ἓν μόνον τρίγωνον ἀναχθῆναι ἔχουσι (361)· ἐπεὶ δὲ παντὶ τριγώνῳ ἴσον τετράγωνον συςήσαθαι δυνάμεθα· ἰδὲ δὴ, ὅπως τετράγωνον ἴσον κατασκευάσομεν παντὶ εὐθυγράμμῳ σχήματι, εἴτε κανονικῷ, εἴτε ἀκανονίςῳ. Ο. Ε. Π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου.

363. Τὸ πρόβλημα τοῦ τὸν κύκλον τετραγωνίσαι ἐν τούτῳ κεῖται, κατασκευάσαι ἀμέλει τετράγωνον ἴσον κύκλῳ, οὗ ἡ διάμετρος, ἢ ἡ περιφέρεια, δέδοται· παντὶ δὲ κανονικῷ πολυγώνῳ τετράγωνον ἴσον κατασκευάσαι δυνάμεθα, μέσην ἀνάλογον εὑρίσκοντες τῆς τε ἡμιπεριμέτρου καὶ τῆς ὀρθίας ἀκτῖνος· ἐπεὶ δὲ καὶ ὁ κύκλος ἐςι κανονικὸν πολύγωνον (31), ἴσον αὐτῷ τετράγωνον συςήσομεν, εὑρόντες μέσην ἀνάλογον τῆς ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ, εἴτ' οὖν τῆς ἡμιπεριφερείας, καὶ τῆς αὐτοῦ ὀρθίας ἀκτῖνος, εἴτ' οὖν τῆς ἡμιδιαμέτρου, καὶ ἐπ' αὐτῆς τῆς μέσης ἀναλόγου τετράγωνον ἀναγράψαντες· εἰ τοίνυν ἐγινώσκετο ὁ κύκλου παντὸς τῆς ἀκτῖνος, καὶ δὴ καὶ τῆς διαμέτρου, πρὸς τὴν περιφέρειαν, ἀληθὴς λόγος, διδομένης τῆς διαμέτρου εὑρίσκετ' ἂν ἡ περιφέρεια, πολλαπλασιαζομένης τῆς διαμέτρου ἐπὶ τόνδε τὸν λόγον· πρὸς οὖν τὴν οὕτως εὑρεθεῖσαν ἂν ἡμιπεριφέρειαν καὶ τὴν ἡμιδιάμετρον μέσην ἀνάλογον εὑρίσκοντες, καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀναγράφοντες, ἀκριβῶς ἂν ἐθηρώμεθα τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμόν.

Ἀλλὰ γὰρ τίς ἐςιν οὗτος ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος; τοῦτ' ἔςιν, ὃ πολλοὶ καὶ μεγάλοι Μαθηματικοὶ, πολλὰ μογήσαντες, ἀνήνυτα μέντοι ἐς δεῦρο πεπονηκότες ὤφθησαν, τὸν ἀκριβῆ λόγον μὴ δυνηθέντες διορίσασθαι· ἐντεῦθεν ἄρα κύκλου δεδομένου, οὗ μόνη ἡ περιφέρεια, ἢ μόνη ἡ διάμετρος, ἔγνωσαι, οὐδέπω εὑρεῖν δυνάμεθα ἀκριβῶς τὴν τούτου ἐπιφάνειαν, ἣν ἀτεχνῶς ἔδει ἰσοῦσθαι ὀρθογωνίῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ ἡμιπεριφέρεια, ὕψος δὲ ἡ ἀκτίς (298)· ἐντεῦθεν ἄρα, μήπω εὑρεθεισῶν τῶν δύο τούτων γραμμῶν, τῆς ἡμιπεριφερείας φημὶ καὶ τῆς ἀκτῖνος, ἀμήχανόν ἐστι πρὸς αὐτὰς μέσην εὑρεῖν ἀνάλογον, ἀφ᾽ ἧς τὸ τετράγωνον ἰσῷτ᾽ ἂν ἀκριβῶς τῷ κύκλῳ.

Τουτὶ ἄρα νοητέον, ὅταν τὸ πρόβλημα τὸ περὶ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου μηδέπω ἐπιλελύσθαι λέγηται, ἢ ὡς ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸς μηδέπω εὕρηται.

Δυνάμεθα μέντοι τῷ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἀληθεῖ προσπελάσαι λόγῳ, εἴτε μηχανικῶς, εἴτε γεωμετρικῶς· κἀκείνως μέν,

364. τεθείσθω εὐθεῖα φυσικὴ ἐκ νήματος δυνατοῦ ἡ ΑΒ (σχ. 89), ἐν ἐπιπέδῳ ὁμαλωτάτῳ, κύκλος δὲ ὁ ΒΚΔ, ἐξ ὀρειχάλκου, ἢ ἑτέρας ὕλης, κατεσκευασμένος, ἐχέτω τὸ ἑαυτοῦ ἐπίπεδον κάθετον τῷ, ἐφ᾽ οὗ ἡ ΑΒ, ἐπιπέδῳ, καὶ σημειωθήτω τὸ Β ἐπὶ τοῦ κύκλου σημεῖον, καὶ ἄλλο σημεῖον Β ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΑ, καὶ τιθέσθω τὸ τοῦ κύκλου Β ἐπὶ τὸ τῆς εὐθείας Β, καὶ ἐκκυλισθήτω ὁ κύκλος ἐπὶ τῆς ΒΑ εὐθείας· καὶ δὴ πάντα μὲν τὰ τῆς περιφερείας σημεῖα ἐγχρίψουσιν ἄλλο μετ᾽ ἄλλο πᾶσι τῆς σημείοις τῆς εὐθείας ΒΑ, τὸ δὲ Κ κέντρον, καταγράψαν τὴν εὐθεῖαν Κδ, στήσεται κατὰ τὸ δ· τὸ δὲ Β σημεῖον τοῦ κύκλου, ἀφ᾽ οὗ ἐκκυλίεσθαι ἤρξατο συμπεσεῖται τῷ τῆς ΑΒ εὐθείας σημείῳ β· σαφὲς οὖν ὡς ἡ Ββ εὐθεῖα ἴση ἔσται ἀκριβῶς τῇ ὅλῃ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου· τοιγαροῦν τῷ διαβήτῃ λαμβανομένης τῆς ΒΚ ἀκτῖ-

νος, ϗ μεταφερομένης ἐπὶ τῆς Bβ εὐθείας, εὑρεθήσεται Bβ = 6BK, ἢ 3 Bτ σὺν τῷ καταλοίπῳ βO, ὃ παραβαλλόμενον πρὸς τὴν BKτ διάμετρον, εὑρεθήσεται ἔλαττον μὲν ἢ ὀκτημόριον, μεῖζον δὲ ἢ ἑπτημόριον αὐτῆς, σχεδὸν μέντοι ἑπτημόριον.

365. Μηχανικῶς ἄρα εὕρηται ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος κείμενος μεταξὺ τῶν δύω τούτων ὁρίων $3 + \frac{1}{8}$ ϗ $3 + \frac{1}{7}$· εὑρίσκομεν ἀλλ' οὖν ὅτι $3 + \frac{1}{7}$, καίτοι μεῖζον τοῦ ἀληθοῦς, ἐγγίζει μέντοι μᾶλλον τῷ ἀληθεῖ λόγῳ ἢ $3 + \frac{1}{8}$, τοῦ διαπτώματος ἀλογουμένου ὡς πάνυ μικροῦ· ἐὰν οὖν κληθῇ, 1 μὲν ἡ διάμετρος, ἡ δὲ περιφέρεια $3 + \frac{1}{7}$, ὁ λόγος ἐκείνης πρὸς ταύτην ἔσαι ὡς 7 πρὸς 22· ἔσι γὰρ $1 : 3\frac{1}{7} :: 7 : 22$ (Συμ. Λογ. 240)· ἄρα ἐν διαπτώματι μικροῦ δεῖν ἀνεπαισθήτῳ ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος κατὰ τὴν ἡμετέραν μηχανικὴν πρᾶξιν ἔσιν $7 : 22$.

366. Ἁψώμεθα δὲ ἤδη τοῦ τρόπου, καθ' ὃν Μαθηματικῶν παῖδες γεωμετρικῶς προσεγγίζουσι τῷδε τῷ λόγῳ.

Δέδεικται ἤδη (255) ὡς ἡ κυκλικὴ περιφέρεια μείζων ἐσὶ τοῦ τριπλοῦ τῆς διαμέτρου.

Ἐπινοήσωμεν οὖν νῦν τὴν ΘΔ πλευρὰν (σχ. 90) τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου δίχα τετμημένην ὑπὸ τῆς ΖΓ ἀκτῖνος, ϗ ἐπεζευγμένην δωδεκαγώνου πλευρὰν τὴν ΓΔ· εὑρεθήσεται οὖν ἡ τῆς πλευρᾶς τῆσδε δύναμις οὕτως.

Ὑποτεθείσθω ἡ ΖΓ ἀκτὶς $= 10000000$· ἔσι δὲ ἐν τῷ ΖΘο ὀρθογωνίῳ $ΘΖ^2 = Ζο^2 + Θο^2$, οὐκοῦν $Ζο^2 = ΘΖ^2 - Θο^2$· ἀλλὰ $ΘΖ = ΖΓ = 10000000$, ἄρα $Θο = 5000000$ (251)· ἀλλὰ $ΘΖ^2 = 100000000000000$, ϗ $Θο^2 = 25000000000000$, ἄρα $Ζο^2 = 100000000000000 - 25000000000000 = 75000000000000$·

ὁκᾶν $Zo = \sqrt{75000000000000} = 8664254$· ἀλλὰ $\Gamma o = Z\Gamma - Zo$· ἄρα $\Gamma o = 10000000 - 8660254 = 1339746$.

Τριγώνε ὖν ὀρθογωνίε τῦ $o\Delta\Gamma$ γνωςαί εἰσι δύω τῶν πλευρῶν, εἴτ' ὖν $o\Gamma = 1339746$, ἢ $\Delta o = \Theta o = 5000000$· ἐπεὶ δὲ $\Gamma\Delta^2 = o\Gamma^2 + o\Delta^2$, ἄρα $\Gamma\Delta = \sqrt{1339746^2 + 5000000^2}$, ἡ ζητεμένη τῦ δωδεκαγώνε πλευρὰ, ἣν ὁ δηλῶν ἀριθμὸς κεκλήσθω π· ὁκῦν 12π ἐμφαίνει ὅλην τὴν τῦ δωδεκαγώνε περίμετρον· ἢ ἐπεὶ ὑποτέθειται ἡ διάμετρος $= 20000000$· ὁ τῆς τῦ δωδεκαγώνε περιμέτρε πρὸς τὴν διάμετρον τῦ περιγεγραμμένε κύκλε λόγος ἐςὶ $\frac{12\pi}{20000000}$· ἤχθω δὲ ἀκτὶς ἄλη κάθετος τῇ $\Gamma\Delta$ πλευρᾷ· τριγώνε ὖν ὀρθογωνίε τῦ $\Gamma\chi Z$ εἰσὶ δύω γνωςαὶ πλευραὶ, εἴτ' ὖν ἡ ἀκτὶς $\Gamma Z = 10000000$, ἢ ἡ $\Gamma\chi = \frac{\pi}{2}$· ἐπεὶ δὲ $Z\chi^2 = Z\Gamma^2 - \Gamma\chi^2$, ἄρα ἡ τρίτη ζητεμένη πλευρὰ $Z\chi$ ἔςαι $= \sqrt{10000000^2 - \frac{\pi}{2}^2}$, αὕτη δὲ ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς ἀκτῖνος, εἴτ' ὖν 10000000, κατάλοιπον ἔςαι ἡ τῆς $\eta\chi$ δύναμις· ἐπινοήσωμεν ἔτι χορδὴν ὑποτείνεσαν τὸ μικρὸν τόξον $\Gamma\eta$· α'. ὖν αὕτη ἔςαι πλευρὰ πολυγώνε ἐκ 24 πλευρῶν συνιςαμένε· β'. συςαθήσεται τρίγωνον κατὰ τὸ χ ὀρθογώνιον τὸ $\Gamma\eta\chi$, ἐν ᾧ γινώσκεται ἥτε $\Gamma\chi = \frac{\pi}{2}$, ἢ ἡ ἀρτίως εὑρεθεῖσα $\chi\eta$· τοιγαρῦν ἐπεὶ $\Gamma\eta^2 = \Gamma\chi^2 + \eta\chi^2$, ἔςαι $\Gamma\eta = \sqrt{\Gamma\chi^2 + \eta\chi^2}$, πλευρὰ τῦ ἐκ 24 πλευρῶν συγκροτεμένε πολυγώνε, ἧς τινος κληθείσης κ, 24κ σημανεῖ τὴν ὅλην περίμετρον τῦ εἰρημένυ πολυγώνυ, ἢ $\frac{24\kappa}{20000000}$ δηλώσει τὸν τῆς τύτυ περιμέτρυ πρὸς τὴν τῦ κύκλυ, ᾧ ἐγγέγραπται, διάμετρον λόγον.

Ἀεὶ ἄρα διὰ καθέτων διχοτομυμένης τῆς πρὸ τῦ εὑρημένης ἐν ἀριθμοῖς πλευρᾶς, πάντα λόγον περιμέτρυ παντὸς πολυγώνυ ἀρτιοπλεύρυ πρὸς τὴν τῦ κύκλυ, ᾧ ἐγέγραπται, διάμετρον γνωσόμεθα.

367. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ δὲ ὅσῳ πολυγωνότερον τὸ κανονικὸν σχῆμα, τοσύτῳ μᾶλλον ἐγγίζει τῦ συγκεχύσθαι τῇ περιφερείᾳ τῦ κύκλυ, ᾧ ἐγγέγραπται, ἀφικέσθαι δυνάμεθα ἐπὶ πολύγωνον ὗ ἡ περίμετρος σχεδόν ἐστιν ἴση τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ, ἢ ἀντικαταστάσης τῆς περιφερείας ἀντὶ τῦ ἀριθμῦ τῦ τὴν περίμετρον ἐκδηλῦντος, ἢ διαιρεθείσης διὰ 2000000, τὸ πηλίκον ἐκληφθήσεται ἴσα ἢ λόγος, ὃν ἡ διάμετρος ἔχει πρὸς τὴν περιφέρειαν.

368. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐπειδὴ πᾶν πολύγωνον (σχ. 61) κύκλῳ, ὗ ἀκτὶς ἡ Κο, περιγεγραμμένον δύναται ἐκληφθῆναι ὡς ἐγγεγραμμένον κύκλῳ, ὗ ἀκτὶς ἡ ΠΚ, ἕξεσιν ἐκ τύτυ διὰ τῆς προτεθείσης μεθόδυ γνῶναι τὸν τῆς διαμέτρυ πρὸς τὸ περιγεγραμμένον πολύγωνον λόγον· ἢ ἐπεὶ ἡ περιφέρεια μείζων μέν ἐστι τῆς τῦ ἐγγεγραμμένυ, ἐλάττων δὲ τῆς τῦ περιγεγραμμένυ σχήματος περιμέτρυ (256), ὁ τῆς διαμέτρυ πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον λόγος, ἢ τῆς αὐτῆς πρὸς τὸ περιγεγραμμένον, ἔσονται δύω ὅρια, ἐν οἷς ἐστιν ὁ τῆς διαμέτρυ πρὸς τὴν περιφέρειαν ἀληθὴς λόγος.

369. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ὥσπερ δὲ ῥίζαν ἐξάγοντες ἀτελῦς τετραγώνυ ἀριθμῦ, τὴν μὲν ἀληθῆ εὑρεῖν ὐ δυνάμεθα, ἀεὶ μέντοι μᾶλλον ἢ μᾶλλον ἐγγὺς χωρῦμεν τῆς ἀ-

ληθῶς ἐπαναλήψει τῶν πράξεων· οὕτω καὶ τὸν λόγον τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν, κἂν τὸν ὄντα εὑρεῖν μὴ ἔχωμεν, ἐπαναλήψει μέντοι τῆς ἐν τῇ προαποδοθείσῃ μεθόδῳ πράξεως, τὸν ὡς ἐγγυτάτω τοῦ ἀληθοῦς θηρώμεθα, καὶ δὴ διὰ προσεγγίσεως καὶ τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου ἐπιτηδεύομεν· ὥσπερ δὲ τὴν ἀληθῆ ῥίζαν εὑρεῖν ἐκ τετραγώνου ἀτελοῦς ἀμήχανον δέδεικται, οὕτω καὶ τὸν ἀληθῆ λόγον ἐνταῦθα καὶ τὸν τετραγωνισμὸν εἶτα τὸν τοῦ κύκλου διὰ τῆς μεθόδου τῶν περιγεγραμμένων καὶ ἐγγεγραμμένων πολυγώνων τῶν ἀδυνάτων ἐστὶν εὑρεῖν.

370. Ἴδου δὴ, ὅπου ἀφίκοντο, ὡς τὰ πολλὰ, δι' ἧς προεξεθέμεθα μεθόδου, ἐν τῷ τοῦ κύκλου τετραγωνισμῷ.

Ἀρχιμήδης μὲν κύκλῳ περιγράψας κανονικὸν πολύγωνον ἐξ 96 πλευρῶν, εὕρατο τὴν περίμετρον αὐτοῦ λόγον ἔχουσαν πρὸς τὴν κύκλου διάμετρον ὃν $22 : 7$· ὅθεν συνήγαγεν, ὡς ἡ κυκλικὴ περιφέρεια πρὸς τὴν διάμετρον ἐλάττονα μὲν λόγον ἔχει ἢ $22 : 7$· μείζονα δὲ ἢ $21 \frac{70}{71} : 7$.

371. Ἀδριανὸς δὲ Μέτιος μετὰ ταῦτα ἀπέδειξεν, ὡς ἐστὶν ὁ λόγος οὗτος μικρῷ ἐλάσσων ἢ $21 \frac{112}{113} : 7$, μείζων δὲ $21 \frac{111}{112} : 7$, πρὸς δ' ἀποφυγὴν τῶν κλασμάτων ἀντεισήγαγεν ὁ αὐτὸς $355 : 113$· ἐστὶ γὰρ ὡς ἀληθῶς $355 : 113 :: 21 \frac{112}{113} : 7$ (Συμ. Λογ. 236).

Οἱ τοίνυν λόγοι $7 : 22$ καὶ $113 : 355$ ἀμφότεροι μὲν μείζους εἰσὶ τοῦ ἀληθοῦς· ὁ μέντοι $113 : 355$ τῷ ἀληθεῖ προσεχέστερος ἢ ὁ $7 : 22$, ἐστί τε ἀκριβέστερος ἁπάντων τῶν εἰς χρῆσιν παραλαμβανομένων, ὧν ὅ,τε ἡγούμενος καὶ ἑπόμενος πλείους τριῶν χαρακτῆρας οὐ περιέχουσι (Συμ. Λογ. 184).

372. Δέδεικται δὲ, ὡς χρησαμένοις τῷ ἀρχιμηδείῳ λόγῳ $7 : 22$, προκύπτει κυκλικὴ περιφέρεια τῆς

ἀληθῦς ὑπερτέρα μέρει, μείζονι μὲν ἢ 2486ᵂ τῆς περιφερείας, ἐλάττονι δὲ ἢ 2485ᵂ.

373. Δυνάμεθα ἄρα ἐν τοῖς μικροῖς κύκλοις πάνυ ἀδεῶς χρῆσθαι τῷ ἀρχιμηδείῳ λόγῳ 7 : 22.

374. Ἀλλὰ προκριτέος ἀναμφηρήσως ὁ 113 : 355 ἐπὶ τῶν μεγάλων κύκλων, ὡς ἐν τῷ τῆς ἀςρονομίας λογισμῷ.

Χρῶνται δὲ ὡσαύτως ϗ τῷ λόγῳ 106 : 333· ἡ δὲ ὑπεροχὴ τῆς ἐκ τούτου ἀνακυπτούσης περιφερείας ὑπὲρ τὴν ἀληθῆ, μείζων μέν ἐςιν ἢ 37750ᵂ, ἐλάττων δὲ ἢ 37749ᵂ τῆς εὑρεθείσης περιφερείας.

375. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Διαμέτρου δοθείσης, εὑρεῖν διὰ προσεγγίσεως τὴν αὐτῆς περιφέρειαν, ἢ περιφερείας δοθείσης, εὑρεῖν διὰ προσεγγίσεως τὴν διάμετρον.

ΛΥΣΙΣ. Γενέσθω μέθοδος τῶν τριῶν, ἐν ᾗ δύω μὲν πρότεροι ὅροι ἔςωσαν ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος, ᾧ ἂν δόξῃ χρήσασθαι· τρίτος δὲ, ὁ τὴν διάμετρον ἢ τὴν περιφέρειαν ἐκδηλῶν ἀριθμός· ϗ πρῶτος μὲν τιθέσθω ἡ διάμετρος, ἐὰν περιφέρεια ζητῆται· ἡ περιφέρεια δὲ, ἐὰν διάμετρος.

Ἔςω οὖν ἡ διάμετρος ποδῶν 100· ϗ εἰλήφθω εἰς χρῆσιν ὁ 7 : 22 λόγος· οὐκοῦν ἔςι $7 : 22 :: 100 : \chi = 314\frac{2}{7}$ ποσί.

376. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τῆς γῆς ἐχούσης περίμετρον λευγῶν 9000, πόση ἔςαι ἡ κατ' αὐτὴν διάμετρος;

ΛΥΣΙΣ. Εἰλήφθω εἰς χρῆσιν ὁ λόγος ὁ κατὰ Μέτιον· ϗ δὴ ἔςαι $355 : 113 :: 9000 : \chi = 2864 + \frac{66}{71}$ λεύγαις.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰσὶν οἳ τῶν Μαθηματικῶν τὸν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον ἐκτιθέασι διὰ τῶν ὁρων 1 : 3,141592, κτλ. ὅπερ ἥκιστα ξένον· καὶ γὰρ τιθεμένης τῆς διαμέτρου = 1, ὅσοις δήποτε βουλόμεθα χρῆσθαι ἕξεσι μηδενικοῖς, μᾶλλον καὶ μᾶλλον προσπελάζοντας τῷ ἀληθεῖ λόγῳ ἐν ἀριθμοῖς δεκαδικοῖς ἐπ' ἄπειρον· ἀλλὰ γὰρ ὁμολογητέον, ὡς ὁ οὕτως ἐκτεθειμένος λόγος, ἡδὺς μὲν ἐστιν ἐν τῇ θεωρίᾳ, δυσχερέστατος δὲ τῇ χρήσει· καὶ οὐδείς ἐστιν, ὃς αὐτῷ πράττων νυνὶ κέχρηται.

377. Τὸν τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγον καὶ διὰ τοῦ λογισμοῦ τῶν ὁλοκλήρων θηρῶνται Γεωμετρῶν παῖδες, καθὰ καὶ ἡμῖν ἐκεῖσε γενομένοις τῆς πράξεως ἀπόπειρα ληφθήσεται. Ἰστέον μέντοι ὡς οἱ νεώτεροι Μαθηματικοὶ τὸν ἀπόλυτον τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου ἡγούμενοι ἁπλῆς περιεργείας ζήτημα, καὶ δαπανᾶν ἐθέλοντες τὸν πολύτιμον χρόνον ἐπὶ τὰ ξυμφορώτερα, ἐπαύσαντο διακενῆς ζητοῦντες τὴν τούτου λύσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ γεωμετρικῆς κλίμακος, καὶ ἀναλογικοῦ διαβήτου.

378. Γεωμετρικὴ κλίμαξ ἐστὶν εὐθεῖα ἡ ΑΥ (σχ. 91) διῃρημένη εἰς ὁσαδήποτε ἰσάλληλα τμήματα, εἴτ' οὖν ΑΖ = ΖΥ = ΥΣ· ὑποθώμεθα νῦν ἓν τῶν αὐτῆς τμημάτων τὸ ΑΖ διῃρημένον εἰς δέκα ἰσάλληλα μέρη, καὶ Α1 = 12, = 23, 34, κτλ. ἔξεστι οὖν δι' ἑκάστου τῶνδε τῶν μερῶν, ὃ ἂν βουλώμεθα, ἐκδηλώσασθαι μέτρον· ἔστω γὰρ ΑΖ = 10 ὀργυιαῖς, οὐκοῦν ΑΥ ἔσται = 30 ὀργυιαῖς· κείσθω ἔτι ΑΓ = 6Α, εἴτ' οὖν 6 ὀργυιαῖς· ἐὰν οὖν ἀχθῇ ἡ Γ1 εὐ-

ὅθεν ἅπαντα τὰ τρίγωνα 1ιο, 12κ, 13χ, 14η, κτλ. ὅμοια ἔσονται τῷ τε 1ΓΜ ᾗ ἀλλήλοις (318)· ἐντεῦθεν ἄρα πάντοται προκύψεσιν ἀναλογίαι, ὡς 4η : ΓΜ :: 1η : 1Μ· ἀλλὰ 1η = $\frac{1}{5}$ 1Μ, ἄρα ᾗ 4η = $\frac{4}{5}$ ΓΜ, εἴτ' ἓν $\frac{4}{5}$ ὀργυιᾶς, ἐπεὶ ΓΜ = Α1, ᾗ δὴ 4η = 4 ποσί.

Ὁμοίῳ συλλογισμῷ δῆλον ἔσαι ὡς 1ο = 1 ποδὶ, ᾗ 2κ = 2 ποσὶ, ᾗ οὕτως ἑξῆς.

379. Ἐὰν ἓν ἐκδηλῶσαι βελώμεθα ὀκτωκαίδεκα ὀργυιὰς ᾗ τρεῖς πόδας, ληψόμεθα τὴν ΖΤ εὐθεῖαν, εἴτ' ἓν ὀργυιὰς 1ο σὺν Ζ2 εἴτ' ἓν ὀργυίαις 8· τέλος δὲ διὰ τῦ διαβήτε μετάξομεν τὴν μικρὰν εὐθεῖαν 3χ πρὸς ἀριςερὰν τῆς Ζ2.

Μεγίςην χρῆσιν παρέχεται ἡ γεωμετρικὴ κλίμαξ· α΄. ὅταν ζητῆται ἐπὶ χάρτε κατασκευάσαι τρίγωνον ὅμοιον μεγάλῳ τριγώνῳ κατὰ γῆς γεγραμμένῳ, ὡς ὀψόμεθα ὕςερον. β΄. ἐπὶ τῇ τῶν γεωγραφικῶν πινάκων σχεδιάσει· αὕτη γὰρ ἡ κλίμαξ, ἧς τὰ ἰσάλληλα μέρη μᾶλλον, ἢ ἧττον, μεγάλα, ὡς ἂν ὁ Γεωγράφος παραςῆσαι ταῦτα ἐκτάσεως ἔχοντα βέλοιτο, παρέχεται αὐτῷ τὸν κανόνα, ἢ τὸν ὅρον τῆς παραθέσεως· γ΄. ἐν γένει ἡνίκα ἐπὶ χάρτε ἐκδηλῶσαι βελόμεθα πρᾶγμα, ὗ ἂν εἴησαν τὰ μέρη ἑτέρῳ ἀνάλογα.

Ῥᾷςα δὲ κατανοεῖται, ὡς τῆς κλίμακος ἕκαςον μέρος ἐκδηλῦν δύναται, ὃ ἂν βελώμεθα συνεχὲς ποσόν· ἕκαςον γὰρ τῶν ἰσαλλήλων μερῶν ἐκδηλῶσαι δύναται, ἤτοι ὀργυιὰν, ἢ λεύγην, ἢ δέκα ὀργυιὰς, ἢ τοσαύτας λεύγας κτλ., τηρεμένης ἀεὶ τῆς ἀναλογίας μεταξὺ τῶν δε τῶν μερῶν· ἔςω γὰρ ἐκδηλῶσαι 250 ὀργυιάς· ὑποθετέον ἓν ΤΥ = 100, ᾗ ΥΖ = 100, εἰς δέγε δήλωσιν τῶν 50 ὀργυιῶν ληπτέον τὴν Ζ5 = $\frac{1}{2}$ ΑΖ.

380. Ὁ δὲ ἀναλογικὸς διαβήτης σύγκειται ἐκ δυοῖν βραχιόνων τῶν ΑΒ, ΑΓ, ὡρισμένον τι μῆκος ἐχόντων, καὶ κινουμένων περὶ τὸ σημεῖον Α (σχ. 92)· πλὴν δὲ τοῦ μήκους τοῦ τῶν βραχιόνων, ἵνα γράφειν ἔχωμεν παντοίας εὐθείας, περὶ ὧν ἡμεῖς ἐνταῦθα βραχέα ἐροῦμεν, ὁ ἀναλογικὸς διαβήτης οὐδὲν ἄλλο ἐστὶν, εἰ μὴ αἱ κατὰ τὸ Α ἀλλήλας τέμνουσαι εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, καὶ κατὰ τὴν τοῦ διαβήτου ἀνοιγὴν ποιοῦσαι ἁπάσας τὰς δυνατὰς γωνίας· ἐὰν οὖν ὑποτεθῇ τὸ διάστημα, ἢ τὸ ἄνοιγμα ΒΑΓ, κεκλεισμένον ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν ἀνὰ δύο ἀγομένων, ἄπειρα ὅμοια τρίγωνα συσταθήσονται τὰ Α66, Α55, κτ. ὧν ἑπομένως αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ ἀνάλογον ἔχουσι· δυνατὸν ἄρα διὰ τοῦ ἀναλογικοῦ διαβήτου εὑρεῖν εὐθείας ἀνάλογον ἐχούσας πρὸς ἄλλας.

Ὑπάρχουσι δὲ ἐν τῷδε τῷ διαβήτῃ, ά. αἱ εὐθεῖαι, ἃς μέρη ἰσάλληλα καλοῦσι, καὶ αἷς ἀντὶ τῆς γεωμετρικῆς κλίμακος κέχρηνται, ἐξευμαρίζοντες τὴν σύστασιν διαφόρων ὁμοίων τριγώνων, καὶ διαφόρων ἀναλογιῶν· β΄. αἱ τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων εὐθεῖαι, δι' ὧν κύκλῳ, οὗ ἡ διάμετρος δέδοται, ἐγγράψαι δυνάμεθα παντοῖα εἴδη πολυγώνων κ.τ.λ.

381. Ἐπεὶ δὲ ἐν τοῖς φθάσασι τὰ περὶ τῆς γεωμετρικῆς λύσεως τῶνδε τῶν προβλημάτων ἀπεδώκαμεν, ἥκιστα δεῖν ἡγούμεθα ἐκπονεῖν παριστῶντας, καὶ ὅπως μηχανικῶς διὰ τοῦ ἀναλογικοῦ διαβήτου ἐπιλύεσθαι δύνανται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ ὁμοίων σχημάτων.

382. Σχήματα ὅμοια λέγονται τὰ τὰς ἀντιστοίχους γωνίας ἴσας ἔχοντα, καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς, εἴτ' οὖν τάς, αἳ ὑποτείνουσι γωνίας ἴσας, ἀνάλογον.

383. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.** Πάντες οἱ κύκλοι ἀναγκαίως εἰσὶν ὅμοια σχήματα· ἐπειδὴ α΄. πᾶσαι αἱ γωνίαι, ἃς περιέχουσι δύω προσεχῆ στοιχεῖα περιφερείας κύκλου, εἰσὶν ἴσαι ταῖς περιεχομέναις ὑπὸ δύω προσεχῶν στοιχείων περιφερείας παντὸς ἄλλου κύκλου· ἑκάστη γὰρ τούτων ἐπὶ παντὸς κύκλου ἐστὶν $= 180° - \frac{180°}{\infty}$ · β΄. αἱ ὁμόλογοι πλευραί, εἴτ' οὖν τὰ στοιχεῖα πάντων τῶν κύκλων εἰσὶν ἀνάλογα (32).

384. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.** Ἵνα δύω σχήματα ὦσιν ὅμοια, δεῖ ἔχειν ἑκάτερον πλευρὰς ἰσαρίθμους ταῖς θατέρου· ἐπεὶ γὰρ τῶν ἐντὸς τῆς περιμέτρου γωνιῶν τὸ ἄθροισμα ἀεὶ αὔξεται δυσὶν ὀρθαῖς (266) τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τοῦ πολυγώνου πλευρῶν μονάδι αὐξομένου, ἑκάστη ἄρα γωνία μείζων ἐστὶν ἐν πολυγώνῳ πλείους ἔχοντι πλευράς, ἢ ἐν τῷ ἐλάττους· ἄρα δύω πολύγωνα οὐ δύνανται ἔχειν ἴσας τὰς ἀντιστοίχους γωνίας, καὶ ἑπομένως ὑπάρχειν ὅμοια, ἐὰν μὴ ἔχωσιν ἰσαρίθμους πλευράς.

385. **ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.** Οὐκοῦν ἵνα δύω σχήματα ὦσιν ὅμοια, τριῶν τουτωνὶ ἐξ ἀνάγκης δεῖ, α΄. ἰσαρίθμους ἔχειν πλευράς· β΄. τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς ἀνάλογον εἶναι· γ΄. τὰς ἀντιστοίχους γωνίας ἴσας εἶναι.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ πρῶτον τούτων τοῦ τρίτου ἐξέχεται ὡς ἤδη εἴδομεν (384)· οὐκέτι μέντοι καὶ τοῦ πρώτου τὸ τρίτον· ϗ γὰρ, καίτοι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν δύω ἐξ ἰσαρίθμων πλευρῶν συνισταμένων πολυγώνων τὸ αὐτὸ ὑπάρχει· ἑκάστη μέντοι γωνία τοῦ ἑτέρου δύναται εἶναι ἑκάστης θατέρου ἀπείρως μείζων, ἢ ἀπείρως ἐλάττων (245)· οὐδὲ τὸ δεύτερον δὲ τοῦ πρώτου ἐξήρτηται· εἰσὶ γὰρ ἀριθμὸν ὑπερβαίνοντα σχήματα ἐξ ἰσαρίθμων μὲν πλευρῶν, οὐ μὴν ἀναλόγων συνιστάμενα· ὡσαύτως ἡ τῶν πλευρῶν ἀναλογία οὐχ' ἕπεται ἐκ τῆς τῶν ἀντιστοίχων γωνιῶν ἰσότητος, πλὴν τοῦ τριγώνου, (245), οὐδὲ τ' ἀνάπαλιν. Τετραγώνου μὲν γὰρ ϗ ὀρθογωνίου ἐπιμήκους (σχ. 54. 55), ἴσαι μὲν αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι, ἥκιστα μέντοι ἀνάλογον ἔχουσιν αἱ πλευραὶ, ὡς παντὶ δῆλον· τετραγώνου δὲ ϗ ῥόμβου ἀνάλογον μέν εἰσιν αἱ πλευραί· ϗ γὰρ ἐκείνου τε ϗ τούτου ἰσάλληλοι ὑπάρχουσι· αἱ μέντοι γωνίαι ἐκείνου ἥκιστα ταῖς τούτου ἰσοῦνται.

386. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν κατ' αὐτὰ βάσεων καὶ ὑψῶν.

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ γὰρ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἰσὶ τὰ ἡμιπαραγόμενα ὑπὸ τῶν βάσεων, ϗ τῶν ὑψῶν (285)· ταῦτα δὲ πρὸς ἄλληλα ἐν λόγῳ εἰσὶ συνθέτῳ τῷ ἐκ τῶν βάσεων ϗ τῶν ὑψῶν (Συμβολ. Λογ. 291)· ἄρα τὰ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὑπάρχει· ἀλλὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ βάσεις ἀνάλογόν εἰσι τοῖς ὕψεσι (326)· τοῦ λόγου ἄρα τῶν βάσεων ἴσου ὄντος τῷ τῶν ὑψῶν, ὁ ἐκ τῶν βάσεων ϗ τῶν ὑψῶν σύνθετος λόγος τὸ γινόμενον ἔσται ὑπὸ δύω ἴσων λόγων, εἴτ' οὖν λόγος ἑνὸς τούτων διπλασίων (Συμβ. Λογ. 290)· τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα ἐν λόγῳ εἰσὶ διπλασίονι τῶντε βάσεων ϗ τῶν ὑψῶν. Ο. Ε. Δ.

387. Ἔςωσαν ἐν ὑποδείγματι (χ. 71) ΑΖ, ατ ὕψη τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΖΤ, ατυ, ϗ ΖΤ, τυ βάσεις· ἐὰν οὖν ἡ ΑΖ = 2ατ, ἔςαι ϗ ΖΤ = 2τυ· ἔςω οὖν ΑΖ = 10· ἐκοῦν ἔςαι ατ = 5· ἔςω δὲ ϗ ΖΤ = 6· τοιγαροῦν ἔςαι τυ = 3· ὁ μὲν οὖν τῶν ὑψῶν λόγος ἔςαι $\frac{10}{5}$, ὁ δὲ τῶν βάσεων $\frac{6}{3}$· πρόδηλον δὲ ὅτι $\frac{10}{5} = \frac{6}{3} = 2$· τὸ οὖν ὑπὸ τούτων τῶν λόγων γινόμενον $\frac{10}{5} \times \frac{6}{3} = \frac{60}{15}$ ἔςαι λόγος ἑκατέρου τούτων διπλασίων· τὰ τοίνυν ὅμοια τρίγωνα ΑΖΤ, ατυ, ἴσα ὄντα τοῖς ἡμιγινομένοις 10×6, ϗ 5×3 ὑπὸ τῶν ὑψῶν ϗ τῶν βάσεων, ἐν διπλασίονι λόγῳ ἔσονται τῶντε βάσεων ϗ τῶν ὑψῶν.

388. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ δὲ δύω τετράγωνα διπλασίονα λόγον ἔχουσι τῶν ῥιζῶν, ἤ, ὃ ταυτὸν, ὁ διπλασίων λόγος τῶν ῥιζῶν ἐςὶν ὁ αὐτὸς τῷ τῶν τετραγώνων λόγῳ (Συμβ. Λογ. 308), δύω ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων τετράγωνα, ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὑψῶν.

Ἐπὶ γὰρ τοῦ προτεθέντος ὑποδείγματος ἡ τοῦ ΑΖΤ ἐπιφάνεια ἐςὶ $\frac{ΑΖ \times ΖΤ}{2}$, ἢ $\frac{10 \times 6}{2} = 30$ (285) ἡ δὲ τοῦ ατυ ἐςὶν $= \frac{ατ \times τυ}{2}$, ἢ $\frac{5 \times 3}{2} = 7\frac{1}{2}$· ἀλλὰ $30 : 7\frac{1}{2}$ ὡς τὸ ἀπὸ 10 τετράγωνον 100 πρὸς τὸ ἀπὸ 5 τετράγωνον 25, ὡς δῆλον, ϗ γὰρ $30 : 7\frac{1}{2} :: 100 : 25$ (Συμβ. Λογ. 240)· ἄρα κ.τ.λ.

Ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ δὲ ὑποδείγματος ἐςὶ $30 : 7\frac{1}{2}$ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων 6, 3 τετράγωνα 36, 9· ϗ γὰρ $30 : 7\frac{1}{2} :: 36 : 9$.

389. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Δύω ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλά εἰσι καὶ ὡς τὰ ἀφ' ὡντινωνοῦν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα· αἱ μὲν γὰρ βάσεις ἀνάλογοί εἰσι τοῖς ὕψεσι· τὰ δὲ ὕψη καὶ αἱ βάσεις ἀνάλογοι δυσὶν αἱστισινοῦν ὁμολόγοις πλευραῖς· οὐκοῦν τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων τετράγωνα ἀνάλογά εἰσι τοῖς ἀπὸ τῶν ὑψῶν· τά τε ἀπὸ τῶν ὑψῶν καὶ τῶν βάσεων, τοῖς ἀπὸ δύω ὁποιωνοῦν ὁμολόγων πλευρῶν· ἐπεὶ τοίνυν τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν βάσεων, ἢ τῶν ὑψῶν, τετράγωνα, ἔσονται τὰ αὐτὰ καὶ ὡς τὰ ἀπὸ δύω ὁποιωνοῦν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα.

390. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύω ὁμοίων πολυγώνων αἱ περίμετροι εἰσὶν, ὡς δύω αὐτῶν ὁμόλογοι πλευραί.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσαι γὰρ αἱ αὐτῶν ὁμόλογοι πλευραὶ (%. 93) ἀνάλογον ἔχουσιν· οὐκοῦν ἐστιν $ΑΖ : ΖΔ :: ρχ : χδ$· ἄρα (Συμβ. Λογ. 244) $ΑΖ + ΖΔ : ΖΔ :: ρχ + χδ : χδ$, καὶ δι' ἴσου $ΑΖ + ΖΔ : ρχ + χδ :: ΖΔ : χδ$· εἴτ' οὖν δύω πλευραὶ πρὸς δύω πλευρὰς λόγον ἔχουσιν, ὃν μία πρὸς μίαν· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τρεῖς πρὸς τρεῖς, ὡς μία πρὸς μίαν· καὶ ἐν γένει, πᾶσαι αἱ τοῦ ἑτέρου πρὸς τὰς θατέρου πλευρὰς, εἴτ' οὖν ὅλη ἡ θατέρου περίμετρος πρὸς ὅλην τὴν θατέρου, ὡς μία πλευρὰ πρὸς μίαν τὴν αὐτῇ ἀντίστοιχον ἐν θατέρῳ πολυγώνῳ. Ο. Ε. Δ.

391. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο' δὲ τοῦδε τοῦ θεωρήματος μεταφυσικὸς λόγος ἐστιν, ὅτι πασῶν τῶν ἐν τοῖς ὁμοίοις πολυγώνοις πλευρῶν, ἀνάλογον ἐχουσῶν ἑκάστης ἑκάστῃ, δύω ἀντίστοιχοι πλευραὶ ὅμοια ὑπάρχουσι μέρη, ἑκατέρα τῷ ἑαυτῆς ὅλῳ, εἴτ' οὖν τῇ περιμέτρῳ, ἧς ἐστι μέρος, ἐπανήκουσα· ἐὰν, φέρε, ἡ ΑΖ πεμπτημόριον ᾖ τῆς ΑΖΔΟΠ, ἡ ἀντίστοιχος αὐτῇ πλευρὰ ἔσεται καὶ αὐτὴ πεμπτημόριον τῆς ρχδκπ

περιμέτρυ· ἀλλὰ τὰ ὅμοια μέρη δυοῖν ὅλων πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς τὰ ὅλα (Συμβ. λογ. 234)· δύω ἄρα ὁποιαιῶν ἀντίςοιχοι πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν, ὡς αἱ περίμετροι, εἴτ' ἂν ΑΖ : ρχ :: ΑΖΔΟΠ : ρχδκπ, ϗ τὐναντίον· ΑΖΔΟΠ : ρχδκπ :: ΑΖ : ρχ.

392. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Δύω κανονικῶν ὁμοίων πολυγώνων (σχ. 94) αἱ περίμετροί εἰσιν, ὡς αἱ πλάγιαι ἀκτῖνες ΗΟ, ηο· τὰ γὰρ τρίγωνα ΠΗΟ, πηο εἰσὶν ὅμοια, ὅτι Π=Η=π=η, κ.τ.λ. (382)· ὅθεν ΠΗ : πη :: ΗΟ : ηο.

Ἐκ τύτυ ἄρα εἰσὶν αἱ αὐταὶ περίμετροι ϗ ὡς αἱ ὄρθιαι ἀκτῖνες· εἰσὶ μὲν γὰρ ὡς ΠΗ : πη, ϗ δὴ ϗ ὡς αἱ βάσεις ΠΗ, πη τῶν τριγώνων ΠΗΟ, πηο· ἀλλὰ ΠΗ : πη :: ΖΟ : κο (324), αἵτινές εἰσιν αἱ ὄρθιαι τῶν πολυγώνων ἀκτῖνες· ἄρα αἱ περίμετροί εἰσι ϗ ὡς αἱ ὄρθιαι ἀκτῖνες.

393. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Καὶ αἱ τῶν κύκλων, κανονικῶν ὄντων ϗ ὁμοίων σχημάτων (383), περιφέρειαι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες, ἢ ὡς αἱ διάμετροι· ϗ τὰ ὅμοια τόξα, εἴτ' ὖν τὰ συγκείμενα ἐξ ἰσαρίθμων μοιρῶν, εἰσὶν ὡς αἱ ἀκτῖνες, ἢ αἱ διάμετροι.

394. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὰ ὅμοια πολύγωνα, ὡς ΑΠΟΔΖ, ρπκδχ (σχ. 93), δύνανται διαιρεθῆναι εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα ὅμοια ἕκαςον ἑκάςῳ ἀντιςοίχῳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ γωνία Π = π· αἱ δὲ ταύτῃ τῇ γωνίᾳ προσκείμεναι πλευραὶ ΠΑ, ΠΟ, πρ, πκ εἰσὶν ἀνάλογοι (382)· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΠΟ, ρπκ εἰσὶν ὅμοια (337).

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ϗ τὰ τρίγωνα ΑΖΔ, ρχδ ὅμοιά εἰσι.

Τέλος δὲ τὰ δύω τρίγωνα ΑΔΟ, ρδκ καὶ αὐτὰ εἰσὶν ὅμοια· ἡ γὰρ γωνία ὑπὸ ΑΟΔ = ΠΟΔ — ΑΟΠ, ἡ δὲ ρκδ = πκδ — ρκπ· ἀλλ' ΑΟΠ = ρκπ διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΟΠ, ρκπ· ἄρα καὶ ΑΟΔ = ρκδ (Ἀριθ. 14)· ἀποδειχθήσεται ὡσαύτως, ὅτι καὶ ΑΔΟ = ρδκ, διὰ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΖΔ, ρχδ, καὶ διὰ τὰς ἴσας γωνίας ΖΔΟ, χδκ (382)· ἄρα καὶ τὰ ΑΔΟ, ρδκ τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια.

Τὰ δύω ἄρα ὅμοια πολύγωνα ΑΠΟΔΖ, ρπκδχ διῄρηνται εἰς τρία τρίγωνα ὅμοια ἕκαστον ἑκάστῳ ἀντιστοιχοῦντι. Ο. Ε. Δ.

395. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν οὖν πλευρᾶς δοθείσης τῆς πκ ἐπ' αὐτῆς πολύγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ ΑΖΔΟΠ κατασκευάζειν παιδευόμεθα· τοῦ γὰρ δοθέντος πολυγώνου εἰς τρίγωνα, ὅσ' ἂν ἐγχωροίη, διαιρεθέντος, ἐπὶ τῆς πκ συσταθήτω τρίγωνον ὅμοιον τῷ ΑΠΟ (339)· ἑξῆς δ' ἐπὶ τῆς ρκ συνεστάσθω ὅμοιον τῷ ΑΔΟ, καὶ ἐπὶ τῆς ρδ τέλος τὸ ρχδ ὅμοιον τῷ ΑΖΔ· ἐπεὶ οὖν ἕκαστον τῶν ἐν τῷ πρχδκ τριγώνων ὅμοιόν ἐστιν ἑκάστῳ τῶν ἐν τῷ ΑΠΟΔΖ ἀντιστοίχων τριγώνων, ἐκ κατασκευῆς· ἄρα καὶ τὸ ὅλον πρχδκ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΑΠΟΔΖ.

396. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Τὰ ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλα διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς ὁμόλογον, εἴτ' οὖν εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ δύω ὡντινωνοῦν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα.

ΔΕΙΞΙΣ. Δύω τρίγωνα φέρε τὰ ΑΖΔ, ρχδ, ὅμοια ἀλλήλοις, εἰσὶ προδήλως ὅμοια μέρη δύω ὁμοίων πολυγώνων ΑΠΟΔΖ, ρπκδχ· ὡς, ἐὰν τὸ ΑΖΔ τρίγωνον τεταρτημόριον, φέρ' εἰπεῖν, ἢ τοῦ ΑΠΟΔΖ πολυγώνου, καὶ τὸ ρχδ τεταρτημόριον εἶναι τοῦ ρπκδχ· ἀλλὰ ΑΖΔ:

ρχδ :: ΑΖ² : ρχ² (389)· ἐπεὶ ἄρα τὰ δύω ὅλα ΑΠΟΔΖ, ρπκδχ εἰσὶν, ὡς τὰ αὐτῶν ὅμοια μέρη ΑΖΔ, ρχδ· ἄρα ἢ ΑΠΟΔΖ : ρπκδχ :: ΑΖ² : ρχ². Ο. Ε. Δ.

397. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὰ ὅμοια κανονικὰ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν πλαγίων ἀκτίνων ΠΟ, πο τετράγωνα· εἰσὶ γὰρ, ὡς ἤδη δέδεικται, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τετράγωνα· ἐπεὶ δὲ τῶν ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον ἔχουσι ταῖς πλαγίαις, ἢ ταῖς ὀρθίαις, ἀκτῖσι (324, 386, 392), τὰ ἄρα κανονικὰ πολύγωνα εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν πλαγίων, ἢ τῶν ὀρθίων ἀκτίνων, τετράγωνα.

Ἔςω οὖν ἡ πλαγία ἀκτὶς ΗΟ διπλῆ, τριπλῆ, τετραπλῆ, τῆς πλαγίας ἀκτῖνος ηο· οὐκοῦν τὸ μεῖζον ἑξάγωνον ἔςαι τετραπλοῦν, ἐννεαπλοῦν, ἑκκαιδεκαπλοῦν, τοῦ ἐλάσσονος.

398. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Οἱ κύκλοι ἄρα πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀκτίνων τετράγωνα, ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων (Συμϐ. Λογ. 234), ἢ ὡς τὰ ἀπὸ δύω ὁμοίων τόξων, ἢ τέλος ὡς τὰ ἀπὸ τῶν περιφερειῶν· οὖσαι γὰρ ἀνάλογον τοῖς ἀπὸ τῶν ἀκτίνων τετραγώνοις, ἀνάλογον ἕξουσι καὶ τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ πάντων τῶν ποσῶν τῶν ταῖς ἀκτῖσιν ἀναλόγων (Συμϐ. Λογ. 263)· τὰ δ', ἃ εἴπομεν, μέρη ἀνάλογον ἅπαντα ἔχουσι ταῖς ἀκτῖσιν (257 292)· ἄρα οἱ κύκλοι ἀνάλογοι ἔσονται πᾶσι τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ τῶν εἰρημένων ποσῶν.

Ἐὰν οὖν τριῶν κύκλων, τοῦ μὲν ἡ διάμετρος ὑποτεθῇ $=1$ ποδὶ, τοῦ δὲ, $=5$, τοῦ δὲ, $=10$· ἡ τοῦ πρώτου ἐπιφάνεια. ἔςαι πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου ὡς 1 πρὸς 25· ἡ δὲ τοῦ πρώτου πρὸς τὴν τοῦ τρίτου ὡς 1 πρὸς 100· ἡ δὲ τοῦ δευτέρου πρὸς τὴν τοῦ τρίτου ὡς 25 πρὸς 100, τουτέςιν ἡ τοῦ τρίτου ἔςαι ἑκατονταπλῆ μὲν τῆς τοῦ πρώτου, τετραπλῆ δὲ τῆς τοῦ δευτέρου.

399. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις ϗ ὁμοίως ἀναγραφομένοις* (Σχ. 95).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω ὅμοια εἴδη τὰ ΑΒΓΔ, αβγδ· ϗ ἐκ τῶν πλευρῶν ΑΒ, αβ συνεςάσθω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΕΖΗ, ἐν ᾧ $ΕΖ = ΑΒ$, ϗ $ΖΗ = αβ$· ἐκ δὲ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου πλευρᾶς συνεςάσθω σχῆμα τὸ ΕΗΘΙ ἑνὶ τῶν δοθέντων ὅμοιον (395) οὕτως, ὡς τὴν ΕΗ πλευρὰν πρὸς τὰς τοῦ σχήματος γωνίας οὕτως ἔχειν θέσεως, ὡς κεῖται ἡ ΑΒ πρὸς τὰς ἐν τῷ ΑΒΓΔ πολυγώνῳ γωνίας τὰς ἴσας ἑκάςην ἑκάςῃ ἀντιςοίχῳ τῶν τοῦ κατασκευασθέντος πολυγώνου· ἐπεὶ οὖν $ΑΒ^2 : αβ^2 :: ΑΓ : αγ$ (396), ἄρα ϗ $ΑΒ^2 + αβ^2 : ΑΒ^2 :: ΑΓ + αγ : ΑΓ$· ἐπειδὴ δὲ $ΕΖ = ΑΒ$, ϗ $ΖΗ = αβ$, ϗ $ΕΖ^2 + ΖΗ^2 = ΕΗ^2$ (349)· ἄρα ϗ $ΑΒ^2 + αβ^2 = ΕΗ^2$, ϗ $ΕΗ^2 : ΑΒ^2 :: ΑΓ + αγ : ΑΓ$· ἀλλὰ ϗ $ΕΗ^2 : ΑΒ^2 :: ΕΘ : ΑΓ$ (398)· ἄρα ϗ $ΕΘ : ΑΓ :: ΑΓ + αγ : ΑΓ$· ἐπεὶ δὲ $ΑΓ = ΑΓ$· ἄρα ϗ $ΕΘ = ΑΓ + αγ$. Ο.Ε.Δ.

400. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** *Πᾶν ἄρα κανονικὸν πολύγωνον, τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τοῦ τριγώνου ἀναγεγραμμένον, ἴσον ἐςὶ δυσὶ κανονικοῖς, τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἀναγεγραμμένοις.*

401. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.** *Καὶ κύκλος, οὗ διάμετρος ἡ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ἴσος ἐςὶ δυσὶ κύκλοις, ὧν διάμετροι αἱ περιέχουσαι τὴν ὀρθὴν γωνίαν· ὡς γὰρ τὰ ὅμοια πολύγωνα ἀνάλογόν εἰσι τοῖς ἀπὸ τῶν ὁμο-*

λόγων πλευρῶν τετραγώνοις, ὕτω ᾗ κύκλοι τοῖς ἀπὸ τῶν διαμέτρων (398).

402. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐπεὶ δὲ ὕτω ᾗ ἡμικύκλιον τὸ ΑΓΕ ἴσον ἐςὶν ἡμικυκλίοις τοῖς ΑΒΓ, ΓΔΕ, οἷς καινὰ τὰ τμήματα ΑΓΖ, ΓΗΕ· ἐὰν ταῦτα κοινῇ ἀφαιρεθῇ, ὑπολειφθήσεται τὸ ἄθροισμα τῶν μηνίσκων ΑΒΓΖ + ΓΔΕΗ = τῷ τριγώνῳ ΑΓΕ· ἐὰν δὲ γένηται ΑΓ = ΓΕ, οἱ μηνίσκοι ἀλλήλοις ἴσοι ἔσονται, ἑκάτερός τε τύτων ἴσος ἔςαι τῷ ἡμίσει τῦ τριγώνυ ΑΓΕ, εἴτ᾽ ὖν τεταρτημορίῳ τῦ τετραγώνυ, ὅπερ ἂν τῷ κύκλῳ ἐγγράφαιτο (σχ. 96).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ τῶν ἐπιφανειῶν ὡς ἐπιπέδων θεωρυμένων.

403. Ἐπίπεδον ἔςιν ἐπιφάνεια, ὑψώματος παντὸς ᾗ ταπεινώματος ἄμοιρος (189).

404. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Εὐθεῖα ἡ Αβ (σχ. 97), δύω σημεῖα ἐφ᾽ ἑνὸς ἐπιπέδυ ἔχυσα τῦ ΓΔΕΤ, ἅπασα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κεῖται, τῷ ἐπεκτείνεσθαι ᾗ τὸ ἐπίπεδον, ὥσπερ ἡ εὐθεῖα· τυτὶ δὲ ἐκ τύτυ ἕπεται, ὅτι δύω σημεῖα ἱκανά εἰσι διορίσασθαι τὴν θέσιν, ἢ τὴν φορὰν τῆς εὐθείας (20).

405. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δυοῖν ἐπιπέδων ΓΔΕτ, ΑΒΨρ, τεμνόντων ἄλληλα, ἡ κοινὴ διατομὴ Αβ ἔςαι γραμμὴ εὐθεῖα· ὐδὲν γάρ αὕτη ἐςὶν, ἀλλ᾽ ἢ τὰ ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων κοινὰ σημεῖα· ὐκῦν ὔτε ὕψωμα ὔτε ταπείνωμα αὕτη διασχηματίσει κατὰ τὴν φύσιν τῶν ἐπιπέδων· ἄρα ἔςαι γραμμὴ εὐθεῖα.

406. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΨΑ κάθετος ςαθῇ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕτ κατὰ τὸ Α σημεῖον, αὕτη κάθετος σύσεται ἐξ ἀνάγκης ϗ πάσαις ταῖς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εὐθείαις, ταῖς εἰς ἓν σημεῖον τὸ Α συνιούσαις.

407. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἑνὸς σημείου τοῦ Ψ δοθέντος ἐκτὸς ἐπιπέδου τοῦ ΓΔΕτ, μία μόνη ἀπ᾽ αὐτοῦ τῷ ἐπιπέδῳ ἀχθήσεται κάθετος.

408. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Τρία σημεῖα β, ο, Γ, (σχ. 81) μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κείμενα ἐπιπέδου θέσιν ἀναγκαίως διορίζουσι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ ταῦτα τὰ τρία σημεῖα διὰ τριῶν εὐθειῶν βΓ, Βο, Γο· συςήσεται ἓν τὸ βοΓ τρίγωνον, οὗ τὸ ἐπίπεδον ἔςαι μόνιμον ϗ ὡρισμένον, οὐ πάντως τῷ μεγέθει, ἀλλὰ τῇ φορᾷ, καθ᾽ ἣν ἐπ᾽ ἄπειρον ἐπεκταθῆναι δύναται. Ο. Ε. Δ.

409. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὅταν δύω εὐθεῖαι αἱ ΑΨ, Απ (σχ. 97) τέμνωνται κατὰ τὸ Α, καίτοι δυνάμεναι ἡ μὲν ἐπανήκειν ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕτ, ἡ δὲ κεῖσθαι ἐπὶ τοῦ ΑπΨ, ἓν μέντοι ἔςαι μόνιμον ϗ ὡρισμένον τὸ ἐπίπεδον, ἐφ᾽ οὗ ἀμφότεραι κείσονται, εἴτ᾽ οὖν τὸ τοῦ ΑπΨ τριγώνου τοῦ ἀποτελουμένου ἐπιζεύξει τῶν π, Ψ περάτων διὰ τῆς ρΨ εὐθείας.

410. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Δύω παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΓΕ, Δτ ἀεὶ ἐκληφθῆναι δύνανται ὡς κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μονίμου ϗ ὡρισμένου ἐπιπέδου.

ΔΕΙΞΙΣ. Δυνατὸν ἀεὶ, δύω δοθεισῶν παραλλήλων, σχῆμα περικλεῖσαι διὰ δύω ἄλλων εὐθειῶν τῶν ΓΔ, Ετ, ὅθεν συςαθήσεται τὸ παραλληλόγραμμον ΓΔΕτ, ἐν οὗ τῷ ἐπιπέδῳ ἀνήκουσιν αἱ δύω πρῶται παράλληλοι ΓΕ, Δτ.

411. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐὰν δύω, ἢ πλείονα, παρ-

ἄλληλα ἐπίπεδα ὑφ' ἑτέρου ἐπιπέδου τέμνωνται, αἱ κοιναὶ διατομαὶ παράλληλοι εὐθεῖαι ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστωσαν τρία παράλληλα ἐπίπεδα ΔΕ, ΘΟ, Ρμ, καὶ τεμνέσθωσαν ὑπὸ τοῦ ΑβΨρΤκ ἐπιπέδου· φημὶ δή, ὡς αἱ διατομαὶ ΑΒ, Ψρ, Τκ εἰσὶν εὐθεῖαι παράλληλοι· καὶ γὰρ ΑΒ, καὶ Ψρ, οὐδὲν πραγματικῶς εἰσιν, ὅτι μὴ τὰ τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ καὶ τοῖς τεμνομένοις παραλλήλοις κοινὰ σημεῖα.

412. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Ὅταν ἐπίπεδόν τι στερεὸν τέμνῃ, ἡ ἐντεῦθεν ἀναφυομένη τομή, εἴτ' οὖν ἡ ἐπιφάνεια, ἣν καταλείπει τὸ ἐπίπεδον μετὰ τὴν τοῦ στερεοῦ τμῆσιν, ἔστι καὶ αὐτὴ ἐπίπεδον.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ τομή, ἢ τὸ σχῆμα τοῦτο, οὐδὲν ἕτερόν ἐστιν, εἰμὴ τὰ σημεῖα, καθ' ἃ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμβάλλει τῷ στερεῷ· πάντα δὲ ταῦτα τὰ σημεῖα δυνήσονται ἐκληφθῆναι ὡς ἐπὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου κείμενα· ἄρα τὸ τούτων συμπλήρωμα συγκροτήσεται ἐπίπεδον.

413. Αἴτημα. Δύω ἐπίπεδα ἴσα τὰ ΑΒΡΟ, ΒΓΡΞ (σχ. 98) μὴ συνιστάτωσαν κατ' ἀρχὰς μηδεμίαν γωνίαν· ἀλλ' ἔσω τὸ Α σημεῖον ἐπὶ τοῦ Γ, τὸ δὲ Ο ἐπὶ τοῦ Ξ· οὐκοῦν τὰ δύω ἐπίπεδα διὰ τὴν κοινὴν εὐθεῖαν ΒΡ ἀλλήλοις συγχυθήσονται· ἡ δὲ τοῦ ΑΒΡΟ μεσαιτάτη εὐθεῖα χΛ συγχυθήσεται ἑπομένως τῇ τοῦ ΒΓΡΞ μεσαιτάτῃ εὐθείᾳ χΠ.

414. Νῦν οὖν, τοῦ ΒΓΡΞ ἀκινήτου μένοντος, τὸ ΑΒΡΟ κινείσθω περὶ τὴν ΒΡ ὅλην ἡμιπεριαγωγήν· οὐκοῦν ἡ χΛ εὐθεῖα μετὰ τῆς αὐτῆς ἀντιστοίχου χΠ, ᾗ προσυγκέχυτο, ἐκ διαδοχῆς συστήσονται ἁπάσας τὰς δυνατὰς γωνίας, αἵτινες ἰσάριθμοι ἔσονται τοῖς βήμασι τοῖς γινομένοις ὑπὸ τῆς χΛ, ἀποχωρούσης ἀπὸ τῆς χΠ μέχρι τινὸς βαθμοῦ δε-

δομένης κλίσεως· μετρηθήσονται δὲ ἑκάστη ὑπὸ τοῦ τόξου, τοῦ καταγραφομένου μὲν περὶ τὸ χ, ἀπολαμβανομένου δὲ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν χΛ, χΠ.

Ἃ δὲ περὶ τῶν δύω εὐθειῶν χΛ, χΠ εἴπομεν, νοηθῆναι δύνανται τὰ αὐτὰ καὶ περὶ πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἳ συνιστῶσαι τὰ στοιχεῖα δυοῖν ἐπιπέδων, εἰσὶ παράλληλοι ταῖς χΛ, χΠ, οἷαι αἱ ΟΡ, ΑΒ, κτλ., ἐπὶ τοῦ ὕπερθεν ἐπιπέδου, καὶ ΒΓ, ΞΡ, κτλ. ἐπὶ τοῦ ἔνερθεν· ἡ ἄρα γωνία, ἣν συνιστῶσι δύω ἐπίπεδα, ἡ αὐτή ἐστιν, ἣν συνιστῶσι δύω εὐθεῖαι αἱ χΛ, χΠ· οὐκοῦν αἱ δύω ἐπιπέδων, ἄλληλα τεμνόντων, ἰδιότητες, ὡς ἐκ τῶν γωνιῶν, αἱ αὐταί εἰσι ταῖς τῶν ἀλλήλας τεμνουσῶν εὐθειῶν· ἐντεῦθεν ἄρα.

415. α΄. Δύω ἐπιπέδων ἄλληλα τεμνόντων δύω αἱ ἐφεξῆς γωνίαι εἰσὶν ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς (89)· δύω δὲ αἱ κατὰ κορυφὴν ἴσαι (99)· τὸ δὲ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τῶν συνισταμένων ὑπὸ δυοῖν ἢ πλειόνων ἐπιπέδων ἄλληλα τεμνόντων περὶ μίαν εὐθεῖαν τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσον ἐστί (96).

416. β΄. Δύω, ἢ πλείω, ἐπίπεδα (σχ. 97) παράλληλα, τεμνόμενα ὑπ᾽ ἄλλου ἐπιπέδου, συνιστῶσι μετὰ τοῦ τέμνοντος, ἴσας μὲν τὰς ἀντιστοίχους γωνίας (132), ἴσας δὲ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ (133), ἴσας δὲ καὶ τὰς ἐκτὸς ἐναλλάξ (135)· δυεῖν δὲ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὴν ἑτέραν θατέρᾳ παραπλήρωμα, δυεῖν δὲ ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ θατέρᾳ τὴν ἑτέραν ὡσαύτως (136)· τοὐναντίον δὲ δυσὶν ἐπιπέδοις τρίτου ἐμπίπτοντος, ἐὰν ἓν τῶν εἰρημένων πέντε δοθῇ, τὰ δύω ἐπίπεδα παράλληλα ἔσονται (137).

417. γ΄. Τὰ δ᾽ ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον ἴσχοντος τὴν ἀναφορὰν, κρατεῖ τὰ αὐτὰ καὶ ἐπ᾽ εὐθείας, ἢ εὐθειῶν πρὸς ἐπίπεδον ἀναφερομένων.