ΑΔΠ, δχΘ εἰσὶν ὅμοια· προεκβληθείσης γὰρ ἑκατέρωθεν τῆς χΘ πλευρᾶς τῦ ἐλάττονος τριγώνȣ ἐς τὰς δύω πλευρὰς τῦ μείζονος, ἡ ὑπὸ ΘοΠ γωνία ἴση ἐςὶ τῇ ὑπὸ Θχδ (132), ἀλλὰ ϗ ο=Α (αὐτόθ.) ἄρα ἡ τῦ ἐλάττονος γωνία χ=Α γωνίᾳ τῦ μείζονος· διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον ϗ ἡ Θ γωνία τῦ ἐλάττονος ἴση τῇ Δ γωνίᾳ τῦ μείζονος. Τὸ ἔλαττον ἄρα τρίγωνον χδΘ, ἔχον δύω γωνίας ἴσας δυσὶ γωνίαις τῦ μείζονος ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ὅμοιον αὐτῷ ἔςαι (218).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Δύω τρίγωνα, ὧν ἀλλήλαις αἱ πλευραὶ κάθετοι ἐφεςήκασιν, ἔςιν ὅμοια· ἔςωσαν γὰρ τριγώνȣ τῦ ΘΖΜ (σχ. Α. 49) αἱ πλευραὶ κάθετοι ταῖς τῦ ΑΒΓ, ϗ περιήχθω περὶ τὸ σημεῖον Θ τὸ τρίγωνον ΖΘΜ, μέχρις ἂν ἡ ΘΖ εὐθεῖα κυκλικὸν καταγράψῃ τεταρτημόριον· δῆλον ȣ̃ν ὅτι ἡ μὲν τῇ ΑΓ κάθετος ΖΘ παράλληλος ἔςαι τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΘΜ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΒΓ, τῦτ᾽ ἔςιν αἱ θατέρȣ τριγώνȣ πλευραὶ ταῖς θατέρȣ παράλληλοι ἔσονται ἑκάςη ἑκάςῃ, ϗ δὴ τὰ τρίγωνα ὅμοια (ἀνωτ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ ἴσων τριγώνων.

221. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύω τρίγωνα ΑΠΔ, χπδ ἴσα (σχ. 45) ἔσονται, ἑνὸς δοθέντος τῶν τριῶν· ά. ἐὰν τὰ δύω τρίγωνα μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχωσι, ϗ δύω γωνίας δυσὶ γωνίαις ταῖς πρὸς ταύτῃ τῇ πλευρᾷ ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· β΄. ἐὰν δύω πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσας ἔχωσι, ἔχωσιδὲ ἴσην ϗ τὴν

ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν· γ΄. ἐὰν τὰς τρεῖς πλευρὰς ταῖς τρισὶ πλευραῖς ἑκάστην ἑκάστῃ ἴσας ἔχωσι.

α΄. Ἔστω ΔΑ = δχ, ϗ Δ = δ, ϗ Α = χ· φημὶ δὴ, ὅτι τὰ τρίγωνα εἰσὶν ἴσα· ἐπινενοήσθω γὰρ ἡ δχ ἐπιτεθειμένη τῇ ἴσῃ ΔΑ, τοῦ μὲν δ πίπτοντος ἐπὶ τὸ Δ, τοῦ δὲ χ ἐπὶ τὸ Α· ἐπεὶ δὲ ἐστι δ = Δ, ϗ χ = Α, ἐὰν ἐπινοηθῇ ϗ ὅλον τὸ τρίγωνον δπχ ἐπιτεθειμένον· ὅλῳ τῷ τριγώνῳ ΔΠΑ, ἡ μὲν πχ πλευρὰ ἐφαρμόσει τῇ ΠΑ πλευρᾷ, ἡ δὲ πδ ἐφαρμόσει τῇ ΠΔ. Τὸ ἄρα χπδ τρίγωνον ἀπολύτως συνενωθήσεται τῷ ΔΠΑ. Τριγώνῳ, καὶ ὡς ἓν αὐτῷ ἐκλογιοθήσεται, τουτέστιν ἔσεται αὐτῷ ἴσον.

β΄. Ἔστω ΔΑ = δχ, ϗ ΠΑ = πχ, ϗ Α = χ· φημὶ δὴ ὡς ἴσα ἔσονται τὰ τρίγωνα· ἐπινενοήσθω γὰρ αὖθις ἡ δχ ἐπικειμένη τῇ ΔΑ, ϗ, ἐπεὶ Α = χ, ϗ πχ = τῇ ΠΑ, ἡ δχ ἀκριβῶς ἐφαρμόσει τῇ ΔΑ, ὡς αὐτῇ ἴσῃ, ϗ ἡ πχ τῇ ΠΑ· οὐκοῦν τὸ μὲν δ σημεῖον συμπεσεῖται τῷ Δ, τὸ δὲ σημεῖον π τῷ Π, κἀκ τούτου ϗ ἡ πδ πλευρὰ συμπεσεῖται τῇ ΠΔ, ϗ ἀκριβῶς αὐτῇ ἐφαρμοσθήσεται· ϗ δὴ αὖθις τὰ τρίγωνα ἓν γεγονότα, ἴσα ἔσονται.

γ΄. Ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραὶ ταῖς τρισὶ πλευραῖς ἑκάστῃ ἑκάστῃ ἴσαι ὦσι, ϗ οὕτω τὰ τρίγωνα ἴσα ἔσονται· ϗ γὰρ τῆς πχ πλευρᾶς ἴσης οὔσης τῇ ΠΑ, ϗ τῆς δχ τῇ ἀντιστοίχῳ αὐτῇ ΔΑ, ἡ δπ οὐκ ἂν εἴη ἴση τῇ ἀντιστοίχῳ ΔΠ, εἰ μὴ εἴη ἡ χ γωνία, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ δπ, ἴση τῇ Α, ὑφ᾽ ἣν ὑποτείνει ἡ ΔΠ (204)· ἐπεὶ τοίνυν ἐστὶ πχ = ΠΑ, ϗ δχ = ΔΑ, ϗ χ = Α, τὰ τρίγωνα ἴσα ἐστὶ (221 β΄.).

222. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἵνα κατασκευασθῇ τρίγωνον

ἴσον τριγώνῳ δοθέντι τῷ ΔΠΑ, οὗτινος γινώσκεται μία πλευρὰ ἡ ΑΠ, καὶ αἱ πρὸς αὐτῇ γωνίαι Α, Π, ἤχθω εὐθεῖα ἡ πχ ἴση τῇ δεδομένῃ πλευρᾷ ΑΠ, καὶ ἐκ τοῦ πέρατος αὐτῆς χ ὑπὸ γωνίαν ἴσην τῇ Α ἤχθω ἀδιόριςος ἡ χδ, ἐκ δὲ τοῦ π ὑπὸ γωνίαν π = Π ὡσαύτως ἡ πδ· αὗται οὖν αἱ εὐθεῖαι δχ, δπ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ δ, ποιοῦσι τὸ ἐπιταχθὲν τρίγωνον πδχ ἴσον τῷ δοθέντι ΠΔΑ (221. α'.)

223. Ἐγνωσμένων δὲ δύο πλευρῶν τῶν ΠΑ, ΠΔ, καὶ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας Π, συνεςάσθω γωνία ἡ π = Π (85) καὶ ἤχθω πδ = ΠΔ, καὶ πχ = ΠΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εὐθεῖα δχ· τὸ οὖν πδχ τρίγωνον, οὕτω συγκροτηθὲν, ἴσον ἔςαι τῷ ΠΔΑ τριγώνῳ (αὐτ.)

224. Ἐγνωσμένων δὲ δύο πλευρῶν τῶν ΠΑ, ΠΔ, καὶ γωνίας τῆς Α, ὑφ' ἣν ὑποτείνει μία τις τῶνδε τῶν πλευρῶν α'. ἤχθω εὐθεῖα ἡ πχ ἴση τῇ ΠΑ, καὶ ἐκ τοῦ πέρατος χ τέρματος ἄτερ ὑψούσθω ἡ δχ ὑπὸ γωνίαν χ = Α· β'. διὰ τοῦ διαβήτου εἰλήφθω τὸ μῆκος τῆς ἑτέρας τῶν δοθεισῶν πλευρῶν ΠΔ, καὶ ἐκ τοῦ π ἐπὶ τῆς ἀδιορίςου εὐθείας σημειούσθω ἡ πδ ἴση τῇ ΠΔ· ἡ οὖν ἐπιζευχθεῖσα δπ μετὰ τῶν ἄλλων δύο εὐθειῶν δχ, πχ συγκροτήσουσι τρίγωνον τὸ πδχ ἴσον τῷ ΠΔΑ· αἱ γὰρ κατὰ τὴν κατασκευὴν ἴσαι πλευραὶ ΠΔ, πδ ὑποτείνουσιν ἑκατέρα ὑπὸ γωνίας ἴσας τὰς Α, χ· ἐπεὶ δέ εἰσιν ἐκ κατασκευῆς καὶ αἱ ΠΑ, πχ ἴσαι, αἱ Δ, δ γωνίαι, ὑφ' ἃς ὑποτείνουσιν αἱ ἴσαι πλευραὶ, εἰσὶν ἴσαι· ἔςαι ἄρα καὶ Π = π· ἐπεὶ τοίνυν τῶν δυοῖν τριγώνων ΠΔΑ, πδχ, ἔςι ΠΔ = πδ, καὶ ΠΑ = πχ, καὶ Π = π γωνίαι δηλονότι ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχόμεναι, τὰ τρίγωνα εἰσὶν ἴσα (αὐτόθ.).

225. Δοθεισῶν δύο πλευρῶν τῶν ΠΑ, Πδ, (σχ. 50)

ϗ μιᾶς γωνίας τῆς Α τῆς μίαν τῶν πλευρῶν τῶν δε, ὑποτεινέσης, τεθείσθω εἷς τῶν τȣ̃ διαβήτȣ ποδῶν ἐπὶ τὸ Π, ϗ διαςήματι ἴσῳ θατέρᾳ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν Πδ μετήχθω ἅτερος πȣ̃ς τȣ̃ διαβήτȣ, εἴτε ἐπὶ τὸ ο, εἴτε ἐπὶ τὸ δ σημεῖον τῆς ἀδιορίςȣ Αδ, ϗ ἐπεζεύχθω ἤτοι ἡ Πο· ὅθεν γενήσεται τὸ ΑΠο τρίγωνον· ἢ ἡ Πδ· ὅθεν ἔςαι τὸ ΠΑδ τρίγωνον, ὡς ἂν ᾖ βȣλομένοις τὴν ο γωνίαν, ἢ δ, ἀμβλεῖαν εἶναι, ἢ ὀξεῖαν.

226. Τέλος δὲ, ἐὰν δοθῶσιν αἱ τρεῖς πλευραὶ ΠΔ, ΠΑ, ΔΑ (σχ. 51), εἰς κατασκευὴν τριγώνȣ· α΄. ἤχθω εὐθεῖα ἡ ΔΑ ἴση μιᾷ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν, ϗ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαςήματι δὲ τῷ ΔΠ ἴσῳ μιᾷ τινι τῶν λοιπῶν δοθεισῶν πλευρῶν, γεγράφθω τόξον τὸ Ζχ· β΄. κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαςήματι δὲ τῷ ΑΠ, ἴσῳ τῇ τρίτῃ τῶν δοθεισῶν πλευρῶν, γεγράφθω τόξον τὸ οΠΗ· γ΄. ἐκ τȣ̃ σημείȣ, καθ᾽ ὃ διατέμνȣσιν ἄλληλα τὰ τόξα, ἐπεζεύχθων δύω εὐθεῖαι αἱ ΠΔ, ΠΑ· ϗ δὴ γενήσεται τὸ ΠΔΑ τρίγωνον ἴσον τῷ ἐπιταχθέντι· τῶν γὰρ τριῶν πλευρῶν τȣ̃ ΠΔΑ τριγώνȣ ἴσων ȣ̓σῶν (ἐκ κατασκευῆς) ταῖς συςοιχȣ́σαις πλευραῖς τȣ̃ ἐπιταχθέντος τριγώνȣ, τὸ γινόμενον ϗ τὸ δοθὲν ἴσα ἔσονται (221. γ΄.).

227. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐντεῦθεν ἄρα πρόδηλον, ὡς εἰς κατασκευὴν τριγώνȣ ἰσοπλεύρȣ τȣ̃ ΠΓΑ (σχ. 44), ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΠΑ, ἀρκέσει κέντροις τοῖς Α, Π, διαςήματι δὲ τῷ αὐτῷ ΑΠ γεγράφθαι τόξα δύω τὰ ΑΓΔ, ΠΓΗ, ϗ ἐπεζεῦχθαι τὰς εὐθείας ΠΓ, ΑΓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ τετραπλεύρων.

228. Ἐὰν τὸ τετράπλευρον μηδόλως ἔχῃ πλευρὰς παραλλήλους, καλεῖται Τραπεζοειδὲς (σχ. 52)· ἐὰν δὲ ἔχῃ δύω παραλλήλους, Τραπέζιον (σχ. 53), ἐὰν δὲ πάσας σὺν δύω λαμβανομένας, γενικῷ ὀνόματι καλεῖται Παραλληλόγραμμον (σχ. 54, 55, 56, 57).

229. Παραλληλόγραμμον (σχ. 54), οὗ πᾶσαι αἱ γωνίαι εἰσὶν ὀρθαὶ, καλεῖται ὀρθογώνιον· περὶ οὗ ἰστέον, ὡς τοῦτο μὲν ἁπλῶς ὀρθογώνιον ὀνομάζεται, τὸ δὲ ὀρθὴν γωνίαν ἔχον τρίγωνον μετὰ προσθήκης τοῦ οὐσιαστικοῦ, λέγεται τρίγωνον ὀρθογώνιον.

230. Τὸ ὀρθογώνιον, ὅ ἐστι τὸ ἐν ὀρθαῖς γωνίαις παραλληλόγραμμον, διαιρεῖται εἰς τετράγωνον, καὶ εἰς ὀρθογώνιον ἐπίμηκες· καὶ τὸ μὲν τετράγωνον ἐστι παραλληλόγραμμον (σχ. 54), οὗ αἵτε γωνίαι πᾶσαι ὀρθαὶ, καὶ αἱ πλευραὶ ἴσαι· τὸ δ' ἐπίμηκες ὀρθογώνιον ἐστι παραλληλόγραμμον, οὗ πᾶσαι αἱ γωνίαι ὀρθαὶ (σχ. 55), αἱ δ' ἀπ' ἐναντίον πλευραὶ μόνον ἴσαι.

231. Τὸ παραλληλόγραμμον διαιρεῖται εἰς ὀρθογώνιον, περὶ οὗ ἄρτι εἰρήκαμεν, καὶ εἰς πλαγιογώνιον, οὗ ἀμέλειτοι αἱ γωνίαι ἄνισοι, ὡς τὰς μὲν δύω εἶναι ἀμβλείας, τὰς δὲ δύω ὀξείας (σχ. 56, 57)· τὸ δὲ πλαγιογώνιον ὑποδιαιρεῖται εἰς Ῥόμβον, καὶ Ῥομβοειδές· καὶ ῥόμβος μὲν ἐστι παραλληλόγραμμον, ἐν μὲν γω-

νιῶν ἀνίσων ἐκ δὲ πλευρῶν ἴσων συνιςάμενον (σχ. 56). Ῥομβοειδὲς δὲ, ἧ αἵτε γωνίαι καὶ πλευραὶ ἄνισοι (σχ. 57).

232. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν μὲν τοῖς τριγώνοις δέδεικται, ὡς, τῶν γωνιῶν ἴσων ἐσῶν, καὶ αἱ ἀντίςοιχοι πλευραὶ ἴσαι ἔσονται, καὶ ἀντιςρόφως· ἀλλ᾽ ἐκ μόνης τῆς τῶν προεκτεθέντων σχημάτων ἐποπτείας, ὡς ἐ ταὐτὸν κρατεῖ κἀπὶ τῶν τετραπλεύρων, συνιδεῖν ἑκάςῳ καταφανές.

233. Τὸ τῦ παραλληλογράμμυ ὕψος, κάθετος ἐμφαίνει ἡ ΗΟ (σχ. 57), ἡ ἐκ μιᾶς ἐπὶ τὴν ἀντίθετον ἀγομένη πλευράν.

234. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ τῦ τριγώνυ ὕψος, ὅπερ ἐςιν, ἴσῦσι (196)· ἤδη δὲ καὶ τὸ τῦ παραλληλογράμμυ ὁρισαμένοις, ἐν γένει νῦν ὁριςέον τὸ παντὸς σχήματος, ἢ ἐπιφανείας, ὕψος εἶναι ἀεὶ εὐθεῖαν κάθετον καταγομένην μιᾷ τινι τῶν τῦ σχήματος πλευρῶν βάσεως δίκην ἐκληφθείσῃ· τύτων τεθέντων φαμέν.

Ἐπιφάνεια πᾶσα περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύω εὐθειῶν, ὧν ἡ μέν ἐςι βάσις, ἡ δὲ ὕψος τῆς ἐπιφανείας, ἢ σαφέςερον εἰπεῖν, γίνεται πολλαπλασιασμῷ τῦ πλάτυς ἐπὶ τὸ μῆκος· εὐθείας μέντοι ληφθείσης ἐν ἐπιφανείᾳ ὡς μήκυς, ἢ βάσεως, καὶ ὡς ἀριθμῦ πολλαπλασιαςέυ, ἐ δεῖ τιθέναι εἰς πλάτος, ἢ ὕψος, καὶ δὴ εἰς πολλαπλασιαςὴν, πλαγίαν εὐθεῖαν· ἐν μὲν γὰρ τῷ τριγώνῳ ἡ ἐκ κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν, ἐν δὲ τῷ παραλληλογράμμῳ ἡ ἀπὸ πλευρᾶς ἐφ᾽ ἑτέραν κάθετος ἐςι μία (115, 127)· ἡ μέντοι πλαγία ἐπ᾽ ἄπειρον ποικίλλεσθαι δύναται (119)· ἔνθεντοι ἀχρηςεῖ πρὸς ἐπιφανείας ἐκμέτρησιν.

235. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ὁρισαμένοις ἦν ἅπαξ (225) τὸ παραλληλόγραμμον δεῖξαι δυνατὸν ἐπὶ δύω ἀντιθέτων πλευρῶν, εἰς τὰς ἄλλας δύω ὥσπερ ἐμπιπτυσῶν,

πάνθ᾽ ὅσα δέδεικται ἐπ᾽ εὐθείας εἰς δύω ἐμπιπτέσης παραλλήλες· ἀμέλειτοι δύω ἐντὸς ϗ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κείμεναι γωνίαι αἱ Α, Ι ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς, ὡς ἔσαι δύω ἐπὶ τὰ αὐτὰ γωνίαι τῆς εἰς τὰς ΑΒ, ΙΠ παραλλήλες ἐμπιπτέσης εὐθείας ΑΙ· ἄρα ἀδιαφόρως ἔσονται Α + Β, ἢ Β + Π, ἢ Ι + Α ἴσαι δυσὶν ὀρθαῖς· ἐντεῦθεν ἄρα α΄. αἱ τέσσαρες συζυγίαι Α + Β, Β + Π, Π + Ι, Ι + Α εἰσὶν ἰσάλληλοι· β΄. αἱ παντὸς παραλληλογράμμε τέσσαρες γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι· γ΄. δύω γωνιῶν τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παρακειμένων ἡ ἑτέρα τῆς ἑτέρας ἔςι παραπλήρωμα· δ΄. δύω γωνίαι κατὰ διαγώνιον ἀντίθετοι εἰσὶν ἴσαι· φέρ᾽ εἰπεῖν Α = Π· ϗ γὰρ Α + Β = 180°· ἀλλὰ ϗ Β + Π = 180°· ἄρα Α = Π· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔςι ϗ Β = Ι· ε΄. μιᾶς τῶν τεσσάρων ὀρθῆς ἔσης, ϗ τῶν τριῶν ἑκάςη ὀρθὴ ἔσεται· ς΄. μιᾶς τῶν ἐν παραλληλογράμμῳ γωνιῶν ἐγνωσμένης, ϗ ἑκάςη τῶν ἄλλων τριῶν εὐχερῶς γνωσθήσεται· ἐὰν γὰρ ᾖ φέρε Β = 100° ἔςαι ϗ Ι = 100°· ἡ δὲ γωνία Π = 180° — 100° = 80°· ἄρα Π = 80° ϗ Α = 80°.

Ἀνάπαλιν δὲ τὸ τετράπλευρον παραλληλόγραμμον ἔςαι, ἐὰν αἱ κατὰ διαγώνιον ἀντίθετοι γωνίαι ἴσαι ὦσιν, εἴτ᾽ ἒν Α = Π, ϗ Β = Ι.

236. ΘΕΩΡΗΜΑ. Παντὸς παραλληλογράμμε αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ εἰσὶν ἴσαι.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐν παντὸς εἴδες παραλληλογράμμῳ (σχ. 54, 55, 56, 57) δύω ἀντίθετοι πλευραὶ εἰσὶ δύω παράλληλοι ἀπολαμβανόμεναι ὑπὸ δυεῖν ἑτέρων παραλλήλων ΑΙ, ϗ ΒΠ (σχ. 57), εἰσὶ δύω παράλληλοι ὑπὸ δυεῖν ἄλλων παραλλήλων τῶν ΑΒ, ΙΠ περιεχόμεναι· ὡσαύτως ΑΒ ϗ ΙΠ εἰσὶ δύω παράλληλοι μεταξὺ δύω παραλλήλων τῶν ΑΙ, ΒΠ κείμεναι· αἱ δὲ ὅτως ἔχεσαι, ἴσαι εἰσὶν (127) Ο. Ε. Δ.

237. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἡ διαγώνιος ΑΠ (σχ. 57) ἅπαν παραλληλόγραμμον εἰς δύω ἴσα τρίγωνα διαιρεῖ τὰ ΑΙΠ, ΑΒΠ· τὰ γὰρ τρίγωνα ταῦτα ἔχεσι μίαν πλευρὰν κοινὴν τὴν ΑΠ διαγώνιον· ἐςι δὲ ϗ ΑΙ=ΒΠ (236)· ὡσαύτως ϗ ΙΠ = ΑΒ· ἐκεῖν τὰς ἀντισοίχες πλευρὰς ἴσας ἔχεσιν· ἄρα εἰσὶν ἴσαι (221. γ΄.).

238. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ ἄρα διαγώνιος ἅπαν τετράγωνον ϗ πάντα ῥόμβον εἰς δύω τρίγωνα ἴσα ϗ ἰσοσκελῆ διαιρεῖ (σχ. 54, 56)· ἅπαν δὲ ὀρθογώνιον, ἢ ῥομβοειδὲς, εἰς δύω ἴσα ϗ σκαληνὰ (σχ. 55, 57).

239. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Τἀνάπαλιν δὲ, ἐὰν τετραπλεύρε αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ ἴσαι ὦσιν, ὡς αἱ ΑΙ, ΒΠ, παραλληλόγραμμόν ἐςι τὸ τετράπλευρον (σχ. 57)· ἀχθείσης γὰρ τῆς διαγωνίε ΑΠ παρὰ τὴν ΑΠ κοινὴν πλευρὰν εἰσὶ τῶν τριγώνων ΑΙΠ, ΑΒΠ, αἱ πλευραὶ ΙΠ, ΑΒ, ϗ ΑΙ, ΒΠ, ἐξ ὑποθέσεως ἴσαι· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΙΠ ἐςιν ἴσον τῷ ΑΒΠ τριγώνῳ (221. γ΄.)· ἀλλ' ἐν τοῖς δυσὶν ἴσοις τριγώνοις ΑΙΠ, ΑΒΠ αἱ δύω ἀντίςοιχοι γωνίαι ΙΑΠ, ΒΠΑ, ὑπὸ ἴσων πλευρῶν ὑποτεινόμεναι, εἰσὶν ἴσαι (204)· ἄρα ἡ ὑπὸ ΙΑΠ γωνία, ἡ συνιςαμένη ἐπὶ τῆς ΑΙ εὐθείας διὰ τῆς ΑΠ, ἴση ἐςὶ τῇ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίᾳ ΒΠΑ, ἥτις συνίςαται ἐπὶ τῆς ΒΠ ὑπὸ τῆς τρίτης εὐθείας ΑΠ· ἄρα αἱ, ἐφ' ἃς ἐμπίπτει ἡ ΑΠ, εὐθεῖαι ΑΙ, ΒΠ εἰσὶ παράλληλοι (137)· ὡσαύτως αἱ δύω ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΒΑΠ, ΙΠΑ, συνιςάμεναι ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΙΠ, ΑΒ διὰ τῆς εἰς αὐτὰς ἐμπιπτέσης ΑΠ, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἴσαι ἔσαι, τὰς δύω εὐθείας ΑΒ, ΙΠ παραλλήλες ἐλέγχεσιν· ἄρα τετράπλευρον τὸ ΑΙΒΠ, ἔχον

πάσας τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἴσας, ἔςι παρὰ τῦτο παραλληλόγραμμον.

240. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Δυνατὸν ἄρα μαθεῖν, εἰ τὸ τετράπλευρον ἔςι παραλληλόγραμμον, ἐπισκοπῦσιν εἰ ἄρα ἴσαι εἶεν αὐτῦ αἱ ἀπεναντίον πλευραί.

241. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀείποτε μονονὲ ζητεῖται ἔντε τῇ Φυσικῇ κἀν τῇ Μηχανικῇ ἐπὶ δύω δοθεισῶν πλευρῶν ὑπὸ γωνίαν ϗ αὐτὴν δεδομένην παραλληλόγραμμον κατασκευάζειν· ἐκ δὴ τῶν ἤδη εἰρημένων, ὅπως τὸ τοιῦτο χρὴ κατασκευάζειν παραλληλόγραμμον, αὐτίκα ἐποίσομεν.

242. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἐπὶ ὖν τῶν προσκεκλιμένων πλευρῶν ΔΑ, ΑΖ (σχ. 56) ὑπὸ γωνίαν, ἣν αὗται περιέχυσι, τὴν Α κατασκευάζεται ὕτω παραλληλόγραμμον· α΄. συνήφθωσαν αἱ ΑΔ, ΑΖ, κατὰ τὸ Α ὑπὸ γωνίαν τὴν δεδομένην Α (84)· β΄. κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαςήματι δὲ τῷ ΑΖ, γεγράφθω τόξον τὸ ΜΝ· ϗ κέντρῳ αὖ τῷ Ζ, διαςήματι δὲ τῷ ΑΔ (τιθεμένων ἀνίσων τῶν δοθεισῶν πλευρῶν) γεγράφθω τόξον τὸ ορ· πρὸς δὲ τὸ τῆς διατομῆς σημεῖον Π ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΔΠ, ΖΠ, ὧν ἡ μὲν ἔςαι ἴση ἐκ τέτυ τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ ΑΖ, ἡ δ' ἑτέρα τῇ ΑΔ· τὸ ἄρα ὕτω γραφὲν τετράπλευρον ἔχει τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς ἴσας, εἴτ' ὖν ΑΖ = ΔΠ, ϗ ΑΔ = ΖΠ· ἄρα ἔςι παραλληλόγραμμον.

243. Ὅπως ἄρα τετράγωνον καταγραφείη (σχ. 54) ἐπὶ πλευρᾶς δοθείσης τῆς ΑΒ κατάδηλον· ἠγέρθω γὰρ ΒΓ = ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ, ϗ κέντροις μὲν τοῖς Α, Γ, διαςήματι δὲ τῷ αὐτῷ ΑΒ, γεγράφθωσαν τόξα τὰ ΘΗ, ΖΜ, ϗ ἐκ τῦ τῆς διατομῆς σημείυ Δ ἐπεζεύχθων αἱ πλευραὶ ΑΔ, ΔΓ.

244. ΠΟΡΙΣΜΑ. ς΄. Παντὸς παραλληλογράμ-

μ8 αἱ δύω διαγώνιοι ΔΠ, ΑΖ (σχ. 55) τέμνονται ὑπ᾽ ἀλλήλων δίχα κατὰ τὸ τῆς κοινῆς διατομῆς σημεῖον Κ· ἔςι γὰρ ΚΠΑ = ΚΔΖ, ϗ ΚΖΔ = ΚΑΠ (134)· δύω ἄρα τρίγωνα τὰ ΚΔΖ, ΚΠΑ, ἔχοντα μίαν πλευρὰν ἴσην, εἴτ᾽ ἂν ΔΖ = ΑΠ, ϗ δύω γωνίας τὰς πρὸς ταῖς ἴσαις πλευραῖς ἴσας, εἰσὶν ἴσα (221)· ἄρα ἡ ΔΚ πλευρὰ τῦ ΚΔΖ τριγώνυ ἴση ἐςὶ τῇ ἀντιςοίχῳ πλευρᾷ ΚΠ τῦ ΚΑΠ τριγώνυ· ἄρα ἡ ΔΠ διαγώνιος δίχα τέτμηται κατὰ τὸ τῆς κοινῆς διατομῆς σημεῖον Κ· ὡσαύτως δὲ δειχθήσεται ὅτι ἔςι ϗ ΑΚ = ΚΖ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ πολυγώνων ἐν γένει.

245. Σχῆμα κανονικὸν ἀκύει (σχ. 44, 54), ὗ πᾶσαι μὲν αἱ γωνίαι, πᾶσαι δὲ αἱ πλευραὶ, ἰσάλληλαί εἰσι· τὸ ἄρα ἀκανόνιςον ἢ γωνιῶν ἢ πλευρῶν ἀνισότητι γίνεται· ἐντεῦθεν ἄρα α΄. πάντων μὲν τῶν τριγώνων τὸ ἰσόπλευρον, πάντων δὲ τῶν τετραπλεύρων τὸ τετράγωνον, μόνα ἐςὶ κανονικά· β΄. τύτων τῶν δυοῖν τῆς τῶν γωνιῶν ἀμέλει ἰσότητος, ϗ τῆς τῶν πλευρῶν, ἑνὸς δοθέντος ἐν τῷ τριγώνῳ, θάτερον ἐξ ἀνάγκης ἕπεται (205)· ἐπίσης ἄρα ἔνεςιν ὁρίσασθαι τὸ κανονικὸν τρίγωνον, εἴτε ὗ αἱ γωνίαι, εἴτε ὗ αἱ πλευραὶ, εἴτε τέλος ὗ αἵτε γωνίαι ϗ αἱ πλευραὶ, εἰσὶν ἰσάλληλοι· ἀλλ᾽ ὔπω ταὐτὸν κἀπὶ τῶν ἄλλων σχημάτων κρατεῖ· ὐ γὰρ τῆς τῶν γωνιῶν ἰσότητος ἐπὶ τύτων ἔχεται ϗ ἡ τῶν πλευρῶν, ὐδ᾽ ἀνάπαλιν (232)· ἐνεῖναι ἄρα ἀνάγκη τῷ τῶν ἄλλων κανονικῶν σχημάτων ὁρισμῷ ἑκάτερον τύτων τῶν γνωρισμάτων.

246. Σχῆμα ἐγγεγραμμένον μὲν κύκλῳ λέγεται, ὅταν κύκλος διήκῃ διὰ τῶν κορυφῶν ἁπασῶν τῶν ἐν αὐτῷ γωνιῶν (σχ. 58, 59)· περιγεγραμμένον δὲ, ὅταν ἡ κυκλικὴ περιφέρεια διέρχηται διὰ πάντων τῶν μεσαιτάτων σημείων τῶν ἐν αὐτῷ πλευρῶν (σχ. 61).

247. Ἀκτὶς πλαγία μὲν καλεῖται εὐθεῖα ἡ ΠΟ, ἡ ἐκ τῦ κατὰ τὸ πολύγωνον μέσυ Ο (σχ. 59) ἐπὶ μίαν τῶν γωνιῶν Π καθειμένη· ὀρθία δὲ, κάθετος ἡ ΖΟ, ἐπιζευγνυμένη ἐκ τῦ κατὰ τὸ πολύγωνον μέσυ Ο ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν ΠΔ.

248. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἅπαν κανονικὸν πολύγωνον κύκλῳ ἐγγραφῆναι δύναται.

ΔΕΙΞΙΣ. α΄. Ἐὰν πολυγώνυ κανονικῦ (σχ. 59) ἑκάςη πασῶν τῶν γωνιῶν Π, Δ, Ο, κτλ. διχα τμηθῇ διὰ τῶν εὐθειῶν ΠΟ, ΔΟ, κτλ., αἱ καιναὶ γωνίαι ὑπὸ ΟΠΔ, ΟΔΘ, ὡς ἴσων γωνιῶν ἡμίσειαι, ἴσαι ἔσονται· πάντα δὲ τὰ τρίγωνα ΠΟΔ, ΔΟΘ, κτλ. ὧν δύω γωνίαι ἴσαι, ἰσοσκελῆ εἰσιν· ἐπεὶ δὲ ἴσαι εἰσὶν ἐν τῷ πολυγώνῳ αἱ πλευραὶ ΠΔ, ΔΘ, κτλ. αἱ πρὸς ταῖς δε ταῖς γωνίαις, τὰ τρίγωνα ταῦται ἰσάλληλα ἔσωται (221)· ἐπεὶ ὖν ἐκ τύτυ ἐςι ΠΟ = ΔΟ = ΘΟ, κτλ.· ἐὰν κέντρῳ μὲν τῷ Ο, διαςήματι δὲ τῷ ΠΟ, κύκλος γραφῇ, διελεύσεται διὰ πάντων τῶν περάτων Π, Δ, κτλ. τύτων τῶν εὐθειῶν, καὶ δὴ διὰ πασῶν τῶν κορυφῶν τῶν τῦ πολυγώνυ γωνιῶν· ἄρα ἐγγραφήσεται τὸ κανονικὸν πολύγωνον τῷ κύκλῳ. Ο. Ε. Δ.

249. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Παντὸς κανονικῦ πολυγώνυ θεωρυμένυ, ὡς εἰ κύκλῳ ἐγγέγραπτο, ἑκάςη τῶν ἐν αὐτῷ πλευρῶν ἀποβήσεται χορδὴ τόξυ ἴσυ 360° μοίραις, διαιρεθείσαις διὰ τῦ τῶν πλευρῶν ἀριθμῦ· τῦ πενταγώνυ φέρε

(σχ. 58) ἡ AB πλευρὰ, καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων, γίνεται χορδὴ τόξου τοῦ ATB, ὅ ἐστι πεμπτημόριον τῆς περιφερείας, ἢ $\frac{360°}{5}$· τοῦ δ' ἑξαγώνου (σχ. 59) ἡ πλευρὰ ΠΔ χορδή ἐστι τόξου $\frac{360°}{6}$ τῆς περιφερείας, καὶ ἑξῆς ὡσαύτως. Διαιροῦντες οὖν τὴν περιφέρειαν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ σχήματος, εὑρήσομεν τὸ τόξον, τὸ ὑποτεῖνον ἑκάστην αὐτοῦ πλευράν· καὶ δὴ α΄. τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐστὶ $\frac{360°}{3} = 120°$· β΄. τοῦ τετραγώνου $\frac{360°}{4} = 90°$· γ΄. τοῦ πενταγώνου $\frac{360°}{5} = 72°$· δ΄. τοῦ ἑξαγώνου $\frac{360°}{6} = 60°$, ὡσαύτως δὲ καὶ τῶν ἄλλων κανονικῶν σχημάτων, ὧν ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἄνευ λειψάνου διέλοι ἂν τὸν 360.

Ἀλλὰ μέτρον τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας ΠΟΔ (σχ. 59) ἐστὶ τὸ τόξον αὐτὸ, ἐφ' οὗ βέβηκε, τὸ ΠΓΔ· αἱ ἄρα πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίαι ἐν τῷ κανονικῷ σχήματι, μετρηθήσονται ἑκάστη διὰ τῶν 360° διαιρεθεισῶν διὰ τοῦ τῶν πλευρῶν ἀριθμοῦ· ἐν μὲν οὖν τῷ τριγώνῳ ἔσται ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία = 120°, ἐν δὲ τῷ τετραγώνῳ = 90°, κτλ.

250. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δυνατὸν ἄρα κύκλῳ ἐγγράψαι ὁσαδήποτε κανονικὰ σχήματα, μεταφέροντας ἐν αὐτῷ διὰ τοῦ ἀναγωγέως (80) τόξον ἴσον τῷ 360 διαιρεθέντι διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν, καὶ ἐπιζευγνῦντας ἐν τῷ ληφθέντι τόξῳ χορδὴν, καὶ οὕτως ἐπαναλαμβάνοντας ἐπὶ τῆς περιφερείας τὰ τῆς πράξεως· ὑπὲρ τριγώνου φέρε, τόξον ἐγχαράσσοντας 120°, καὶ χορδὴν αὐτῷ ἐπι-

ζευγνύντας, ϗ ἔτι δὶς τȣτ' αὐτὸ ποιȣ̃ντας· ὑπὲρ δὲ τετραγώνȣ, τόξον 90°, ϗ ἑξῆς ὁμοίως.

251. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἡ ἑξαγώνȣ κανονικȣ̃ πλευρὰ ΠΔ (σχ. 59), ἴση ἐςὶ τῇ ἀκτῖνι τȣ̃ ᾧ ἐγγράφοιτο κύκλȣ· ἔςι μὲν γὰρ αὕτη χορδὴ τόξȣ 60° (249)· ἔςι δὲ ΠΔ = ΠΟ· εἴγε ἡ ὑπὸ ΠΟΔ μετρεῖται ὑπὸ τȣ̃ τόξȣ ΠΓΔ, ὅ ἐςιν 60° (78)· ἀλλὰ ἡ γωνία ΟΠΔ = ΟΔΠ (248)· ἔςι τε ἑκάςη $= \frac{180° - 60°}{2} = 60°$ (210)· ἄρα ἑκάςη τῶν τριῶν γωνιῶν τȣ̃ ΠΔΟ τριγώνȣ μετρεῖται ὑπὸ τόξȣ 60°· ἐκεȣ̃ ἐν ἑξαγώνῳ τὸ τρίγωνον ΠΔΟ ἐςὶν ἰσόπλευρον (205)· ἄρα ἡ τȣ̃ ἑξαγώνȣ πλευρὰ ΠΔ, ἥτις ἐςὶν ἅμα ϗ τȣ̃ ἰσοπλεύρȣ τριγώνȣ, ἴση ἐςὶ τῇ τȣ̃ τριγώνȣ πλευρᾷ ΠΟ, εἴτ' ȣ̃ν τῇ ἀκτῖνι τȣ̃ κύκλȣ, ᾧ ἐγγέγραπται τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ δ' ἑπόμενον πόρισμα, ἐπεὶ τῆς τριγωνομετρίας ἐςὶ θεμέλιος, δεῖν ᾠήθημεν πρὸς μείζω ἐπίςασίαν τῶν μαθητιώντων ἐν θεωρήματος ἐκθέσθαι σχήματι.

252. Πόρισμα Δ'. ϗ Θεώρημα ςοιχειῶδες. Ἡ τȣ̃ κύκλȣ ἀκτὶς ἴση ἐςὶ χορδῇ τόξȣ μοιρῶν 60.

ΔΕΙΞΙΣ. Τὸ ἐφ' ἑξαγώνου κύκλῳ ἐγγεγραμμένȣ συνιςάμενον τρίγωνον ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τȣ̃ ἑξαγώνȣ τῆς ΠΔ, ϗ δύω ἀκτίνων τȣ̃ ᾧ ἐγγράφοιτο κύκλȣ τῶν ΠΟ, ΔΟ, ἐςὶν, ὡς ἤδη δέδεικται, ἰσόπλευρον· ἄρα ἡ ἀκτὶς ΠΟ ἴση ἐςὶ τῇ ΠΔ πλευρᾷ τȣ̃ ἑξαγώνȣ· ἀλλ' ἡ ἑξαγώνȣ πλευρὰ ΠΔ ἐςὶ χορδὴ τόξȣ = 60° (249)· ἄρα ἡ ἀκτίς ἐςιν ἴση χορδῇ τῇ ΠΔ τόξȣ 60°. Ο. Ε. Δ.

253. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ε'. Ῥᾶςα ȣ̃ν καταγραφήσεται

ἑξάγωνον· α΄. γραφέντος κέντρῳ καὶ διαστήματι τοῖς τυχοῦσι κύκλου· β΄. τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἑξάκις ἐπιζευχθείσης τόξοις ἓξ ἰσαλλήλοις τοῦδε τοῦ κύκλου (ἀνωτέρ.).

254. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ κατασκευὴ τοῦ τε γραφομέτρου, καὶ τοῦ ἀναγωγέως· α΄. ἡ δι' ἧς ὁ κύκλος γέγραπται ἀκτὶς, μετενεχθεῖσα ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, γίνεται χορδὴ τόξου 60°· β΄. ἀκτὶς κάθετος ταύτῃ τῇ χορδῇ παρέξει δύω τόξα (σχ. 25) ἕκαστον = 30°· γ΄. ἀκτὶς δ' ἑτέρα κάθετος τῷ 30° τόξῳ, παράγει τόξον 15°· τὰ δὲ λοιπὰ ἀποτελεσθήσεται διὰ μηχανικῆς ἐπιτηδειότεως.

255. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Ἑξάκις ἡ κύκλου ἀκτὶς ἀποδίδωσι τὴν τοῦ τῷ κύκλῳ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου περίμετρον· ἀλλ' ἡ κυκλικὴ περιφέρεια προδήλως μείζων ἐστὶ τῆς περιμέτρου τοῦ ἑξαγώνου· εἴγε τὸ τόξον ΠΓΔ (σχ. 59), ἢ τὸ ἑκτημόριον τῆς περιφερείας, ἐστὶ καμπύλη, τῆς χορδῆς ΠΔ, εἰτ' οὖν τοῦ ἕκτου μέρους τοῦ ἑξαγώνου εὐθείας ὄντος· ἄρα (17) ΠΓΔ > ΠΔ· ἄρα ἡ περιφέρεια μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἑξαγώνου περιμέτρου, καὶ δὴ μείζων, ἢ ἑξάκις ἡ ἀκτὶς, ταὐτὸν εἰπεῖν, ἢ τρὶς ἡ διάμετρος.

256. ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄. Δυοῖν κανονικῶν πολυγώνων (σχ. 60) τὴν αὐτὴν πλαγίαν ἀκτῖνα ἐχόντων ΚΑ = ΚΔ μείζων ἐστὶν ἡ περίμετρος, οὗ πλείους αἱ πλευραί.

Δύω γὰρ κανονικὰ πολύγωνα ἀεὶ θεωρεῖσθαι δύναται ὡς κύκλῳ ἐγγεγραμμένα (248)· ἀλλ' ἑκάστη πλευρὰ φέρ' εἰπεῖν τοῦ δωδεκαγώνου ΠΔΤ οὖσα ἐλάττων ἑκάστης πλευρᾶς ΑΟ τοῦ ΑΟΙ ἑξαγώνου ὑποτείνει τόξον ἔλαττον· ἐκοῦν ἐγγύς ἐστι τοῦ συγκεχύσθαι τῷ τόξῳ τῷδε· ἄρα πᾶσα ἡ τοῦ δωδεκαγώνου περίμετρος μᾶλλον ἔγγιον γίνεται τοῦ συγκεχύσθαι τῇ περιφερείᾳ, ἢ ἡ τοῦ ἑξαγώγȣ, ϗ ἐν γένει, ὅσῳ πλείȣς πλευρὰς ἔχει τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τοσέτῳ ἔγγιον γίγνεται τȣ̃ συμπεσεῖν τῇ κυκλικῇ περιφερείᾳ, ϗ ἰσωθῆναι αὐτῇ· δύω ἄρα κανονικῶν πολυγώνων τῷ αὐτῷ ἐγγεγραμμένων κύκλῳ, ἢ ὃ ταὐτὸν, τὴν αὐτὴν πλαγίαν ἀκτῖνα ἐχόντων, μείζων ἐςὶν ἡ περίμετρος, ȣ̃ πλείȣς εἰσὶν αἱ πλευραί.

257. ΠΟΡΙΣΜΑ Θʹ. Πᾶν ἄρα κανονικὸν πολύγωνον ἐξ ἀπειραρίθμων πλευρῶν συνιςάμενον ἀπειροςόν τι ἐλλείπει τȣ̃ μὴ συμπεσεῖν τῷ κύκλῳ, τȣ̃ μὴ γενέσθαι κύκλος· ἄρα δυνατὸν ἐκδέξασθαι τὸν κύκλον ὡς κανονικὸν πολύγωνον ἐξ ἀπειραρίθμων πλευρῶν συγκροτȣ́μενον· ἐὰν ȣ̃ν τὰς κυκλικὰς ἰδιότητας ὡς σχήματος κανονικȣ̃ τοιȣ̃δε ἐξετάσωμεν, ἐλάχιςʼ ἂν ἁμάρτοιμεν τȣ̃ ἀληθȣ̃ς, ϗ τȣ̃ ἐλλείμματος ἀλογȣμένȣ ὡς ἀπειροςȣ̃, ȣ̓δὲν ἂν ποιήσαιμεν ὅλως ἁμάρτημα (Συμ. λογ. 530).

258. ΠΟΡΙΣΜΑ Ιʹ. Α῞παν κανονικὸν πολύγωνον περιγραφῆναι δύναται κύκλῳ· αἱ γὰρ πλευραὶ ΗΠ, ΠΤ τȣ̃ τῷ ἐκτὸς κύκλῳ ἐγγεγραμμένȣ πολυγώνȣ (σχ. 61) εἰσὶν ὡς χορδαὶ ἴσαι (245), ϗ ἴσον τȣ̃ κέντρȣ ἀπέχȣσαι (55)· ἄρα πᾶσαι αἱ ἀπὸ τȣ̃ κέντρȣ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῶνδε ἀγόμεναι κάθετοι, εἰσὶν ἴσαι· ἐὰν ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Κ διαςήματι δὲ τῷ Κο γραφῇ κύκλος, διήξει διὰ πάντων τῶν μεσαιτάτων σημείων τῶνδε τῶν πλευρῶν· ϗ δὴ τὸ πολύγωνον κύκλῳ περιγραφήσεται.

259. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΑʹ. Ι῞νʼ ȣ̃ν πολύγωνον γραφείη κανονικὸν, ȣ̃ ἡ ὀρθία ἀκτὶς Κο εἴη δεδομένη, γεγράφθω ὁ ooo κύκλος διὰ ταύτης τῆς ἀκτῖνος, ϗ συνεςάσθω ἐπʼ αὐτῆς κατὰ τὸ Κ ἡ ὑπὸ οΚο γωνία $=70^{\circ}$ μὲν εἰς πεντάγωνον (249)· 60° δὲ εἰς ἑξάγωνον, ϗ ȣ̃τως ἑ.

ξῆς (84), κ̀ μετήχθω τὸ οο τόξον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν εὐθειῶν Κο, Κο, αἵτινες περιέχουσι ταύτην τὴν γωνίαν, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, κ̀ αἱ τῇ ἀκτῖνι κάθετοι ΠΗ, ΠΤ, κ. τ. λ. παρέξουσι τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΠΗΖΤ.

260. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΒ'. Ὅσῳ πλείους εἰσὶ τῷ πολυγώνῳ αἱ πλευραὶ τοσούτῳ ἡ ὀρθία ἀκτὶς Κο προσεγγίζει τῇ πλαγίᾳ ΚΠ· ἐγγίζει γὰρ μᾶλλον οὕτω τὸ πολύγωνον τοῦ συμπεσεῖν τῷ κύκλῳ· διὸ ἡ Κο μᾶλλον ἐπιμήκης καθίσαται, ὅ ἐςι προσπελάζει τῇ δυνάμει τῆς πλαγίας ἀκτῖνος ΚΠ.

261. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΓ'. Τοῦ κύκλου ἄρα ὡς πολυγώνου κανονικοῦ ἐκλαμβανομένου, οὗ ἀπειράριθμοι αἱ πλευραὶ, ἡ ὀρθία ἀκτὶς, ἢ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, μιᾷ τινι τῶν ἀπειροςῶν πλευρῶν πρὸς ὀρθὰς ἱςαμένη, δύναμιν ἔχει σχεδὸν τῆς πλαγίας ἀκτῖνος, ἢ τῆς ἀγομένης ἐφ' ἓν τῶν περάτων μιᾶς τῶν ἀπειροςῶν πλευρῶν, ταυτὸν εἰπεῖν ἡ ὀρθία ἀκτὶς τῇ πλαγίᾳ ἐςὶν ἴση.

262. Τρισσόν τι εἶδος γωνιῶν ἐν ἑκάςῳ διακρίνεται πολυγώνῳ· ἔςι μὲν γὰρ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἡ ὑπὸ ΠΟΔ (σχ. 59)· γωνία δὲ ἐντὸς ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΠΔΘ, γωνία δὲ τέλος ἐξωτερικὴ ἡ ο (σχ. 63), ἡ συνιςαμένη ἐκτὸς τοῦ σχήματος ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς, κ̀ τῆς αὐτῇ προσεχοῦς ἐκβαλλομένης.

263. Τὸ τοίνυν ἄθροισμα τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ συνιςῶν γωνιῶν παντὸς κανονικοῦ πολυγώνου σχήματος ςαθερὸν ἀεὶ ὂν ἀποδέδεικται, εἴτ' οὖν 360° (96)· ἑκάςη δὲ τῶν πρὸς τῷ κέντρῳ παντὸς κανονικοῦ σχήματος ἴση 360° διαιρεθείσαις διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τοῦ σχήματος πλευρῶν (249).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ τῆς δυνάμεως τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνυ.

264. ΘΕΩΡΗΜΑ. Παντὸς πολυγώνυ κανονικῦ, ἢ ἀκανονίςυ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἴσον ἐςὶ διπλασίαις τόσαις ὀρθαῖς, ὅσαι αἱ ἐν τῷ σχήματι πλευραὶ, πλὴν τεσσάρων.

ΔΕΙΞΙΣ. Δυατὸν ἐν ἅπαντι πολυγώνῳ ἀγαγεῖν ἀπὸ τῆς Α γωνίας εὐθείας τὰς ΑΠ, ΑΓ κτ. (σχ. 62) πρὸς πάσας τὰς ἄλλας γωνίας πλὴν τῶν δύω τῶν τῇ Α γειτνιαζυσῶν, ἢ συςῆσαι ὕτω τοσαῦτα τρίγωνα τὰ Α ΖΠ, ΑΠΓ κτ., πλὴν δύω, ὅσαι εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῦ πολυγώνυ. Τὸ γὰρ 62 σχῆμα ἔχει ἑπτὰ πλευράς· τρίγωνα τοίνυν συςαθήσονται πέντε· ἐπεὶ δὲ πᾶσαι αἱ γωνίαι τῶνδε τῶν τριγώνων συνίςανται ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτῶν τῦ πολυγώνυ, ἢ αἱ τρεῖς γωνίαι ἑκάςυ τύτων τῶν τριγώνων ἴσαι εἰσὶ δυσὶν ὀρθαῖς (209)· ἄρα τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν τῦ πολυγώγωνυ ἴσον ἐςὶ δὶς τοσαύταις ὀρθαῖς, πλὴν τεσσάρων, ὅσας ἔχει πλευρὰς τὸ πολύγωνον Ο. Ε. Δ.

265. Τετραπλεύρυ μὲν ἄρα τὸ τῶν γωνιῶν ἄθροισμα ἐξισῦται ὀρθαῖς $8-4=4$· πενταγώνυ δὲ, $10-4=6$. ἑξαγώνυ δὲ, $12-4=8$. κ.τ.λ.

266. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τῶν πολυγώνων καθ᾽ ἕκαςον ἑξῆς σχῆμα δυσὶν ὀρθαῖς αὔξει. Τριγώνυ μὲν γὰρ αἱ τρεῖς ἴσαι δυσὶ,

τετραγώνε δὲ αἱ τέσσαρες, τέσσαρσι, πενταγώνε δὲ αἱ πέντε, ἕξ, ϗ ὕτως ἐξῆς.

267. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Παντὸς κανονικῦ σχήματος ἑκάςη τῶν γωνιῶν ἴση ἐςὶ τῷ ἀθροίσματι τῶν δὶς τοσύτων ὀρθῶν, πλὴν τεσσάρων, ὅσαι εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῦ σχήματος, διαιρεθέντι διὰ τῦ ἀριθμῦ τῶν πλευρῶν· τριγώνε μὲν γὰρ ἰσοπλεύρε ἑκάςη ἐςὶν $= \frac{180°}{3} = 60°$, τετραγώνε δὲ $\frac{360°}{4} = 90°$, πενταγώνε δὲ, $= \frac{540°}{5} = 108$, ἑξαγώνε δὲ, $= \frac{720°}{6} = 120°$ ϗ ὕτως ἐξῆς· δῆλον ὖν ὡς ἡ δύναμις ἑκάςης ἐσωτερικῆς γωνίας συναύξει τῷ ἀριθμῷ τῶν πλευρῶν.

268. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Κύκλε δὲ, ἐπεὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἐςὶν ∞, τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἐςὶ $2\ \infty$ ὀρθαὶ γωνίαι πλὴν τεσσάρων· κληθείσης ὖν τῆς ὀρθῆς γωνίας O, τὸ τύτων ἄθροισμα ἔςαι $2\ \infty\ O - 4O$· ἑκάςη ἄρα ἐσωτερικὴ γωνία ἔςαι $= \frac{2\ \infty\ O - 4O}{\infty}$. ἀλλὰ $\frac{2\ \infty\ O}{\infty} = 2O$, ἡ ἑκάςης ἄρα ἐσωτερικῆς γωνίας δύναμις, ἣν συνιςῶσι δύω ἀπειροςαὶ πλευραὶ τῆς περιφερείας, ἢ δύω προσεχῆ ςοιχεῖα τῦ κύκλε, εἰσὶ δύω γωνίαι ὀρθαὶ πλὴν $\frac{4O}{\infty}$· τοιαύτη ὖν γωνία ἀπείρως ἐςὶν ἀμβλυτάτη, ὡς ἴση ὖσα δυσὶν ὀρθαῖς πλὴν τῆς ἀπειροςῆς γωνίας $\frac{4O}{\infty}$ (Συμ. λογ. 530).

269. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Παντὸς πολυγώνε, εἴτε κανονικῦ, εἴτε ἀκανονίςε, τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἀεὶ ἐςὶ μόνιμον, τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἐξισύμενον· (Σχ. 63) ἡ γὰρ ο γωνία σὺν τῇ ἐφεξῆς δ ἴση ἐςὶ δυσὶν ὀρθαῖς (98)· ἀλλ' εἰσὶ τοσαῦται ο πλὴν δ, ὅσαι εἰσὶν αἱ πλευραὶ τῦ πολυγώνε· τὸ ἄθροισμα ἄρα τῶν ἐξωτε-

ρικῶν γωνιῶν ο ϗ τῶν ἐσωτερικῶν δ ἰσῦται δὶς τόσαις ὀρθαῖς, ὅσας ἔχει πλευρὰς τὸ πολύγωνον· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν δ ἰσῦται δὶς τοσαύταις ὀρθαῖς, ὅσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον πλὴν ὀρθῶν τεσσάρων (264)· τὸ ἄθροισμα ἄρα πασῶν τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ο ἰσῦται ταύταις ταῖς καταλειπομέναις τέσσαρσιν ὀρθαῖς.

270. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ε΄. Παντὸς κανονικῦ πολυγώνυ πᾶσαι αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι ο ἰσάλληλοί εἰσιν (245)· ὑκῦν ἑκάςη τύτων, τετραγώνυ μὲν ἐςὶν $\frac{360°}{4} = 90°$, πενταγώνυ δὲ $\frac{360°}{5} = 72$, ϗ ἑξῆς ὡσαύτως ἀεὶ τῆς τῶν γωνιῶν δυνάμεως συνυπελαττυμένης αὐξέσαις ταῖς τῦ σχήματος πλευραῖς.

271. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Τελευταῖον δὲ τῦ κύκλυ, ῦ ὁ τῶν πλευρῶν ἀριθμὸς ἐςὶν ἄπειρος, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία, εἴτ' ὖν ἡ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ϗ τῆς κυκλικῆς περιφερείας περιεχομένη, ἣν αὐτοὶ πρότερον γωνίαν ἁφῆς ὠνομάσαμεν, ἢ, εἰ ϗ τῦτο πρὸς θυμῦ, ἡ γωνία, ἣν συνιςῶσιν ἐκτὸς τῦ κύκλυ δύω προσεχῆ ςοιχεῖα τῆς καμπύλης, αὕτη φημὶ ἀεὶ ἴση ἐςὶ τῷ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἀθροίσματι, διαιρεθέντι δὶ ἀριθμῦ ἀπείρυ· ἡ γωνία ἄρα τῆς ἁφῆς ἐςὶν ἀπειροςή, ὡς ϗ ἀνωτέρωθί πυ δέδεικται (172).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ καταμετρήσεως τῶν ἐπιφανειῶν.

272. Η' μὲν γραμμὴ διὰ γραμμῆς ϗ μόνης καταμετρηθῆναι δύναται· δὶ ἐπιφανείας δ' ἡ ἐπιφάνεια.