ρικῶν γωνιῶν ο καὶ τῶν ἐσωτερικῶν δ ἰσοῦται δὶς τόσαις ὀρθαῖς, ὅσας ἔχει πλευρὰς τὸ πολύγωνον· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν δ ἰσοῦται δὶς τοσαύταις ὀρθαῖς, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον πλὴν ὀρθῶν τεσσάρων (264)· τὸ ἄθροισμα ἄρα πασῶν τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ο ἰσοῦται ταύταις ταῖς καταλειπομέναις τέσσαρσιν ὀρθαῖς.

270. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ε΄. Παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου πᾶσαι αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι ο ἰσάλληλοί εἰσιν (245)· οὐκοῦν ἑκάστη τούτων, τετραγώνου μὲν ἐστὶν $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$, πενταγώνου δὲ $\frac{360^\circ}{5} = 72$, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως ἀεὶ τῆς τῶν γωνιῶν δυνάμεως συνυπελαττουμένης αὐξούσαις ταῖς τοῦ σχήματος πλευραῖς.

271. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄. Τελευταῖον δὲ τοῦ κύκλου, οὗ ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἐστὶν ἄπειρος, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία, εἴτ' οὖν ἡ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς κυκλικῆς περιφερείας περιεχομένη, ἣν αὐτοὶ πρότερον γωνίαν ἁφῆς ὠνομάσαμεν, ἢ, εἰ καὶ τοῦτο πρὸς θυμοῦ, ἡ γωνία, ἣν συνιστῶσιν ἐκτὸς τοῦ κύκλου δύω προσεχῆ στοιχεῖα τῆς καμπύλης, αὕτη φημὶ ἀεὶ ἴση ἐστὶ τῷ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἀθροίσματι, διαιρεθέντι δι ἀριθμοῦ ἀπείρου· ἡ γωνία ἄρα τῆς ἁφῆς ἐστὶν ἀπειροστὴ, ὡς καὶ ἀνωτέρωθί που δέδεικται (172).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ καταμετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν.

272. Ἡ μὲν γραμμὴ διὰ γραμμῆς καὶ μόνης καταμετρηθῆναι δύναται· δι ἐπιφανείας δ' ἡ ἐπιφάνεια.

273. Μέτρον δ', ᾧ ἂν χρήσαιτό τις ἐπὶ ἐπιφανειῶν καταμετρήσει, ἐστὶ τὸ τετράγωνον· πȣ̃ς ȣ̃ν ἀκȣ́ει τετραγωνικὸς ἔκτασις περικλείȣσα τετράγωνον, ȣ̃ ἑκάστη πλευρὰ ἐστὶ ποδιαία εὐθεῖα· τετραγωνικὴ δὲ ὀργυιὰ ἐστὶ σχῆμα τετράγωνον, ȣ̃ ἑκάστη πλευρὰ ἐστὶν ὀργυιὰ κατὰ μῆκος.

Δυνάσθω γὰρ ἡ ΒΠ εὐθεῖα (σχ. 64) ὀργυιὰν γραμμικήν· ἔστω δὲ καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων τριῶν ΒΑ, ΑΗ, ΗΠ ἴση ὀργυιᾷ, αἱ δὲ Β, Π, Α, Η γωνίαι ὀρθαί· ȣ̓ κȣ̃ν τὸ ὅλον ἐμβαδὸν ΒΠΑΗ ἔσεται ἡ καλȣμένη τετραγωνικὴ ὀργυιά.

Ἐὰν ȣ̃ν ἤδη ἦτε ΒΠ καὶ ἡ ΒΑ εἰς ἓξ ἰσάλληλα μόρια τμηθῶσιν, εἴτ' ȣ̃ν εἰς ἓξ πόδας, τȣτ' ἔστιν ἐὰν γένηται ΒΖ = ΖΕ = Βχ κτλ, καὶ ἔτι ἀχθῶσιν αἱ κάθετοι ΖΙ, ΕΔ, κ.τ.λ. ἐπὶ πάντα τὰ σημεῖα τῶν διατομῶν, πάντα τὰ μικρὰ τετράγωνα ΒΖχτ, ΓΑΙο κ.τ.λ., προφανῶς ἰσάλληλα ἔσονται (127)· καὶ ἐπεὶ ἐκ κατασκευῆς ἑκάστȣ ἡ πλευρὰ ποδιαία, ἕκαστον ἐσται πȣ̃ς τετραγωνικός.

274. Οὕτως ἄρα ἡ τετραγωνικὴ ὀργυιὰ ΒΠΑΗ περιέξει ἓξ μικρὰ παραλληλόγραμμα τὰ ΒΖΑΙ, ΖΕΙΔ, κ.τ.λ. συγκείμενα ἕκαστον ἐκ τετραγωνικῶν ποδῶν ἕξ, καὶ ἐκ τȣ̃ ἀκολȣ́θȣ ἑξάκις ἓξ πόδας τετραγωνικȣ̀ς, εἴτ' ȣ̃ν 36.

275. Ἐὰν δὲ καὶ ἑκάτερος τῶν δυοῖν ποδῶν ΒΖ, Βχ διαιρεθῇ εἰς δώδεκα ἰσάλληλα μόρια, ἕκαστον τȣ́των ἐσται δάκτυλος, καὶ καθέτων ἀχθεισῶν ὡς ἐν τῇ ὀργυιᾷ, ὁ τετραγωνικὸς πȣ̃ς περιεκτικὸς ἐσται δώδεκα μικρῶν παραλληλογράμμων συντιθεμένων ἑκάστȣ ἐκ δακτύλων τετραγωνικῶν δώδεκα· καὶ ὅλος ὁ πȣ̃ς περιεκτικὸς ἐσται δωδεκάκις δώδεκα τετραγωνικῶν δακτύλων, εἴτ' ȣ̃ν 144.

276. Ὡσαύτως ὁ μὲν τετραγωνικὸς δάκτυλος περιέχει 144 τετραγωνικὰς γραμμὰς, τέτων δ' ἑκάςη ςίγματα τετραγωνικὰ 144.

277. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐκ τῶν προεκτεθέντων ὑποδειγμάτων, ᾗ ἐκ τῆς ἁπλῆς ἐποπτείας τε 64 σχήματος, εὔδηλον ὡς ἀριθμὸς τῶν μερῶν τε ἐν ἐπιφανείᾳ μέτρε ἐςιν ὁ τετράγωνος, ὁ ἀπὸ τε ἀριθμε τῶν μερῶν τε αὐτε μέτρε ἐν γραμμῇ λαμβανομένε· ὅτως ὁ ἀριθμὸς τῶν τετραγωνικῶν ποδῶν τῶν τῇ τετραγωνικῇ ὀργυιᾷ ἐνόντων ἐςὶν ὁ ἀπὸ 6 τετράγωνος 36· ἡ γὰρ γραμμικὴ ὀργυιὰ περιέχει ἓξ πόδας γραμμικές· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν τῷ τετραγωνικῷ ποδὶ ἐμπεριλαμβανομένων τετραγωνικῶν δακτύλων ἐςὶν 144, τετράγωνος ἀπὸ 12· δώδεκα γὰρ γραμμικὲς δακτύλες ὁ γραμμικὸς πὲς περιέχει.

278. Ἐπινοήσωμεν ἤδη τὴν βάσιν ΓΗ (σχ. 65) ἐν πλάτει ἀπειροςῷ ἀνιἔσαν ἑαυτῇ παραλλήλως ἕς γε τὴν ἀντίθετον πλευρὰν ΔΑ, ᾗ παραλείπεσαν μεθ' ἕκαςον ἀπειροςὸν διάϐημα ἴχνος τι ἑαυτῇ ἴσον· περικλείσει ἄρα ὅτως ἐκ διαδοχῆς τὴν ἐπιφάνειαν ΓΔΑΗ· ἢ, ἵνα τὸν αὐτὸν ἀεὶ ἐκφραζώμεθα τρόπον, γεννήσει τῇ ἑαυτῆς κινήσει τὴν ΓΔΑΗ ἐπιφάνειαν.

279. Ἄρα α΄. ὥςπερ τὸ σημεῖον κινέμενον γεννᾷ γραμμὴν, ὅτω γραμμὴ κινεμένη γεννᾷ ἐπιφάνειαν· β΄. αἱ γραμμαὶ ΙΟ, κ.τ.λ. αἱ παραλειφθεῖσαι ὑπὸ τῆς γεννητρίας γραμμῆς, ἢ τῆς ΓΗ βάσεως, ἐκλογισθῆναι ἔχεσιν ὡς ςοιχεῖα, ἐξ ὧν σύγκειται ἡ ΓΔΑΗ ἐπιφάνεια.

280. ΘΕΩΡΗΜΑ ςοιχειῶδες. Πᾶν ὀρθογώνιον ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ᾗ τε ὕψες.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ ἐπιφάνεια παντὸς ὀρθογωνίε τε ΓΔΑΗ ἐκ ἔςιν ἐδὲν ἄλλο, εἰμὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν ςοιχείων

ΙΟ, κ. τ. λ. τῶν τῇ γεννητρίᾳ γραμμῇ, ἢ τῇ βάσει ΓΗ ἴσων, ἃ παραλείπονται ὑπ' αὐτῆς παραλλήλως ἑαυτῇ ἀνιέσης ἕς γε τὴν ΔΑ (278)· ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶνδε τῶν στοιχείων ἐμφαίνεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σημείων, ἃ εἰσιν ἐν τῷ ΓΔ ὕψει.

Ο' ἀριθμὸς ἄρα τῶν στοιχείων, ἀφ' ὧν συντίθεται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ΓΔΑΗ, ἐκδηλοῦται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν σημείων, ἃ περιέχει τὸ ΓΔ ὕψος· ἐὰν ἄρα ἡ ΓΗ βάσις τοσάκις ληφθῇ, ὅσα σημεῖα ἔχει τὸ ΓΔ ὕψος, ὅ ἐστιν, ἐὰν ἡ ΓΗ βάσις πολλαπλασιασθῇ διὰ τοῦ ΓΔ ὕψους, πορισθήσεται ἀκριβῶς ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΓΔΑΗ ὀρθογωνίου· ἄρα κ. τ. λ.

281. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵν' οὖν εὑρεθῇ ἡ τοῦ ὀρθογωνίου ΓΔΑΗ ἐπιφάνεια, μετρηθήτω διὰ μήκους γνωστοῦ, δὶ ὀργυᾶς φέρε ά. ἡ ΓΗ βάσις· β΄. τὸ ΓΔ ὕψος· εἶτα πεπολλαπλασιάσθω ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀργυῶν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀργυῶν τοῦ ὕψους· τὸ δὲ γινόμενον ἐμφανεῖ τὰς τετραγωνικὰς ὀργυὰς, ἃς περιέχει ἡ ἐπιφάνεια· ἐὰν οὖν ᾖ ΚΗ=6, καὶ ΓΔ=5 ἡ τοῦ ΓΔΑΗ ὀρθογωνίου ἐπιφάνεια ἔσται 30 τετραγωνικῶν ὀργυῶν περιεκτική.

282. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Ἡ ἐπιφάνεια παντὸς παραλληλογράμμου ἴση ἐστὶ τῷ ὀρθογωνίῳ, τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔχοντος.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω ἡ τοῦ πλαγιογωνίου παραλληλογράμμου ΠκΤΕ βάσις κΕ ἴση τῇ βάσει τοῦ ΓΔΑΗ ὀρθογωνίου, πρὸς δὲ καὶ τὸ Ρβ ὕψος ἴσον τῷ ΓΔ ὕψει· φημὶ οὖν, ὡς αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο τούτων παραλληλογράμμων ἴσαι εἰσί.

Καὶ γὰρ ἐὰν προαχθῶσι πάντα τὰ στοιχεῖα ΙΟ, κ. τ. λ. τοῦ ὀρθογωνίου ΓΔΑΗ, ἅπαντα τὰ αὐτῶν μέρη

Ζχ τὰ ἐν τῷ πλαγιογωνίῳ ΠκΤΕ εἰσὶν ἴσα τῷ κΕ, ὡς ὄντα παράλληλα τῇ κΕ βάσει, ἢ περιεχόμενα ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἐν αἷς ἢ ἡ κΕ· τὰ μέρη ἄρα Ζκ εἰσὶ διὰ τοῦτο ἴσα θατέρᾳ βάσει ΓΗ, ἢ δὴ ἔσονται ἴσα πᾶσι τοῖς ΙΟ στοιχείοις τοῦ ὀρθογωνίου· παρὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς τῶν μερῶν, ἢ τῶν στοιχείων Ζχ, ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν ΙΟ στοιχείων· ἢ γὰρ ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ΠκΤΕ πλαγιογωνίου οὐδέν ἐστιν, ἀλλ' ἡ προαγωγὴ ἑκάστου στοιχείου τοῦ ΓΔΑΗ ὀρθογωνίου· αἱ ἐπιφάνειαι ἄρα τῶν δύω παραλληλογράμμων ἔχουσαι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἰσαλλήλων στοιχείων, εἰσὶν ἐξ ἀνάγκης ἴσαι Ο. Ε. Δ.

283. ΠΟΡ. ἢ ΘΕΩΡ. ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Ἐν γένει ἡ παντὸς παραλληλογράμμου ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τοῦ ὕψους.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἡ γὰρ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ΓΔΑΗ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τοῦ ὕψους (280)· ἀλλ' ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πλαγιογωνίου παραλληλογράμμου ΠκΤΕ ἐστὶν ἴση τῇ ὀρθογωνίῳ, οὗ βάσις ἢ ὕψος τὰ αὐτὰ τῷ πλαγιογωνίῳ (282)· ἄρα ἢ αὐτοῦ ἡ ἐπιφάνεια ἰσοῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τοῦ ὕψους· ἐν γένει ἄρα παντὸς παραλληλογράμμου, εἴτε ὀρθογωνίου, εἴτε πλαγιογωνίου, ἡ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως ἢ τοῦ ὕψους Ο. Ε. Δ.

284. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵν' οὖν εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ΑΟΠΓ παραλληλογράμμου (Σχ. 67)· α΄. ὡς ὕψος ἐστάθω κάθετος ἡ Οτ (104 κτ.)· β΄. μετρηθήτω το μῆκος τοῦ ὕψους Οτ ἢ τῆς ΑΠ βάσεως διὰ ποδὸς, ἢ ὀργυιᾶς· γ΄. πεπολλαπλασιάσθω διὰ θατέρου θάτερον.

285. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ΄. Πᾶν τρίγωνον (Σχ. 66)

ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ γινομένου ὑπὸ τῆς ΔΓ βάσεως καὶ τοῦ ΠΙ ὕψους.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἤχθω ἡ ΠΖ παράλληλος τῇ ΔΓ, καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΠΔ· ἡ οὖν ΠΓ διαγώνιος διαιρήσει τὸ ΠΔΓΖ παραλληλόγραμμον εἰς δύω ἴσα τρίγωνα τὰ ΔΠΓ, ΓΠΖ (238)· ἀλλὰ ΠΔΓΖ $=$ ΠΙ $\times$ ΔΓ (283)· καὶ ΔΠΓ, ἓν τῶν δύω τριγώνων, $= \frac{\text{ΠΔΓΖ}}{2} = \frac{\text{ΠΙ} \times \text{ΔΓ}}{2}$· ἄρα γενικῶς ἐπιφέρεται ἡ δεῖξις.

Ἐν γένει παντὸς τριγώνου ταῖς δυσὶ πλευραῖς δυνατὸν παραλλήλους ἀγαγεῖν δύω (σχ. 67)· ὅθεν γίνεται παραλληλόγραμμον τὸ ΑΟΠΓ τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΠ, καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΓΔ τῷ ΑΠΓ τριγώνῳ ἔχον, οὗ τὸ ἥμισύ ἐστι τὸ τρίγωνον διὰ τὴν δίχα τέμνουσαν τὸ παραλληλόγραμμον διαγώνιον, ἥτις ἐστὶν ἡ τρίτη τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν· ἐπεὶ δὲ ΑΟΠΓ $=$ ΑΠ $\times$ Ογ· τὸ δὲ ΑΠΓ τρίγωνον ἥμισυ (238) ἐστὶ τοῦ ΑΟΠΓ· ἄρα ΑΠΓ $= \frac{\text{ΑΠ} \times \text{Ογ}}{2}$. Ο. Ε. Δ.

286. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Κληθέντος υ τοῦ ὕψους παντὸς τριγώνου, καὶ β τῆς αὐτοῦ βάσεως, ἔσται $\frac{\upsilon}{2} \times \beta = \upsilon \times \frac{\beta}{2} = \frac{\upsilon \times \beta}{2} = \frac{\upsilon\beta}{2}$· „πᾶν ἄρα τρίγωνον ἐστὶν ἴσον, ἤτοι τῷ „γινομένῳ ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἡμίσεως ὕψους, ἢ τῷ „ὑπὸ τῆς ἡμιβάσεως καὶ τοῦ ὕψους, ἢ τέλος τῷ ἡμίσει τοῦ „γινομένου ὑπὸ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.“

287. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἐὰν παραλληλογράμμου τοῦ ΑΟΠΓ (σχ. 67) τεθείσης εἰς βάσιν τῆς ΑΠ πλευρᾶς μὴ

ἐξῆ ἀγαγεῖν κάθετον ἄλλην, ἢ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ τῇ ΑΠ βάσει προεκβληθείσῃ, ϗ τόδε τὸ παραλληλόγραμμον ἐ δὲν μᾶλλον ἴσον ἔςαι τῷ ὑπὸ τῆς βάσεως ΑΠ, ϗ τῆς καθέτε ΓΔ, καίτοι ἐκτὸς πιπτέσης τῦ παραλληλογράμμε, γινομένῳ· ἔργον γὰρ τῦ ὕψες τὸν ἀριθμὸν ἐμφαίνειν τῶν τῦ παραλληλογράμμε ςοιχείων (282)· ἐμφαίνει δὲ ἡ ΓΔ κάθετος τῦτον τὸν ἀριθμὸν, ὡς ϗ ἡ Οτ ἐν αὐτῷ τῷ παραλληλογράμμῳ, ἐπειδὴ ΓΔ = Οτ (127)· ἄλλως τε ϗ πάντα τὰ διὰ ταύτης ςοιχεῖα ϗ δι' ἐκείνης διΐασι κατὰ κάθετον.

288. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τεθείσης τῆς ΑΠ εἰς βάσιν τριγώνε τῦ ΑΠΓ, τὴν ΓΔ ἀγαγεῖν δεῖ κάθετον τῇ ΑΠ βάσει προεκβληθείσῃ.

289. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ΄. Ἀποδείξασι τὰ ἐπὶ τῶν παραλληλογραμμικῶν ἐπιφανειῶν δύω προεκτεθέντα θεωρήματα, ἑξῆς ἂν εἴη διὰ πορισμάτων ἐπαγαγεῖν ϗ τὲς πρὸς ἄλληλα αὐτῶν λόγες.

290. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπεὶ τὸ μὲν παραλληλόγραμμον περιέχεται ὑπὸ τῆς βάσεως ϗ τῦ ὕψες, τὸ δὲ τρίγωνον ὑπὸ τῦ ἡμίσεως ὕψες ϗ τῆς βάσεως, δύω μὲν παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχεσι συγκείμενον ἔκ τε τῶν βάσεων ϗ τῶν ὑψῶν, δύω δὲ τρίγωνα, λόγον συγκείμενον ἐκ τῶν βάσεων ϗ τῶν ἡμίσεων ὑψῶν (Συμ. Λογ. 291)· ἐντεῦθεν ἄρα ἕπονται οἱ λόγοι τῶν ἐν αὐτοῖς ἐπιφανειῶν.

α΄. Δύω παραλληλόγραμμα, ἢ δύω τρίγωνα, τὴν αὐτὴν βάσιν ϗ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐχόντα, ἢ ὧν αἱ βάσεις ἀντιπεπόνθασι τοῖς ἐν αὐτοῖς ὕψεσιν, ἴσα εἰσί. (Συμ. Λογ. 301, 303).

β΄. Δύω παραλληλόγραμμα, ἢ δύω τρίγωνα, ἴσα;

μὲν βάσεις, ὕψη δὲ ἄνισα ἔχοντα, πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη· ἔχοντα δὲ ἴσα μὲν ὕψη, ἀνίσυς δὲ βάσεις, ὡς αἱ βάσεις (Συμ. Λογ. 306).

γ′. Ρ'ᾷςα τοίνυν ἐντεῦθεν κατασκευασθήσεται παραλληλόγραμμον ἢ τρίγωνον ἔχον πρὸς παραλληλόγραμμον, ἢ τρίγωνον, τὸν ἐπιταχθέντα λόγον, εἴτ' ἓν διπλῦν, τριπλῦν κτ., ἢ ὑποδιπλάσιον, ὑποτριπλάσιον κτ.· κείσθω φέρε κατασκευάσαι (σχ. 67) παραλληλόγραμμον τετραπλάσιον τῦ ΑΟΠΓ· ληφθήσεται τοίνυν, ἤτοι 2ΑΠ καὶ 2ΓΔ (242), ἢ ΑΠ ᾗ 4ΓΔ, ἢ τέλος ΓΔ ᾗ 4ΑΠ (290).

291. ΠΟΡΙΣΜΑ Β′. Ε'ὰν παραλληλόγραμμα δύω ΓΔΑΗ, κΠΤΕ τὴν αὐτὴν ἔχωσι βάσιν ΓΗ = κΕ, ᾗ ἐν ταῖς αὐταῖς ὦσι παραλλήλοις ΠΑ, κΗ, ἴσα ἔσονται· κοινὸν μὲν γὰρ αὐτοῖς ὕψος τὸ ΓΔ, ἡ Ρβ (127)· ἴση δὲ ἡ βάσις (282).

292. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ′. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον (σχ. 68) τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ΑΓ τρίγωνα ΑΓΔ, ΑΒΓ, ᾗ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ΑΓ, ΒΔ, εἰσὶν ἴσα· κοινὸν μὲν γὰρ αὐτοῖς ἐςι τὸ ὕψος (196, 127)· ἔχυσι δὲ ᾗ βάσιν τὴν αὐτήν· ἄρα εἰσὶν ἴσα (285).

293. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ′. Ε'ντεῦθεν ἄρα συνάγεται μέθοδος, καθ' ἣν πολύγωνόν τι τὸ ΑΔΓΠΖ ἐφ' ἕτερον μετασχηματίζεται τὸ ΒΓΠΖ ἴσον μὲν ἐκείνῳ, μιᾷ δὲ πλευρᾷ ἐλλεῖπον.

α′. Εἰλήφθωσαν γὰρ δύω τινὲς γωνίαι αἱ Γ, Α, ἀφοριζόμεναι τρίτης τινὸς τῆς Δ, ᾗ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ· ταύτῃ δὲ διὰ τῆς ἀφοριζέσης Δ γωνίας ἤχθω παράλληλος ἡ ΔΒ, ᾗ προσεκβεβλήσθω ἡ ΖΑ (ἢ ἡ ΠΓ), ἔς τ' ἂν συμβάλῃ τῇ ΔΒ παραλλήλῳ· γ′. ἡ ΓΒ ἐπιζευγνύτω τὰ σημεῖα Γ, Β, καθ' ὃ προαχθεῖσα ἡ ΖΑ συνήντησε τῇ

ΔΒ παραλλήλῳ· φημὶ ὖν ὡς τὸ τετράπλευρον ΖΓΠΒ ἴσον ἐςὶ τῷ πενταπλεύρῳ ΖΠΓΔΑ· ἔςι μὲν γὰρ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ ἴσον τῷ τριγώνῳ ΑΓΒ, ὡς τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ ἔχοντα ϗ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΓ, ΔΒ κείμενα (292), οἷς κοινῇ προςεθέντος τῦ τετραπλεύρυ ΖΠΓΑ, ἔςαι ΖΠΓΔΑ = ΓΖΠΒ.

294. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἅπαν ἄρα πολύγωνον μεταποιηθῆναι δύναται εἰς τρίγωνον ἴσον τῷ πολυγώνῳ· ἀεὶ γὰρ δυνατὸν τὴν πρᾶξιν ἐπαναλαμβάνειν, μέχρις ἂν ἐπὶ τρίπλευρον τὸ σχῆμα μετατράπηται, τῆς αὐτῆς ἀεὶ μενύσης αὐτῷ ἐπιφανείας· ὡς γὰρ ἤδη τὸ πεντάπλευρον ἐπὶ τετράπλευρον μετήνεκται, τὸν αὐτὸν τρόπον εἰς τρίγωνον τὸ τετράπλευρον τραπήσεται, ἀφοριϑεισῶν δύω γωνιῶν τῶν Π, Β, ἀπὸ τρίτης τινὸς τῆς Γ, ϗ δι' αὐτῆς παραλλήλυ ἀχθείσης τῇ ΠΒ ἐπιζευχθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῶν ἄλλων, ὡς ϗ πρὸ τῦ, γενομένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ ἐπιφανείας παντοίων εἰδῶν πολυγώνυ.

295. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Πᾶν τραπέζιον τὸ ΑΠ, ΓΔ (σχ. 53), ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῦ ἡμίσεος τῶν δύω παραλλήλων πλευρῶν ΑΓ, ΠΔ, ϗ τῦ ὕψυς ΑΠ, εἴτ' ὖν τῆς ἑκατέρᾳ τῶν δύω παραλλήλων πλευρῶν καθέτου.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἀχθείσης τῆς διαγωνίυ ΑΔ, τὰ δύω τρίγωνα ΑΠΔ, ΑΓΔ, ἐν δυσὶ παραλλήλοις ΑΓ, ΠΔ ὄντα, τὸ αὐτὸ ἔχυσιν ὕψος ΑΠ (127)· ἔςι δὲ τὸ μὲν τρίγωνον $ΑΠΔ = \frac{1}{2} ΠΔ \times ΑΠ$· τὸ δὲ $ΑΓΔ = \frac{1}{2} ΑΓ$

ΑΠ· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια ἀμφοτέρων τῶν τριγώνων, εἴτ' οὖν τὸ τραπέζιον ΑΠΓΔ $= \overline{\tfrac{1}{2}\,ΠΔ + \tfrac{1}{2}\,ΠΓ} \times ΑΠ$, εἴτ' οὖν τῷ γινομένῳ ἐκ τοῦ ἡμίσεος τῶν δύω παραλλήλων πλευρῶν, ϗ τοῦ ὕψους. Ο. Ε. Δ.

296. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Πᾶν ἀκανόνιστον πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔ (σχ. 62) ἴσον ἐστὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν τριγώνων ΑΖΠ, κτλ. τῶν αὐτῷ ἐμπεριεχομένων (Ἀριθμ. 9).

297. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμισείας αὐτοῦ περιμέτρου ϗ τῆς ὀρθῆς ἀκτῖνος.

ΔΕΙΞΙΣ. Αἱ μὲν πλάγιαι ἀκτῖνες ἅπαν κανονικὸν πολύγωνον (σχ. 59) εἰς ἴσα τρίγωνα διαιροῦσι τὰ ΠΟΔ, ΔΟΘ, κτλ. (248)· ἡ δ' ὀρθία ἀκτὶς ΖΟ τὸ ὕψος ἐμφαίνει πάντων αὐτῶν τῶν τριγώνων (196)· ἡ μὲν ἄρα τοῦ πολυγώνου περίμετρος ἔστι τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων πάντων τῶν τριγώνων· ἡ δ' ὀρθία ἀκτὶς ΖΟ ἔσται τὸ κοινὸν ἁπάντων ὕψος· ἀλλ' ἕκαστον τῶνδε τῶν τριγώνων ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῆς ἡμιβάσεως ϗ τοῦ ὕψους (285)· τὸ ἄρα ἄθροισμα πάντων τῶν τριγώνων, εἴτ' οὖν ὅλον τὸ πολύγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἡμιαθροίσματι πασῶν τῶν βάσεων, εἴτ' οὖν τῇ ἡμιπεριμέτρῳ, ἐπὶ τὴν ὀρθίαν ἀκτῖνα πολλαπλασιασθείσῃ. Ο. Ε. Δ.

298. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐπειδὴ δὲ ϗ ὁ κύκλος δυνάμει γοῦν πολύγωνόν ἐστι κανονικὸν, ἐξ ἀπείρων πλευρῶν συνιστάμενον, οὗ ἡ ὀρθία τῇ πλαγίᾳ ἀκτῖνι ἰσοῦται (261), ἡ ἐν αὐτῷ ἐπιφάνεια ἴση ἐστὶ τῷ γινομένῳ ἐκ τῆς ἡμιπεριφερείας ϗ τῆς ἀκτῖνος.

299. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Κυκλικὸς τομεὺς ὁ ΠΓΔΟ ἴσος ἐστὶ τῷ ἡμιγινομένῳ ὑπὸ τοῦ ΠΓΔ τόξου ϗ τῆς ἀκτῖνος· ἐμφαίνει γὰρ τὸ ΠΓΔ πάσας τὰς βάσεις τῶν ἀπεί-

ἴσων τριγωνιδίων, ὧν τὸ ἄθροισμα συνίςησι τὸν ΠΓΔΟ τομέα, ἡ δὲ ΓΟ ἀκτὶς τὸ ὕψος ἁπάντων.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἰς δὲ τὴν τέτυ εὕρεσιν ζητείσθω πρῶτον ἐν εὐθείᾳ γραμμῇ ἡ δύναμις τῦ τόξυ κατὰ τὸν ἀκόλυθον τρόπον· α΄. μετρηθήτω ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία ὑπὸ ΠΟΔ· β΄. εὑρεθείσης τῆς ὁλικῆς περιφερείας τῦ κύκλυ, ὡς ὑποδείξομεν μικρῷ ὕςερον (375), ζητηθήτω διὰ τῆς μεθόδυ τῶν τριῶν ἡ τῦ ΠΓΔ τόξυ δύναμις· εὑρηται φέρε ἡ ὑπὸ ΠΟΔ γωνία 5°, εἴτ᾽ ὖν τὸ καταμετρῦν αὐτὴν τόξον ΠΓΔ = 5°· εἰλήφθω ὖν ἐν ποσὶν ἡ ΠΟ ἀκτὶς, ϗ δὴ εὑρεθήσεται ἡ ὁλικὴ περιφέρεια ΠΗΝΓ ἐξ ὑποθέσεως = 600 ποσίν· ἐκῦν 360 : 600 : : 5 : χ = 8 ἄρα ΠΓΔ = 8 ποσί. (*)

300. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἵν᾽ εὑρεθῇ ἡ τμήματος τῦ ΠχΕν ἐπιφάνεια (σχ. 69.), εἰλήφθω ἡ τῦ ΠΓχΕν τομέως ἐπιφάνεια, εἶτα ἡ τῦ ΠΓχ τριγώνυ· ϗ δὴ ΠΓχΕν — ΠΓχ = ΠχΕν· ὃ καθ᾽ ἑαυτὸ πρόδηλον.

301. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Τέλος δὲ ἵνα μετρηθῇ ἡ ΑΒρΔ ζώνη, τῆς ὁλικῆς τῦ κύκλυ ἐπιφανείας ἀφῃρήσθωσαν ἑκάτερον τῶν τμημάτων ΑΔΕΓ, ΒΜρη· τὸ δὲ λειπόμενον προφανῶς ἐμφανεῖ τὴν τῆς ΑΒρΔ ζώνης ἐπιφάνειαν.

(*) Φανήσεται δὲ ἐν τοῖς ἔμπροσθεν (369) ὡς τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν, ϗ δὴ ὁ,τιῦν τόξον, ἴσαν εὐθείᾳ γραμμῇ ἐπ᾽ ἀκριβὲς εὑρεθῆναι ἀμήχανον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ἰσοπεριμέτρων σχημάτων.

302. Σχήματα καλοῦνται *ἰσοπερίμετρα* τὰ τὴν αὐτὴν περίμετρον ἔχοντα, εἴτ' οὖν ὧν ἡ περίμετρος τῇ αὐτῇ ἰσοῦται εὐθείᾳ.

303. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Δύω κανονικῶν ἰσοπεριμέτρων πολυγώνων μείζων ἡ ἐπιφάνεια, οὗ πλείους εἰσὶν αἱ πλευραί.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ κανονικὸν πολύγωνον ὅσῳ πλείους ἔχει πλευρὰς, τοσούτῳ ἡ ὀρθία ἀκτὶς ἔγγιον γίνεται τοῦ ἐξισωθῆναι τῇ τῆς πλαγίας δυνάμει (260), τοσούτῳ ἑπομένως μείζων γίνεται· τῆς δὲ περιμέτρου ἴσης τῆς αὐτῆς, τὸ γινόμενον ὑπὸ τῆς ἡμιπεριμέτρου καὶ τῆς ὀρθίας ἀκτῖνος τοσούτῳ μεῖζον ἔσαι, ὅσῳ μείζων εἴη ἡ ὀρθία ἀκτὶς· τοῦτ' ἔστιν, οὗ πλείους αἱ πλευραὶ, ἐκεῖνο ἔσεται μεῖζον (297). Ο. Ε. Δ.

304. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἄρα ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔλαττόν ἐστιν, ἢ τὸ αὐτῷ ἰσοπερίμετρον τετράγωνον· τὸ δὲ τετράγωνον ἔλαττον, ἢ τὸ ἰσοπερίμετρον πεντάγωνον, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως· ὁ γεμὴν κύκλος, ὡς κανονικὸν πολύγωνον ἐκληφθεὶς ἐξ ἀπειραρίθμων πλευρῶν συνιστάμενον, ἔσαι μείζων παντὸς ἄλλου ἰσοπεριμέτρου οἱ κανονικοῦ σχήματος.

305. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Δύω ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων, ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστιν, οὗ αἱ πλευραὶ εἰσὶν ἴσαι, ἢ μᾶλλον τῆς ἰσότητος ἔγγιον γίγνονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Κείσθωσαν δύω ὀρθογώνια τὰ ΑΒΓΔ, ΑΔΠΖ (σχ. 54, 55)· ϗ ἔςω τετραγώνου μὲν ἥτε βάσις ΒΓ = 4, ϗ τὸ ὕψος ΑΒ = 4, ὧν τὸ ἄθροισμα 8· ἔςω δὲ ϗ τοῦ ἐπιμήκους ὀρθογωνίου ΑΔΠΖ, ΑΠ + ΑΔ = 8· τοῦ μὲν οὖν τετραγώνου ἐπιφάνεια ἔςαι $4 \times 4 = 16$· ἀλλ' ἡ τοῦ ἐπιμήκους ὀρθογωνίου ἐπιφάνεια, καίτοι ἰσοπεριμέτρου, ἔςαι ἀλλ' οὖν ἐλάττων ἢ 16· ἐγγίσει μέντοι μᾶλλον τῷ 16, ὅσῳ μᾶλλον ἡ βάσις τοῦ ἐξισωθῆναι τῷ ὕψει ἐγγὺς γίνεται· ἐὰν γὰρ ἡ μὲν βάσις τεθῇ $= 7\frac{1}{2}$, τὸ δὲ ὕψος $= \frac{1}{2}$, ἔςαι ἡ ἐπιφάνεια $= 7\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ (283) $= 3 + \frac{3}{4}$· ἐὰν δὲ ἡ μὲν βάσις ᾖ = 7, τὸ δ' ὕψος = 1, ἔςαι ἡ ἐπιφάνεια $= 7 \times 1 = 7$· ἐὰν δὲ ἡ μὲν βάσις ᾖ = 5 τὸ δὲ ὕψος = 3, ἔςαι ἡ ἐπιφάνεια $5 \times 3 = 15$· δῆλον ἄρα, ὡς ὅσῳ μᾶλλον ἡ βάσις ἐγγίζει τοῦ ἐξισωθῆναι τῷ ὕψει, τοσούτῳ μᾶλλον αὔξει ἡ ἐπιφάνεια. Ο. Ε. Δ.

306. **ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'.** Δύω παραλληλογράμμων, τὰς ἀντιςοίχους πλευρὰς ἴσας ἐχόντων, ϗ ἰσοπεριμέτρων ὄντων ἐπομένως, ἀλλὰ τοῦ μὲν ὄντος ὀρθογωνίου, τοῦ δὲ πλαγιογωνίου, τὸ ὀρθογώνιον μεῖζόν ἐςι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςωσαν ὀρθογωνίου τοῦ ΑΒΓΔ (σχ. 70) αἱ ἀντίςοιχοι πλευραὶ ἴσαι ἑκάςῃ ταῖς τοῦ πλαγιογωνίου ΑΟΘν· ἡ μὲν οὖν ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ἴση ἐςὶ τῷ ΑΒ × ΒΓ (283)· ἡ δὲ τοῦ πλαγιογωνίου, τεθείσης τῆς Ον εἰς βάσιν, ἴση ἔςαι τῷ Ον × Θτ· ἐπεὶ δὲ ἐξ ὑποθέσεως Ον = ΑΒ, ϗ ΑΓ > Θτ, ἔςαι ΑΒ × ΒΓ > ΑΒ × Θτ (Συμ. Λογ. 307), ϗ δὴ μεῖζον ϗ τοῦ Ον × Θτ· ἡ ἄρα ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ἐςὶ μείζων τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλαγιογωνίου, οὗ αἱ πλευραὶ ἴσαι τίθενται ταῖς τοῦ ὀρθογωνίου. Ο. Ε. Δ.

307. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.** Ὅσῳ ἄρα ἡ μὲν Ο γωνία ἀμβλεῖα, ἡ δ' Α ὀξεῖα, τοσούτῳ ἔλαττον γίνεται τὸ

θτ ὕψος, καὶ τοσούτῳ ἑπομένως ἐλαττοῦται ἡ ἐπιφάνεια· δύω ἄρα παραλληλογράμμων πλαγιογωνίων, τὰς αὐτὰς ἀντισοίχους πλευρὰς ἐχόντων, μείζονα ἐπιφάνειαν ἕξει, οὗ αἱ δύω μείζους γωνίαι εἰσὶν ἧττον ἀμβλεῖαι.

308. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐν γένει ἄρα πάντων τῶν ἰσοπεριμέτρων παραλληλογράμμων τὸ τετράγωνον ἐστὶ μεῖζον· μεῖζον γὰρ καὶ ὀρθογωνίου ἐπιμήκους ἰσοπεριμέτρου (305) καὶ παραλληλογράμμου πλαγιογωνίου ἰσοπεριμέτρου (306).

309. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Πολλοῦ γε ἄρα καὶ δεῖ τῶν πολυγώνων ἐν γένει τὰς ἐπιφανείας ἀνάλογον ἔχειν ταῖς αὐτῶν περιμέτροις.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ ἀναλογικῶν εὐθειῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ ἀναλογίας τῶν γραμμῶν.

310. Ἐὰν εὐθεῖα εὐθεῖαν περιέχῃ, ὁσάκις τρίτη περιέχει τετάρτην, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογοι λέγονται· ἐὰν γὰρ (σχ. 71) ἡ ΑΖ εὐθεῖα τμηθῇ εἰς πέντε μέρη ἰσάλληλα, εἴτ' οὖν γένηται ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ,

κτλ. τμηθῇ δὲ ἡ ΑΤ ὡσαύτως, ὡς ὑπάρχειν ΑΘ = ΘΙ = ΙΤ, κτλ. προκύψυσι τέσσαρες ἀνάλογοι εὐθεῖαι ΑΒ : ΑΘ : : ΑΖ : ΑΤ· ἐπεὶ γὰρ τὰ ὅμοια μέρη δυοῖν ὅλων πρὸς ἄλληλα ἔχυσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἡ τὰ ὅλα (Συμ. λογ. 234), ἔσαι ἐξ ἀνάγκης ἡ ἑξῆς ἀναλογία: τὸ ΑΒ πέμπτον μέρος τῆς ΑΖ πρὸς τὸ ΑΘ πέμπτον μέρος τῆς ΑΤ λόγον ἔχει, ὃν ἡ ὅλη ΑΖ πρὸς τὴν ὅλην ΑΤ.

311. Ἔσαι ἔτι κατὰ τὴν ὐσιώδη ἰδιότητα ἁπάσης ἀναλογίας (Συμ. λογ. 238.) ΑΒ × ΑΤ = ΑΘ × ΑΖ, ὅ ἐσι (280) τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἐπὶ τῆς ΑΤ ὡς βάσεως δι' ὕψυς τῦ ΑΒ συνιςάμενον ἴσον τῷ ὀρθογωνίῳ τῷ συγκροτυμένῳ ἐπὶ βάσεως τῆς ΑΖ δι' ὕψυς τῦ ΑΘ.

312. Ἵνα δὲ ἡ τῇ τῶν εὐθειῶν ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ τῇ τῶν ἀριθμῶν, οἰκειωθῶμεν, ἐκδηλωθήτωσαν πρὸς τὸ παρὸν ἐν ἀριθμοῖς τέτταρσι τέτταρες εὐθεῖαι.

Ἔσω φέρε ΑΤ = 2 ΑΖ· ὐκῦν ἡ ΑΘ = 2 ΑΒ· τεθείσθω αὖθις ΑΒ = 1, καὶ ΑΖ = 5· οὐκοῦν ἔσαι ΑΘ = 2, ἡ ΑΤ = 10· ἡ δὲ ἀναλογία : ΑΒ : ΑΘ :: ΑΖ : ΑΤ μεταπεσεῖται εἰς 1 : 2 : :: 5 · 10· ἐὰν δὲ Α = 1 ποδὶ, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἔσαι ὀρθογώνιον ἐπίμηκες, ἔχον μῆκος μὲν πόδας 10, πλάτος δὲ 1, εἴτ' ὖν πόδας τετραγωνικὲς 10 (281), τὸ δὲ ὑπὸ τῶν μέσων γινόμενον ἔσαι ὀρθογώνιον ἐπίμηκες, ἔχον πέντε μὲν ποδῶν μῆκος, δύω δὲ πλάτος· ἑκάτερον δὲ θατέρυ διενηνοχὸς τῷ σχήματι, ἰσάλληλα μέντοι ἐσὶ τὰς ἐπιφανείας, ὡς περιέχοντα ἑκάτερον δέκα τετραγωνικὲς πόδας.

313. ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ. Δύω εὐθεῖαι ὑπὸ δυεῖν παραλλήλων ἀπολαμβανόμεναι εἰσὶν ἀνάλογοι

δυσὶν εὐθείαις ὑπὸ δυεῖν παραλλήλων ϗ αὐταῖς ἀπολαμ-
βανομέναις, ϗ ὥσπερ ἐκεῖναι, κεκλιμέναις.

ΔΕΙΞΙΣ. Τετμήσθω ἡ ΑΖ (σχ. 71.) εἰς πέντε ἰσάλληλα μέρη τὰ ΑΒ, ΒΓ, κτλ. ϗ συνεζάσθω δι᾽ ἄλλης εὐθείας πρὸς τὸ δοκοῦν ἡ Α γωνία, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΤ, ϗ διὰ τῶν σημείων Β, Γ, κτλ. ἤχθωσαν τῇ ΖΤ παράλληλοι αἱ ΑΞ, ΒΘ, κτλ. τμηθήσεται οὖν ἡ ΑΤ εἰς πέντε ἰσάλληλα μέρη, ἀλλὰ δὴ ὡσαύτως ϗ ἡ ΑΖ· εἴγε πάντα μὲν τὰ μέρη τῆς ΑΤ εὐθείας ΑΘ, ΘΙ, ἀπολαμβάνεται ὑπὸ παραλλήλων, ϗ ἐπ᾽ αὐτῶν ἐπίσης κέκλιται (128)· πάντα δὲ τὰ ΑΒ, ΒΓ μέρη τῆς ΑΖ, ὑπὸ παραλλήλων ἴσον ἀπεχουσῶν καὶ ἐπίσης πάντα ἐπ᾽ αὐτῶν κέκλιται.

α΄. Δύω ἄρα μέρη τῆς ΑΖ πρὸς δύω τῆς ΑΤ τὰ ἐν ταῖς παραλλήλοις παραβαλλόμενα, ἔσονται ἀνάλογα ταῖς ὅλαις εὐθείαις ΑΖ, ΑΤ ταῖς ἀπολαμβανομέναις ὑπὸ δύω ἑτέρων παραλλήλων Ακ, ΖΤ· εἰλήφθων γὰρ πρὸς τὸ δοκοῦν τὰ μέρη ΑΒ, ΑΘ κείμενα ἐν ταῖς παραλλήλοις ΑΞ, ΒΘ, ϗ παραβεβλήσθων ταῖς δυσὶν ὅλαις εὐθείαις ΑΖ, ΑΤ μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΞ, ΖΤ κειμέναις· φημὶ δὴ ὡς αἱ πρότεραι, καθὰ ϗ αἱ ὕστεραι, κεκλιμέναι, εἰσὶν αὐταῖς ἀνάλογοι. εἴτ᾽ οὖν ΑΒ : ΑΘ :: ΑΖ : ΑΤ· ἓν γὰρ πέμπτον τῆς ΑΖ, εἴτ᾽ οὖν ΑΒ πρὸς ΑΘ πέμπτον τῆς ΑΤ, ὡς ἡ ὅλη εὐθεῖα ΑΖ πρὸς τὴν ὅλην ΑΤ.

β. Ταὐτὸν μέντοι ἔσαι, ϗ ἐὰν παραβληθῶσι μέρη τυχόντα τῶν δύω εὐθειῶν, κείμενα ἐν δυσὶ παραλλήλοις, ἀποστήματι ᾡτινιοῦν ἀπεχούσαις, πρὸς αὐτας τὰς ὅλας εὐθείας· εἰλήφθωσαν γὰρ δύω τυχοῦσαι παράλληλοι ΒΘ, ΕΧ· φημὶ οὖν ὡς ἔσι ΒΕ : ΘΧ :: ΑΖ : ΑΤ, ὃ ἐϛι τρία πεμπτημόρια τῆς ΑΖ, τȣτ᾽ ἔϛιν ἡ ΒΕ, εἰσὶ πρὸς τρία πεμπτημόρια τῆς ΑΤ, τȣτ᾽ ἔϛι τὴν ΘΧ, ὡς ἡ ὅλη ΑΖ πρὸς τὴν ὅλην ΑΤ, ὃ καθ᾽ ἑαυτό ἐϛι πρόδηλον.

γ΄. Ἀλλὰ ϗ μέρη δυεῖν ὅλων εὐθειῶν ὑπὸ δυεῖν ὡρισμένων παραλλήλων ἀπολαμβανόμενα ἀνάλογον ἔχȣσι δυσὶν ἑτέροις αὐτῶν μέρεσιν ἀπολαμβανομένοις ὑπὸ δύω παραλλήλων ὡρισμένων· ἔϛωσαν ȣ῏ν δύω παράλληλοι αἱ ΑΞ, ΓΙ, ϗ ἄλλαι αἱ ΓΙ, ΖΤ· φημὶ ȣ῏ν ὡς ἔϛιν ΑΓ : ΑΙ :: ΓΖ : ΙΤ, εἴτ᾽ ȣ῏ν $\frac{2}{5}$ ΑΖ πρὸς $\frac{2}{5}$ ΑΤ, ὡς $\frac{1}{5}$ ΑΖ πρὸς $\frac{1}{5}$ ΑΤ, ὃ ϗ αὐτὸ προδηλότατον.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀλλὰ γὰρ τὴν προεκτεθεῖσαν ἀναλογίαν, τὰ μέγιϛα ἡμὶν ἐν τοῖς ἐφεξῆς ξυντελέσȣσαν, δεικτέον εἶναι μοι δοκεῖ ϗ καθολικώτερον.

Θῶμεν γὰρ τὴν ΑΖ εὐθεῖαν διῃρημένην ȣ᾽κ εἰς πέντε μέρη ἰσάλληλα, ἀλλ᾽ εἰς ἄπειρα, ϗ δι᾽ ἑκάϛȣ σημείȣ τῶν προσεχεςάτων διατομῶν Β, Γ, Δ, διϊȣ̃σας, ὡς διὰ τȣ̃ Α, παραλλήλȣς τῇ ΖΤ. α΄. πασῶν τῶν παραλλήλων ἴσῳ ἀποϛήματι ἀπεχȣσῶν, πάντα τὰ μέρη τῆς ΑΤ, τὰ ἐναπολαμβανόμενα μεταξὺ δύω προσεχῶν παραλλήλων τὰ ΑΘ, ΘΙ, ΙΤ, ϗ ἴσον ἐπ᾽ αὐταῖς κεκλιμένα (*), ἴσα ἔσονται. β΄. πάντα τὰ μέρη ΑΘ, ΘΙ, κτλ. ἔσονται μέρη ὅμοια τῆς ὅλης ΑΤ, ἀπειροϛὰ, ϗ σημεῖα ἴσα· ϗ ἔτι αἱ ΑΒ, ΒΓ, κτλ. ἔσονται μέρη ὅμοια, ἀπειροϛὰ, ἢ σημεῖα τῆς ὅλης ΑΖ (51). γ΄. ὁ ἀριθμὸς τῶνδε τῶν

(*) Πάντα ταῦτα τὰ μέρη ἴσον εἰσὶ κεκλιμένα ἐπὶ τῶν παραλλήλων· ȣ᾽δὲν γὰρ κυρίως εἰσὶν, ὅτι μὴ ἡ εὐθεῖα ΑΤ, αὐτὴ ἐμπίπτȣσα εἰς πάσας τὰς παραλλήλȣς ποιεῖ ἴσας τὰς ἀντιϛοίχȣς γωνίας (132), ϗ δὴ ἐπίσης ἐφ᾽ ἁπασῶν κλίνεται· αὐτὸ δὲ τȣ̃το νοητέον ϗ περὶ τῶν μερῶν ΑΒ, ΒΓ κτλ.

ὁμοίων μερῶν, τῶν δὲ τῶν ἀπειροστῶν τῆς ΑΤ τῶν κειμένων μεταξὺ δύω ὡρισμένων παραλλήλων ΑΞ, ΕΧ, ἰσοῦνται τῷ τῶν ὁμοίων μερῶν, τῶν ἀπειροστῶν τῆς ΑΖ, τῶν κειμένων μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων· καὶ γὰρ ἑκάτερος ἐμφαίνεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παραλλήλων ΒΘ, ΓΙ, ΔΤ, ΕΧ τῶν ἐντεταγμένων ἐκ τῆς ΑΞ ἕως αὐτῆς τῆς ΕΧ.

Ἐὰν οὖν ληφθῶσι τυχοῦσαι τρεῖς παράλληλοι ΑΞ, ΒΘ, ΕΧ, ἔσται ἡ ἀναλογία ΑΒ. ΑΘ :: ΑΕ : ΑΧ, εἴτ' οὖν ἓν ἀπειροστὸν μέρος τῆς ΑΖ πρὸς ἓν ἀπειροστὸν τῆς ΑΤ, ὡς τέσσαρα τῆς ΑΖ πρὸς τέσσαρα τῆς ΑΤ (Συμβ. λογ. 234)· ὡς δ' αὕτως ἔσται ΑΒ : ΑΘ :: ΒΕ : ΘΧ.

Ληφθέντων ἄρα δύω τινῶν παραλλήλων χωρίων, δύω εὐθεῖαι κείμεναι ἐν τῷ πρώτῳ ἀνάλογοί εἰσι δυσὶν εὐθείαις κειμέναις ἐν τῷ δευτέρῳ κατὰ κλίσιν ὁμοίαν ἐκείναις.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰστέον ἔτι, ὡς οὐδὲν τὸ κωλύον τὴν ἀναλογίαν, κἂν αἱ δύω πρότεραι, καὶ δὴ καὶ αἱ ὕστεραι, μὴ ὦσι μέρη τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ὥσπερ οὖν ἀνωτέρω ὑποτέθειται (γ΄.), ἀρκεῖ μόνον, ἵν' αἱ δεύτεραι ὁμοίως ταῖς πρώταις κεκλιμέναι ὦσιν ἐπὶ τῶν παραλλήλων· τοῦτο οὖν καὶ δὴ δεικτέον.

α΄. Ἔστωσαν γὰρ αἱ αβ, αθ τοσούτῳ κεκλιμέναι ἐπὶ τῶν παραλλήλων ακ, βθ, ὅσῳ αἱ ΑΒ, ΑΘ ἐπὶ τῶν ΑΞ, ΒΘ· οὐκοῦν ἡ γωνία $\beta = \mathrm{B}$, καὶ ἡ $\vartheta = \Theta$, καὶ ἡ $\alpha = \mathrm{A}$ (132).

Ἐπινοήσωμεν τοιγαροῦν τὴν αβ ἐπιτεθειμένην τῇ ΑΒ· ἐπεὶ δὲ ἡ γωνία $\alpha = \mathrm{A}$, ἡ πλευρὰ αθ πεσεῖται ἐπὶ τῆς ΑΘ· καὶ ἐπεὶ ἡ γωνία $\beta = \mathrm{B}$, ἡ βθ παράλληλος τῇ ΑΞα ἀναγκαίως πεσεῖται ἐπί τινος εὐθείας ὡρισμένης παραλλήλου τῇ ΑΞ, ἐπὶ τῆς ΒΘ φέρε, οὔσης αβ = ΑΒ· τὰ δύω ἄρα τρίγωνα αβϑ ΑΒΘ συγχυθήσονται· ϗ οὕτως αἱ αβ, αϑ ἀνάλογοι ἔσονται ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, αἷς ϗ αἱ ΑΒ, ΑΘ· ὅ ἐστιν, αβ : αϑ :: ΑΖ : ΑΤ, ἢ αβ : αϑ :: ΒΔ : ΘΤ, κτλ.

β΄ Ἔστωσαν δὲ ϗ τὰ μέρη βτ, ϑν τοσούτῳ κεκλιμένα ἐπὶ τῶν παραλλήλων βϑ, τν, ὅσῳ αἱ ΒΔ, ΘΤ μέρη τῆς ΑΖ, ϗ ΑΤ εἰσὶ κεκλιμέναι ἐπὶ τῶν ἑτέρων παραλλήλων· ἐπεὶ οὖν ἡ γωνία β = Β, ϗ ϑ = Θ, προεκβληθεῖσαι αἱ βτ, ϑν πέραν τῆς βϑ, συμπεσοῦνται ϗ συστήσουσι τὴν γωνίαν α = Α (*)· μετηνέχθω τοίνυν ἡ αβτ ἐπὶ τῆς ΑΒΖ, τῆς κορυφῆς α τῇ κορυφῇ Α ἐπιτεθείσης· ϗ δὴ αϑν πεσεῖται ἐπὶ ΑΘΤ· ϗ ἐπεὶ β = Β, ϗ βϑ παράλληλος τῇ τν, ϗ δὴ ϗ τῇ ακ, πεσεῖται ἀναγκαίως ἐπί τινος παραλλήλου τῇ ΑΞ τῶν ἐν τῷ ΑΖΤ, ἐπὶ τῆς ΒΘ φέρε, ἡ δ' ἑτέρα παράλληλος τν πεσεῖται ἐφ' ἑτέρας ὡρισμένης παραλλήλου τῆς ΔΤ τυχόν· τὸ τοίνυν χωρίον αβϑτν συγχυθήσεται τῷ ΑΒΘΔΤ, ϗ αἱ εὐθεῖαι βτ, ϑν ἔσονται ἀνάλογοι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, αἷς ϗ αἱ ΒΔ, ΘΤ· οὕτως οὖν ἔσται ΑΒ : ΑΘ :: βτ : ϑν ϗ ΒΑ ΘΤ :: βτ : ϑν, κτλ.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ. Ὅταν ἄρα δύω εὐθεῖαι κέωνται ἐν δυσὶ παραλλήλοις, ϗ δύω ἕτεραι ἐν δυσὶν ἑτέραις, ϗ ὁμοίως ὦσι κεκλιμέναι, αἱ δεύτεραι ἀεί εἰσιν ἀνάλογοι ταῖς προτέραις, εἴτε αἱ δεύτεραι περιέχονται ἐν τοῖς αὐ-

(*) *Τοῦτο δὲ γίνεται, ὅτι βτ ϗ ϑν τοσούτῳ κεκλιμέναι εἰσὶν ἐξ ὑποθέσεως, ὅσῳ ΒΔ ϗ ΘΤ.*

τοῖς χωρίοις, ἐν οἷς ᾗ αἱ πρῶται, εἴτε ᾗ μὴ, κἂν ὦσι μέρη τῶν αὐτῶν ὅλων, ὧν ᾗ ἐκεῖναι, κἂν μή· ἐν γένει ἄρα κτλ. Ο. Ε. Δ.

314. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ὅταν δύω εὐθεῖαι, ὑπὸ δύω παραλλήλων ἀπολαμβανόμεναι, τέμνωνται τρίτῃ παραλλήλῳ, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ δύω παραλλήλων μέρη εἰσὶν ἀνάλογα ταῖς ὅλαις εὐθείαις· ἐὰν, φέρε, ὑποτεθῶσι δύω εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ (σχ. 72.) κείμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΙΕ, ΒΓ, ᾗ τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης παραλλήλου τῆς ΖΘ, τὰ μέρη ΑΖ, ΑΘ εἰσὶν ἀνάλογα ταῖς ὅλαις ΑΒ, ΑΓ, εἴτ' οὖν ΑΖ : ΑΘ :: ΑΒ : ΑΓ· ᾗ γὰρ αἱ ΑΖ, ΑΘ κεῖνται ἐν παραλλήλῳ διαστήματι· ὡσαύτως ᾗ αἱ ΑΒ, ΑΓ· ᾗ αἱ πρῶται κεκλιμέναι εἰσὶν ὁμοίως ταῖς δευτέραις, μερη οὖσαι τούτων ἐκεῖναι.

315. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔστι καὶ ΖΒ : ΘΓ :: ΑΒ : ΑΓ.

316. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Ἐπεὶ δὲ αἱ ΑΖ, ΑΘ εἰσὶν ἐν παραλλήλῳ διαστήματι, ᾗ αἱ ΖΒ, ΘΓ ἐν ἑτέρῳ κατ' ἴσην κλίσιν, εἰσὶν ἄρα ᾗ τὰ μέρη αὐτῶν ἀνάλογα, εἴτ' οὖν ΑΖ : ΑΘ :: ΖΒ : ΘΓ.

317. ΣΧΟΛΙΟΝ Β΄. Ἀφ' ἑκάστης τῶν ἀναλογιῶν τῶνδε, ᾗ τῶν ὧν πέρι φθάσαντες εἰρήκαμεν, ποικίλαι ἀναφύονται ἐξισώσεις· ἐκ γὰρ ΑΖ : ΑΘ :: ΑΒ : ΑΓ πρόεισιν ἡ ἐξίσωσις ΑΓ × ΑΖ = ΑΒ × ΑΘ (311), ὅθεν

$$\text{ΑΓ} = \frac{\text{ΑΒ} \times \text{ΑΘ}}{\text{ΑΖ}}, \text{ ἢ } \text{ΑΖ} = \frac{\text{ΑΒ} \times \text{ΑΘ}}{\text{ΑΓ}},$$

κτλ. (Συμ. Λογισμ. 250), ᾗ οὕτως εὑρεῖν ἔστι τετάρτην εὐθεῖαν ἀνάλογον, τῶν δύω ἐν ἀριθμοῖς προαποδεδομένων.

318. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δύω ἄρα εὐθειῶν, γωνίαν περιεχουσῶν τυχοῦσαν τὴν Α, ἐὰν τὰ Β, Γ πέρατα ἐπιζευ-

ξη εὐθεῖα ἡ ΒΓ, ϗ αὐτῇ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΖΘ, ἔϛαι α΄. ΑΖ : ΑΘ :: ΑΒ : ΑΓ. β΄. ΑΖ : ΑΘ :: ΖΒ : ΘΓ. γ΄. ΖΒ : ΘΓ :: ΑΒ : ΑΓ· ἐὰν γὰρ διὰ τῆς κορυφῆς τῆς Α γωνίας ἀχθῇ τῇ ΖΘ ἡ ΙΕ παράλληλος, αἱ εὐθεῖαι εὑρεθήσονται ἐν δυσὶ παραλλήλοις διαϛήμασι (314).

319. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Τριῶν ἄρα εὐθειῶν δοθεισῶν τῶν Α, Β, Γ, (σχ. 74) τετάρτη ἀνάλογος προκύψει· α΄. ἀχθεισῶν τέρματος ἄνευ ὑπὸ γωνίαν τυχῦσαν τὴν Δ τῶν εὐθειῶν ΔΡ, ΔΠ. β΄. διὰ τῦ διαβήτυ μετενεχθείσης τῆς Α ἐπὶ τὴν ΔΡ, ὅθεν γίνεται ΔΕ, τῆς δὲ Β ἐπὶ τῆς ΔΠ, ὅθεν ΔΖ, ϗ ἐπιζευχθείσης τῆς ΕΖ· γ΄. μετενεχθείσης τῆς τρίτης Γ ἐπὶ τῆς ΔΡ ἐκ τῦ Ε, ὅθεν ἔϛαι ΕΡ· δ΄. ἀχθείσης τῆς ΡΣ παραλλήλως τῇ ΕΖ· ἡ ὖν ΖΣ ἔϛαι ἡ ζητυμένη τετάρτη ἀνάλογος· ϗ γάρ ἐϛι ΔΕ : ΔΖ :: ΕΡ : ΖΣ (318).

320. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐὰν δύω εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, (σχ. 72.), συνιϛῶσαι γωνίαν τὴν Α, πίπτωσιν ἐπ᾽ ἄλλην τὴν ΒΓ, ϗ δύω ἄλλαι (σχ. 73) συνιϛῶσαι γωνίαν τὴν α = Α κλίνωνται ἐπ᾽ ἄλλης, ὡς αἱ πρότεραι, τῆς ΒΓ, ἔϛαι ΑΒ : ΑΓ :: αβ : αγ· ἀχθεισῶν γὰρ διὰ Α, α παραλλήλων ταῖς ΒΓ, βγ, εὑρεθήσονται ἐν παραλλήλοις διαϛήμασιν αἱ εὐθεῖαι, καὶ δὴ καὶ κατ᾽ ἴσην κλίσιν ἐξ ὑποθέσεως (313).