ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ τῆς δυνάμεως τῶν γωνιῶν τῶν περιεχομένων ὑπὸ εὐθειῶν παντοίων τῶν ἐν τῷ κύκλῳ.

170. Γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ καλεῖται, ἧς ἡ κορυφὴ Κ ἐστὶν ἐν τῷ τοῦ κύκλου κέντρῳ, οἵα ἡ ὑπὸ βΚΤ (σχ. 27).

171. Σαφὲς ἄρα, ὅτι μέτρον ταύτης τῆς γωνίας ἐστὶν ἀκριβῶς τὸ βΤ τόξον τὸ ἐναπολαμβανόμενον ὑπὸ τῶν δυοῖν πλευρῶν βγ, ΤΚ ταύτης τῆς γωνίας (78)· καὶ δὴ τούτῳ μέτρῳ χρησόμεθα εἰς τὸ ὁρίσασθαι πάντα τὰ εἴδη τῶν γωνιῶν, περὶ ὧν ἐροῦμεν ἐνταῦθα.

172. Ἀφῆς γωνίαν καλῶ τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῆς ἁπτομένης ηΤ, καὶ τῆς περιφερείας δΤ· ἐκ τῶν εἰρημένων ἄρα δῆλον, ὡς ἡ τῆς ἀφῆς γωνία πασῶν ἐλαχίστη ὑπάρχει· οὐδὲν γὰρ ἄλλο ἐστὶν, εἰμὴ γωνία περιεχομένη ὑπὸ στοιχείου κυκλικοῦ τῶν ὧν καταγράφει τὸ γεννῶν σημεῖον, καὶ τοῦ ἀμέσως ἐγγὺς κειμένου στοιχείου· ἀλλὰ τὸ γεννητικὸν σημεῖον οὐ περεκτρέπεται τῆς εὐθείας μεθ' ἕκαστον διάβημα, ὅτι μὴ ἀπειροστῶς (25)· ἄρα δύω στοιχεῖα κυκλικὰ οὐ δύναται ποιεῖν, εἰμὴ γωνίαν ἀπειροστὴν, εἴτ' οὖν ἁπάσης δεδομένης ἐλάττονα· ἡ ἄρα τῆς ἀφῆς γωνία πασῶν ἐστιν ἐλαχίστη.

173. Ἡ ὑπὸ δύω χορδῶν περιεχομένη γωνία, καὶ πρὸς τῷ κοίλῳ κύκλῳ τελευτῶσα, γωνία πρὸς τῇ περιφερείᾳ καλεῖται· οἵα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΑΔ.

174. Τμήματος γωνία ἐςιν ἡ περιεχομένη ὑπὸ χορδῆς, ϗ ἁπτομένης, ϗ κορυφὴν ἔχουσα τὸ τῆς ἁφῆς σημεῖον· οἷα ἡ ὑπὸ ΔΑχ, ἢ ΔΑΤ (σχ. 28.)· πᾶσα ἄρα χορδὴ συνάμα τῇ διὰ τοῦ πέρατος ταύτης τῆς χορδῆς διϊέσῃ ποιεῖ δύω γωνίας τμήματος, τὴν μὲν μείζω τὴν ὑπὸ ΔΑχ, ἥτις ἀντιςοιχεῖ τῷ μείζονι τμήματι ΔτΑΚ (43), τὴν δὲ ἐλάττω τὴν ἐλάττονι ἀντιςοιχοῦσαν τμήματι τῷ ΔρΑϐ· καίτοι τῆς χορδῆς διαμέτρου ἔσης, ἐπεὶ ἡ ἀκτὶς, ταὐτὸν εἰπεῖν ἡ διάμετρος, ἡ πρὸς τῷ σημείῳ τῆς ἀφῆς περατουμένη, κάθετος ἐφέςηκε τῇ ἁπτομένῃ (151), αἱ δύω γωνίαι τοῦ τμήματος ἰσάλληλοι ἔσονται, ὥσπερ ϗ τὰ κατ' αὐτὰς τμήματα (45)· εἴτ' οὖν ἑκατέρα ἔσεται ὀρθή.

175. Γωνία ἐκτὸς περιφερείας ἐςιν, ἧς ἡ κορυφὴ ἐκτὸς κεῖται τοῦ κύκλου· οἷον ἡ ΓΑΠ (σχ. 29.) γωνία δὲ ἔκκεντρος, ἧς ἡ κορυφὴ μεταξὺ κεῖται τοῦ κέντρου ϗ τῆς περιφερείας, οἷον ἡ ΧΑΔ (σχ. 30).

176. Θεώρημα ςοιχειῶδες. Τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας μέτρον ἐςὶ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου, ἐφ' οὗ βέβηκε.

ΔΕΙΞΙΣ. Διερχέσθω πρῶτον ἡ ἑτέρα τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν διὰ τοῦ κέντρου, εἴτ' οὖν ἔσω πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ἡ ὑπὸ ΘΑΔ (σχ. 31.)· φημὶ οὖν, ὡς ταύτης μέτρον ἐςὶ τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου ΘΔ, ἐφ' οὗ βέβηκε, ταὐτὸν εἰπεῖν, ἐφ' οὗ τοῖς πέρασι τελευτῶσιν αἱ ΑΘ, ΑΔ χορδαὶ, αἱ τὴν γωνίαν περιέχουσαι.

Ἤχθω γὰρ ἡ ΠΙ παράλληλος τῇ ΑΔ, ϗ ἡ ΑΘ χορδὴ ἐμπιπτέτω εἰς δύω παραλλήλους, ϗ ἐπὶ τῆς ΠΚΙ παραλλήλου ποιείτω γωνίαν πρὸς τῷ κέντρῳ τὴν ὑπὸ ΘΚΙ· αὕτη οὖν ἀκριβῶς μετρηθήσεται ὑπὸ τοῦ τόξου ΘΙ, ἐφ' οὗ βέβηκε (171)· ἀλλὰ ΘΚΙ = ΘΑΔ (132)· καὶ τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας μέτρον τὸ ΘΙ τόξον· ἄρα ϗ τῆς ἴσης αὐτῇ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ ὑπὸ ΘΑΔ μέτρον ἐςὶ τὸ αὐτὸ τόξον ΘΙ.

Α᾿λλὰ ΘΙ $=$ $\frac{1}{2}$ ΘΔ, ἐφ᾿ ἦ βέβηκεν ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ΘΑΔ· ϗ γὰρ ΘΚΙ $=$ ΠΚΑ (99)· ἄρα ϗ ΘΙ $=$ ΠΑ· ἔςι δὲ ϗ ΠΑ $=$ ΙΔ (169)· ἐκεῖν 2 ΘΓ $=$ ΘΔ ϗ ΘΙ $=$ $\frac{1}{2}$ ΘΓ ἄρα ΘΙ ἥμισύ ἐςι τῦ τόξυ ΘΔ, ἐφ᾿ ἦ βέβηκεν ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ὑπὸ ΘΑΔ.

Διερχέσθωσαν εἶτα ἑκάτεραι αἱ τὴν πρὸς τῇ περιφερείᾳ περιέχυσαι γωνίαν ἐκ τῶν ἑτέρων τῦ κέντρυ, ὡς αἱ ΠΖ, Πκ (σχ. 32.)· δειχθήσεται ἦν ϗ ἐπὶ ταύτης τὸ αὐτό.

Α᾿χθείσης γὰρ τῆς κατεςιγμένης Πν διὰ τῦ Κ κέντρυ, τῆς ὑπὸ νΠκ γωνίας μέτρον ἔςαι τὸ ἥμισυ τῦ νΖκ τόξυ, ἐφ᾿ ἦ βέβηκεν, ὡς ἀνωτέρω δέδεικται· ἀλλὰ $\frac{1}{2}$ νΖκ $=$ $\frac{1}{2}$ νΖ $+$ $\frac{1}{2}$ Ζκ· ἡ δὲ γωνία νΠΖ, ἧς ἡ ἑτέρα τῶν πλευρῶν νΠ δίεισι διὰ τῦ κέντρυ, μετρεῖται ὑπὸ τῦ ἡμίσεως τῦ τόξυ νΖ, ἐφ᾿ ἦ βέβηκε, συλλογιύμεθα τοίνυν ὕτως: ὅλης τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ γεγραμμένης γωνίας νΠκ μέτρον ἐςὶ τὸ ἥμισυ τῦ τόξυ νΖ σὺν τῷ ἡμίσει τῦ τόξυ Ζκ· ἀλλὰ τῆς μερικῆς γωνίας νΠΖ μέτρον ἐςὶ τὸ ἥμισυ τῦ νΖ τόξυ· λείπεται ἄρα τῆς μερικῆς γωνίας ὑπὸ ΖΠκ μέτρον τὸ ἥμισυ τῦ Ζκ τόξυ· ἄρα ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ΖΠκ μετρεῖται ὑπὸ τῦ ἡμίσεως τῦ Ζκ τόξυ, ἐφ᾿ ἦ βέβηκε.

Τέλος δὲ διερχέσθωσαν ἡ μὲν τῶν πλευρῶν ἔνθεν, ἡ δὲ ἔνθεν τῦ κέντρυ, ὡς αἱ τὴν ὑπὸ ΒΑΓ περιέχυσαι· τοιγαρῦν ἀχθείσης διὰ τῦ κέντρυ τῆς ΑΔ κατεςιγμένης, τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΓ γωνίας μέτρον ἔςαι τὸ ἥμισυ τῦ

ΔΓ τόξυ, τῆς δ' ὑπὸ ΒΑΔ τὸ ἥμισυ τῦ ΒΔ (176)· ὅλης ἄρα τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας μέτρον ἐςὶ τὸ $\frac{1}{2}$ ΒΔ + $\frac{1}{2}$ ΔΓ· ὅ ἐςι τὸ ἥμισυ τοῦ ὁλικοῦ τόξου ΒΔΓ, ἐφ' οὗ βέβηκεν.

Ἐντεῦθεν ἄρα ἐποίσομεν ἐν γένει: ἁπάσης πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας, κἂν ἡ ἑτέρα τῶν περιεχυσῶν αὐτὴν πλευρῶν διήκει διὰ τῦ κέντρυ, κἂν ἑκατέρα κέηται ἐπὶ τῶν αὐτῶν μερῶν τῦ κέντρυ, ἢ ἡ μὲν ἔνθεν, ἡ δ' ἔνθεν τῦ κέντρυ διΐωσιν· ἐφ' ἑκάςης τῶν τριῶν τῶνδε περιπτώσεων, μέτρον τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας τὸ ἥμισύ ἐςι τῦ τόξυ, ἐφ' ῦ βέβηκεν· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

177· ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἐὰν ἄρα δύω, ἢ πλείυς γωνίαι πρὸς τῇ περιφερείᾳ ἐπὶ τῦ αὐτῦ, ἢ ἐπὶ ἴσων τόξων, βαίνωσιν, ἰσάλληλαι ὑπάρχυσι.

178. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασία ἐςὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι (%. 34)· τῆς γὰρ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας ΕΚΔ μέτρον ἐςὶν ὅλον τὸ τόξον ΕΠΔ, ἐφ' ῦ βέβηκεν (171)· τῆς δὲ πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΕΒΔ, ἥτις βέβηκεν ἐπὶ τῦ αὐτῦ ΕΠΔ τόξυ, μέτρον ἐςι τὸ ἥμισυ τῦ αὐτῦ τόξυ (176).

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τίνος δὲ χάριν, ἐρεῖτις τυχὸν τῶν πρωτοπείρων, τῆς μὲν πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας μέτρον ἐςὶ τὸ τόξον, ἐφ' ῦ βέβηκε, πᾶν δὲ τόξον, ἐφ ῦ γωνία τὴν βάσιν ἴσχει, ὡς μέτρον αὐτῆς, ἥκιςα παραλαμβάνεται;

ΛΥΣΙΣ. Ἐὰν μὲν γὰρ ὑποτεθῇ γωνία τις πρὸς τῷ κέντρῳ, μονίμως ϗ ὡρισμένως χαίνυσα, τὸ μέτρον αὐτῆς, ὡς ἤδη ἐμάθομεν, ἔςαι ἀεὶ ἄτρεπτον, εἴτ' ῦν μέρος ὅμοιον τῆς κυκλικῆς περιφερείας, ἧς ὑποτίθεται τὸ κέντρου, ὁποσουῦν ἂν ὑποτεθῇ τὸ μέγεθος τῆς κατὰ ταύτην τὴν περιφέρειαν ἀκτῖνος, εἴτ' ἓν τῶν αὐτὴν περιεχουσῶν πλευρῶν (78, 79). τῆς δὲ γωνίας, ἧς οὐκ ἔστιν ἡ κορυφὴ πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου, ἐφ' οὗ τοῦ τόξου βέβηκε, τὸ μέτρον ποικίλλεσθαι δύναται ἐπ' ἄπειρον, καίτοι τοῦ τόξου ἀτρέπτου μένοντος. Θῶμεν γὰρ πλείους ἑξῆς γωνίας τὰς ΑΒΔ, ΑΚΔ, ΑΖΔ, κτλ. (σχ. 35.) ἁπάσας βεβηκυίας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΧΔ, καὶ κορυφὰς κατὰ συνέχειαν ἐχούσας τὰς Β, Κ, Ζ, κτλ. ἐπὶ τῆς ἀπεράντου εὐθείας χρ· ἐκοῦν τὸ μὲν ἄνοιγμα τῆς ὕπερθεν τοῦ κέντρου γωνίας ΑΒΔ, ἐπαισθητῶς ἐστι μεῖζον τοῦ τῆς πρὸς τῷ κέντρῳ γωνίας ΑΚΔ, αὐτῆς δὲ μεῖζον, ἢ τὸ τῆς ὕπερθεν τοῦ κέντρου ΑΖΔ· ταύτης δὲ μεῖζον, ἢ τὸ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ ΑΙΔ· καὶ οὕτως ἑξῆς ἐπ' ἄπειρον· ἐπείπερ τοίνυν ἀπειράριθμοι γωνίαι, μᾶλλον ἢ ἧττον χαίνουσαι, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου τοῦ αὐτοῦ κύκλου βεβηκέναι δύνανται, τουτὶ τὸ τόξον οὐδόλως ξυντελεῖ πρὸς τὸ εἶναι κοινὸν μέτρον πασῶν τῶν διαφερουσῶν γωνιῶν· ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ἄρα γωνία, ἧς ἥκιστα μεταλλοιοῦται τὸ μέτρον, εἰμὴ καὶ τῆς γωνίας ἀλλοιωθείη ἡ ἀνοιγὴ (78, καὶ ἑξῆς), δύναται παραλαμβάνεσθαι ὡς ὅρος παραθέσεως ἁπασῶν τῶν ἄλλων γωνιῶν.

179. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ἐὰν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ βαίνωσιν αἱ γωνίαι τόξου, ἐντεῦθεν ὑποσυνάψομεν θεωρήματι, ἁπάσῃ μὲν τῇ Φυσικῇ, ἐξαιρέτως δὲ τῇ Ἀστρονομίᾳ, προὐργιαίτατον. Ἔστω μέγεθος τὸ ΑΓ (σχ. 36.) ἡ διάμετρος φέρ' εἰπεῖν, ἢ ὁ ἄξων ἑνὸς τῶν πλανητῶν, ὁρώμενος ἐκ δύω διαφόρων ἀποστημάτων τῶν Ο, Η, ὧν τὸ ἔλαττον Οτ ἔστω ἥμισυ τοῦ μείζονος Ητ, μᾶλλον ἔμπης ἐπαισθητότερον, ἢ τὸ μέγεθος τοῦ ὁρατοῦ ΑΓ.

Γωνία ὀπτικὴ καλεῖται ἡ ἐν τῷ τοῦ θεατοῦ ὀφθαλμῷ συνισταμένη ὑπὸ δύω φωτοφυῶν ἀκτίνων, ὡς εὐθειῶν ἐξερχομένων ἐκ τῶν δύω περάτων τοῦ ὑποκειμένου· ὁ ἐμὸς φέρε ὀφθαλμὸς, τιθέμενος ἐν τῷ Ο, ὁρᾷ τὸν ὄγκον, ἢ τὴν διάμετρον τοῦ ΑΓ πλανήτου· αἱ δ' ἀκτῖνες ΓΟ, ΑΟ ἀρχόμεναι ἀπὸ τῶν περάτων Γ, Α τοῦ ὄγκου τούτου, ἢ τῆς τοῦ πλανήτου διαμέτρου, καὶ ἀφικνούμεναι εἰς τὸν ἐμὸν ὀφθαλμὸν, ἐν αὐτῷ ἀλλήλαις συμπίπτουσαι, τὴν ὀπτικὴν καλουμένην συνιστῶσι γωνίαν, εἴτ' οὖν γωνίαν τῆς ὁράσεως τὴν ὑπὸ ΓΟΑ· τοῦ δ' ὀφθαλμοῦ τιθεμένου ἐπὶ τοῦ Η, ἡ ὀπτικὴ γωνία ΓΗΑ ἔσται ἐλάττων τῆς ΓΟΑ. Ἐὰν οὖν κέντρῳ μὲν τῷ Ο, διαστήματι δὲ τῷ τΟ=ΟΗ, κύκλος γραφῇ ὁ ΖΗΔρκ, οὗ ἐν τῷ σχήματι δύω μόνα τόξα ὁρῶνται τό, τε ἄνωθι κρ, καὶ τὸ κάτωθι ΖΔ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία ΓΟΑ διπλασία ἔσται τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας ΓΗΑ (178).

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ γωνία, δι' ἧς τὸ ΑΓ μέγεθος ὁρᾶται ἀπὸ ἀποστήματος, ὅ ἐστι διπλάσιον ἢ τὸ τΗ, ὑπάρχει ἡμίσεια τῆς ὑπὸ ΓΗΑ, τὸ τέταρτον μέρος ἐκ τοῦ ἀκολούθου τῆς ὑπὸ ΓΟΑ γωνίας, καὶ οὕτως ἑξῆς. ὅ ἐστιν, αἱ γωνίαι, δι' ὧν ὁρᾶται τὸ μέγεθος ὑποκειμένου τινὸς ἐκ διαφόρων ἀποστημάτων, εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι τῶν ἀποστημάτων· ἀλλαμὴν τὰ τῶν σωμάτων μεγέθη φυσικῶς κρίνονται ὑπὸ τῆς γωνίας, ἣν ἐν τῷ ὀφθαλμῷ ποιοῦσιν αἱ προβαλλόμεναι ἀκτῖνες ἐκ τῶν περάτων αὐτῶν, τουτέστιν ὑπὸ τῆς ὀπτικῆς γωνίας· τὸ ἄρα ἐκ διαφόρων ἀποστημάτων φαινόμενον σώματός τινος μέγεθος ἐστιν ἐν λόγῳ ἀντιστρόφῳ τῶν ἀποστημάτων· εἴτ' οὖν ἀπὸ μὲν διπλοῦ ἀποστήματος ὑποδιπλάσιον, ἀπὸ δὲ τετραπλοῦ ὑποτετραπλάσιον, ὁρᾶται, καὶ οὕτως ἑξῆς.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὑποτεθῆναι ἔδει τὸν τοῦ θεατοῦ ὀφθαλμὸν Ο ἀφίςασθαι τοῦ ὑποκειμένου ἀποςήματι τῷ Οτ μείζονι τοῦ κατὰ τὸ ὑποκείμενον αὐτὸ μεγέθους (σχ. 37.)· εἰ γὰρ ἰσῶτο τὸ τοῦ ὑποκειμένου μέγεθος ΑΓ τῷ Οτ ἀποςήματι, ἢ ϗ εἴη ΑΓ > Οτ, ὥσπερ, ὅταν φέρε τοῖχον τινὰ οἴκου ὁρῶμεν ἀπὸ τινῶν ποδῶν ἀποςήματος, οὐκ ἂν κρατήσειεν, ὃ πρότερον ἀπεδείξαμεν· ἐν γὰρ τῷ 37 σχήματι κατάδηλον, ὡς αἱ δύω εὐθεῖαι ΓΗ, ΑΗ περιέχουσιν ἐν τῷ κύκλῳ τόξον μεῖζον τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τῶν ΓΟ, ΑΟ εὐθειῶν· ϗ ἐπεὶ ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ΓΗΑ βέβηκεν ἐπὶ τόξου μείζονος, ἢ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ΓΟΑ, ἡ πρώτη γωνία ἔςαι μείζων ἢ ἡμισεία τῆς δευτέρας· ϗ δὴ τὸ φαινόμενον μέγεθος τοῦ ὑποκειμένου ὁρώμενον ἐκ τοῦ Η μεῖζον ἔςαι, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ φαινομένου μεγέθους τοῦ αὐτοῦ ὁρωμένου ἐκ τοῦ Ο· ἐντεῦθεν ἄρα συνάγεται.

α΄. Τὸ φαινόμενον μέγεθος ὁρατοῦ τινος οὐδέποτέ ἐςι, κυρίως εἰπεῖν, ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι τῶν ἀποςημάτων· εἴγε τὸ τόξον, ἐφ᾽ οὗ βέβηκεν ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία ΓΗΑ ἀεί ἐςι βραχύτι μεῖζον τοῦ, ἐφ᾽ οὗ βέβηκεν ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ ΓΟΑ.

β΄. Ὅσῳ μέντοι τὸ Οτ ἀπόςημα πλεονάκις περιέχει τὸ τοῦ ὑποκειμένου μέγεθος ΓΑ (σχ. 36.) τοσούτῳ ἡ μεταξὺ τῶν δύω εἰρημένων τόξων διαφορὰ ἔςιν ἀνεπαίσθητος· ϗ δὴ τοσούτῳ ἡ πρότασις „τὸ φαινόμενον μέγεθος ὑποκειμένου τινὸς ἔςιν ἐν λόγῳ ἀντιθέτῳ τῶν ἀποςημάτων“ τοῦ ἀληθοῦς ἔγγιον γίγνεται· ἐὰν γὰρ προκέηται τοῖχον φέρε, ὀργυιᾶς πλάτος ἔχοντα, πρῶτον μὲν ὁρᾷν ἐξ ἀποςήματος ὀργυιῶν 100, εἶτα ἐκ 200, τὸ δεύτερον φαινόμενον μέγεθος τῆς ὀργυιᾶς ἔςαι ὡς πρὸς αἴσθησιν ἀκριβῶς ὑποδιπλάσιον τοῦ πρώτου.

γ΄. Περὶ δὲ τῶν ἀπὸ τῆς γῆς ὁρωμένων οὐρανίων σωμάτων, ἐπεὶ τὸ ἀπόςημα, ᾧ ἀπέχει ἀςήρτις ἀπὸ τῆς γῆς, ἀπαραβλήτως ἐςὶ μεῖζον τῆς πραγματικῆς διαμέτρε τῦ ἀςέρος, ἐξέςαι ἐν ἀπάτῃ ὅσον ἐκ ἀπειροςῇ, ὡς ἀληθεῖ χρήσασθαι ἐπὶ τῆς ἀςρονομίας τῇ προειρημένῃ προτάσει, ϗ ὡς ἀρχῇ μονιμωτάτῃ „τὰ φαινόμενα μεγέθη, „ἢ αἱ φαινόμεναι διάμετροι τῶν ἀςέρων, ἀντιπεπονθότως „ἀνάλογά εἰσι τοῖς αὐτῶν ἀπὸ τῆς γῆς ἀποςήμασι."

180. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνία, ἐὰν βάσιν ἔχῃ τὴν διάμετρον, ὡς ἡ ηΑβ, ἢ ηΧβ, ἐςὶν ὀρθή (Σχ. 40.)· βεβηκυῖα γὰρ ἐπὶ τῆς διαμέτρε, βέβηκεν ἐπὶ τῦ ἡμικυκλίε ητΟβ· τὸ δὲ ἥμισυ τέτε ἐςὶν 90°, ὅ ἐςι μέτρον γωνίας ὀρθῆς (91).

181. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Διὰ κύκλε ἄρα γραφέντος γωνίαν ὀρθὴν ἐξέςαι συςήσασθαι· ἀπό γὰρ τῦ η ϗ δ περάτων μιᾶς τῶν διαμέτρων, εὐθειῶν γραμμῶν ἀχθεισῶν πρὸς ἕν τι σημεῖον τῆς περιφερείας, γέγονε τὸ ζητέμενον.

182. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. Ἐκ τῦ Β΄. πορίσματος μεμαθήκαμεν, ὅπως ἀπὸ σημείε ἐκτὸς κειμένε τῦ Ο εὐθεῖαν ἀπτομένην τῦ κύκλε ἀγαγεῖν δυνησόμεθα (Σχ. 39.)· α΄. κέντρῳ μὲν τῷ μεσαιτάτῳ σημείῳ τῆς ΚΟ εὐθείας, διαςήματι δὲ τῷ ΚΠ, γεγράφθω νέος κύκλος ὁ ΚΡΟΝ· β΄. ἐκ τῦ σημείε Ρ, καθ' ὃ τέμνεσιν ἀλλήλες οἱ κύκλοι ἐπεζεύχθω ἡ εὐθεῖα ΡΟ, ἥτις ἐφάψεται τῦ δοθέντος κύκλου.

Καὶ γὰρ τῆς ὑπὸ ΟΡΚ γωνίας, διὰ τὸ βεβηκέναι ἐπὶ τῆς ΚΟ διαμέτρε, ὔσης ὀρθῆς, ἡ ἀκτὶς ΚΡ τῦ πρώτε κύκλε ὀρθὴν γωνίαν μετὰ τῆς ΡΟ εὐθείας ποιεῖ, ϗ δὴ ἐςι κάθετος τῷ τῆς ἀφῆς σημείῳ Ρ· ἡ ἄρα ΡΟ εὐθεῖα ἀληθῶς ἅπτεται τῦ προτέρε κύκλε (151).

Ἐὰν δὲ ἐκ τȣ̃ δοθέντος Ο σημείȣ ἀχθῇ πρὸς τὸ ἕτερον σημεῖον Ν, καθ᾽ ὃ οἱ κύκλοι τέμνȣσιν ἀλλήλȣς, ἡ ΝΟ εὐθεῖα, ἡ μὲν ὑπὸ ΟΝΚ γωνία ἔσεται ὀρθὴ, ἡ δὲ ΟΝ ἐ̓ αὐτὴ ἐφάψεται τȣ̃ κύκλȣ· ἄρα κύκλȣ ἐκτὸς σημείȣ δοθέντος τȣ̃ Ο, ἀεὶ ἐξέςαι δύω ἁπτομένας τοῦ κύκλȣ ἀγαγεῖν.

183. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄. Πᾶσαι αἱ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαι (Σχ. 40), ἐὰν βάσιν ἔχωσι τόξον ἡμικυκλίȣ μεῖζον, οἷα ἡ ηΑΔ, εἰσὶν ἀμβλεῖαι· ὀξεῖαι δὲ τȣ̓ναντίον αἱ ἐπὶ τόξȣ ἐλάττονος ἢ ἡμικύκλιον βεβηκυῖαι, ὡς ἡ ηΑΟ· ἐκείνων μὲν γὰρ μέτρον ὂν τὸ ἥμισυ τῆς ἐφ᾽ ἧς βεβήκασι περιφερείας, ἐςι $> 90^\circ$, τȣ́των δὲ $< 90^\circ$.

184. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Ἡ τȣ̃ τμήματος γωνία μετρεῖται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τόξȣ, ὃ ὑποτείνει ἡ σὺν τῇ ἐφαπτομένῃ τὴν γωνίαν περιέχȣσα χορδή· εἴτε γὰρ αὕτη διὰ τȣ̃ κέντρȣ δίεισιν, εἴτε μὴ. (Σχ. 28.)· ἐ̓ εἰ μὲν ἐκεῖνο, ὡς ἡ Αν, τηνικαῦτα ἡ γωνία τȣ̃ τμήματος ἔςαι ὀρθὴ (174), ἐ̓ δὴ μετρηθήσεται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως ἡμικυκλίȣ, ὑφ᾽ ὃ ὑποτείνει ἡ Αν χορδὴ (91)· εἰ δὲ τȣ̃το, ὡς ἡ ΑΔ, ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς κατὰ τὴν ἀφὴν γωνίας ἀχθείσης τῆς διαμέτρȣ ΑΚν, ἡ ὀρθὴ γωνία ὑπὸ νΑΤ μετρηθήσεται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ τόξȣ Δν σὺν τῷ ἡμίσει τȣ̃ τόξȣ ΔρΑ, ὡς μετρȣμένη ὑπὸ τȣ̃ ἡμικυκλίȣ νρΑ· ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΔΑν ὡς πρὸς τῇ περιφερείᾳ μετρεῖται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ Δν τόξȣ (176)· ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΤ, εἴτ᾽ ȣ̃ν ἡ γωνία τȣ̃ τμήματος, μετρηθήσεται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ ΔρΑ τόξȣ, ὃ ὑποτείνει ἡ ΔΑ χορδή.

Καὶ ἡ τȣ̃ μείζονος δὲ τμήματος γωνία ΔΑχ ἐ̓ αὐτὴ μετρεῖται ὑπὸ τȣ̃ ἡμίσεως τȣ̃ μείζονος τόξȣ ΔνΑ, ὑφ᾽ ὃ ἡ χορδὴ αὕτη ὑποτείνει· ἐ̓ γὰρ ΔΑχ = νΑχ +

γΑΔ· ἀλλὰ τῆς μὲν ὀρθῆς γωνίας νΑχ μέτρον τὸ $\frac{1}{2}$ Ατν, τῆς δὲ πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίας νΑΔ, τὸ $\frac{1}{2}$ Δν· ὅλης ἄρα τῆς ΔΑχ, εἴτ' ἂν τῆς τοῦ μείζονος τμήματος γωνίας, μέτρον ἐςὶ τὸ $\frac{1}{2}$ Ατν $+$ $\frac{1}{2}$ Δν $=$ $\frac{1}{2}$ ΑτΔ· ἐν γένει ἄρα μέτρον τῆς τοῦ τμήματος γωνίας ἀεί ἐςι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου, ὑφ' ὃ ὑποτείνει ἡ χορδὴ, ἡ μετὰ τῆς ἐφαπτομένης τὴν γωνίαν περιέχουσα.

185. ΠΟΡΙΣΜΑ Η'. Γωνία ἐκτὸς περιφερείας ἡ ΓΑΠ (σχ. 29.) μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ τόξου ΠΓ πλὴν τοῦ ἡμίσεως τοῦ τόξου Δδ τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν δύω αὐτῆς πλευρῶν· ἀχθείσης γὰρ τῆς ΔΧ παραλλήλου τῇ ΑΠ, ἔςαι ΓΔΧ $=$ ΓΑΠ (132)· ἀλλὰ ἀ. ἡ ὑπὸ ΓΔΧ μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΓΧ τόξου, καὶ δὴ ὑπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΓΠ τόξου πλὴν τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΠΧ

τόξου, εἴγε ΓΧ $=$ ΓΠ $-$ ΠΧ, καὶ δὴ καὶ $\frac{\Gamma X}{2} =$

$\frac{\Gamma\Pi - \Pi X}{2} = \frac{\Gamma\Pi}{2} - \frac{\Pi X}{2}$. β'. ΠΧ$=$Δδ (169)·

ἄρα κτλ.

186. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ'. Ἡ ἁπτομένη ΑΒ (σχ. 38.) θεωρηθῆναι δύναται ὡς τέμνουσα κατὰ τὴν ΑΓ, ἥτις κινεῖται περὶ τὸ ἀκίνητον Α, ἔςτ' ἂν ἐφίκηται τοῦ Β, καὶ τὸ μέρος αὐτῆς ΖΓ ἴσα καὶ μηδὲν γένηται· ὡσαύτως ἡ ΑΕ ἐκληφθῆναι δύναται ὡς ἡ τέμνουσα ΑΔ, ἥτις ἐλαττοῦται μέχρι τοῦ Ε· ἀλλὰ ἡ ΒΑΕ, ὡς γωνία ἐκτὸς τοῦ κύκλου περιεχομένη ὑπὸ τῶν οὕτω τεμνουσῶν, μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΒΗΕ τόξου πλὴν τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΒοΕ (185)· ἄρα ἡ ΒΑΕ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ δύω ἁπτομένων, μετρεῖται

ὑπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ κοίλου τόξου ΒΗΕ, πλὴν τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυρτοῦ τόξου ΒοΕ, ἐφ' ὧν ἄυτη βέβηκε.

187. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι'. Γωνία ἔκκεντρος ἡ ὑπὸ ΧΑΔ (σχ. 30.) μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν τόξων ΧΔ, Πη, τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς προαχθεισῶν· ἀχθείσης γὰρ τῆς Γη παραλλήλου τῇ ΑΔ ἐκ τοῦ η πέρατος τῆς προαχθείσης ΑΧ, ἔσται ΧηΓ $=$ ΧΑΔ (132)· ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΧηΓ· μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΧΓ· μετρεῖται ἄρα ὑπὸ $\frac{1}{2}$ ΧΔ $+$ $\frac{1}{2}$ ΓΔ· ἀλλὰ ΓΔ $=$ Πη (169)· ἄρα ἡ ΧηΓ $=$ ΧΑΔ μετρεῖται ὑπὸ $\frac{1}{2}$ ΧΔ $+$ $\frac{1}{2}$ Πη, ἃ περιέχεται ὑπὸ τῶν αὐτῆς πλευρῶν προαχθεισῶν.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Ἐπιπεδομετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Περὶ σχημάτων.

188. Αἱ γραμμαί, ἐπ' ἀλλήλας μὲν πίπτουσαι, συνιστῶσι τὰς γωνίας· χωρίον δέ τι περικλείουσαι, ποιοῦσι τὸ καλούμενον σχῆμα. Τοιγαροῦν ἐν τῇ ἐπιπεδομετρίᾳ τῇ λέξει σχῆμα σημαίνεται χωρίον τι κατ' ἐπιφάνειαν μόνην πανταχόθεν περικλειόμενον· καὶ αἱ μὲν γραμμαὶ πλευ-

ραὶ τοῦ σχήματος λέγονται· τὸ δὲ ἄθροισμα πασῶν τούτων τῶν γραμμῶν, **περίμετρος** ἀκούει· τὸ δὲ περιπεφραγμένον χωρίον, **ἐμβαδὸν** ἢ ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος· ὃ καὶ συντομίας χάριν σχῆμα ἁπλῶς καλέσομεν, καὶ τρίγωνον δὲ, τετράγωνον κ.τ.λ. εἰπόντες, τὰς αὐτῶν ἐπιφανείας ἐκληψόμεθα.

189. Ἐπιφάνεια **ἐπίπεδος** μὲν, ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον, ὀνομάζεται, ὅταν τὰ ἐπ' αὐτοῦ σημεῖα, οὔτε ταπείνωμα, οὔθ' ὕψωμα, σχηματίζουσι· **κοίλη** δὲ, ὅταν ταπείνωμα· **κυρτὴ** δὲ τέλος, ὅταν ὕψωμα· ἐπίπεδος μὲν τὰ πολλὰ ἐστὶν ἡ τοῦ κατόπτρου ἐπιφάνεια· κυρτὴ δὲ ἡ ἄγγους τινὸς ὑαλίνου, κύλικος φέρε, ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια· κοίλη δὲ, ἡ ἐσωτερικὴ αὐτῆς κενῆς οὔσης.

Τρίγωνον ἀκούει τὸ ὑπὸ τριῶν πλευρῶν περιεχόμενον σχῆμα· (σχ. 41).

190. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τρία ἁτιναοῦν σημεῖα, μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα, διὰ τριῶν ἐπιζευγνύμενα εὐθειῶν, ποιοῦσιν ἀεὶ τὸ τρίγωνον· λέγω μὴ ἐπ' εὐθείας· ἡ γὰρ εὐθεῖα περικλείειν χωρίον οὐ δύναται, οὔτε σχῆμα περιέχειν (188), οὔτε τρίγωνον ἑπομένως.

191. **Τετράπλευρον** δὲ ὀνομάζεται τὸ ὑπὸ τεττάρων πλευρῶν περιεχόμενον σχῆμα (σχ. 52.)· πεντάγωνον δὲ τὸ ὑπὸ πέντε· ἑξάγωνον δὲ, τὸ ὑπὸ ἕξ· ἑπτάγωνον δὲ, τὸ ὑπὸ ἑπτά· ὀκτάγωνον δὲ, τὸ ὑπὸ ὀκτώ. Τέλος δὲ, ἐὰν τὸ σχῆμα ὑπ' ἀπειραρίθμων πλευρῶν ἰσαλλήλων περιέχηται, καὶ ἀπειροστῶν δὲ τῶν αὐτῶν, καὶ ἀπειροστῶς δὲ ἐπ' ἀλλήλας κεκλιμένων, τὸ σχῆμα κληθῆναι **κύκλος** δυνηθήσεται (25, 34).

192. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄρα α΄. τὸ μὲν τρίγωνον ἁπλούστατόν ἐστι πάντων τῶν σχημάτων· β΄. τὸ τρίγωνον καὶ ὁ

κύκλος ὥσπερ δύω ἄκροι ὅροι ἑςήκασι μεταξὺ τῶν ἀπειραρίθμων δυνατῶν σχημάτων, συμποικιλλομένων τῷ τῶν πλευρῶν ἀριθμῷ.

193. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Δίκην οὖν παραθέσεως ὅρων ξυντελοῦσι τὰ δύω ταῦτα σχήματα πᾶσι τοῖς ἄλλοις· καὶ τοίνυν τὰς ἰδιότητας τῶν παντοίων ἑτεροειδῶν σχημάτων, ὡς ἐκ τῶν κατ' αὐτὰ γωνιῶν καὶ πλευρῶν, καὶ τῆς αὐτῶν ἐπιφανείας, γνωσόμεθα διά τε τῶν τριγωνικῶν, καὶ τῶν κυκλικῶν ἰδιοτήτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τριγώνου.

194. Τὸ τρίγωνον, ὡς μὲν ἐκ τῶν ἐν αὐτῷ γωνιῶν θεωρούμενον, ἐὰν μὲν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθὴν, ὀρθογώνιον (σχ. 41.)· ἐὰν δὲ μίαν ἀμβλεῖαν, ἀμβλυγώνιον (σχ. 42.)· ἐὰν δὲ πάσας ὀξείας, ὀξυγώνιον ἤκουσε (σχ. 43.).

195. Ἐκ δὲ τῶν πλευρῶν, ἰσόπλευρον μέν ἐστιν, ἐὰν ὦσι πᾶσαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἰσάλληλοι (σχ. 44)· ἰσοσκελὲς δὲ, ἐάν δύω· σκαληνὸν δὲ, ἐὰν πᾶσαι ὦσιν ἀλλήλαις ἄνισοι (σχ. 42, 43.).

196. Τριγώνου ὕψος καλεῖται κάθετος ἀγομένη ἀπό τινος γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτὴν πλευρὰν, ἣ τηνικαῦτα ἰδίῳ ὀνόματι καλεῖται βάσις· ἐν οὖν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΔΓ (σχ. 41.), τιθεμένης ὡς βάσεως τῆς ΔΓ πλευρᾶς, τὸ ὕψος αὐτοῦ ἔσαι ἡ ΑΔ πλευρὰ, ἡ τῇ βάσει κάθετος ἐφεςηκυῖα. Τοῦ παντὸς μέντοι ἄλλου τριγώνου τοῦ ΑΓΠ (σχ. 42.) ὕψος θηρεύεται, καταγομένης κα-

θέτε ἔκτινος γωνίας τῆς Α ἐπὶ τὴν ἀντίθετον αὐτῇ πλευρὰν ΑΓ, ὡς βάσιν λαμβανομένην, ἥτις, εἴπη παρείκοι, ἢ προάγεται εἰς τὸ τὴν κάθετον αὐτῇ ἐμπεσεῖν.

197. Δύω τρίγωνα, ἀλλήλοις παραβαλλόμενα, ἴσα καλῦνται, ὅταν τὰς πλευρὰς ἢ τὰς γωνίας ἴσας ἔχωσιν ἑκάςην ἑκάςῃ (σχ. 45.).

198. Ὅμοια τρίγωνα λέγονται, ὅταν τὰς γωνίας μόνον ἴσας ἔχωσιν ἑκάςην ἑκάςῃ, τοῦ κατὰ τὰς πλευρὰς μεγέθυς ἀλογυμένυ· ὕτως (σχ. 46.) ἐὰν παρὰ τὴν Α κοινὴν γωνίαν τῶν δυοῖν τριγώνων ΑθΗ, ΑΖΔ, ἡ θ=Ζ, ἢ Η=Δ, τὸ τρίγωνον ΑθΗ ἔςαι ὅμοιον τῷ τριγώνῳ ΑΖΔ διὰ τὴν ἰσότητα πασῶν τῶν ἀντισοίχων γωνιῶν, καίτοι ἄνισον αὐτῷ ὂν διὰ τὴν ἀνισότητα τῶν ἀντισοίχων πλευρῶν.

Τριγώνῳ κύκλος ἐγγεγραμμένος ἐςὶν, ὅταν κύκλος διήκῃ διὰ τῶν ἐν αὐτῷ τριῶν κορυφῶν (σχ. 43.).

199. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Εἴδομεν ἤδη ὡς τρία σημεῖα συνιςῶντα τὰς τρεῖς τῦ τριγώνυ κορυφὰς, ἐπ᾽ εὐθείας κεῖσθαι ὐδέποτε δύνανται (190)· ἀλλὰ διὰ τριῶν σημείων μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων κύκλος ἀεὶ διϊέναι δύναται (166)· διὰ τῶν τριῶν ἄρα κορυφῶν παντὸς τριγώνυ κύκλος διελθεῖν δύναται, ὅ ἐςι πᾶν τρίγωνον κύκλῳ ἐγγραφῆναι δύναται.

200. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Πᾶν ἄρα τρίγωνον ὥσπερεὶ κύκλῳ ἐγγεγραμμένον νοῆσαι ἔχομεν, κύκλον τὰς τρεῖς αὐτῦ κορυφὰς διήκοντα ἐπενθυμύμενοι.

201. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἔςω ἓν τρίγωνον ἅπαν τὸ ΑΠΓ (σχ. 43), ἐγγεγραμμένον κύκλῳ τῷ ΑΠΓδ· ἡ ἓν ἑκάςην τῦ τριγώνυ γωνίαν ὑποτείνυσα πλευρὰ ἔςαι χορδὴ τόξυ, ὗ τὸ ἥμισυ ἐςι μέτρον αὐτῆς τῆς γωνίας· ἡ τὴν Γ γω-

νίαν ὑποτείνουσα ΑΠ ἔσαι χορδὴ τοῦ ΠΒΑ τόξου, οὗ τὸ ἥμισυ καταμετρεῖ τὴν πρὸς τῇ περιφερείᾳ γωνίαν ΠΓΑ (176)· ἡ δὲ ΠΓ πλευρὰ χορδὴ ἔσαι τοῦ ΠδΓ τόξου, οὗ τὸ ἥμισυ τὴν ὑπὸ ΠΑΓ καταμετρεῖ γωνίαν, ὑφ' ἣν ἡ ΠΓ πλευρὰ ὑποτείνει· ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ΑΓ.

202. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Πᾶσα ἄρα τριγώνου κύκλῳ ἐγγεγραμμένου πλευρὰ ἐκληφθείη ἂν ὡς χορδὴ τόξου διπλασίου, ἢ τοῦ μετροῦντος τὴν γωνίαν, ὑφ' ἣν ἡ πλευρὰ ὑποτείνει· καὶ δὴ ἐξέσαι περὶ ἑκάσης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, παραβαλλομένης πρὸς ἣν ὑποτείνει γωνίαν, εἰπεῖν πάνθ' ὅσα εἴρηται περὶ πάσης χορδῆς τοῦ κύκλου, παραβαλλομένης πρὸς ὃ ὑποτείνει τόξον· ἐντεῦθεν ἄρα ἐπαγαγεῖν εὐθέως ἐξέσαι.

203. ά. Ἐν παντὶ τριγώνῳ τῷ ΑΠΓ ἡ μείζων πλευρὰ ὑπὸ τὴν μείζω γωνίαν ὑποτείνει, ὥσπερ καὶ ὑπὸ τὸ μεῖζον τόξον ἡ μείζων χορδή· καὶ τοὐναντίον, ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ἡ γὰρ ΠΓ ἐσι, φέρ' εἰπεῖν, ἡ μείζων πασῶν τῶν πλευρῶν· καὶ ἡ Α δὲ γωνία ἐσι τῶν ἄλλων μείζων, ὑφ' ἣν αὕτη ὑποτείνει· τῆς δὲ ΑΓ ἐλάττονος οὔσης ἑκατέρας τῶν δύω ἄλλων πλευρῶν, καὶ ἡ Π γωνία, ὑφ' ἣν ὑποτείνει ἡ ΑΓ, ἐλάττων ἐσὶν ἑκατέρας τῶν δύω λοιπῶν γωνιῶν.

204. β΄. Τριγώνου δύω πλευραὶ ἴσαι ὑπὸ δύω γωνίας ἴσας ὑποτείνουσιν, ὡς καὶ δύω ἴσαι χορδαὶ κύκλου ὑπὸ ἴσα τόξα ὑποτείνουσι· καὶ τ' ἀνάπαλιν, δύω γωνίαι τριγώνου ἴσαι ἴσαις πλευραῖς ὑποτείνονται.

205. γ΄. Ἄρα τριγώνου ἰσοπλεύρου τοῦ ΠΓΑ (σχ. 44) αἱ τρεῖς γωνίαι Π, Γ, Α ἰσάλληλοί εἰσιν ἐξ ἀνάγκης· καὶ τοὐναντίον, οὗ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ἰσάλληλοί εἰσιν, ἐκεῖνο ἰσόπλευρόν ἐσι.

206. δ'. Τριγώνȣ ἰσοσκελȣ̃ς ἐξ ἀνάγκης δύω γωνίαι ἴσαι εἰσί· ϗ δύω γωνιῶν ἰσαλλήλων ȣ̓σῶν ἐν τριγώνῳ, ἰσοσκελές ἐςι τὸ τρίγωνον.

207. έ. Τριγώνȣ σκαληνȣ̃ (σχ. 43) αἱ τρεῖς γωνίαι ἄνισοι ἀλλήλαις εἰσί· ϗ ȣ̃ τριγώνȣ αἱ τρεῖς γωνίαι ἄνισοί εἰσιν, ἐκεῖνο σκαληνόν ἐςι.

208. Σημειώσεως ἄξιον, ὡς αἱ πλευραὶ ȣ̓κ εἰσὶν ἀνάλογοι ταῖς, ὑφ' ἃς ὑποτείνȣσι, γωνίαις· ὥσπερ ἀμέλει ϗ αἱ χορδαὶ συναύξȣσι μὲν ϗ συναπομειȣ̃νται τοῖς τόξοις, αὐτοῖς μέντοι ἀναλογȣ̃σιν ἥκιςα (54).

209. Θεώρημα ςοιχειῶδες. Παντὸς τριγώνȣ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ὑπὸ ἡμικυκλίȣ μετρεῖται, ὅ ἐςιν, αἱ τρεῖς παντὸς τριγώνȣ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἅπαν τρίγωνον, ὅσον ἂν ᾖ ἀκανόνιςον, ἐγγεγραμμένον ὑποτεθῆναι δύναται κύκλῳ (199), ὡς τὸ ΠΓΑ· ἀλλὰ τῆς μὲν Π γωνίας μέτρον ἐςὶ τὸ ἥμισυ τȣ̃ τόξȣ ΑνΓ (176)· τῆς δὲ Α, τὸ ἥμισυ τȣ̃ τόξȣ ΠδΓ· τῆς δὲ Γ, τὸ ἥμισυ τȣ̃ τόξȣ ΠΒΑ· ἄρα τῶν τριῶν γωνιῶν ὁμȣ̃ Π, Γ, Α μέτρον ἐςὶ τὸ $\frac{1}{2}$ ΑνΓ + $\frac{1}{2}$ ΠδΓ. + $\frac{1}{2}$ ΠΒΑ, ὅπερ ἐςὶ τὸ ἥμισυ τȣ̃ ὁλικȣ̃ κύκλȣ ΠΒΑΓΔ, εἴτ' ȣ̓̃ν τὸ μέτρον τῶν δύω ὀρθῶν γωνιῶν (91) Ο. Ε. Δ.

210. ΠΟΡΙΣΜΑ. Α'. ά. Ἐὰν τριγώνȣ μία γωνία ᾖ ὀρθή, αἱ λοιπαὶ δύω ἐξ ἀνάγκης ἔσονται ἑκατέρα ὀξεῖα· μιᾶς γὰρ ȣ̓́σης ὀρθῆς, αἱ λοιπαὶ δύω ὀρθῇ μιᾷ ἰσωθήσονται· ἑκατέρα ἄρα ὀρθῆς ἔςαι ἐλάττων, ὅ ἐςιν ὀξεῖα· β'. τῶν δύω γωνιῶν ἐγνωσμένων, ἀφαιρέσει τȣ́των ἀπὸ 180°, γνωσθήσεται ϗ ἡ τρίτη· γ'. μιᾶς ἐγνωσμένης, ἀφαιρέσει ταύτης ἀπὸ 180°, γνωσθήσεται τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν δύω.

211. **ΟΡΙΣΜΟΣ.** Γωνίας καλεῖται *παραπλήρωμα* γωνία, ἡ σὺν γωνίᾳ δοθείσῃ, γωνίαν ὀρθὴν συμπληροῦν, ἢ ἡ μετὰ δοθείσης γωνίας ἰσουμένη 90°· *ἀναπλήρωμα* δὲ, ἡ μετὰ γωνίας δοθείσης ἀναπληροῦσα τὸ ἄθροισμα ὀρθῶν γωνιῶν δύω (σχ. 2)· οὕτως ἡ μὲν ὑπὸ ΑΠΖ γωνία παραπλήρωμά ἐστι τῆς ὑπὸ ΖΠΟ γωνίας, ὡς ἐκείνη σὺν ταύτῃ γωνίαν παραπληροῦσα 90°· ἡ δὲ ΖΠΟ ἀναπλήρωμά ἐστι τῆς ΖΠβ, ἅτε δὴ ὁμοῦ ἄμφω ἀναπληροῦσαι δύω ὀρθὰς, ὧν μέτρον ἐστὶν 180°.

212. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.** Τριγώνου ὀρθογωνίου τοῦ ΑΓΔ (σχ. 41) τῶν δύω ὀξειῶν γωνιῶν Α, Γ ἑκατέρα μὲν παραπλήρωμά ἐστι θατέρας· ἄμφω δὲ ἀναπλήρωμα τῆς ὀρθῆς Δ.

213. **ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.** Εἴπερ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ παρὰ τὴν ὀρθὴν εἰσὶν ἑκατέρα τῶν γωνιῶν ὀξεῖα, πολλῷ μᾶλλον ἔσονται τοῦτο ἑκατέρα τῶν παρὰ τὴν ἀμβλεῖαν γωνιῶν παντὸς ἀμβλυγωνίου τριγώνου· ἄρα α. πᾶν τρίγωνον οὐ δύναται ἔχειν ὀρθὰς γωνίας δύω, μήτιγε δύω ἀμβλείας, οὔτε μὴν ὀρθὴν μίαν, καὶ μίαν ἀμβλεῖαν· β΄. ἀμβλυγωνίου παντὸς τριγώνου τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύω ὀξειῶν γωνιῶν ἔσται ἔλαττον ἢ 90°.

214. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Τριγώνου ἀμβλυγωνίου ἡ ἀμβλεῖα γωνία ἐπαύξεσθαι δύναται μέχρι τοῦ παραλήγοντος λεπτοῦ τῶν 180° (93), εἶτ' οὖν δύναται εἶναι ἀπείρως μείζων τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύω ἄλλων γωνιῶν· ἐκ τούτου μέντοι οὐ δύναται καὶ ἡ τὴν ἀμβλεῖαν ὑποτείνουσα πλευρὰ ἀπείρως εἶναι μείζων τοῦ ἀθροίσματος τῶν δυεῖν ἄλλων πλευρῶν, ἀλλ' οὐδ' ἐξισοῦσθαι αὐταῖς ἔχει· ἔστι μὲν γὰρ ἡ Π γωνία (σχ. 48) πολλῷ μείζων τῶν δυεῖν λοιπῶν ἅμα ληφθεισῶν Α, Γ· ἀλλ' ἡ ταύτην ὑποτείνου-

ςα πλευρὰ ΑΓ, πρὸς τῷ μὴ εἶναι μείζων, ἢ ἐλάττων ἐςὶν ἀναγκαίως τῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν πλευρῶν ΑΠ, ΠΓ τῶν τὰς δύω λοιπὰς ὑποτεινȣσῶν γωνίας· ἡ μὲν γὰρ ΑΓ ἐςὶν εὐθεῖα, ἡ δὲ $ΑΠ + ΠΓ = ΑΠΓ$ ἐςὶ γραμμὴ γωνιώδης, ἢ δὴ μείζων τῆς ΑΓ εὐθείας (17)· ἐντεῦθεν μᾶλλον καταφαίνεται, ὡς τριγώνȣ ὑπὸ τὴν μείζω μὲν γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ȣ μέντοι παρὰ τῦτο αἱ γωνίαι ἀνάλογοι ὑπάρχȣσι ταῖς αὐτὰς ὑποτεινȣσαις πλευραῖς.

215. ΟΡΙΣΜΟΣ. Γωνία ἐκτὸς τριγώνȣ καλεῖται ἡ περιεχομένη ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ΠΓ ἢ ἑτέρας προεκβληθείσης τῆς ΑΠ· προσκειμένη δὲ ἡ ἐφεξῆς τῆς ἐκτὸς, ἥπερ ἐντὸς τῦ τριγώνȣ κεῖται· οἷα ἡ Ρ.

216. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Η ἐκτὸς γωνία παντὸς τριγώνȣ ἡ ε ἴση ἐςὶ ταῖς παρὰ τὴν προσκειμένην δυσὶν ἐντὸς τῦ τριγώνȣ γωνίαις Α, Γ· ἢ γὰρ $ε + Ρ = 180°$ (98)· ἀλλὰ $Ρ + Α + Γ = 180°$ (220)· ἄρα $Α + Γ = 180° - Ρ$· ἀλλὰ $ε = 180° - Ρ$· ἄρα $ε = Α + Γ$.

217. ΘΕΩΡΗΜΑ. Παντὸς ἰσοσκελῦς τριγώνȣ ΑΠΓ ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῇ βάσει κάθετος ἀγομένη ΑΘ (σχ. 42) δίχα τέμνει ά. τὴν βάσιν ΠΓ· β΄. τὴν γωνίαν Α.

ΔΕΙΞΙΣ. Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαςήματι δὲ τῷ ΑΠ γεγράφθω τόξον τὸ ΓοΠ· εὔδηλον ὂν ὡς ἡ ΑΘο ἀκτὶς, κάθετος τῇ ΠΓ χορδῇ, δίχα τέμνει ά. τὴν χορδὴν αὐτὴν ΠΓ· β΄. τὴν γωνίαν Α (157, 159)· Ο. Ε. Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ ὁμοίων τριγώνων.

218. **ΘΕΩΡΗΜΑ.** Τρίγωνα, ὧν δύω γωνίαι δυσὶ γωνίαις εἰσὶν ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅμοιά εἰσιν.

ΔΕΙΞΙΣ. Δύω γὰρ τριγώνων τῶν ΑΖΔ, ηΧδ (Σχ. 46) ἔστω $Α=η$ καὶ $Δ=δ$· ἔσται δὴ καὶ $Ζ=χ$, κἀκ τούτου τὰ δύω τρίγωνα ὅμοια (198)· ἔστι γὰρ ἐν τῷ μὲν ΑΖΔ τριγώνῳ $Α+Ζ+Δ=180°$ (209)· ἐν δὲ τῷ ηΧδ τριγώνῳ $η+Χ+δ=180°$· ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως $Α+Δ=η+δ$· ἄρα $180°-Α-Δ=180°-η-δ$ (Ἀριθ. 14), ὅ ἐστι $Ζ=Χ$. Ο. Ε. Δ.

219. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α'.** Ἵν' οὖν ἐπὶ χάρτου ποιήσωμεν τρίγωνον ὅμοιον τῷ κατὰ γῆν ΑΖΔ, πρᾶξις συχνὴ ἐν τῇ πρακτικῇ Γεωμετρίᾳ· α'. διὰ τοῦ γραφομέτρου μετρείσθωσαν δύω γωνίαι αἱ Α, Δ τοῦ ΑΖΔ μεγάλου τριγώνου (87)· β'. ἤχθω ἐπὶ τοῦ χάρτου εὐθεῖά τις ἡ ηδ, καὶ ἐκ τῶν κατ' αὐτὴν περάτων διὰ τοῦ ἀναγωγέως ἤχθωσαν αἱ ηΧ, δΧ ὑπὸ γωνίας τὰς η, δ ἴσας ταῖς κατὰ γῆν Α, Δ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ (84). Τὸ οὖν μικρὸν τρίγωνον ηδΧ τὸ οὕτως ἐπὶ τοῦ χάρτου κατασκευασθὲν, ἔχον δύω γωνίας δυσὶ γωνίαις τοῦ κατὰ γῆν ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ὅμοιον αὐτῷ ἔσεται (218).

220. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.** Ἐὰν τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ τριγώνου τρισὶ πλευραῖς ὦσι παράλληλοι, ὅμοιά εἰσι τὰ τρίγωνα· ἐμπεριεχέσθω γὰρ τὸ ἔλαττον τῶν δύω τριγώνων τῷ μείζονι (Σχ. 49), καὶ τὰς ἑαυτοῦ πλευρὰς παραλλήλους ἐχέτω ταῖς τοῦ μείζονος· φημὶ δὴ, ὡς τὰ

ΑΔΠ, δχΘ εἰσὶν ὅμοια· προεκβληθείσης γὰρ ἑκατέρωθεν τῆς χΘ πλευρᾶς τοῦ ἐλάττονος τριγώνου ἐς τὰς δύο πλευρὰς τοῦ μείζονος, ἡ ὑπὸ ΘοΠ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ Θχδ (132), ἀλλὰ καὶ ο=Α (αὐτόθ.) ἄρα ἡ τοῦ ἐλάττονος γωνία χ=Α γωνίᾳ τοῦ μείζονος· διὰ δὲ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἡ Θ γωνία τοῦ ἐλάττονος ἴση τῇ Δ γωνίᾳ τοῦ μείζονος. Τὸ ἔλαττον ἄρα τρίγωνον χδΘ, ἔχον δύο γωνίας ἴσας δυσὶ γωνίαις τοῦ μείζονος ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ὅμοιον αὐτῷ ἔσται (218).

ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Δύω τρίγωνα, ὧν ἀλλήλαις αἱ πλευραὶ κάθετοι ἐφεστήκασιν, ἔστιν ὅμοια· ἔστωσαν γὰρ τριγώνου τοῦ ΘΖΜ (σχ. Α. 49) αἱ πλευραὶ κάθετοι ταῖς τοῦ ΑΒΓ, καὶ περιήχθω περὶ τὸ σημεῖον Θ τὸ τρίγωνον ΖΘΜ, μέχρις ἂν ἡ ΘΖ εὐθεῖα κυκλικὸν καταγράψῃ τεταρτημόριον· δῆλον οὖν ὅτι ἡ μὲν τῇ ΑΓ κάθετος ΖΘ παράλληλος ἔσται τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΘΜ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΒΓ, τοῦτ᾽ ἔστιν αἱ θατέρου τριγώνου πλευραὶ ταῖς θατέρου παράλληλοι ἔσονται ἑκάστη ἑκάστῃ, καὶ δὴ τὰ τρίγωνα ὅμοια (ἀνωτ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ ἴσων τριγώνων.

221. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύω τρίγωνα ΑΠΔ, χπδ ἴσα (σχ. 45) ἔσονται, ἑνὸς δοθέντος τῶν τριῶν· ά. ἐὰν τὰ δύω τρίγωνα μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχωσι, καὶ δύω γωνίας δυσὶ γωνίαις ταῖς πρὸς ταύτῃ τῇ πλευρᾷ ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· β΄. ἐὰν δύω πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσας ἔχωσι, ἔχωσι δὲ ἴσην καὶ τὴν