰ τραπέζια ΗΙΒΓ, ΙΤΓΔ, κτλ, εἰσὶν ἴσα (245)· ἀλλ' ἕκαςον τραπέζιον ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύω ἀπ' ἐναντίον εὐθειῶν ΗΙ, ΒΓ ϗ τῦ ὕψυς ΙΠ (295), ὅ ἐςι τῆς ἀποθέτυ τὸ κατάλοιπον· ἄρα τὸ συμπλήρωμα πάντων τῶν τραπεζίων, εἴτ' ὖν ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ ἡμιαθροίσματος πασῶν τῶν ὕπερθεν ϗ ἔνερθεν εὐθειῶν ϗ τῦ καταλοίπυ τῆς ἀποθέτυ. Ο. Ε. Δ.

449. ΠΟΡΙΣΜΑ Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῦ ὀρθῦ κώνου ΑΒΓ (σχ. 102), τετμημένου δι' ἐπιπέδου τῦ ΡΠ, παραλλήλυ τῇ βάσει, ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν ἡμιπεριφερειῶν ΡΠκ, ΒΓΤ, ϗ τῦ καταλοίπυ τῆς ἀποθέτυ ΠΓ· αὗται δὲ αἱ ἡμιπεριφέρειαι ἰσῦνται τῇ αὐτῶν ἴσον ἀπεχέσῃ περιφερείᾳ (Συμβ. λογ. 202)· ἄρα ἐξισῦται ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς μεσαιτάτης περιφερείας ϗ τῆς ἀποθέτυ.

450. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅταν, ὖ καταμετρεῖται ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια, τὸ ςερεὸν πλάγιον ῇ, ἢ τὸ απογεννῶν ἐπίπεδον ῇ πολύγωνον ἀκανόνιςον (421)· ἐὰν μὲν ῇ πρίσμα, ληφθήσεται ἰδίᾳ ἡ ἑκάςυ παραλληλογράμμυ ἐπιφάνεια· ἐὰν δὲ πυραμὶς, ἡ ἑκάςυ τριγώνυ· ἐὰν δὲ ῇ πυραμὶς κόλυρος, ἡ ἑκάςυ τῶν τραπεζίων, ἢ τῶν τραπεζοειδῶν κτλ.

451. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Ἡ σφαίρας ἐπιφάνεια ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς περιμέτρυ τῦ μεγάλυ κύκλυ, ϗ τῆς διαμέτρυ.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἔςω κῶνος κόλουρος ὁ ΑΟΠΙ (σχ. 106)· ϗ ἤχθω ἐπὶ τὸ μέσον δ τῆς ἀπειροςῆς πλευρᾶς ΑΟ ἡ διάμετρος δΗ, ἥτις ἔςαι κάθετος τῇδε τῇ πλευρᾷ (152), ϗ ἤχθω ἡ δν παράλληλος τῇ ΟΙ, ϗ ἡ ΑΒ ϗ νΗ κάθετος τῇ δν, ϗ ἐπομένως τῇ ΟΙ· ἐκῦν τὰ δύω τρίγωνα ΑΒΟ, νδΗ ἔξυσι γωνίας ἴσας τὰς ὀρθὰς Β, ν· ἀλ.

λὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΟΒ = δΗν· καὶ γὰρ τὸ ΑΥΙ τόξον, οὗ τὸ ἥμισυ μετρεῖ τὴν πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαν ΑΟΒ, ἴσον ἐστὶν ἀκριβῶς τῷ τόξῳ δΤν, οὗ τὸ ἥμισυ μετρεῖ τὴν γωνίαν Η διὰ τὰς δύω ἀπειροστὰς πλευρὰς ΑΟ, ΠΙ· ἄρα τὰ δύω τρίγωνα ΑΒΟ νδΗ εἰσὶν ὅμοια.

β′ Ἐπεὶ ΑΒ = ΕΖ (127)· ἐστὶν ἄρα ΕΖ (ΑΒ) : ΑΟ :: δν : δΗ· κληθείσης οὖν, κ μὲν τῆς περιφερείας, ἧς διάμετρός ἐστιν ἡ δν, Κ δὲ τῆς τοῦ μεγάλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλου περιφερείας, ἧς διάμετρος ἡ δΗ, ἔσται δν : δΗ :: κ : Κ. ἄρα ΕΖ : ΑΟ :: κ : Κ (393)· ὅθεν ΕΖ × Κ = ΑΟ × κ, εἴτ' οὖν τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ὕψους ΕΖ τοῦ κολούρου κώνου ΑΟΠΙ καὶ τῆς περιφερείας τοῦ μεγάλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλου ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἀποθέτου ΑΟ τοῦ κολούρου κώνου καὶ τῆς κ περιφερείας, τῆς ἐν τῷ μέσῳ τοῦ δε τοῦ κώνου, εἴτ' οὖν τῇ αὐτοῦ παραπλεύρῳ ἐπιφανείᾳ (249).

γ′. Ἐὰν οὖν ὅλη ἡ ΤΜ διάμετρος τοῦ μεγάλου κύκλου, ἄθροισμα ὂν πάντων τῶν ὑψῶν τῶν κολούρων κώνων (423), πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγάλου κύκλου, ποριωθήσονται πᾶσαι αἱ παράπλευροι ἐπιφάνειαι πάντων τῶν κολούρων κώνων, οἳ συντιθέασι τὴν σφαῖραν, ταὐτὸν εἰπεῖν, ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας. Ο. Ε. Δ.

452. ΠΟΡΙΣΜΑ Α′. Ἐπεὶ δὲ ἡ τοῦ μεγάλου ἐπιφάνεια κύκλου ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ τῆς ἀκτῖνος (268), ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τετραπλασία ἐστὶ τῆς τοῦ μεγάλου κύκλου (Συμβ. λογ. 310.)

453. ΠΟΡΙΣΜΑ Β′. Ὡσαύτως δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τοῦ γεννωμένου ὑπὸ τοῦ τόξου ΠΤ, περιαγομένου περὶ τὴν διάμετρον ΤΜ, ἐστὶν ἴση

τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς περιμέτρε τῦ μεγίςε τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλων, ἒ τῦ ὕψες ΤΕ αὐτῦ τῦ τμήματος.

454. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Αἱ ἐπιφάνειαι δύω ὁμοίων ςερεῶν ΑΕΓΙ, ἒ αΗγΒ (σχ. 99.) εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας, ὡς τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ δύω ὁμολόγων πλευρῶν ΑΓ, αγ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἑκάςη ἐπιφάνεια τῶν ἐν τῷ ἑτέρῳ ςερεῷ ἐςὶν ὁμοία τῇ ἐν θατέρῳ ἀντιςοίχῳ (436)· ἀλλὰ τὰ ἐμβαδὰ δύω ὁμοίων πολυγώνων ΑΟΓΖ, αΙγΔ εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ δύω ὁμολόγων πλευρῶν ΑΓ, αγ τετράγωνα (405)· ἄρα ἑκάςη ἐπιφάνεια τῶν ἐν τῷ ςερεῷ πρὸς τὴν ἐν θατέρῳ ἀντίςοιχον, ὡς τὰ ἀπὸ δύω πλευρῶν ὁμολόγων ΑΓ, αγ τετράγωνα· ἀλλ᾽ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπιφανειῶν ὁ αὐτός ἐςιν ἐν ἑκατέρῳ ςερεῷ· ἄρα αἱ ἐπιφάνειαι δύω ὁμοίων ςερεῶν εἰσὶν ὡς κτ. (Συμβ. λογ. 234.) Ο. Ε. Δ.

455. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπεὶ δὲ αἱ σφαῖραι ὅμοιά εἰσι ςερεὰ, ὧν αἱ διάμετροι θεωρηθῆναι δύνανται ὡς ἀντίςοιχοι πλευραὶ, αἱ αὐτῶν ἐπιφάνειαι ἔσονται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων, ἢ τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν περιφερειῶν, τετράγωνα (393).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῆς τῶν ςερεῶν σωμάτων ςερεότητος.

456. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἡ ςερεότης παντὸς πρίσματος ἒ κυλίνδρε ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ΓΔΖΙ ἒ τῦ ὕψες ΑΓ (σχ. 99).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐςι γὰρ αὕτη τὸ συμπλήρωμα τῶν ςοιχείων, εἴτ᾽ ἓν τῶν ἴσων τῷ ἀπογεννῶντι ἐπιπέδῳ

ΓΔΖΙ ἐπιφανειῶν, ἃς καταλείπει ἐν τῷ ἀνιέναι παραλλήλως ἑαυτῷ τὸ ΑΓ ὕψος· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν ςοιχείων τούτων ἐκδηλοῦται διὰ τῶν σημείων, ἃ κεῖνται ἐν τῷ ἀποςήματι τῶν δύω βάσεων τῆς ὕπερθεν ΑΒΟΕ, καὶ τῆς ἔνερθεν ΓΔΖΙ, εἴτ' οὖν διὰ τοῦ ὕψους ΑΓ· ἄρα τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ὕψους καὶ τῆς βάσεως ἴσον ἐςὶ τῷ ἀθροίσματι πάντων τῶν ςοιχείων, ταὐτὸν εἰπεῖν τῇ ςερεότητι τοῦ πρίσματος. Ο. Ε. Δ.

457. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ ςερεότης τῆς πυραμίδος ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐκ τοῦ ο μέσου σημείου τοῦ αΒ κύβου ὀχθεισῶν τῶν εὐθειῶν οΔ, ογ, κτλ. (σχ. 107) πρὸς ἑκάςην γωνίαν, ἀνακύψουσιν ἓξ ἴσαι πυραμίδες ΧΒγΔο, ΗΙΒΔο, κτλ.· ἄρα ἑκάςη τῶν πυραμίδων ἑκτημόριον ἔςαι τοῦ κύβου· ἀλλὰ α΄. ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ἐςὶν ἡ αὐτὴ τῇ τοῦ κύβου· τὸ δ' αὐτῆς ὕψος δο, ἥμισυ τοῦ ὕψους τοῦ κύβου· β΄. ἡ ςερεότης τοῦ κύβου ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους (456)· ἄρα ἡ τῆς πυραμίδος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ΧΒγΔ καὶ $\frac{1}{6}$ τοῦ ὕψους δη, εἴτ' οὖν $\frac{1}{3}$ τοῦ ἑαυτῆς ὕψους δο. Ο. Ε. Δ.

458. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Πυραμὶς, τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρίσματι ἔχουσα, τριτημόριόν ἐςι τοῦ πρίσματος· καὶ γὰρ τὸ πρίσμα δύναται ἴσα τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους· ἡ δὲ πυραμὶς τῷ ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους, ἄρα κτλ.

459. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Κῶνος ὁ ΑΒΓΔΖ (σχ. 108) τριτημόριόν ἐςι τοῦ κυλίνδρου ΑΒΓΔΕΖΘ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ἐκείνῳ ὕψος ἔχοντος.

460. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Κυλίνδρου, ταὐτὸν δ' εἰπεῖν, καὶ πρίσματος τετραγωνικοῦ (σχ. 90. 101), πυραμίδος καὶ δὴ καὶ

κώνȣ (χ. 100. 102) ἡ χωρητικότης τάχιον διὰ τȣ̃ πλάτȣς, ἢ διὰ τȣ̃ μήκȣς αὔξεται· πλάτος μὲν γὰρ τȣ̃ ΑΒΓΔΕ κυλίνδρȣ ἐςὶν ἡ ΑΓ διάμετρος, μῆκος δὲ ἡ πλευρὰ ΑΕ· τοιγαρȣ̃ν κυλίνδρων αἱ χωρητικότητες εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα, ὑποτιθεμένȣ ἴσȣ τȣ̃ μήκȣς· εἰσὶ γὰρ ὡς αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τὴν βάσιν συνιςώντων κύκλων (Συμβ. Λογ. 307)· αἱ δὲ, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα (398)· αἱ αὐταὶ δὲ χωρητικότητες εἰσὶν ὡς τὰ μήκη, ἴσης ὑποτιθεμένης τῆς βάσεως· ἔςω γὰρ τὸ ΑΕ μῆκος, ϗ τεθείσθω, τῆς βάσεως ἡμιποδιαίαν ἐχέσης διάμετρον, περιέχειν ὁ κύλινδρος δέκα μέτρα· ἐὰν ȣ̃ν τὸ ΑΕ μῆκος διπλασιασθῇ, ἔσονται ὥσπερ δύω ἴσοι κύλινδροι, κἀκ τȣ́τȣ περιέξȣσιν ἐπ' ἀκριβὲς μέτρα 20· τοιγαρȣ̃ν αἱ τῶνδε τῶν κυλίνδρων χωρητικότητες ἔσονται ἁπλῶς ὡς τὰ μήκη.

461. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἐντεῦθεν ἄρα σαφὲς, ὡς πλεῖον κερδαίνεται αὐξομένης τῆς τȣ̃ ἄγγȣς διαμέτρȣ, ἢ αὐξομένȣ τȣ̃ μήκȣς· κάδος γάρ τις, ȣ̃ ἡ διάμετρος τριπλασιάζεται, περιέξει ἐννεαπλάσιον ἐν τῷ αὐτῷ μένων μήκει· ἀλλ' ὁ αὐτὸς ȣ̃τος ἐν τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ τȣ̃ μήκȣς τριπλασιαζομένȣ, περιέξει μόνον τριπλάσιον.

462. ΣΧΟΛΙΟΝ. Αὐτὸ τὸ θεώρημα ἐμπεριέχει τὸν λόγον παντὸς τȣ̃ ἤδη εἰρημένȣ· ἡ γὰρ ςερεότης τȣ̃ πρίσματος, ἢ τῆς πυραμίδος, ἴση ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ τȣ̃ ὕψȣς, ἢ τȣ̃ $\frac{1}{3}$ τȣ̃ ὕψȣς· ἔςι δὲ ἡ βάσις γινόμενον ὑπὸ δύω εὐθειῶν, ὧν ἡ μὲν ὕψος, ἡ δὲ πλάτος καλεῖται· τοιγαρȣ̃ν ἡ βάσις ȣ̓κ ἐμφαίνει πλάτος ἁπλῶς, ἀλλ' ἔςιν ἐν λόγῳ συνθέτῳ τȣ̃ μήκȣς, καὶ τȣ̃ πλάτȣς, ὑφ' ὧν παράγεται· ἀλλαμὴν τὸ μῆκος, ἐφ' ὃ ἡ βάσις πολλαπλασιάζεται, ἔςιν εὐθεῖα γραμμὴ, ἢ ἁ-

πλοῦς παράγων τοῦ νέου προκύπτοντος, ὃ ἐμφαίνει τὴν ϛερεότητα, τῶν βάσεων ἴσων ὑποτεθεισῶν, τὰ προκύπτοντα ἄρα ἔϛαι ἁπλῶς ὡς τὰ μήκη, ἢ ὕψη (Συμβ. Λογ. 307).

463. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἡ ϛερεότης τῆς σφαίρας ἴση ἐϛὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς κατ' αὐτὴν ἐπιφανείας καὶ τοῦ τριτημορίου τῆς ἀκτῖνος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ σφαῖρα ἐκληφθῆναι δύναται ὡς συμπλήρωμα ἀπείρων πυραμίδων, ἐχουσῶν, τὴν μὲν κορυφὴν πρὸς τῷ κέντρῳ, διὰ δὲ τῶν καθ' ἑαυτὰς ἀπειροϛῶν βάσεων, σχηματιζουσῶν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας (435)· ἑκάϛη δὲ πυραμὶς ἴση ἐϛὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς οἰκείας βάσεως καὶ τοῦ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους (457), εἴτ' οὖν τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας· πᾶσαι ἄρα αἱ πυραμίδες, εἴτ' οὖν ἡ σφαῖρα αὐτὴ ἴση ἐϛὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος πασῶν τῶν βάσεων, εἴτ' οὖν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τοῦ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀκτῖνος. Ο. Ε. Δ.

464. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Καὶ τομέως ἄρα σφαιρικοῦ τοῦ ΔΓΟ (σχ. 105) ἡ ϛερεότης ἴση ἐϛὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας ΔΟ καὶ $\frac{1}{3}$ ΔΑ.

464. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ ϛερεότης (σχ. 109) τῆς ΑΒΓΔ σφαίρας ἴση ἐϛὶ $\frac{2}{3}$ κυλίνδρου τοῦ ΒΘΖΗ, ᾧ ἐγγέγραπται· κληθήτω γὰρ Ε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μεγάλου κύκλου ΓΔΙΟ τῆς σφαίρας, εἴτ' οὖν ἡ τοῦ κυλίνδρου βάσις ΒΘΗρ, ἥτις ἐϛὶν ἐκείνῳ ἴση· Α δὲ ἡ νΓ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, καὶ 2Α τὸ τοῦ κυλίνδρου ὕψος ΑΒ· ἐκοῦν ἡ μὲν τῆς σφαίρας ϛερεότης ἔϛαι ἴση $4E \times \frac{A}{3}$ (452) $= \frac{4EA}{3}$, ἡ δὲ τοῦ κυλίνδρου $= E \times 2A$ (456) $= 2EA$· ἀλλὰ $\frac{4EA}{3}$

: 2ΕΑ : : 2 : 3 (Συμβ. Λογ. 237)· ἄρα ἡ ςερεότης τῆς σφαίρας κτλ.

465. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Τὰ ὅμοια ςερεὰ πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων διαςάσεων.

ΔΕΙΞΙΣ. Α῎παν ςερεὸν παράγεται ὑπὸ τȣ͂ μήκȣς ϗ πλάτȣς τῆς βάσεως, ϗ ὑπὸ τȣ͂ ὕψȣς ἢ βάθȣς (456, 457)· ἀλλὰ δύω ὁμοίων ςερεῶν αἱ τρεῖς διαςάσεις εἰσὶν ἀνάλογοι· ὡς, εἰ τὸ τȣ͂ ἑτέρȣ μῆκος διπλάσιον, φέρ' εἰπεῖν, εἴη τȣ͂ ἐν θατέρῳ, ϗ τὸ πλάτος τȣ͂ πλάτȣς, ϗ τὸ ὕψος τȣ͂ ὕψȣς, ὡσαύτως εἶναι διπλάσια· ὁκȣ͂ν ὁ λόγος ὁ τῶν ὑψῶν, ϗ ὁ τῶν μηκῶν, ϗ ὁ τῶν πλάτεων εἰσὶν ἴσοι, ἀλλ' ὁ λόγος ὁ ἐκ τριῶν ἴσων συγκείμενος ἑνὸς τȣ́των ἐςι τριπλασίων (Συμβ. Λογ. 290)· αἱ δὲ ςερεότητες δύω ὁποιωνȣ͂ν ςερεῶν ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ τῷ ἀπὸ τῶν τριῶν αὐτῶν διαςάσεων· ἄρα τὰ ὅμοια ςερεὰ κ. τ. λ. Ο. Ε. Δ.

466. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὰ ὅμοια ςερεὰ εἰσὶν ὡς οἱ κύβοι δύω τινῶν ὁμολόγων διαςάσεων, εἴγε εἰσὶν ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῶν ὁμολόγων διαςάσεων· ἀλλ' ὁ τριπλασίων λόγος ὁ αὐτός ἐςιν, ὃς ϗ τῶν κύβων τῶν ἀπὸ δύω ὁμολόγων πλευρῶν (Συμβ. Λογ. 311). ἄρα κ.τ.λ.

467. Ἐὰν ἄρα δύω ὁμοίων ςερεῶν (σχ. 99. 107) θατέρȣ τὸ ὕψος ΑΓ ᾖ ἐξ ὑποθέσεως διπλȣ͂ν, ἢ τριπλȣ͂ν, ἢ τετραπλȣ͂ν, τȣ͂ θατέρȣ ὕψȣς αγ, ἡ ςερεότης τȣ͂ πρώτȣ πρὸς τὴν τȣ͂ δευτέρȣ ἔςαι ὡς ὁ κύβος τȣ͂ 2, ἢ τȣ͂ 3, ἢ τȣ͂ 4, πρὸς τὸν κύβον τȣ͂ 1, εἴτ' ȣ͂ν ἔςαι ὀκταπλȣ͂ν, ἢ εἰκοσιεπταπλȣ͂ν, ἢ ἑξηκοντατετραπλȣ͂ν, τȣ͂ δευτέρȣ.

468. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ὥσπερ οἱ κύκλοι ὅμοιά εἰσι σχήματα (383), ȣ̔́τως αἱ σφαῖραι, αἱ διὰ περιαγωγῆς

ἡμικυκλίου ἀπογεννώμεναι, ὅμοιά εἰσι ςερεὰ (427)· ἐντεῦθεν ἄρα, α΄. τῶν σφαιρῶν αἱ ἀκτῖνες, αἱ διάμετροι ϗ αἱ περιφέρειαι, δύνανται ἀεὶ ἐκλαμβάνεσθαι ὡς ὁμόλογοι πλευραὶ, ϗ ἀεὶ ὡς ὁμοίοις ςερεοῖς ἐπανήκοντα ἀνάλογον εἶναι· β΄. αἱ ςερεότητες τῶν σφαιρῶν εἰσὶν ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων, ἢ τῶν διαμέτρων, ἢ τῶν περιφερειῶν, τῶν ἐν αὐταῖς μεγάλων κύκλων.

Ἐὰν οὖν σφαῖρα διάμετρον ἔχῃ ἑτέρας δεκαπλάσιον, ἕξει χωρητικότητα, ἢ μέγεθος, χιλιοπλάσιον, τουτέςιν, ἐὰν ἡ δευτέρα χωρῇ φέρε ἕνα κυβικὸν πόδα ὕδατος, ἡ πρώτη χωρήσει χιλίους· ἐπεὶ 1000 ἐςὶν ὁ κύβος τοῦ 10· ϗ ἐὰν, κατὰ τὰς ἐσχάτας τῶν ἀςρονομένων παρατηρήσεις, ἡ διάμετρος τοῦ ἡλίου ὑποτεθῇ ἑκατονταπλῆ τῆς κατὰ τὴν γῆν, ἡ ςερεότης αὐτοῦ ἔςαι πρὸς τὴν τῆς γῆς ὡς 1000000 : 1· ἔςι γὰρ ἐκείνη πρὸς ταύτην ὡς $100^3 : 1^3$, εἴτ' οὖν ὡς 1000000 : 1.

469. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὃ λίαν ξυμβάλλει ἐν τῇ Φυσικῇ, ὡς ὁ τῶν ςερεοτήτων λόγος τάχιον αὔξει, ἢ ὁ τῶν ἐπιφανειῶν· δύω γὰρ ὁμοίων ςερεῶν, αἱ μὲν ἐπιφάνειαι εἰσὶν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα, αἱ δὲ ςερεότητες, ὡς οἱ κύβοι· ἡ ἐπιφάνεια φέρε σφαίρας, διπλῆν ἐχούσης διάμετρον, τετραπλῆ ἐςὶ τῆς ὑποδιπλῆν ἐχούσης, ἡ δὲ ςερεότης ταύτης ἐκείνης ἐςὶν ὀκταπλῆ· ἐὰν δὲ τριπλῆν ἔχῃ διάμετρον ἡ σφαῖρα, ἡ μὲν ἐπιφάνεια ἔςαι ἐννεαπλῆ, ἡ δέ γε ςερεότης εἰκοσιεπταπλῆ.