ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τῆς ἐπὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ἀναλογίας.

321. ΘΕΩΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ ὁμόλογοι, ἢ ἀντίςαχοι, πλευραὶ ἀνάλογον εἰσί.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπειδὴ τρεῖς πλευραὶ τρισὶ πλευραῖς ἐπὶ δυοῖν ὁμοίων τριγώνων ἀντιςοιχοῦσιν, ἔσονται πάντως ἀνάλογον τὰ τρίγωνα, ἐὰν δειχθῇ α΄. ΑΒ : ΑΓ :: αβ: αγ· β΄. ΑΒ : ΒΓ :: αβ : βγ· γ΄. ΒΓ : ΑΓ :: βγ : αγ (χ. 72, 73.).

α΄. Διὰ τῶν κορυφῶν Α, α ἤχθωσαν παράλληλα ταῖς βάσεσι ΒΓ, βγ· ἐκοῦν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΑΒ, αβ, ΑΓ, αγ ἐν παραλλήλοις διαςήμασι κεῖνται, ἢ ἐπεὶ Β = β, ἢ Γ=γ (198) ἴσον εἰσὶ κεκλιμέναι ἐπ᾽ αὐτῶν τῶν διαςημάτων (134)· ἄρα ΑΒ: ΑΓ :: αβ : αγ (313).

β΄. Ἤχθω ἡ τΧ παράλληλος τῇ ΑΓ, ἢ ἡ μν τῇ αγ· τοιγαροῦν αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ ἀπολαμβάνονται ὑπὸ τοῦ παραλλήλου διαςήματος Βτ, ΓΑ, αἱ δὲ αβ, βγ ὑπὸ τοῦ μν, αγ· ἔςι δὲ Α=α, ἢ Γ=γ (198)· ἐκοῦν ὁμοίως εἰσὶ κεκλιμέναι ἐπὶ τῶν παραλλήλων αἵτε τΧ, ΑΓ, ἢ αἱ αβ, βγ· ἄρα ΑΒ : ΒΓ :: αβ : βγ.

γ΄. Ἤχθω ἡ μὲν Θη παράλληλος τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ιλ τῇ βα· ἐκοῦν αἱ μὲν ΓΒ, ΓΑ κεῖνται ἐν τῷ παραλλήλῳ διαςήματι ΘηΑΒ, αἱ δὲ γβ, γα ἐν τῷ ιλβα· ἢ δὴ ὁμοίως, ὡς ἀνωτέρω, συλλογισάμενοι ἀποδείξομεν ὅτι ΒΓ: ΑΓ :: βγ : αγ· Ο. Ε. Δ.

322. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Συχνήτις ἡ χρῆσις τοῦ ἐκτεθέντος θεωρήματος παρὰ τοῖς Γεωμέτραις ἐπὶ τὰς δείξεις· δύω γὰρ εὑρίσκοντες ὅμοια τρίγωνα, ϗ ἐκ τούτων, ἥτις πρὸς τὸ τέλος αὐτοὺς ἄγοι, τὴν ἀναλογίαν ἐκλέγοντες, ϗ ἐξίσωσιν συνισῶντες, κἀκταύτης, εἰ δέοι, ἄλλην, καθικνοῦνται τοῦ, οὗ ϛοχάζονται τέλους (Συμ. λογ. 394 κτ.).

323. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ὥσπερ ἐν ἀριθμοῖς, παντοίων διαθέσεων γινομένων τοῖς ὅροις, ἡ ἀναλογία σώζεται, εἰ μόνον τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων τὸ ὑπὸ τῶν μέσων ἐξισῷτο γινόμενον (Συμ. λογ. 242.)· ὡσαύτως κἀν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ἐπὶ τεσσάρων πλευρῶν ἀναλόγων, ὅπως ἂν μεταληφθεῖεν, ἀλύμαντος διασώζεται ἡ ἀναλογία· εἰ μόνον παραβάλλοιντο αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ, εἴτ' οὖν αἱ ὑποτείνουσαι γωνίας ἴσας· οὕτω σκαληνοῦ τριγώνου ἡ μείζων τῇ μείζονι τῶν πλευρῶν, ἡ δ' ἐλάττων τῇ ἐλάττονι, ἡ δὲ μέση τῇ μέσῃ, παραθετέαι ὑπάρχουσι.

324. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δύω ὁμοίων τριγώνων (Σχ. 72. 73.) αἱ πλευραι ἀνάλογον ἔχουσι τοῖς ὕψεσι· ἐν τοῖς δυσὶ φέρε ὁμοίοις τριγώνοις ΑΒΓ, αβγ ἐϛιν Αρ : Αδ :: ΑΒ : αβ· ἐπεὶ γὰρ ἐξ ὑποθέσεως ἐϛι δ=ρ, ϗ Β=β, τὰ δύω τρίγωνα ΑΒρ, αβδ, ἔχοντα δύω ἀντιϛοίχους γωνίας ἴσας, εἰσὶν ὅμοια (218)· ἄρα ΑΒ μείζων πλευρὰ τοῦ ΑΒρ πρὸς αβ μείζονα πλευρὰν τοῦ αβδ ὡς Αρ μέση πλευρὰ τοῦ ΑΒρ· πρὸς αδ μέσην πλευρὰν τοῦ αβδ, εἴτ' οὖν ΑΒ : αβ :: Αρ : αδ· ἀνάλογοι ἄρα αἱ πλευραὶ ΑΒ, αβ τοῖς ὕψεσιν αρ, αδ.

325. Ἐπεὶ δὲ ρ=δ, ϗ Γ γωνία τοῦ ἐλάττονος τριγώνου ΑρΓ ἐϛὶν ἴση τῇ γωνίᾳ θατέρου αδγ, διὰ τὸ ὅμοια εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ· τὰ δύω ἄρα μικρὰ τρίγωνα ΑρΓ, αδγ, δύω ἀντιϛοίχους γωνίας ἴσας ἔχοντα,

εἰσὶν ὅμοια (218)· ἐκοῦν ΑΓ : αγ :: Αρ : αδ, τουτέστιν αἱ δύω μέσαι πλευραὶ τῶν δύω τριγώνων ΑΒΓ, αβψ ἀνάλογον ἔχουσι τοῖς αὐτῶν ὕψεσιν Αρ, αδ.

326. Ἐπεὶ δὲ δύω πλευραὶ αἱ ΑΒ, αβ, ἀνάλογον εἰσὶ ταῖς βάσεσι ΒΓ, βγ (321), εἰσὶ δὲ ἔτι καὶ τοῖς ὕψεσιν Αρ, αδ (324)· ἄρα καὶ αἱ βάσεις αὗται ἀνάλογον εἰσὶ τοῖς ὕψεσιν (Ἀριθ. 11), εἴτ' οὖν ΒΓ : βγ :: Αρ : αδ.

327. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἵνα δὲ ἐξακριβώσωμεν τὴν ἤδη ἐπενεχθεῖσαν συνέπειαν, καὶ τὰ αὐτὰ ἐν ὁμοίαις περιστάσεσι συνάγειν ἔχωμεν, εἰλήφθω ὑπ' ὄψιν τό: δύω λόγοι τρίτῳ τινὶ ἴσοι καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσοι· οἱ μὲν γὰρ λόγοι, πηλίκα (Συμ. λογ. 183.)· τὰ δὲ, ποσότητες ἀναμφηρίσως ὑπάρχει· ἀλλὰ ποσὰ δύω τρίτῳ τινὶ ἴσα καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα (Ἀριθμ. 11.), ἄρα δύω λόγοι τρίτῳ τινὶ ἴσοι καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσοι· ἀλλ' ὁ λόγος τῶν πλευρῶν ΑΒ, αβ ἴσος ἐστὶ τῷ λόγῳ τῶν βάσεων ΒΓ, βγ· ἀνάλογοι γὰρ ἐκεῖναι ταύταις, ἡ δ' ἀναλογία λόγων ἐστὶν ἰσότης (Συμβ. λογ. 186.)· ἔστι δὲ καὶ ὁ τῶν ὑψῶν Αρ, αδ λόγος ἴσος τῷ τῶν πλευρῶν ΑΒ, αβ διὰ τὴν ἀναλογίαν ΑΒ : αβ :: Αρ : αδ (324)· ἄρα ὁ λόγος τῶν βάσεων ΒΓ : βγ καὶ ὁ λόγος τῶν ὑψῶν Αρ : αδ, ἰσούμενοι τῷ αὐτῷ τρίτῳ λόγῳ ΑΒ : αβ, εἰσὶν ἴσοι ἀλλήλοις· οὐκοῦν ἔστι ΒΓ : βγ :Αρ : αδ.

328. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ὅταν εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ (Σχ. 75.) μεταξὺ παραλλήλων τῶν κρ, συντέμνωσιν ἀλλήλας, τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν μέρη ἀνάλογον εἰσί.

ΔΕΙΞΙΣ. Ι = τ, ὡς κατὰ κορυφήν, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΔτ = ΒΓΙ (133). τὰ ἄρα τρίγωνα ΑΔτ, ΒΓΙ ὅμοια εἰσὶν (218)· οὐκοῦν Ατ : Βτ :: τΔ : ΓΙ Ο. Ε. Δ.

329. **ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄.** Ο῎ταν χορδαὶ ΤΗ, Ζρ (Σχ. 76.) τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰ μέρη τῆς ἑτέρας ἀντιπεπονθότα λόγον ἔχȣσι πρὸς τὰ τῆς ἑτέρας.

ΔΕΙΞΙΣ. χ = ο, ὡς κατὰ κορυφήν· ἡ δὲ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ρΖΗ, βεβηκυῖα ἐπὶ τȣ͂ ρνΗ τόξȣ, τῷ ἡμίσει αὐτȣ͂ μετρεῖται (176), τῷ αὐτῷ δὲ μετρεῖται ϗ ἡ ΗΤρ, ὡς βεβηκυῖα ἐπὶ τȣ͂ αὐτȣ͂ τόξȣ· ἄρα ἡ ὑπὸ ρΖΗ = ΗΤρ· ὅμοια ἄρα εἰσὶ τὰ τρίγωνα Τρχ, ΖοΗ· ἄρα Το : οΖ :: ρο : οΗ (228)· Ο. Ε. Δ.

330. **ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄.** Ο῎ταν δύω ἐξωτερικαὶ τέμνȣσαι ἀφ᾽ ἑνὸς σημείȣ πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν ἐμπέσωσιν, ὡς αἱ Γϖ, Γο (Σχ. 77), τὰ ἐκτὸς αὐτῶν μέρη Γη, Γτ ἀντιπεπονθότως ἀνάλογον εἰσὶ ταῖς ὅλαις εὐθείαις, τȣτέςι Γη : Γτ :: Γο : Γϖ.

ΔΕΙΞΙΣ Ε᾽πιζευχθεισῶν γὰρ τῶν ηο, ϖτ, τὰ τρίγωνα Γϖτ, Γηο ὅμοιά εἰσι· παρὰ γὰρ τὴν κοινὴν γωνίαν Γ, ἔςι ϖ = ο ὡς ἐπὶ τȣ͂ αὐτȣ͂ τόξȣ ητ βεβηκυῖαι (176)· ὁκȣ͂ν ἔςι Γη : Γτ :: Γο : Γπ, ἔνθα καταφανὲς ὡς τὰ μέρη τῶν δύω εὐθειῶν ἀντίςροφον τετάχαται ταῖς ὅλαις εὐθείαις. Ο. Ε. Δ.

331. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.** Η῾ ἁπτομένη ΓΡ τῆς διατεμνȣ́σης Γϖ ȣ̓δενὶ διαφέρει, ἥτις περὶ τὸ μένον σημεῖον Γ περιαγομένη, ϗ πρὸς τὸ Ρ κινȣμένη, ἐφικνεῖται αὐτȣ͂ τȣ͂ Ρ, τȣ͂ ἐσωτερικȣ͂ μέρȣς ηρ μηδενὶ ἰσȣμένȣ· ἀλλ᾽ ἐπὶ τῆς διατεμνȣ́σης ἔςι Γτ : Γη :: Γϖ : Γο (330) ἤ, Γτ : Γη :: Γη + τη : Γο, τȣ͂ τη = ο ὄντος ἐν τῇ ἁπτομένῃ, ἔςαι Γτ : Γη :: Γη : Γο· ἐπεὶ δὲ ἡ Γη γίνεται ΓΡ, ἔςιν ἄρα Γτ : ΓΡ :: ΓΡ : Γο, τȣτέςιν ,,ὅταν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείȣ τȣ͂ Γ ἀχθῶσιν ἁπτομένη τε τȣ͂ κύ-,,κλȣ ἡ ΓΡ, ϗ διατέμνȣσα ἡ Γα· ἡ ἁπτομένη ἐςὶ μέση ἀνά-

„λογος, τῦτε ἐκτὸς τῦ κύκλυ, ἢ τῦ ἐντὸς, τμημάτων τῆς „διατεμνύσης."

332. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἔσω ἡ ἁπτομένη ΑΠ = ον τμήματι ἐσωτερικῷ τῆς τεμνύσης Αν (σχ. 78.)· ὑκῦν ἔςαι Αο : ον :: ον : Αν· ἔςι μὲν γὰρ ἐξ ὑποθέσεως ΑΠ = ον, ἔςι δὲ (ἀνωτερ.) Αο : ΑΠ : ΑΠ : Αν· ἄρα Αο : ον :: ον : Αν, τυτέςι „τὸ ἐξωτερικὸν τμῆμα Αο τῆς δια„τεμνύσης ἔςαι πρὸς τὸ ἐσωτερικὸν ον ὡς τὸ ἐσωτερι„κὸν ον πρὸς ὅλην τὴν διατέμνυσαν."

333. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ. Ἐὰν δὲ ἐν ταύτῃ τῇ περιπτώσει ἡ οβ παρὰ τὴν Π ἀχθῇ παράλληλος, ἔςαι αβ : βΠ :: βπ : ΑΠ· διὰ μὲν γὰρ τὰς παραλλήλυς νΠ, οβ, αἱ Αν, ΑΠ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τέμνονται (313)· ἔςι δὲ Αο : ον :: ον : Αν.

334. ὉΡΙΣΜΟΣ. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖαι τέμνεσθαι λέγονται, ὅταν τὸ ἔλαττον τμῆμα πρὸς τὰ μεῖζον λόγον ἔχῃ, ὃν τὸ μεῖζον πρὸς τὴν ὅλην· ὡς ἀνωτέρω ἡ διατέμνυσα Αν τέτμηται ὑπὸ τῆς περιφερείας· ἢ γὰρ Αο (ἔλαττον) : ον (μεῖζον) :: ον (μεῖζον) : Αν (ὅλην) (332).

335. Ἵν᾽ ὖν εὐθεῖα ἡ ΑΠ ἄκρον ἢ μέσον λόγον τμηθῇ· α΄. ἐςάσθω πρὸς ὀρθὰς τῷ πέρατι Π ἡ ΚΠ = ½ ΑΠ· β΄. κέντρῳ μὲν τῷ Κ, ἀκτῖνι δὲ τῇ ΚΠ, γεγράφθω κύκλος ὁ ΠΣγ· γ΄. ἀπὸ τῦ Α ἤχθω διὰ τῦ κέντρυ διατέμνυσα ἡ ΑΚν· δ΄. ἐπεζεύχθω ἡ νΠ, ἢ ἐκ τῦ ο ἤχθω τῇ νΠ παράλληλος ἡ οβ, ἥτις τεμεῖ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΠ ἄκρον ἢ μέσον λόγον· εἴτ᾽ ὖν ἔςαι Αβ : βΠ :: βΠ : ΑΠ· ἐπεὶ γὰρ ἐκ κατασκευῆς ΑΠ = 2ΚΠ = ον, ἔςιν ἄρα Αο : ον :: ον : Αν (332)· ἐντεῦθεν δὲ (333) Αβ : βΠ : βΠ : ΑΠ.

336. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε΄. Τὰ τρίγωνα (σχ. 79.), ὧν πᾶσαι αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον εἰσὶν, ἐςὶν ὅμοια.

α΄. Ἐπιτεθέισθω ἡ αβ πλευρὰ τῦ ἐλάττονος τριγώνυ ἐπὶ τὴν ΑΕ τῦ μείζονος, τιθεμένυ τῦ α ἐπὶ τῦ Α, ϗ γεγονέτω αβ = ΑΒ· ὖκῦν τὸ β συμπεσεῖται τῷ Β· ἐκ δὲ τῦ Β ἤχθω παράλληλος τῇ ΕΗ ἡ ΒΓ, γενήσονται ὖν δύω ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΕΗ· ἡ μὲν γὰρ Α γωνία ἐςὶν ἑκατέρω κοινὴ, ϗ Β = Ε (132).

β΄. Ἔςιν ὖν ΑΕ : ΑΗ :: ΑΒ : ΒΓ· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ΑΕ : ΑΗ :: αβ : αγ· ἄρα ΑΒ : ΑΓ :: αβ : αγ (327)· ὖκῦν (Συμβ. λογ. 242.) ϗ ΑΒ : αβ :: ΑΓ : αγ· ἐπεὶ δὲ ἐκ κατασκευῆς ΑΒ = αβ, ἄρα ϗ ΑΓ = αγ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν γὰρ ἀναλογίᾳ δύω ὅρων ἴσων ὄντων, ϗ οἱ ἄλλοι δύω ἰσάλληλοι ἔσονται· ὐ γὰρ ἂν ἄλλως ἐν ἀναλογίᾳ τέσσαρες ὅροι εἴησαν.

γ΄. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις ΑΒΓ, ΑΕΗ ἔςιν ἔτι ϗ ἥδε ἡ ἀναλογία· ΑΕ : ΕΗ :: ΑΒ : ΒΓ (321 β΄.) ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως ἔςιν ΑΕ : ΕΗ :: αβ : βγ· ἐντεῦθεν ἄρα, ὡς ϗ ἀνωτέρω, ΑΒ : ΒΓ :: αβ : βγ, ἢ ΑΒ : αβ :: ΒΓ : βγ· ἐπεὶ δὲ ΑΒ = αβ, ἄρα καὶ ΒΓ = βγ.

Ἐπεὶ ὖν ἐκ μὲν κατασκευῆς ΑΒ = αβ, ἐκ δὲ δείξεως ΑΓ = αγ, ϗ ΒΓ = βγ· ἄρα τὸ τρίγωνον αβγ ἴσον ἐςὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ (221) ϗ δὴ ϗ ὅμοιον (198)· ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ ὅμοιόν ἐςι τῷ ΑΕΗ· ἄρα ϗ τὸ αβγ ὅμοιον ἔςαι τῷ ΑΕΗ· ὅταν ἄρα δύω τρίγωνα κτλ. Ο. Ε. Δ.

337. ΘΕΩΡΗΜΑ ς΄. Ἐὰν τριγώνυ δύω πλευραὶ ΑΕ, ΑΗ δυσὶ τριγώνυ πλευραῖς αβ, αγ ἀνάλογον ὦ-

σιν, αἱ δὲ ὑπὸ τῶν ἀναλόγων πλευρῶν περιεχόμεναι γωνίαι Α, α ἴσαι, τὰ τρίγωνα εἰσὶν ὅμοια.

ΔΕΙΞΙΣ. Κατεσκευάσθωσαν ἅπαντα ὡς ϗ ἐν τῷ ἡγυμένῳ θεωρήματι· ϗ δὴ ἔςαι ά. ΑΕ : ΑΗ :: ΑΒ : ΑΓ· β΄. ἐπεὶ ἐξ ὑποθέσεως ΑΕ : ΑΗ :: αβ : αγ ἄρα ΑΒ : ΑΓ :: αβ : αγ (327), ἢ ΑΒ : αβ : ΑΓ : αγ (Συμβ. λογ. 242.)· ἀλλ' ἐκ κατασκευῆς ΑΒ = αβ, ἄρα ϗ ΑΓ = αγ· ὐκῦν τὸ αβγ τρίγωνον ἴσον ἐςὶ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ (221)· ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅμοιόν ἐςι τῷ ΑΕΗ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα ϗ τὸ αβγ ὅμοιόν ἐςι τῷ ΑΕΗ. Ο. Ε. Δ.

338. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τριγώνυ ἄρα δοθέντος τῦ ΑΕΗ, ϗ μιᾶς πλευρᾶς τῆς αβ, ἐπ' αὐτῆς ἐξέςαι τρίγωνον ὅμοιον κατασκευάσαι τῷ δοθέντι· συςαθείσης γὰρ τῆς ὑπὸ βαγ ἴσης τῇ ΕΑΗ, ϗ πρὸς τὰς ΑΕ, ΑΗ, αβ τετάρτης ἀναλόγυ εὑρεθείσης (319) τῆς αγ, ϗ ἐπιζευχθείσης τῆς βγ, γενήσεται τὸ ἐπιταχθὲν (337).

339. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ΄. Παντὸς κύκλῳ ἐγγεγραμμένυ τετραπλεύρυ τῦ κβΟΖ (σχ. 80.), τὸ ὑπὸ τῶν δύω διαγωνίων βΖ, κΟ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τοῖς δυσὶν ὀρθογωνίοις τοῖς ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον πλευρῶν τῦ τετραπλεύρυ ἅμα ληφθεῖσι· τῦτ' ἔςι κΟ · βΖ = βκ · ΖΟ + κΖ · βΟ.

ΔΕΙΞΙΣ, ά. Ἤχθω ἡ βγ εὐθεῖα· ὥςε συνιςᾷν κατὰ τὸ β γωνίαν τὴν ὑπὸ κβγ ἴσην τῇ ὑπὸ ΖβΟ (85)· ὐκῦν ὅμοια εἰσὶ τὰ κβγ, βΖΟ τρίγωνα· ἐπεὶ παρὰ τὰς δύω γωνίας κβγ, ΖβΟ, τὰς ἐκ κατασκευῆς ἴσας, ἔςι ϗ ἡ ὑπὸ βκγ, ἢ βκΟ = βΖΟ ὡς ἀμφοτέρων ἐπὶ τῦ αὐτῦ τόξυ βΠΟ βεβηκυιῶν (177)· ἀλλὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἰσὶν ἀνάλογοι· ἄρα γκ : κβ :: ΖΟ : βΖ, ἐκεῖν $\gamma\kappa \times Z\beta = \kappa\beta \times ZO$ (311).

β΄. Τὰ τρίγωνα βκΖ, βγΟ, εἰσὶν ὅμοια· καὶ γὰρ ἡ ὑπὸ κβΖ = ΓβΟ, (εἴγε κοινῆς ὕσης τῆς ὑπὸ γβΖ, ἡ ὑπὸ κβγ = ΖβΟ ἐκ κατασκευῆς,) καὶ ἡ ὑπὸ βΖκ = βΟγ, ὡς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ βνκ τόξου βεβηκυῖαι· ὅμοια ἄρα τὰ τρίγωνα βκΖ, βγΟ (218)· ἐντεῦθεν ἄρα γΟ : κΖ :: βΟ : βΖ· τοιγαροῦν $\gamma O \times \beta Z = \kappa Z \times \beta O$.

Ἐντεῦθεν οὕτω συλλογιούμεθα: τὸ κγ μέρος τῆς κΟ διαγωνίου, πολλαπλασιαθὲν ἐπὶ τὴν βΖ διαγώνιον, ἰσοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἐπὶ βάσεως τῆς κβ δι' ὕψους τῆς ἀπεναντίον πλευρᾶς ΖΟ συνισταμένῳ· τὸ δὲ γΟ κατάλοιπον μέρος τῆς κΟ διαγωνίου, πολλαπλασιαθὲν ἐπὶ τὴν βΖ διαγώνιον, ἰσοῦται τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἐπὶ βάσεως τῆς πλευρᾶς κΖ δι' ὕψους τῆς ἀπεναντίον πλευρᾶς βΟ συνισταμένῳ· ἀλλὰ ταὐτόν ἐστιν, εἰ πολλαπλασιαθῇ τὸ κγ μέρος τῆς κΟ διαγωνίου ἐπὶ βΖ, εἶτα τὸ γΟ κατάλοιπον μέρος ἐπὶ τὴν βΖ, ὡς εἰ πολλαπλασιαθῇ ἅπαξ ὅλη ἡ ἐσωτερικὴ διαγώνιος κΟ ἐπὶ τὴν βΖ διαγώνιον· ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς (142) τὸ αὐτὸ προκύπτει ἔκ τε $20 \times 7 = 140$ καὶ ἐκ τῶν $20 \times 4 + 20 \times 3 = 140$· ἐστιν ἄρα $\kappa O \times \beta Z = \kappa\beta \times ZO + \kappa Z \times \beta O$. Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ.

340. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ βοΓ (σχ. 81). ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐςι τῷ τε ὅλῳ ϗ ἀλλήλοις.

ΔΕΙΞΙΣ. ά. Τὸ βοΠ ὅμοιόν ἐςι τῷ βοΓ· ἡ μὲν γὰρ β γωνία ἐςὶ κοινὴ, ἡ δὲ Π = ο· ἑκατέρα γὰρ ὀρθή· ἄρα ὅμοια εἰσὶ τὰ δύω τρίγωνα βοΓ, βοΠ (218).

β΄. Ὡσαύτως τὸ ΠοΓ ὅμοιόν ἐςι τῷ βοΓ· ἡ μὲν γὰρ γωνία Γ κοινὴ, ἡ δὲ Π = ο.

γ΄. Ἐντεῦθεν δῆλον ὅτι ϗ τὸ ΓοΠ ὅμοιόν ἐςι τῷ οΠβ (Ἀριθμ. 11) Ο. Ε. Δ.

341. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐν τοῖς ὁμοίοις τριγώνοις βοΠ, οΠΓ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ (321) παρέχȣσι τὴν ἀναλογίαν βΠ : Πο :: Πο : ΠΓ, τȣτέςιν „ἡ Πο κάθετος „ἐςι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύω τῆς ὑποτεινȣ́σης „τμημάτων βΠ, ΠΓ τῶν ὑπ' αὐτῆς τεμνομένων.“

342. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐκ μὲν τῆς τῶν τριγώνων Πβο, βοΓ ὁμοιότητος ἔςι βΠ : βο :: βο : βΓ· ἐκ δὲ τῆς τῶν οΓΠ, Γοβ, ΠΓ : οΓ :: οΓ : βΓ, τȣτ' ἔςιν „ἑκατέρα „τῶν ὑφ' ἑκατέραν τῶν τȣ̃ ὀρθογωνίȣ τριγώνȣ ὀξειῶν „γωνιῶν ὑποτεινȣσῶν πλευρῶν μέση ἐςὶ ἀνάλογος τȣ̃ „παρακειμένȣ αὐτῇ τμήματος τῆς βάσεως τεμνομένης ὑ„πὸ καθέτȣ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀγομένης, ϗ τῆς ὅ„λης βάσεως.“

343. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Η' (σχ. 82) ἐκ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀγομένη κάθετος μέση ἀνάλογός ἐςι μεταξὺ τῶν δύω τμημάτων βΖ, ΖΟ τῆς διαμέτρυ, εἰς ἃ αὐτὴν διατέμνει.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ βΠ, ΠΟ, ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία βΠΟ, ὡς βεβηκυῖα ἐπὶ τῦ βΟ ἡμικυκλίυ, ἐςὶν ὀρθὴ (180)· ὕτως ὖν τὸ βΠΟ τρίγωνον ὀρθογώνιόν ἐςι κατὰ τὸ Π, ἡ δὲ ΠΖ ἡ ἐκ τῆς περιφερείας ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀχθεῖσα κάθετος, ἡ αὐτή ἐςι κάθετος ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας Π τῦ βΠΟ ὀρθογωνίυ τριγώνυ ἐπὶ τὴν βάσιν ἀγομένη· ἔςι δὲ αὕτη μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύω τῆς βάσεως τμημάτων, ἃ αὕτη διατέμνει (341)· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Θαυμασία αὕτη τῦ κύκλου ἰδιότης, ἀπὸ παντὸς σημείυ τῆς περιφερείας τὴν ἀγομένην τῇ διαμέτρῳ κάθετον ἀεὶ μέσην ἀνάλογον εἶναι τῶν δύω τῆς διαμέτρυ τμημάτων, εἰς ἃ αὐτὴν διατέμνει.

344. ΠΟΡΙΣΜΑ. Α'. Ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς καθέτυ τετραγώνῳ (Συμϐ. Λογ. 248).

345. Πιπτέτω ὖν πρῶτον ἡ κάθετος ἐπὶ τῦ κέντρυ· ὐκῦν ἡ ΠΖ κάθετος, ϗ τὸ βΖ μέρος τῆς διαμέτρυ, ϗ θάτερον ΖΟ, εὐθεῖαι τρεῖς ἰσάλληλοι ἔσονται (41)· ὐκῦν $\Pi Z^2 = \beta Z . ZO$· τὸ δὲ ΠZ^2 τετράγωνον, ἀναγραφὲν ἐπὶ τῆς ἀκτῖνος τῦ κύκλυ, μεῖζόν ἐςι παντὸς τετραγώνυ, ἀναγραφομένυ ἀπὸ πάσης ἄλλης καθέτυ ἀγομένης ἀπὸ παντὸς τῆς περιφερείας σημείυ ἐπὶ τὴν διάμετρον· ὥσπερ ϗ τὸ γινόμενον, ἢ τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρυ ἰσαλλήλων τεθέντων περιεχόμενον, ἔςι μεῖ-

ζον παντὸς ἄλλȣ ὀρθογωνίȣ ὑπὸ δύω ἀνίσων τμημάτων περιεχομένȣ (305).

346. Τεθείσθω νῦν τὸ σημεῖον Π, ἀφ' ȣ̃ καθίεται ἡ ΠΖ, προσεχέστατον τῷ β πέρατι τῆς ΒΟ διαμέτρȣ· ȣ̓κȣ̃ν ἡ ΠΖ λίαν ἔσαι σμικρά· ϗ δὴ τὸ τετράγωνον ΠΖ² ἔσαι ϗ αὐτὸ λίαν μικρὸν· ϗ ȣ̓́τω μέντοι ἰσωθήσεται τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ ἀναγραφομένῳ ἐπὶ τῆς ΖΟ βάσεως, ϗ ὕψȣς τῆς ΒΖ· ἀεὶ γὰρ, ὡς ἐν γένει δέδεικται (343), ἡ κάθετος ἐσὶ μέση ἀνάλογος τῶν δύω τμημάτων.

347. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐντεῦθεν ἄρα δύω δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΒΖ, ΖΟ, μέση αὐτῶν ἀνάλογος εὑρεθήσεται· ἐὰν ά. αἱ δύω κατὰ μίαν ἐκτεθῶσι τὴν ΒΖΟ· β΄. διὰ τȣ̃ μέσȣ αὐτῆς Κ ὡς κέντρȣ (106) ϗ διασήματος τȣ̃ ΚΟ κύκλος γραφῇ ὁ ΒΠΟ· γ΄. ἐκ τȣ̃ Ζ, καθ' ὃ ἥνωνται αἱ δύω εὐθεῖαι, ἐγερθῇ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΠ, ἥτις ἐς τὴν περιφέρειαν προαχθεῖσα ἔσαι ἡ ζητȣμένη μέση ἀνάλογος· ϗ γὰρ ΒΖ : ΠΖ :: ΠΖ : ΖΟ.

348. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἵνα δὲ τρίτη ἀνάλογος εὑρεθείη, δύω δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΒΖ, ΠΖ· ά. ὑψȣ́σθω ἡ ΠΖ κάθετος τῷ πέρατι τῆς ΒΖ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΠ· β΄. ἠγέρθω ἐκ τȣ̃ Π τέρματος ἄνευ κάθετος ἡ ΠΟ τῇ ΒΠ· ἡ δὲ ΖΟ προαχθεῖσα, μέχρις ἂν συμβάλῃ τῇ ἀδιορίσῳ ΠΟ, ἔσαι ἡ τρίτη ζητȣμένη ἀνάλογος· ὃ καθ' ἑαυτὸ καταφανές· ἐὰν γὰρ διὰ τȣ̃ ταύτης τῆς εὐθείας μέσȣ Κ, ὡς κέντρȣ, γραφῇ ὁ κύκλος ὁ ΒΠΟ, ἔσαι ΒΖ : ΠΖ :: ΠΖ : ΖΟ (347).

349. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινȣ́σης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετράγωνον ἴσον ἐσὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχȣσῶν τὴν

ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν τετραγώνοις, τῦτ' ἔςι $\beta\Gamma^2 = o\Gamma^2 + \beta o^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Συγκροτηθέντων τῶν τετραγώνων ΓβΚΛ, Νο, ϗ οΜ· ἤχθω ἡ Πο κάθετος ἐπὶ τὴν βΓ (σχ. 83), ϗ δὴ ἔςαι ὅμοια τὰ τρία τρίγωνα βοΓ, ΠοΓ, βοΠ· παραθέσει ὖν τῦ ὅλυ τριγώνυ βοΓ πρὸς τὸ ΠοΓ τρίγωνον (321) ἔςαι $\beta\Gamma$ ἢ $\Gamma K : o\Gamma :: o\Gamma : \Pi\Gamma$, ὅθεν $K\Gamma \times \Pi\Gamma = o\Gamma^2$ (311).

Παραθέσει δὲ πάλιν τῦ ὅλυ τριγώνυ βοΓ πρὸς τὸ Ποβ, ἐκ τῶν ἀντιςοίχων, ἢ ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν, πρόεισιν ἡ ἀναλογία· $\beta\Gamma$ ἢ $\beta\Lambda : \beta o :: \beta o : \beta\Pi$· ὅθεν $\beta\Lambda \times \beta\Pi = \beta o^2$· ἄρα $\Gamma K \times \Pi\Gamma + \beta\Lambda \times \beta\Pi = o\Gamma^2 + \beta o^2$· ἀλλὰ $\Gamma K \times \Pi\Gamma + \beta\Lambda \times \beta\Pi = \Gamma\beta^2$· ἄρα· $\Gamma\beta^2 = o\Gamma^2 + \beta o^2$ Ο. Ε. Δ.

350. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τοῖς πρωτοπείροις σημειωτέον τέσσαρα ἀρχικὰ θεωρήματα ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, ὧν τὸ μὲν δεύτερον διὰ τῦ πρώτυ, τὸ δὲ τρίτον διὰ τῶν δύω προτέρων, τὸ δὲ τέταρτον διὰ τῦ τρίτυ δείκνυνται, ἐφ' ὧν θεμελίων δίκην πᾶσα γεωμετρικὴ γνῶσις ἵδρυται, τὰ δὲ λοιπὰ πάντα μονονῦ δι' αὐτῶν ἐμπεδῦνται· ἰδὺ δὴ ταῦτα.

α΄. Ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία μετρεῖται τῷ ἡμίσει τῦ τόξυ, ἐφ' ὖ βέβηκεν (176).

β΄. Παντὸς τριγώνυ αἱ τρεῖς γωνίαι εἰσὶν ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς (209).

γ΄. Δύω ὁμοίων τριγώνων αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογον εἰσίν (321).

δ΄. Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινύσης τετράγωνον ἴσον ἐςὶ τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχυσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν (349).

351. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Δοθεισῶν ἄρα δύω πλευρῶν παντὸς ὀρθογωνίου, τῆς τρίτης ἡ δύναμις ἀεὶ εὑρεθήσεται, ἐὰν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου βοΓ (σχ. 81) γνωσθῇ ἡ ὑποτείνουσα βΓ, καὶ ἡ πλευρὰ οΓ· ἐπεί ἐστι $\beta\Gamma^2 = o\Gamma^2 + \beta o^2$, οὐκοῦν $\beta o^2 = \beta\Gamma^2 - o\Gamma^2$· ἄρα $\beta o = \sqrt{\beta\Gamma^2 - o\Gamma^2}$ ἔστω οὖν $\beta\Gamma = 5$, καὶ $\Gamma o = 4$ ἔσται οὖν $\beta o^2 = 25 - 16$· ἄρα $\beta o = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$· ἐὰν δὲ γνωσταὶ ὦσιν ἡ βΓ ὑποτείνουσα, καὶ ἡ βο πλευρὰ, ἡ Γο εὑρεθήσεται ἀφαιρουμένου τοῦ ἀπὸ βο τετραγώνου ἀπὸ τοῦ ἀπὸ βΓ, καὶ ἐκ τῆς αὐτῶν διαφορᾶς ἐξαγομένης τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης. Ἐὰν μέντοι γινώσκωνται αἱ Γο, βο πλευραὶ, εὑρεθήσεται ἡ ὑποτείνουσα βΓ· ἔσται γὰρ $\beta\Gamma = \sqrt{\Gamma o^2 + \beta o^2}$.

352. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ὀρθογωνίου ἄρα καὶ ἰσοσκελοῦς τὸ ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ σκέλους.

Καὶ τὸ ἀπὸ τῆς διαγωνίου διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

353. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐντεῦθεν δὲ, ὁπωσοῦν δοθέντων τετραγώνων ἴσον ἅπασι τετράγωνον ἀναγράψαι παιδευόμεθα· κείσθωσαν γὰρ τετράγωνα τρία, ὧν πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ (σχ. 84.), καὶ συνεστάσθω γωνία ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΒΞ, ἧς τὰ σκέλη ἀπεράντως ἔστωσαν προεκτεινόμενα· ἐπὶ δὲ τῶν σκελῶν μετηνέχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, οὐκοῦν ἔσται $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$· ἑξῆς δὲ μετηνέχθω καὶ ἡ ΑΓ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Φ, καὶ ἡ τρίτη τῶν πλευρῶν ΓΔ ἐκ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΦ· τοιγαροῦν ἔσται $\Phi E^2 = \Phi B^2 + EB^2$ (349)· ἀλλὰ $\Phi B^2 = (A\Gamma^2) = AB^2 + B\Gamma^2$· ἄρα $\Phi E^2 = AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ πυκνοτάτη χρῆσις τοῦ ἀποδειχθέντος θεωρήματος παρέχετο αὐτὸ ἓν τῶν τεσσάρων ἐξαιρέτων τῆς Γεωμετρίας θεωρημάτων· φασὶ δὲ Πυθαγόραν τετὶ εὑρόντα ἑκατόμβην τῷ Ἀπόλλωνι θῦσαι, χάριτας αὐτῷ ἀφοσιέμενον ὑπὲρ τε εὑρήματος, ϗ δὴ ϗ τὸ θεώρημα ἐκ τέτε ἑκατόμβη καλεῖσθαι ἐξενίκησεν, ὅπερ ἡ ΜΖ΄ τε Α΄. βιβ. τῶν τε ςοιχειωτε καταριθμεῖται.

354. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ τε τετραγώνε πλευρὰ (χ. 54) ἀσύμμετρός ἐςιν αὐτε τῇ διαγωνίῳ· εὐθεῖα γὰρ ἀσύμμετρος ἑτέρᾳ καλεῖται, ὅταν ὁ λόγος αὐτῶν δι' ἐδενὸς ἀριθμε, ὔτε ὁλοχερες, ὔτε κλασματίε, ἐκδηλῶται (Συμβ. Λογ. 365), ὅταν, σαφέςερον εἰπεῖν, ὔτε διπλῆ, ὔτε τριπλῆ κτ., ἀλλ' ἐθ' ὑποδιπλῆ, ἡ ὑποτριπλῆ κτ. ἑτέρας ἧ εὐθείας· ἀλλαμὴν ἀμήχανον δι' ἀριθμε ἐκδηλῶσαι τὸν τε ἀπὸ τῆς διαγωνίε τετραγώνε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς· ϗ γὰρ ἡ μὲν διαγώνιος ἡ ὑποτείνεσά ἐςι τὴν ὀρθὴν γωνίαν τε ὀρθογωνίε ϗ ἰσοσκελες τριγώνε ΑΒΓ· τὸ δ' ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, ὡς ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν περιεχεσῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν τετραγώνοις, ἑκατέρε ἔςι διπλάσιον· ἀδύνατον δὲ ἀριθμὸν εὑρεῖν, ἀφ' ὗ ὁ τετράγωνος διπλάσιός ἐςιν ἑτέρε τετραγώνε ἀφ' ἑτέρε ἀριθμε (Συμβ. Λογ. 369)· ἀδύνατον ἄρα δι' ἀριθμε σημανθῆναι τὸν μεταξὺ τῆς ὑποτεινέσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὀρθογωνίε ϗ ἰσοσκελες τριγώνε ϗ μιᾶς τῶν ἄλλων πλευρῶν λόγον, ὅ ἐςι τὸν μεταξὺ τῆς τε τετραγώνε διαγωνίε ϗ τῆς αὐτε πλευρᾶς· ταύτην δὲ τὴν ἀσυμμετρίαν δείκνυσιν Εὐκλείδης ἐν προτάσ. ἐχάτῃ τε Ι΄. βιβλίε.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Σημειῶδες δὲ, ὡς δύω εὐθειῶν, καθὰ δὴ ϗ ἀριθμῶν δύω, ἀσυμμέτρων ὄντων ἀλλήλοις, τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα σύμμετρα εἶναι δύνανται· καίτοι γὰρ τῆς διαγωνίυ, ὡς εἴδομεν, ἀσυμμέτρυ ὔσης τῇ πλευρᾷ, τὸ μέντοι ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον σύμμετρόν ἐςι τῷ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τετραγώνῳ, ὡς διπλῦν ἐκεῖνο τέτυ δεικνύμενον (352).

355. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τετραγώνυ, ὗ πλευρὰ (σχ. 85) ἡ ΑΒ, ἀφελεῖν δέῃ τετράγωνον, ὗ πλευρὰ ἡ ΓΔ· ζητῆται δὲ ἡ πλευρὰ τετραγώνυ τῦ τῷ καταλοίπῳ ἰσυμένυ, γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον, καὶ διὰ τῦ διαβήτυ ἀπὸ τῦ Α προσηρμόσθω τῇ περιφερείᾳ χορδὴ ἡ $ΑΕ=ΓΔ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ· ὑκῦν ἔςαι $ΕΒ^2=ΑΒ^2-ΓΔ^2$· εἴτ' ὖν ΕΒ ἔςαι ἡ ζητυμένη πλευρά.

356. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν εὐθεῖα ἡ ΑΒ (σχ. 86) τμηθῇ, εἰς ἴσα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἄνισα κατὰ τὸ Λ, τὸ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον $ΑΛ\times ΛΒ$ ἴσον ἐςὶ τῇ ὑπεροχῇ, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετράγωνον $ΑΚ^2$ τῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τμῆμα τῦ ἐλάσσονος, εἴτ' ὖν ἔςιν $ΑΚ\times ΛΒ= ΑΚ^2-ΚΛ^2$.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἀνεςάσθω ἐκ τῦ Λ κάθετος ἡ ΛΓ τελευτῶσα εἰς τὴν περιφέρειαν, καὶ ἐκ τῦ Γ ἤχθω ἡ ΓΚ ἀκτίς· τοιγαρῦν ἔςιν $ΑΛ\times ΛΒ=ΛΓ^2$ (343), καὶ $ΚΚ^2=ΚΓ^2-ΛΓ^2$ (351)· ἐπεὶ δὲ $ΑΚ^2=ΚΓ^2$ ὡς ἀπ' ἀκτίνων ἴσων τετράγωνα· ἄρα $ΛΚ^2=ΚΑ^2-ΛΓ^2$· ἀντὶ δὲ $ΛΓ^2$ ἀντικαταςαθέντος τῦ ἴσυ αὐτῷ $ΑΛ\times ΛΒ$, ἔςαι $ΛΚ^2=ΛΑ^2-ΑΛ\times ΛΒ$· μεταθέσεων δὲ γενομένων, $ΑΛ\times ΛΒ=ΚΑ^2-ΛΚ^2$. Ο.Ε.Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ ἀναγωγῆς τῶν πολυγώνων.

357. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Βάσεως ἢ ὕψους δοθέντων, ὀρθογώνιον συςῆσαι ἴσον ἑτέρῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ βάσις ἢ τὸ ὕψος διαφέρει τοῦ δοθέντος.

ΛΥΣΙΣ. Ἔςω φέρε ΓΔ βάσις τοῦ ΑΒΓΔ (σχ. 87) ὀρθογωνίου, καὶ ΓΑ τὸ ὕψος· δεῖ δὴ συςῆσαι ὀρθογώνιον, ἴσον μὲν τῷ ΑΒΓΔ, βάσιν δὲ ἔχον τὴν ΑΙ ἐλάττονα τῆς ΓΔ· εὑρεθήτω οὖν τετάρτη ἀνάλογος (319) τῶν τριῶν ΗΙ, ΓΔ, ΑΓ ἡ ΖΗ· καὶ δὴ ἐκ τῆς ἀναλογίας ΗΙ: ΓΔ: : ΑΓ: ΖΗ προκύψει ΗΙ × ΖΗ = ΓΔ × ΑΓ. Ο. Ε. Π.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν δ' αἱ εὐθεῖαι ΗΙ, ΓΔ, ΑΓ ἐν ἀριθμοῖς ὦσι δεδομέναι, γενέσθω μέθοδος τῶν τριῶν ΗΙ: ΓΔ: : ΑΓ: χ, καὶ εὑρεθείσης τῆς τοῦ χ δυνάμεως, τεθείσθω βάσις μὲν ἡ ΗΙ, ὕψος δὲ ἡ ΗΖ, μῆκος ἔχουσα τὸ ὑπὸ τοῦ εὑρεθέντος ἀριθμοῦ ἐκδηλούμενον· τὸ δ' ἐκ τούτων συμπληρωθὲν ὀρθογώνιον (242) ἴσον ἔςαι τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ ΑΒΓΔ.

358. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἵν' ὀρθογώνιον τὸ ΑΒ ΓΔ, ἀμεταποίητον μένον τὴν ἐπιφάνειαν, εἰς ἕτερον μεταβληθῇ, ἔχον τὸ ἐπιταχθὲν ὕψος ΖΗ τοῦ ΖΗΙΟ ὀρθογωνίου· α΄. προήχθω τὸ ΓΑ ὕψος, καὶ γενέσθω ΓΧ = ΖΗ· β΄. ζητηθήτω εἰς βάσιν τετάρτη ἀνάλογος, τῶν ὑψῶν ΓΧ, ΓΑ, καὶ τῆς ΓΔ βάσεως ἡ Γτ· ἐκ δὲ δὴ τῆς ἀναλογίας ΓΧ: ΓΑ: : ΓΔ: Γτ ἔςαι ΓΧ × Γτ (ἐπιφάνεια τοῦ νέου ὀρθογωνίου) = ΓΑ × ΓΔ (ἐπιφανείᾳ τοῦ πρώτου ὀρθογωνίου).

359. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἵνα δύω ὀρθογώνια ΕΘΖΗ,

ΑΓΒΔ εἰς ἓν μόνον ἀχθῶσιν· ά. τὸ δεύτερον, ἄτρεπτον μένον κατ' ἐπιφάνειαν, τραπήτω εἰς ἕτερον, ἔχον ὕψος τὸ τῦ πρώτυ· β'. συνήφθω κατ' εὐθεῖαν τῇ ΘΗ ἡ ΗΙ, ἡ εὑρεθεῖσα, ὡς προδέδεικται, τετάρτη ἀνάλογος τῶν ΖΗ, ΑΓ ὑψῶν ϗ τῆς ΓΔ βάσεως· γ'. συμπεπληρώσθω τὸ ΗΖΙΟ παραλληλόγραμμον, ϗ ἔςαι ὕτω ΘΕΙΟ = ΘΕΗΖ + ΑΓΒΔ, ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον.

360. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ταῦτα δὲ νοεῖν χρὴ κἀπὶ τῶν πλαγιογωνίων παραλληλογράμμων, ϗ ἐπὶ παντὸς δὲ τριγώνυ· ἡ ἄρα, περὶ ἧς εἴρηται, ἀναγωγὴ ἀείποτε ἐκτελεῖσθαι δύναται ζητυμένης τετάρτης ἀναλόγυ πρὸς τρεῖς δοθείσας εὐθείας· ὅθεν ἀναγαγεῖν δυνατὸν δύω παραλληλόγραμμα ἐν γένει, ἢ δύω τρίγωνα, εἰς ἓν μόνον ἴσην ἔχον τοῖς δυσὶν ἐπιφάνειαν.

361. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ὁσαδήποτε ἄρα πολύγωνα, ὁμοειδῆ, ἢ ἑτεροειδῆ, κανονικὰ, ἢ ἀκανόνιςα, ἀναχθήσονται εἰς ἓν μόνον τρίγωνον ἴσον κατ' ἐπιφάνειαν τῷ ἀθροίσματι πασῶν τῶν ἐν τοῖς δοθεῖσι πολυγώνοις ἐπιφανειῶν· ἕκαςον γὰρ τῶν πολυγώνων εἰς τρίγωνον ἀνάγεται (294)· ἀνήχθωσαν ὖν πάντα τὰ δοθέντα πολύγωνα εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα· ἐξέςαι ὖν ἓν τρίγωνον συςήσασθαι ἴσον ἅπασι τοῖς τριγώνοις, ἅμα ληφθεῖσιν, ὕτω· ά. γενέσθωσαν ἅπαντα τῦ αὐτῦ ὕψυς, εἴτ' ὖν ΑΔ (σχ. 80), ἥτις ἐςὶ κάθετος τῇ ἀπεράντῳ ΔΖ· β'. ἐν ἑκάςῳ τριγώνῳ ζητυθήτω τετάρτη ἀνάλογος πρὸς τὸ πρότερον αὐτῦ ὕψος, τὸ ἤδη ὑποτεθὲν, ϗ τὴν προτέραν βάσιν, ἥτις ἔςαι ἡ βάσις, ἡ τῷ δοθέντι ὕψει ΑΔ προσήκυσα· τέλος δὲ πᾶσαι αἱ εὑρεθεῖσαι ὕτω βάσεις· ΔΠ, ΠΕ, ΕΖ, κ. τ. λ. συνήφθωσαν ἐπ' εὐθείας τῇ ἀπεράντῳ ΔΖ, ϗ ἤχθωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΠ, ΑΕ κ. τ. λ. τοιγαρῦν κατὰ τήν δε τὴν κατασκευὴν τὸ ὁλικὸν τρίγωνον ΔΑΖ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν τριῶν φέρε πολυγώνων, τῶν εἰς ἀναγωγὴν δοθέντων, ἃ καλέσομεν Α, Β, Γ· ϗ γὰρ ΔΑΠ = Α, ϗ ΠΑΕ = Β, ϗ ΕΑΖ = Γ· πάντα δὲ τὰ τρία ὁμȣ̃ = ΔΑΖ.

362. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β'.** Τετράγωνον συςήσασθαι ἴσον παντὶ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, εἴτ' ȣ̂ν παντὶ χήματι, ὃ μὴ εἴη καμπύλη.

ΛΥΣΙΣ. ά. Ὑπὲρ τριγώνȣ ζητηθήτω μέση ἀνάλογος (χ. 73) τȣ̃ ὕψȣς αβ, ϗ τȣ̃ ἡμίσεως τῆς βάσεως βγ (347)· τὸ ȣ̂ν ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἔςαι τῷ δοθέντι τριγώνῳ· ἔςι μὲν γὰρ τὸ αβγ τρίγωνον $= \frac{\alpha\delta\beta\gamma}{2}$ (285)· κληθείσης δὲ χ τῆς εὑρεθείσης μέσης ἀνάλογον, ἐκ τῆς ἀναλογίας $\alpha\delta : \chi :: \chi : \frac{\beta\gamma}{2}$, ἔςαι $\chi^2 = \frac{\alpha\delta\beta\gamma}{2}$ (Συμϐ. Λογ. 248).

ϐ'. Καὶ πολυγώνῳ δὲ παντὶ κανονικῷ τετράγωνον ἴσον συςαθήσεται, εὑρεθείσης μέσης ἀνάλογον τῆς ἡμιπεριμέτρȣ τȣ̃ πολυγώνȣ ϗ τῆς ὀρθίας αὐτȣ̃ ἀκτῖνος, ϗ τετραγώνȣ ἐπ' αὐτῆς ἀναγραφέντος· ἅπαν γὰρ κανονικὸν πολύγωνον ἰσȣ̃σαι τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρȣ ϗ τῆς ὀρθίας ἀκτῖνος (297).

γ'. Ἐπεὶ δὲ ἅπαν ἀκανόνιςον πολύγωνον εἰς ἴσον τρίγωνον ἀναχθῆναι δύναται (361), γενήσεται τετράγωνον ἴσον παντὶ ἀκανονίςῳ πολυγώνῳ, ἀναγαγȣ̃σι πρῶτον τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνον, ϗ αὐτῷ ἴσον κατασκευάσασι τετράγωνον, καθ' ὃν ἀρτίως δέδεικται τρόπον.

δ'. Ὁσαδήποτε χήματα κανονικά, ἢ ἀκανόνιςα, εἰς ἓν μόνον τρίγωνον ἀναχθῆναι ἔχυσι (361)· ἐπεὶ δὲ παντὶ τριγώνῳ ἴσον τετράγωνον συςήσαϑαι δυνάμεθα· ἴδε δὴ, ὅπως τετράγωνον ἴσον κατασκευάσομεν παντὶ εὐθυγράμμῳ σχήματι, εἴτε κανονικῷ, εἴτε ἀκανονίςῳ. Ο. Ε. Π.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ τῦ τετραγωνισμῦ τῦ κύκλυ.

363. Τὸ πρόβλημα τῦ τὸν κύκλον τετραγωνίσαι ἐν τύτῳ κεῖται, κατασκευάσαι ἀμέλει τετράγωνον ἴσον κύκλῳ, ὗ ἡ διάμετρος, ἢ ἡ περιφέρεια, δέδοται· παντὶ δὲ κανονικῷ πολυγώνῳ τετράγωνον ἴσον κατασκευάσαι δυνάμεθα, μέσην ἀνάλογον εὑρίσκοντες τῆς τε ἡμιπεριμέτρυ ϗ τῆς ὀρθίας ἀκτῖνος· ἐπεὶ δὲ ϗ ὁ κύκλος ἐςι κανονικὸν πολύγωνον (31), ἴσον αὐτῷ τετράγωνον συςήσομεν, εὑρόντες μέσην ἀνάλογον τῆς ἡμιπεριμέτρυ αὐτῦ, εἴτ᾽ ὖν τῆς ἡμιπεριφερείας, ϗ τῆς αὐτῦ ὀρθίας ἀκτῖνος, εἴτ᾽ ὖν τῆς ἡμιδιαμέτρυ, ϗ ἐπ᾽ αὐτῆς τῆς μέσης ἀναλόγυ τετράγωνον ἀναγράψαντες· εἰ τοίνυν ἐγινώσκετο ὁ κύκλυ παντὸς τῆς ἀκτῖνος, ϗ δὴ ϗ τῆς διαμέτρυ, πρὸς τὴν περιφέρειαν, ἀληθὴς λόγος, διδομένης τῆς διαμέτρυ εὑρίσκετ᾽ ἂν ἡ περιφέρεια, πολλαπλασιαζομένης τῆς διαμέτρυ ἐπὶ τόνδε τὸν λόγον· πρὸς ὖν τὴν ὕτως εὑρεθεῖσαν ἂν ἡμιπεριφέρειαν ϗ τὴν ἡμιδιάμετρον μέσην ἀνάλογον εὑρίσκοντες, ϗ ἀπ᾽ αὐτῆς τετράγωνον ἀναγράφοντες, ἀκριβῶς ἂν ἐθηρώμεθα τὸν τῦ κύκλυ τετραγωνισμόν.

Ἀλλὰ γὰρ τίς ἐςιν ὗτος ὁ τῆς διαμέτρυ πρὸς τὴν περιφέρειαν λόγος; τυτ᾽ ἔςιν, ὃ πολλοὶ ϗ μεγάλοι Μαθη-