νιῶν, τῶν συνισταμένων ὑπὸ δύω ἀλλήλαις διατεμνομένων εὐθειῶν, καὶ αἱ ἄλλαι τρεῖς γνωσθήσονται· ἔστω γὰρ ἡ α = 150°· καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν ἄρα αὐτῇ Γ = 150°· εἰσὶ δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι α, η ὁμοῦ ἴσαι μοίραις 180· ἀλλ' α = 150°· ἄρα η = 30°· ἄρα καὶ χ = 30°.

101. δ'. Μιᾶς ἄρα τούτων τῆς χ ὀρθῆς οὔσης (σχ. 6), καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων τριῶν ὀρθὴ ἔσεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ τῆς Καθέτου.

102. Τῆς ηβ εὐθείας καθέτου τῇ κδ ἐφεστώσης, ἐὰν ληφθῶσι δύω σημεῖα τὰ κ, Ι ἰσοδιεστῶτα τοῦ σημείου β, ὃ ἐστι κοινὸν τῆς τε βη, καὶ τῆς κδ, ὡς εἶναι βκ = βΙ, φημὶ δὴ, ὡς καὶ ἅπαν ἄλλο σημεῖον τῆς βη καθέτου ἴσον ἀπέχει τῶν δύω σημείων κ, Ι τῆς κδ εὐθείας· ἴσον φέρε ἀπέχει τὸ η τῶν κ, Ι, καὶ ἔστιν ηκ = ηΙ· εἰ μὴ γάρ· ἔστω ἐγγύτερον τῷ κ, ἢ τῷ Ι· καὶ ἐπεὶ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ β σημεῖον ταύτης τῆς καθέτου ἴσον ἀπέχει τοῦ τε κ καὶ τοῦ Ι· ἀναγκαίως ἡ κάθετος βη μᾶλλον ῥέψει πρὸς τὰ ἐπὶ κ, ἢ πρὸς τὰ ἐπὶ Ι· οὐκ ἔστιν ἄρα κάθετος, ὅπερ ἄτοπον· ὡσαύτως δὲ καὶ ἅπαν σημεῖον τῆς καθέτου ἴσον ἀπέχει τῶν δύω τούτων σημείων· εἴτ' οὖν ἔστιν Οκ = ΟΙ καὶ ἑξῆς ὁμοίως.

103. Ἐὰν κάθετος ἡ ηβ προαχθῇ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ αὐτὴ ἀεὶ ἐκληφθήσεται εὐθεῖα (19)· καὶ τοίνυν δύω σημεῖα ἱκανά εἰσιν ὁρίσασθαι τὴν θέσιν τῆς εὐθείας (20)· ἐπεὶ οὖν δύω σημεῖα β, η τῆς καθέτου ηβΖ ἴσον ἀπέχουσιν ἕκαστον

τῶν δύω σημείων κ, Ι τῆς εὐθείας κδ, ἅπαν ἄρα τῶν ἄλλων ταύτης τῆς καθέτου σημείων, εἴτ' οὖν καὶ τῶν πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ αὐτὸ δὴ τὸ Ζ, ἴσον ἀπέχει τῶν κ, Ι, καὶ δὴ ἔστι Ζκ = ΖΙ. Τοὐναντίον δὲ, ἐὰν δύω σημεῖα εὐθείας ἴσον ἀπέχωσιν ἕκαστον δύω σημείων ἑτέρας εὐθείας, ἐκείνη ταύτῃ πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ἐὰν γὰρ τῆς ηβ εὐθείας τὸ β σημεῖον ἴσον ἀπέχῃ τοῦ κ καὶ Ι, ἕτερόν τι σημεῖον τὸ η τῆς αὐτῆς εὐθείας οὐ μὴ δυνήσεται ἴσον ἀπέχειν τῶν κ, Ι, εἰ μὴ, ἐὰν ἡ βη εὐθεῖα μὴ μᾶλλον ῥέπῃ ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ η, ἢ ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Ι, ἢ καὶ τοὔμπαλιν· ἄρα ἡ βη κάθετος ἔσται τῇ κδ (69), ἔχουσα δύω σημεῖα ἴσον ἕκαστον ἀπέχοντα δύω σημείων τῆς εὐθείας κδ.

104. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἀφ' ἑνὸς ἄρα σημείου τοῦ Α (Σχ. 13) ὃ οὐκ ἔστιν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΟ, δοθέντος, κάθετον αὐτῇ στησόμεθα κατὰ τάδε. α'. κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ τυχόντι (65), σημειωθήτωσαν δύω σημεῖα τὰ Ζ, Ο ἐπὶ τῆς εὐθείας ΖΟ· β'. κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ βραχύτι ἐλάσσονι τοῦ ΑΖ, γεγράφθω τόξον κυκλικὸν ἀόριστον τὸ ΠΔ· γ'. κέντρῳ μὲν θατέρῳ τῶν σημείων Ο, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ, γεγράφθω ἕτερον τόξον ἀόριστον τὸ ΓΘ· δ'. ἤχθω διὰ τῶν σημείων Α καὶ κ, καθ' ὃ τέμνουσιν ἄλληλα τὰ δύω τόξα, ἡ εὐθεῖα ΑκΕ, ἥτις ἔσται ἡ ἐπιταχθεῖσα κάθετος, ὡς φανήσεται.

Ἐκ γὰρ τῆς κατασκευῆς τό,τε Α σημεῖον αὐτῆς ἴσον ἀπέχει δυοῖν σημείοιν Ζ, Ο τῆς εὐθείας ΖΟ· καὶ τὸ κ δὲ τῆς αὐτῆς ΖΟ ἀπέχει ἴσον τῶν αὐτῶν σημείων Ζ, Ο· εἰσὶ γὰρ ἀκτῖνες ἴσων κύκλων αἱ Ζκ, Οκ· ἐπεὶ οὖν τῇ ΑκΕ εὐθείᾳ ἔστι σημεῖα δύω, ἕκαστον ἴσως ἀφιστάμενον δυοῖν σημείων Ζ, Ο τῆς ΖΟ εὐθείας· ἡ ἄρα ΑκΕ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΖΟ ἐφέστηκε (103).

105. Τὐναντίον δὲ ἵν᾽ ἐκ τῦ σημείυ Ε εὐθείας δεδομένης τῆς ΖΟΕ κάθετος ἐγερθῇ· α΄. κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διαςήματι δὲ τῷ τυχόντι, σεσημειώσθων δύω σημεῖα Ζ, Ο· β΄. κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαςήματι δὲ μικρῷ μείζονι ἢ τὸ ΕΖ, γεγράφθω τόξον κύκλυ τὸ ΠΔ· γ΄. κέντρῳ μὲν τῷ Ο, διαςήματι δὲ τῷ αὐτῷ, γεγράφθω τόξον τὸ ΓΘ· δ΄. ἀπὸ τῦ σημείυ κ, καθ᾽ ὃ διατέμνυσιν ἄλληλα τὰ τόξα, ἐπὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Ε ἐπεζεύχθω ἡ κΕ, ἥτις ἔςαι κάθετος τῇ ΖΟ ἐπὶ τῦ Ε σημείυ· ἐκ γὰρ τῆς κατασκευῆς τῦ σχήματος τό, τε σημεῖον αὐτῆς Ε ἴσον ἀπέχει δυοῖν σημείων τῶν Ζ, Ο, ᾗ τὸ κ τῶν αὐτῶν ἴσον ἀφίςαται (103).

106. Τῇ αὐτῇ (σχ. 14) μικρῦ δεῖν χρησάμενοι κατασκευῇ δίχα τεμῦμεν εὐθεῖαν δοθεῖσαν τὴν Δβ· κέντρῳ μὲν γὰρ τῷ Δ πέρατι τῆς δοθείσης εὐθείας, διαςήματι δὲ μείζονι, ἢ τῷ ἡμίσει αὐτῆς, γεγράφθω κύκλυ τόξον ἀόριςον τὸ πΕΧ· κέντρῳ δ᾽ αὖ θατέρῳ πέρατι τῷ β, διαςήματι δὲ τῷ αὐτῷ, γεγράφθω τόξον τὸ κΚΓ· εὐθεῖα ἦν ἡ ἀπὸ τῦ Ο ἐπὶ τὸ Η, καθ᾽ ἃ διατέμνονται ὑπ᾽ ἀλλήλων τὰ τόξα, ἀχθεῖσα, τεμεῖ δίχα τὴν Δβ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Ζ.

Τὸ γὰρ τῦ Ο ἀπὸ τῦ Δ ᾗ ἀπὸ τῦ β ἀπόςημα ἐςὶ τὸ αὐτὸ, ὡς ὂν τὸ διάςημα, δι᾽ ῦ ἐγράφησαν τὰ κυκλικὰ τόξα· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ᾗ τὸ Η ἴσον ἀπέχει τῦ τε Δ, ᾗ τῦ β· ὐκῦν εὐθείας τῆς ΟΖΗ δυοῖν σημείοιν τοῖν Δ, Η ἴσον ἀπεχόντοιν ἀπὸ δύω σημείων τῶν Δ, Β, ᾗ τὸ Ζ αὐτῆς σημεῖον ἴσον ἀπέχει τῶν Δ, β (102, 103)· ἄρα τὸ Ζ ἐςὶ τὸ μέσον σημεῖον τῆς Δβ εὐθείας· ἄρα ὕτως ἡ Δβ δίχα τέτμηται.

107. Ἀλλὰ γὰρ ἵνα τὰ αὐτὰ κἀπὶ τῆς γῆς ἐργασώμεθα, μετιτέον τὰ ἑξῆς.

108. Ἵν' ἀπὸ σημείου δοθέντος τοῦ Α κάθετος ἀχθῇ τῇ εὐθείᾳ ΖΟ (σχ. 13), γνώμονος ἐπιμηκεστέρου ἡ μὲν κορυφὴ τεθήτω ἐπὶ τὸ Ε, ἡ δ' ἑτέρα τῶν αὐτοῦ πλευρῶν ἐφηρμόσθω τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἁτέρα δὲ τεινάτω ἐπὶ τὸ Α· εὐθεῖα οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Ε ἀχθεῖσα ἔσεται ἡ ζητουμένη κάθετος· ὁ δὲ λόγος καθ' ἑαυτὸν σαφής· ὁ γὰρ γνώμων οὐδὲν ἀλλ' ἢ εὐθεῖά τις ἐστὶ κάθετος ἑτέρᾳ εὐθείᾳ τῇ ΖΕ· αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ τῶν ἐπὶ γῆς εὐθειῶν οὐδενὶ διαφέρουσιν, ἀλλ' ἢ τῷ μήκει.

109. Ἵν' ἐπὶ γῆς ἐγερθῇ κάθετός τις εὐθείᾳ τῇ ΖΟ ἀφ' ἑνὸς αὐτῆς δοθέντος σημείου τοῦ Ε, τῆς τοῦ γνώμονος κορυφῆς τεθείσης ἐπὶ τοῦ δοθέντος σημείου Ε, καὶ μιᾶς αὐτοῦ πλευρᾶς ἐφηρμοσμένης τῇ ΖΟ, διευθυνέσθω ἁτέρα πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Α, καὶ προσπηγνύσθω πάσσαλος ἐπὶ ταύτης τῆς φορᾶς ἐνδεικνυμένης τῇ τοῦ γνώμονος πλευρᾷ κατὰ τὸ Α φέρε· εὐθεῖα οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Ε ἀχθεῖσα ἔσται ἡ ζητουμένη κάθετος· ὃ καθ' ἑαυτὸ πρόδηλον.

110. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Τοῦ γνώμονος χρησιμωτάτου ὄντος ὀργάνου, οὐκ ἄχρηστον ἂν εἴη ἀποδοῦναι, ὅπως ἂν δειχθείη ἡ κατ' αὐτὸν ἀκρίβεια.

α΄. Ἤχθω εὐθεῖα ἅλις ἐπιμήκης ἡ ΖΟ ἐπὶ λείου πίνακος· β΄. ἐπιτεθείσης ἀκριβῶς μιᾶς τῶν τοῦ γνώμονος πλευρῶν τῷ μέρει ΕΟ ταύτης τῆς εὐθείας, ἤχθω ἐπὶ τοῦ πίνακος εὐθεῖα ἡ ΑΕ κατὰ μῆκος τῆς ἑτέρας πλευρᾶς ΑΕ· γ΄. τῆς κορυφῆς τοῦ γνώμονος ἐπὶ τοῦ Ε μενούσης, περιήχθω ἐκ δεξιῶν ἐπὶ τὰ λαιὰ ἡ τῇ ΕΟ ἐπιτεθειμένη πλευρὰ, καὶ ἣν ἐφαρμοσθῇ ἀκριβῶς τῇ ΖΕ, ἡ μὲν πλευρὰ ΑΕ συμπεσεῖται τῇ κατ' ἀρχὰς ἀχθείσῃ κατὰ μῆκος τὸ ταύτης εὐθείᾳ ΑΕ, συναχθήσεται δὲ, ὡς ὁ γνώμων ἐστὶν ἀσφαλής· κείσθω γὰρ, ὅτι ἡ τοῦ γνώμονος γωνία ὀφείλουσα ἐπ' ἀκριβὲς εἶναι 90°, ἐστιν < 90°· ἐκοῦν καὶ ἡ ΑΕ εὐθεῖα ἡ κατ' ἀρχὰς ἀχθεῖσα ἐπὶ τοῦ πίνακος, ποιήσει ἐπὶ τῆς ΕΟ γωνίαν < 90°, καὶ δὴ ῥέψει πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ο· ἐπιτιθεμένου ἄρα τοῦ γνώμονος ἐπὶ θάτερα, καὶ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ μενούσης ἐπὶ τοῦ Ε, τὸ πέρας τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν ἀντὶ τοῦ συμπεσεῖν τῇ ΑΕ ἀποστήσεται αὐτῆς δὶς τοσούτῳ, ὅσῳ ἡ τοῦ γνώμονος γωνία ἐλασσοῦται τῶν 90°· καὶ γὰρ ἡ πρὸς δεξιὰν γωνία σὺν τῇ πρὸς ἀριστερὰν συνιστάμεναι ἀμφότεραι ἐπὶ τῆς ΖΟ εὐθείας διὰ τῆς πλευρᾶς ΑΕ τοῦ γνώμονος ἰσοδυναμοῦσι 180° (89) αἱ δύω ἄρα πλευραὶ τοῦ γνώμονος οὐ μὴ ἐφαρμοσθήσονται τῇ ΑΕ καὶ ΕΟ, εἶτα τῇ ΑΕ καὶ ΕΖ, εἰ μὴ περιέχοιεν γωνίαν ἐπ' ἀκριβὲς = 90°.

111. **ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.** Ἐπείπερ ἡ τοῦ γραφομέτρου εὐθεῖα ΑΓ (σχ. 9), ἐφ' ἧς τῷ πέρατι Α σεσημείωται 90, σὺν τῇ ΓΗ εὐθείᾳ συνιστῶσιν ὀρθὴν γωνίαν, καὶ ἐκ τοῦ ἀκολούθου γνώμονα, εὐμαρέστερον χρησόμεθα ἐπὶ τῶν προλαβουσῶν πράξεων τῷ γραφομέτρῳ, ἢ τῷ γνώμονι.

112. Ἵνα δίχα τμηθῇ εὐθεῖα ἐπὶ γῆς, ἤ, ὃ ταυτὸν, ἵν' εὑρεθῇ τὸ μεσαίτατον ταύτης μέρος, ἐκτείναντες ἐπ' αὐτῆς ἅλυσιν σιδηρᾶν (ἢ σχοῖνον) συνάπτομεν τὰ δύω πέρατα τῆς ἁλύσεως, τὰ συμπεπτωκότα τοῖς πέρασι τῆς εὐθείας· τῆς ἁλύσεως τοίνυν οὕτω διπλασιασθείσης, τὸ μέσον ἐμφανεῖ τῆς εὐθείας τὸ μεσαίτατον· ὃ καθ' ἑαυτὸ σαφές.

113. ά. Ἡ κάθετος ΠΓ (σχ. 15) ἐκ τοῦ Π ἐπὶ τῆς ΑΔ καταχθεῖσα, ἡ ἐλαχίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀχθεῖναι δυναμένων ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν· πᾶ-

σα γὰρ ἄλλη εὐθεῖα ἡ ΠΖ πλαγία πίπτουσα ἐπὶ τῆς ΑΔ μείζων ἔσαι τῆς ΠΓ.

114. β'. Τὸ ἀληθὲς μέτρον τῦ ἀποσήματος, ᾧ σημεῖον ἀπέχει ἀπ' εὐθείας, ὀφείλει εἶναι ἐπάναγκες ἡ ἐλαχίςη εὐθεῖα τῶν ἀπ' αὐτῦ τῦ σημείυ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἀχθῆναι δυναμένων· ἄλλως γὰρ, ἐπεὶ ἐκ σημείυ ἐπ' εὐθεῖαν ἀπειράριθμοί εἰσιν ὁδοὶ, βραχύτεραι, ἢ ἐπιμηκέςεραι, εἴτις ἄλλη παρὰ τὴν ἐλαχίςην ληφθείη, ὐκ ἂν γένοιτο μέτρον μόνιμον τῦδε τῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας ἀποσήματος· ἀλλὰ ἡ κάθετος ἔςιν ἡ ἐπιτομωτάτη ὁδὸς τῶν ἀπό τινος σημείυ ἐπὶ εὐθεῖαν διατεινυσῶν (113), ἔςιν ἄρα τὸ ἀληθὲς μέτρον τῦ σημείυ ἀπ' εὐθείας ἀποσήματος.

115. γ'. Τὐναντίον δὲ, ἐὰν εὐθεῖα ἐπιτομωτάτη ᾖ ὁδὸς τῶν ἀπὸ σημείυ τινὸς ἐπ' εὐθεῖαν τεινυσῶν, αὕτη κάθετος αὐτῇ ἐφέςηκε.

116. δ'. Μία ἄρα κάθετος ἀπὸ σημείυ ἐπ' εὐθεῖαν ἀχθῆναι δύναται.

117. ε'. Δύω πλάγιαι (σχ. 16) αἱ ΑΓ, ΑΟ ἀχθεῖσαι ἀπὸ τῦ αὐτῦ σημείυ Α ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΕ, ἐὰν ἴσον ἀπέχωσι τῆς καθέτυ ΑΔ, ὅ ἐςιν ἐὰν ἴσον ὦσι κεκλιμέναι, εἰσὶν ἰσάλληλοι, καὶ τ' ἀνάπαλιν.

118. ς'. Ἐὰν δὲ δυεῖν πλαγίων ΑΕ, ΑΟ, ἡ ΑΕ μᾶλλον ἀπέχῃ τῆς καθέτυ, ἢ ἡ ΑΟ, ἡ μᾶλλον ἀπέχυσα μείζων ἔςαι τῆς ἧττον· καὶ τ' ἀνάπαλιν, ἡ μείζων μᾶλλον τῆς καθέτυ ἀπέχει, ἢ ἡ ἐλάττων.

119. Ἐντεῦθεν ἄρα σημείυ τῦ Α ἐκτὸς εὐθείας τῆς ΒΕ δοθέντος, ἀπ' αὐτῦ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, κάθετον μὲν μίαν, πλαγίας δὲ μονονὐκ ἀπείρυς ἐφ' ἑκάτερα τῆς καθέτυ ἀγαγεῖν δυνησόμεθα ἴσας, ἀνὰ δύω λαμβανομένας· ὥσπερ εἰσὶν ΑΓ = ΑΟ, ΑΒ = ΑΕ, κτλ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ Παραλλήλων εὐθειῶν.

120. Παράλληλοι λέγονται δύω γραμμαὶ αἱ ΠΔ, Ικ, (σχ. 17) ὅταν μεταξὺ πάντων τῶν ἐν αὐταῖς ἀντιςοίχων σημείων τὸ αὐτὸ ᾖ ἀπόςημα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι, καὶ ἐπ᾿ ἄπειρον ἦν προαχθῶσιν, οὐδέποτε συμπεσοῦνται ἀλλήλαις· ἐὰν γὰρ ὑποτεθῶσιν, ὅτι ἔντινι σημείῳ συμπίπτουσι, ψευδὲς ἔςαι, ὅτι ἐν αὐτῷ τῷ σημείῳ ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας τὸ αὐτὸ ἀπόςημα, ὃ ϗ ἐν τοῖς ἄλλοις· παύσονται ἄρα οὕτως οὖσαι παράλληλοι.

121. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐξέςαι ἄρα τὰς παραλλήλους ὁρίσαι οὕτω „παράλληλοί εἰσιν αἱ, ϗ ἐπ᾿ ἄπειρον „προαγόμεναι, ἀλλήλαις μὴ συμπίπτουσαι.“

122. ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄. Καίπερ δύω παράλληλοι ἀκριβῶς συμπεσεῖν ἀλλήλαις οὐδύνανται, κἂν ἐπ᾿ ἄπειρον προαχθῶσι· μετὰ γεμὴν ἄπειρον μόνην προαγωγὴν συμπίπτειν ἀλλήλαις ὑποτεθεῖσαι, ἀεὶ ἐκλαμβάνεσθαι ὡς παράλληλοι αὖθις δύνανται· ἐπεὶ γὰρ, ἐν ταύτῃ τῇ ὑποθέσει, προαχθῆναι ἐπ᾿ ἄπειρον ὀφείλουσιν, ἵν᾿ ἀφανισθῇ τὸ μεταξὺ αὐτῶν πεπερασμένον ἀπόςημα, ὅσῃ ἂν αὐταῖς πεπερασμένῃ προαγωγὴ προσυποτεθείη, ἀπειροςόντι ἀλλήλαις πελάσουσιν· ἐὰν ἄρα ὡς παράλληλοι ἐκληφθῶσιν, ὅ,τι δὴ μῆκος ἂν ἔχωσι πεπερασμένον, τὸ διάπτωμα ἔςαι ἀπειροςόν, ϗ παρορατέον ἐν τῷ λογισμῷ τῶνδε τῶν εὐθειῶν· πολλάκις δὲ εἰς χρῆσιν ἥκει τῇ ὑψηλοτέρᾳ Γεωμετρίᾳ αὕτη ἡ σημείωσις.

123. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἀλλὰ δὴ τῦ ἀποςήματος, ἐν ᾧ συνίασι δύω εὐθεῖαι αἱ ΠΔ, Ικ, μὴ ὄντος μὲν πράγματι ἀπείρυ, ἀσυγκρίτως δὲ μείζονος, ἢ τὸ ἀπόςημα Γχ, ᾧ ἀλλήλων ἀπέχυσιν, ἐξέςαι ταύτας ὡς παραλλήλυς ἐκδέξαϑαι· τὸ γὰρ διάπτωμα, ὕτως ἐκληφθεισῶν, ἔςαι ἀνεπαίσϑητον· αὕτη δὲ ἡ σημείωσις εἰς χρῆσιν ἥκει πολλάκις τῇτε Φυσικῇ, ϗ τῇ καλυμένῃ Μικτῇ Μαθηματικῇ.

124. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐπεὶ δύω σημεῖα ἱκανά εἰσιν ὁρίσαι τὴν ϑέσιν εὐθείας, δῆλον, ὅτι δύω εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν, ἐὰν δύω σημεῖα μιᾶς ἴσον ἀπέχωσι δύω σημείων τῆς ἑτέρας· ἐντεῦθεν γὰρ συνάγεται, ὡς ἅπαντα τὰ μιᾶς σημεῖα ἴσον ἀπέχυσι τῶν σφίσιν ἀντιςοίχων σημείων τῆς ἑτέρας.

125. Δύω παραλλήλων δοθεισῶν τῶν ΠΔ, Ικ, ἐὰν τρίτη τις ἡ ΚΖ παράλληλος ᾖ τῇ δευτέρα Ικ, ἔςαι παράλληλος ϗ τῇ πρώτῃ ΠΔ· ϗ γὰρ τὸ ἑκάςυ σημείυ τῆς ΠΖ ἀφ' ἑκάςυ κατὰ κάθετον οἱ ἀπέχοντος τῆς ΠΔ ἀπόςημα ἐςὶν ἴσον τῷ ΓΧ + ΓΟ· πάντα ἄρα τὰ τῆς ΚΖ ἀπὸ ΠΔ ἀποςήματα ἰσάλληλα ἔσονται· ΚΖ ϗ ΠΔ ἄρα εἰσὶ παράλληλοι.

126. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἐν γένει ἄρα, ἐὰν εὐθεῖα παράλληλος ᾖ ἑτέρᾳ, ἔςαι παράλληλος ϗ πάσαις ταῖς ἄλλαις εὐθείαις, αἳ ἂν εἶεν ϑατέρᾳ παράλληλοι.

127. ΘΕΩΡΗΜΑ Α'. Δύω παράλληλοι, μεταξὺ δύω ἑτέρων παραλλήλων ἐμπεριλαμβανόμεναι, ἰσάλληλοί εἰσιν.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἤτοι γάρ εἰσι κάθετοι ταῖς ἑτέραις παραλλήλοις (ϗ. 18), αἷς ἐμπεριλαμβάνονται, ἢ πλάγιαι· εἰ μὲν ἓν ἐκεῖνο, ὡς αἱ ηΧ, Γδ, ἔσονται δήπυ μέτρα τῶν ἀποσημάτων τῶν δυοῖν σημείων Χ, δ τῆς ΙΧ εὐθείας, καθ' ἃ ἀφίςανται δυοῖν σφίσιν ἀντιςοίχων σημείων Γ, η τῆς παραλλήλυ ΜΔ· ἄρα ἀλλήλαις ἴσαι ἔσονται (120)· ἐὰν δὲ ὦσι πλάγιαι, ὡς αἱ ΓΙ, ηδ, ϗ ὕτως ἰσάλληλοι ἔσονται· ϗ γὰρ ὡς παράλληλοι ἔσονται ἐπίσης κεκλιμέναι ἐπὶ τῶν ΜΔ, ΙΧ παραλλήλων, καὶ ἴσον ἀποςήσονται τῶν καθέτων Γδ, ηΧ, αἵτινες ἰσάλληλοί εἰσιν, ὡς ἤδη δέδεικται· ϗ αὗται ἄρα αἱ πλάγιαι (117) ἰσάλληλοι ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

128. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δύω πλάγιαι αἱ ηδ, δΑ, ἐμπεριειλημμέναι μεταξὺ διαφόρων παραλλήλων, ὧν ἴσον τὸ ἀπόσημα, ϗ ἴσον κεκλιμέναι ἐπ' αὐτὰς, ἰσάλληλοι ἔσονται· ά. αἱ γὰρ κάθετοι ηΧ, δυ εἰσὶν ἴσαι· ὑπετέθησαν γὰρ αἱ τρεῖς παράλληλοι ἴσον ἀλλήλων ἀπέχυσαι· β'. αἱ πλάγιαι ηδ, δΑ ἴσον ἀπέχυσι τῶν καθέτων κατὰ τὸν ἀνωτέρω συλλογισμὸν (127)· ἄρα αἱ πλάγιαι ηδ, δΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν (117).

129. ΟΡΙΣΜΟΣ Α'. Ὅταν εὐθεῖα (ϗ. 19) εἰς δύω παραλλήλυς ἐμπέσῃ, γωνίαι ἀντίςοιχοι καλῦνται αἱ ὁμοίως κείμεναι πρὸς τὰς παραλλήλυς καὶ τὴν ἐμπεσῦσαν εὐθεῖαν· ὕτω τῆς ΓΘ εὐθείας ἐμπεσύσης εἰς δύω παραλλήλυς τὰς δΤ, ηΚ, αἱ γωνίαι Α ϗ ο εἰσὶν ἀντίςοιχοι· ἑκατέρα γὰρ κεῖται ὑπὸ τὴν ἑτέραν τῶν παραλλήλων, ϗ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς ἐμπεσύσης εὐθείας ΓΘ· ἀλλὰ ϗ αἱ Ε, Ι καὶ αἱ β, Ζ εἰσὶν ἀντίςοιχοι.

130. ΟΡΙΣΜΟΣ Β'. Ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι καλῦνται αἱ μεταξὺ μὲν δύω παραλλήλων κείμεναι, ὧν μέντοι ἡ μὲν ἐπὶ θάτερα, ἡ δ' ἐπὶ θάτερα τῆς ἐμπεσύσης ἐμφιλοχωρεῖ· ὕτως αἱ δύω γωνίαι Ζ, ο κά-

λῶνται ἐντὸς ἐναλλὰξ, ὡσαύτως δὲ ϗ αἱ Ι, ρ· ἐκτὸς δ᾽ ἐναλλὰξ καλῶνται δύω γωνίαι, αἵτινες κεῖνται ἐκτὸς τῆ χώρῃ τῶν παραλλήλων, ἡ μὲν ἐπὶ τάδε, ἡ δ᾽ ἐπ᾽ ἐκεῖνα τῆς ἐμπεσέσης· τοιαίδε εἰσὶν αἱ ν, Ε, ϗ β, Α.

131. ΟΡΙΣΜΟΣ Γ΄. Δύω εὐθεῖαι ἐπὶ τῆ αὐτῆ ἐπιπέδῃ κείμεναι, μίαν τῶν τριῶν τῶνδε σχέσεων πρὸς ἀλλήλας τηρῆσιν· ἤτοι γὰρ συγκλίνυσιν ἀλλήλαις, ἢ ἀποχωρῦσιν ἀλλήλων, ἢ τέλος πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ παράλληλοι (σχ. 15)· δύω γάρ τινες φέρ᾽ εἰπεῖν κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον ὁδεύοντες, ὁ μὲν ἐκ τῆ Γ, ὁ δ᾽ ἐκ τῆ Ζ, ἐὰν μὲν εἰς τὸ Ζ βαδίσωσι, αἱ αὐτῶν ὁδοὶ ΓΠ, ΖΠ ἔσονται συγκλίνυσαι· ἐὰν δὲ πρὸς τἀναντία τῆ Π, ὁ μὲν δηλονότι βαδίζῃ τὴν ΠΓ, ὁ δὲ τὴν ΠΖ, αἱ δύω αὗται ὁδοὶ, ἢ γραμμαὶ εὐθεῖαι, προδήλως εἰσὶν ἀποχωρῦσαι ἀλλήλων· τελευταῖον δὲ, ἐὰν ὁ μὲν ὁδεύῃ ἐκ τῆ Π τὴν ὁδὸν ΠΔ, ὁ δὲ ἐκ τῆ Ι τὴν Ικ, (σχ. 17) αὗται αἱ εὐθεῖαι προδήλως ἔσονται παράλληλοι, ὐδὲ συναντηθήσονται οἱ δύω ὗτοι, κἂν ἐς ἄπειρον προχωρῶσιν ὁδεύοντες.

132. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Εὐθεῖα, εἰς δύω παραλλήλυς ἐμπίπτυσα, τὰς ἀντιςοίχυς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςωσαν αἱ δΤ, ηΚ παράλληλοι (σχ. 19), ϗ εἰς αὐτὰς ἐμπιπτέτω ἡ ΓΘ, ἣν αὐτοὶ τέμνυσαν ὀνομάζομεν· φημὶ δὴ, ὡς ἡ β γωνία φέρε, συνιςαμένη ὑπὸ τῆς τεμνέσης ΓΘ ἐπὶ τῆς δΤ, ἴση ἐςὶ τῇ αὐτῆς ἀντιςοίχῳ Ζ τῇ ἐπὶ τῆς ηΚ· εἰ μὴ γὰρ, ἔςαι πάντως ἤτοι $\beta < Z$, ἢ $\beta > Z$ ἔςω α. $\beta < Z$· ἀλλὰ τυτὶ ὐκ ἂν γένοιτο, εἰμὴ ἡ δβΤ εὐθεῖα ἀποχωροίη μὲν κατὰ τὸ Τ ἀπὸ τῦ τῆς ηΚ ἀντιςοίχυ σημείυ Κ, πελάζοι δὲ κατὰ τὸ δ πρὸς τὸ η σημεῖον· ὅ ἐςιν, ἡνίκα ἡ δβΤ εὐθεῖα μᾶλλον ἀπέχει κατὰ τὸ Τ ἀπὸ τῆς ηΚ, ἢ κατὰ τὸ δ· ἐὰν ᾖ ἄρα $\beta < Z$, αἱ εὐθεῖαι δβ, Ζη προαχθεῖσαι πρὸς τὰ λαιὰ τῆς ΓΘ τεμνούσης, συμπεσοῦνται· ἔσονται ἄρα συμπίπτουσαι· ἐτέθησαν δὲ παράλληλοι· ἔσονται ἄρα αἱ αὐταὶ συμπίπτουσαί τε καὶ παράλληλοι· ὅπερ ἀδύνατον.

Ἔστω δὲ β΄. $\beta > Z$· οὐκοῦν ἡ δΤ ἐγγυτέρα ἐστὶ τῇ ηΚ κατὰ τὸ Κ, ἢ κατὰ τὸ η, καὶ προαχθεῖσαι κατὰ τὰ δεξιὰ τῆς τεμνούσης συμπεσοῦνται, καὶ δὴ οὐκ ἔσονται παράλληλοι· οὔτε ἐλάττων οὖν, οὔτε μείζων ἡ β ὑποτεθῆναι δύναται τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς Ζ, ἐὰν μὴ παύσωνται παράλληλοι οὖσαι αἱ δΤ, ηΤ· ἄρα παραλλήλων οὐσῶν, αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι ἐξ ἀνάγκης ἰσάλληλοι ἔσονται. Ο. Ε. Δ.

133. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.** Εὐθείας εἰς δύω παραλλήλους ἐμπιπτούσης, αἵτε ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, καὶ αἱ ἐκτὸς ἰσάλληλοι ἔσονται.

134. α΄. Αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ εἰσὶν ἴσαι, εἴτ' οὖν $\rho = I$· καὶ γὰρ $\rho + Z = 180^\circ$ (98)· ἄρα $\rho = 180^\circ - Z$· ὡσαύτως δὲ καὶ $I = 180^\circ - \beta$· ἀλλὰ $\beta = Z$ (132) ἄρα $\rho = I$· ἐφόδῳ δ' ὁμοίᾳ συλλογισμοῦ δειχθήσεται ὅτι, $o = Z$.

135. β΄. Ὡσαύτως ἀποδεῖξαι δυνατὸν ἴσας καὶ τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ γωνίας· καὶ γὰρ $\beta = 180^\circ - I$, καὶ $A = 180^\circ - E$· ἀλλὰ $E = I$· ἄρα καὶ $\beta = A$· διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ $\nu = E$.

136. **ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄.** Αἱ δύω ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἰσὶν $= 180^\circ$· ἐπεὶ $o + I = 180^\circ$ (98) ἀλλὰ $I = \rho$· ἄρα $o + \rho = 180^\circ$· τῷ δ' αὐτῷ τρόπῳ δειχθήσεται α΄., ὅτι καὶ $I + Z = 180^\circ$· β΄. ὅτι καὶ αἱ δύω ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη β, Ε, ἢ δύω ἄλλαι ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ν καὶ Α, εἰσὶν ἴσαι 180°.

137. **ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄.** Εὐθεῖαι παράλληλοι ἔσον-

ται, ἐὰν εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἓν τῶν πέντε ποιῇ· α΄. ἰσαλλήλους τὰς ἀντιστοίχους γωνίας· β΄. ἰσαλλήλους τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ· γ΄. ἰσαλλήλους τὰς ἐκτὸς ἐναλλὰξ· δ΄. τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη = 180°· ε΄. τὰς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη = 180°· τῷ ὄντι γὰρ αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι φέρε β, καὶ Ζ ἰσάλληλοι οὐδύνανται εἶναι, ἐὰν αἱ γραμμαὶ βΤ, ΖΚ μὴ ὦσι μήτε συγκλίνουσαι μήτε ἀποχωροῦσαι (131, 132), ὅ ἐστιν ἐὰν μὴ ὦσι παράλληλοι· ἀλλ' ἕκαστον τῶν ἄλλων τεσσάρων οὐκ ἂν κρατοίη, εἰμὴ ἰσῶντο ἀλλήλαις αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι· αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ φέρ' εἰπεῖν γωνίαι ρ καὶ Ι οὐκ ἂν εἴησαν ἰσάλληλοι, εἰμὴ ἡ Ζ γωνία, ἥτις σὺν τῇ ρ ἐστιν = 180°, ἴση εἴη τῇ ἀντιστοίχῳ β, ἥτις σὺν τῇ Ι ὀφείλει ποιεῖν 180°.

138. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Εὐθεῖαι ἄρα δύω αἱ δΤ ηΚ κάθετοι, ἢ ἐπίσης πλάγιαι ἐπί τινος ἄλλης, παράλληλοί εἰσιν· ἐπὶ γὰρ τῆς τρίτης συσταθήσονται ἴσαι αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι.

139. ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ΄. Σημείου δοθέντος τοῦ Γ (σχ. 20) ἐκτὸς τῆς εὐθείας Δδ, εὐθεῖαν παράλληλον αὐτῇ διὰ τοῦδε τοῦ σημείου διάξομεν· α΄. κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τυχόντι τῷ ΓΕ γεγράφθω τόξον τὸ ΕΖ· β΄. κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ γεγράφθω τόξον τὸ ΓΟ· γ΄. διὰ τοῦ διαβήτου μετηνέχθω τὸ ΓΟ τόξον ἐπὶ τοῦ ἀδιορίστου ΕΖ· ἔσται ἐντεῦθεν τὸ τόξον ΕΠ· δ΄. διὰ τοῦ Π, οὕτως ὁρισθέντος, καὶ διὰ τοῦ δοθέντος Γ ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἔσεται παράλληλος τῇ Δδ.

Εἰς δὲ τὴν τούτου δεῖξιν ἤχθω ἡ κατεστιγμένη ΓΕ, καὶ ἐπείπερ αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΠΓΕ καὶ ΓΕΟ, εἰσὶν ἴσαι, ὡς ἴσοις τόξοις τοῖς ΠΕ, καὶ ΓΟ, ἐκ κατασκευῆς, μετρȣ́μεναι· ἄρα αἱ δύω εὐθεῖαι ΠΓ, Δδ εἰσὶ παράλληλοι (137).

140. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Βȣλομένοις δὲ διὰ τȣ͂ δοθέντος κατὰ γῆς σημείȣ Ε εὐθεῖαν παράλληλον ἀγαγεῖν τὴν Δδ εὐθείᾳ τῇ ΠΓ, ὥσπερ ζητεῖται κήπȣ τȣ̀ς παραλλήλȣς τῶν ἀνθέων χώρȣς προσδιορίσαι, τῶν δένδρων τὰς παραλλήλȣς τάξεις κτ., καθείσθω ἐκ τȣ͂ δοθέντος Ε σημείȣ (108) πρὸς ὀρθὰς τῇ δοθείσῃ ΠΓ ἡ ΕΧ, ἐκ δὲ τȣ͂ Ε ἐςάσθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΕΧ ἡ ΕΟ, ἥτις παράλληλος ἔςαι τῇ δοθείσῃ ΠΓ· καὶ γὰρ αἱ δύω εὐθεῖαι ΠΓ, ΕΟ ποιȣ͂σιν ἐπὶ τῆς ΕΧ, τὴν αὐτὴν ἀντίςοιχον γωνίαν, ὃ ἐςιν, ὀρθήν· εἰσὶν ἄρα παράλληλοι (137).

141. ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄. Ἐκ τȣ́των ἄρα εὐθεῖαν ἅπασαν τὴν ΑΕ (σχ. 21) εἰς ὅσα βȣλόμεθα ἰσάλληλα μέρη τέμνειν μεμαθήκαμεν· κείσθω γὰρ τὴν ΑΕ εἰς πέντε τεμεῖν μέρη ἰσάλληλα· α΄. ȣ͂ν ἐκ τȣ͂ Α πέρατος τῆς δοθείσης εὐθείας ὑφ᾽ ἡντιναȣ͂ν γωνίαν ἤχθω ἀδιορίςως ἡ ΑΤ. β΄. διὰ τȣ͂ διαβήτȣ εἰλήφθω πέντε ἰσοδιεςῶτα σημεῖα ἐπὶ τῆς ἀπεράντȣ εὐθείας ΑΤ, εἶτ᾽ ȣ͂ν γενέσθω ΑΡ = ΡΓ = ΓΔ, κτλ., καὶ ἐπεζεύχθω τὸ ἔσχατον σημεῖον Θ, καὶ τὸ Ε πέρας τῆς δοθείσης ΑΕ εὐθείας διὰ τῆς ΘΕ. γ΄. ἤχθω δι᾽ ἑκάςȣ τῶν πέντε σημείων εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΘΕ εὐθείᾳ (139)· καὶ δὴ γενήσεται τὸ ἐπιταχθέν· αἱ γὰρ μεταξὺ ἰσοδιεςωσῶν παραλλήλων περιεχόμεναι εὐθεῖαι, καὶ ἐπ᾽ ἴσης πλάγιαι ἐπ᾽ αὐτῶν, εἰσὶν ἰσάλληλοι (128)· ἀλλαμὴν αἱ παράλληλοι ΖΡ, ΙΓ, κτλ. ἐκ κατασκευῆς ἴσον ἀλλήλων ἀπέχȣσι, καὶ τὰ μέρη ΑΖ, ΖΙ τῆς πάσας τὰς παραλλήλȣς τεμνȣ́σης ΑΕ συνιςῶσιν ἐπ᾽ αὐτῶν ἀντιςοίχȣς γωνίας ἰσαλλήλȣς, εἶτ᾽ ȣ͂ν εἰσὶν ἴσον ἐπ᾽ αὐτῶν πλάγιαι· ἄρα ταῦτα τὰ μέρη εἰσὶν ἰσάλληλα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Περὶ ἰδιοτήτων τινῶν εὐθειῶν ἀναφερομένων πρὸς τὸν κύκλον.

142. Πᾶσα εὐθεῖα εἰς τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν ἐμπίπτȣσα (Σχ. 22) Τέμνȣσα ἀκȣ́ει· ϗ ἐὰν μὲν ἀπὸ σημείȣ ἐντὸς τȣ͂ κύκλȣ κειμένȣ ἐμπίπτῃ, ἐσωτερική· ἐὰν δ' ἀπ' ἐκτὸς, ἐξωτερική· κἀκείνως μὲν ἐμπίπτει ἡ πΤ, ȣ̔́τω δὲ ἡ ΔΖ.

Ἐκ τῆς ἁπανταχῇ ὁμοίας τȣ͂ κύκλȣ καμπυλότητος (44) ἐποπτείᾳ μόνῃ τȣ͂ σχήματος, τὰ ταῖς τεμνȣ́σαις ἐπανήκοντα ἐναργῶς ὑποσυνάψομεν.

143. α'. Ἐὰν αἱ τέμνȣσαι ἀπὸ τȣ͂ κέντρȣ ἀχθῶσιν, ὡς αἱ ΚΓ, ΚΙ, ΚΜ, πᾶσαι ἰσάλληλοι ἔσονται· εἰσὶ γὰρ ἐπιεικῶς κυκλικαὶ ἀκτῖνες (44).

144. β'. Ἐὰν δύω τέμνȣσαι ἀπὸ σημείȣ ὕπερθεν τȣ͂ κέντρȣ κειμένȣ ἀχθῶσιν, ὥσπερ αἱ ΤΗ, Τπ, ἐλάττων ἔςαι, ἡ προαχθεῖσα διὰ τȣ͂ κέντρȣ διήξει, οἷα ἡ ΤΗ(α).

145. γ'. Ἐὰν δύω τεμνȣσαι αι ΕΓ, Εν ἀχθῶσιν ἀπὸ σημείȣ ὕπερθεν τȣ͂ κέντρȣ κειμένȣ τȣ͂ Ε, μείζων ἐςὶν ἡ διὰ τȣ͂ κέντρȣ διήκȣσα, οἷα ἡ ΕΚ (β).

(α) Πρὸς μέντοι μείζω πληροφορίαν τῶν πρωτοπείρων ἡ δεῖξις ϗ ȣ̔́τω γενήσεται· ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ἀκτὶς Κπ· κἀκȣ͂ν ἔςαι $KT\pi > K\pi$ (17)· ἐπεὶ δὲ $K\pi = KH$ (41)· ἄρα ϗ $KT\pi > KH$· ἄρα ϗ $KT\pi - KT > KH - KT$, εἴτ' ȣ̓͂ν $T\pi > TH$.

(β) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ἀκτὶς Κν· κοινῆ δὲ προςεθεί-

146. δ΄. Δυεῖν τεμνουσῶν ἐξωτερικῶν ἐπὶ τὴν κοίλην διαγομένων περιφέρειαν, οἷαι αἱ Δκ, ΔΖ, μείζων ἐςὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου διήκουσα, οἵα ἡ Δκ (γ).

147. ε΄. Δυεῖν ἐξωτερικῶν τεμνουσῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀγομένων σημείου ἐπὶ τὴν κυρτὴν περιφέρειαν, οἷαι αἱ Δβ, Δα, ἐλάττων ἐςὶν, ἡ προαχθεῖσα διὰ τοῦ κέντρου δίεισιν, οἵα ἡ Δβ (δ).

148. Ἐὰν ἡ ΑΔ διάμετρος, ἡ τῇ Κο ἀκτῖνι κάθετος (Σχ. 43), παραλλήλως ἑαυτῇ ἑρπύσῃ τὴν ὁδὸν Γο κατὰ βραχὺ ὑποσμικρυνομένη, ἕστ᾽ ἂν τὰ αὐτῆς Α, Δ πέρατα συμπέσωσι τῷ ο σημείῳ τῆς περιφερείας, σαφὲς ὡς αὕτη ἡ εὐθεῖα, ὅσῳ μὲν ἂν ἐπὶ δεξιὰ προαχθῇ, ὅσῳ δ᾽ ἂν ἐπ᾽ ἀριςερὰ, οὐδέποτε διελθεῖν τὸν κύκλον δυνήσεται, οὐδ᾽ ἅψασθαι αὐτοῦ, ὅτι μὴ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον τὸ ο· τοιάδε οὖν εὐθεῖα, οἵα ἡ οΠ, ἢ οΤ, Ἁπτομένη ἀκούει.

149. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Δυνατὸν ἄρα ὁρίσασθαι τὴν ἁπτομένην, ὅτι ἐςὶν εὐθεῖα ἐπιψαύουσα τῆς κυκλικῆς περιφερείας καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον, καὶ ὅσῳ ἂν προαχθῇ ἐφ᾽ ἑκάτερα, τὸν κύκλον εἰσδῦναι μὴ δυναμένη.

σης τῆς ΕΚ ἔςαι ΕΚν = ΕΚΓ (Ἀριθ. 13)· ἔςι δὲ ΕΚν $>$ Εν (17)· ἄρα καὶ ΕΚΓ $>$ Εν.

(γ) Ἐὰν γὰρ ταῖς ἀκτῖσι ΚΖ, Κκ κοινὴ προςεθῇ ἡ ΔΚ, ἔςαι ΔΚΖ = ΔΚκ (Ἀριθ. 13)· ἀλλὰ ΔΚΖ $>$ ΔΖ (17)· ἄρα καὶ ΔΚκ, εἴτ᾽ οὖν Δκ $>$ ΔΖ..

(δ) Ἀχθείσης γὰρ τῆς Κα ἀκτῖνος, ἔςαι ΚαΔ $>$ ΚβΔ (17)· ἄρα ΚαΔ — Κα $>$ ΚβΔ — Δβ, εἴτ᾽ οὖν Δα $>$ Δβ, τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον ἐφαρμοσθῆναι ἐνταῦθα δύναται καὶ ὅσα Εὐκλείδη δέδεικται, ἐν Προτάσεσιν Ζ, καὶ Η τῶν τοῦ Γ βιβλίου.

150. Τὸ δὲ σημεῖον ο, καθ᾽ ὃ ἡ ἁπτομένη ἐπιψαύει τοῦ κύκλου, σημεῖον ἀφῆς ὀνομάζεται.

151. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἡ ἁπτομένη οΠ παράλληλός ἐστι τῇ διαμέτρῳ ΑΔ· εἴγε αὐτὴ ἡ ΑΔ, παραλλήλως ἑαυτῇ ἑρπύσασα, ἀφίκετο ἐς τὸ ο ἐνεχθεῖσα πρὸς τὴν οΠ· ἀλλ᾽ ἡ Κο ἀχθεῖσα ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον κάθετός ἐστι τῇ διαμέτρῳ ΑΔ ἐξ ὑποθέσεως (148)· ἔστιν ἄρα καὶ τῇ οΠ ἁπτομένῃ κάθετος, καὶ ἀντιστρόφως ἡ οΠ ἁπτομένη ἔστι κάθετος τῇ Κο ἀκτῖνι (72)· ἀλλ᾽ εὔδηλον, ὅτι εἴληπται ἐν τῷ κύκλῳ κατὰ τὸ δοκοῦν τὸ σημεῖον ο, καὶ δὴ καὶ ἡ ΔΑ διάμετρος κάθετος τῇ Κο ἀκτῖνι περατουμένη πρὸς τῷ ο σημείῳ, κἂν δὲ καὶ ἄλλο σημεῖον ο ληφθῇ, δειχθήσεται τὰ αὐτὰ ἀπαραλλάκτως· δυνατὸν ἄρα γενικῶς εἰπεῖν „τὴν ἁπτομένην τοῦ κύκλου „κάθετον ἐφεστάναι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ τὴν ἐκ τοῦ κέν„τρου ὡσαύτως τῇ ἁπτομένῃ.“

152. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἡ ἀπειροστὴ εὐθεῖα, εἰς ἣν ἀφίκετο ἡ ΑΔ διάμετρος, ἑνὶ σημείῳ ἀπέχουσα τοῦ σημείου ο, ἔστιν ὡσαύτως κάθετος τῇ ἀκτῖνι Κο, καὶ τἀνάπαλιν. Αὕτη δὲ ἡ ἀπειροστὴ εὐθεῖα ἔστιν ἐνταῦθα τὸ τῆς κυκλικῆς περιφερείας στοιχεῖον· μᾶλλον δὲ, μία τῶν ἀπειροστῶν εὐθειῶν, ἐξ ὧν συγκροτεῖται ὁ κύκλος· ἐξέσται ἄρα ἐν γένει εἰπεῖν „ὡς ἡ ἀκτὶς ἔστι κάθετος τῷ τοῦ κύκλου „στοιχείῳ, ναὶ μὴν καὶ πᾶσα ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖα, ἐφ᾽ ἓν ἀ„γομένη τῆς κυκλικῆς περιφερείας σημεῖον, κάθετος ἐφέ„στηκε τῇ περιφερείᾳ κατ᾽ ἐκεῖνο τὸ σημεῖον.“

153. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἵνα, σημείου δοθέντος τοῦ ο, ἁπτομένη κατ᾽ αὐτὸ τῆς κυκλικῆς ἀχθῇ περιφερείας· α΄. ἤχθω ἡ Κο ἀκτίς· β΄. προήχθω πρὸς τὰ ἐκτὸς, ἵν᾽ ἐκ τοῦ κατ᾽ αὐτὴν πέρατος ἐξῇ κάθετον ἀνεγεῖραι τὴν Πο κατὰ

τὰ κανονισθέντα (105)· αὕτη δὴ παντὶ δῆλον ἐκ τῶν ἄρτι εἰρημένων, ὡς ἔσαι ἁπτομένη, ἣ ἐζητεῖτο.

154. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ἁπτομένης οΠ κ̀ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα ἐ παρεμπεσεῖται· πᾶσα γὰρ ἄλλη εὐθεῖα ἡ οΖ πλαγία σήσεται τῇ ἀκτῖνι (116)· πᾶσα ἄρα κάθετος ἐκ τῦ κέντρυ Κ ἐπ᾽ αὐτὴν ἀγομένη τὴν εὐθεῖαν ἐλάττων ἔσαι, ἡ ἀκτὶς (113)· εἰσελεύσεται ἄρα αὕτη ἡ εὐθεῖα εἰς τὸν κύκλον, κ̀ δὴ ἐ παρεμπεσεῖται εἰς τὸν μεταξὺ τῆς ἁπτομένης οΠ κ̀ τῆς περιφερείας τόπον, κατὰ τῆς ὑποθέσεως.

155. Ἀλλὰ γὰρ διὰ τῦ τῆς ἀφῆς σημείυ μεταξὺ τῆς ἁπτομένης κ̀ τῆς περιφερείας ἄπειροι καμπύλαι διήξυσι· προήχθω γὰρ ἡ Κο ἀκτὶς πρὸς τὰ ἐπὶ Ι ἐπ᾽ ἄπειρον· ἐὰν ὖν κέντρῳ μὲν τῷ τυχόντι β, εἰλημμένῳ ἐπὶ τῆς οΚΙ εὐθείας ὕπερθεν τῦ Κ, διασήματι δὲ τῷ βο, γραφῇ τόξον τὸ οκ, τυτὶ ὔτε τῇ ἁπτομένῃ οτ, ὔτε τῇ περιφερείᾳ Αο συμπεσεῖται, εἰμὴ καθ᾽ ἓν σημεῖον τὸ ο· τὸ γὰρ καταγράφον σημεῖον μεθ᾽ ἕκασον ἀπειροσὸν διάβημα παρεκτρέπεται τῆς εὐθείας· ἐντεῦθεν ἄρα α΄. τῆς βο ἀκτῖνος μείζονος ὔσης, ἢ ἡ Κο, εἷς τῦ διαβήτυ πῦς μετενεχθεὶς ἐπὶ τὸ ο, θατέρυ ἀκινήτυ μένοντος ἐν τῷ β, μετὰ τὸ πρῶτον ἀπειροσὸν διάβημα ἐκπεσεῖται τῆς οΑΔ κυκλικῆς περιφερείας· β΄. ἐν τύτῳ δὲ κ̀ τῆς ἁπτομένης ἀποσήσεται, κ̀ καταγράψει καινὴν ἀπειροσὴν εὐθεῖαν· ἐπεὶ γὰρ ἡ βο κάθετος ἐφέσηκε τῇ ἁπτομένῃ, ἅπαν ἄλλο σημεῖον τῆς ἁπτομένης παρὰ τὸ ο, ἀποσήσεται τῦ β ἀποσήματι μείζονι τῦ βο (113)· ὁ ἄρα πῦς τῦ διαβήτυ ὁ τὸν κύκλον καταγράφων ἐ δύναται τῆς ἁπτομένης ἐπιψαῦσαι κατ᾽ ἄλλο σημεῖον, εἰμὴ κατὰ τὸ ο.

Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ β, διασήματι δὲ τῷ βο καταγραφεὶς κύκλος, οὔτε τοῦ κύκλου οΑΔ, οὔτε τῆς ἁπτομένης, ἐπιψαῦσαι δύναται, ὅτι μὴ κατὰ τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον ο.

156. Ὁμοίᾳ ἐφόδῳ συλλογισμοῦ δειχθήσεται, ὡς ἐὰν κέντρῳ μὲν τῷ ν, διαςήματι δὲ τῷ νο, καταγραφῇ τόξον τὸ οΧ, ϗ κέντρῳ μὲν τῷ Ι, διαςήματι δὲ τῷ Ιο, γραφῇ τὸ οΕ, ϗ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἄπειρα ἄλλα κυκλικὰ τόξα γραφῶσιν, ἕκαςον τούτων, δι' ὃν λόγον ϗ τὸ οκ, οὐμὴ ἐπιψαύσει οὔτε τῆς ἁπτομένης, οὔτε τῶν ἄλλων περιφερειῶν οὐδεμιᾶς, εἰμὴ κατὰ μόνον τὸ τῆς ἀφῆς σημεῖον ο.

157. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐν κύκλῳ ἀκτὶς πρὸς ὀρθὰς χορδῇ ἀγομένη, δίχα αὐτὴν τέμνει.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἤχθω γὰρ ἡ ΚΕ ἀκτὶς κάθετος τῇ ΠΧ χορδῇ (Σχ. 24)· φημὶ οὖν ὡς δίχα τὴν χορδὴν τεμεῖ κατὰ τὸ ν· τὸ γὰρ Κ σημεῖον τῆς ΚΕ ἀκτῖνος ἴσον ἀπέχει τῶν δύω σημείων Π, Χ τῆς ΠΧ χορδῆς διὰ τὰς ἰσαλλήλους ἀκτῖνας ΚΠ, ΚΧ· ἀλλ' ἐὰν εὐθείας εὐθεία καθέτου ἐφισαμένης ἓν σημεῖον τὸ Κ ἴσον ἀπέχῃ δυοῖν σημείων Π, Χ τῆς ἐφ' ἣν ἐφέςηκε, ϗ ἕκαςον τῶν ἄλλων τῆς καθέτου σημείων ἴσον ἀποςήσεται τῶν αὐτῶν δύω σημείων Π, Χ (84)· ἄρα πάντα τὰ τῆς ΚνΕ εὐθείας σημεῖα, ϗ ἐκ τοῦ ἀκολούθου ϗ τὸ ν, ἴσον ἀπέχουσι τῶν Π, Χ σημείων, περάτων τῆς εὐθείας ΠΧ· ἄρα τὸ ν ἐςὶ τὸ μεσαίτατον σημεῖον τῆς ΠΧ εὐθείας· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

158. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Καὶ τὸ τῇ χορδῇ δὲ ὑποτεινόμενον τόξον ΠΕΧ δίχα τέμνει· εἴδομεν γὰρ ἤδη, ὡς ἕκαςον τῶν σημείων τῆς πρὸς ὀρθὰς τῇ ΠΧ χορδῇ ἱςαμένης ἀκτῖνος ἴσον ἀπέχει τῶν Π, Χ αὐτῆς περάτων· ἄρα ϗ τὸ Ε σημεῖον, ὃ κοινὸν ἔχει τῷ τόξῳ ΠΕΧ, ἴσον

τῶν αὐτῶν Π, Χ ἀπέχει· ἄρα αἱ χορδαὶ ΠΕ, ΕΧ, αἱ τὰ ἴσα παρισῶσαι ἀποσήματα, ἰσάλληλοί εἰσιν· ἄρα ϗ τὰ τόξα ΠΗΕ, ΕκΧ, τὰ ὑπὸ ἴσων χορδῶν ὑποτεινόμενα, εἰσὶν ἰσάλληλα (47)· ἄρα τὸ Ε σημεῖον ἐςὶ τὸ μεσαίτατον τῶν τȣ̃ ὁλικȣ̃ τόξȣ ΠΕΧ· ἄρα ἡ ΚΕ ἀκτὶς τέμνει τὸ ΠΕΧ τόξον δίχα.

159. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἀλλὰ ϗ τὴν ὑπὸ ΠΚΧ γωνίαν τὴν περιεχομένην ὑπὸ τῶν ἀκτίνων ΠΚ, ΚΧ, τῶν περατȣμένων πρὸς τοῖς πέρασι ταύτης τῆς χορδῆς, δίχα τέμνει· δέδεικται γὰρ ἤδη ἰσάλληλα τὰ τόξα ΠΗΕ, ΕκΧ· ἀλλὰ τὸ μὲν ΠΗΕ μετρεῖ τὴν ὑπὸ ΠΚΕ γωνίαν, τὸ δὲ ΕκΧ τὴν ὑπὸ ΕΚΧ· ἄρα ΠΚΕ = ΕκΧ.

160. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἵνα ȣ̃ν δίχα τμηθῇ χορδήτις ἡ ΠΧ (Σχ. 24), μία τις τῶν ἀκτίνων ἐςάθω αὐτῇ κάθετος (104).

161. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἵνα τόξον, ȣ̃ τὸ κέντρον ἔγνωσαι, τὸ ΠΕΧ δίχα τμηθῇ, ἐπεζεύχθω μὲν ἡ χορδὴ αὐτȣ̃ ΠΧ, ἐςάθω δ᾽ αὐτῇ κάθετος ἡ ΚΕ ἀκτίς· τὸ δὲ Ε σημεῖον τῆς ἀκτῖνος ἔςαι τȣ̃ τόξȣ τὸ μεσαίτατον (158).

162. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε΄. Ἵνα γωνία ἡ ὑπὸ ΠΚΧ δίχα τμηθῇ, κέντρῳ τῷ Κ γεγράφθω τόξον τὸ ΠΕΧ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ χορδὴ ΠΧ, ϗ ἠγέρθω ἡ ΚΕ ἀκτὶς αὐτῇ πρὸς ὀρθάς· ἐκ δὲ δὴ τȣ́των συςαθήσονται γωνίαι δύω, ἥτε ὑπὸ ΠΚΕ, ϗ ἡ ὑπὸ ΕΚΧ, ὧν ἑκάςη ἡμισεία ἐςὶ τῆς ὑπὸ ΠΚΧ γωνίας (159).

163. ΠΟΡΙΣΜΑ ς΄. (Σχ. 25) Ἐντεῦθεν ἄρα δυνατὸν διελεῖν τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν, ἢ τόξον τὸ ΑΔΓ, εἰς ὅσα μέρη ἴσα βȣλόμεθα, κατὰ τήνδε μέντοι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον ÷ 2 · 4 · 8 · 16 · κτλ. ἡ μὲν γὰρ κάθετος ΒΔ τεμεῖ δίχα τὸ τόξον, ϗ δὴ ϗ τὴν γωνίαν

εἰς δύω γωνίας ἰσαλλήλας ΑΕΔ, ϗ ΔοΓ· ἡ δὲ ΒΕ κάθετος, τὸ τόξον ΑΔ, ἡ δὲ ΒΙ κάθετος, τὸ ΑΕ τόξον· ὅθεν τὸ ΑΙ ἔςαι $\frac{1}{4}$ τῦ ΑΔΓ τόξυ, ϗ ἑξῆς ὁμοίως.

164. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Τ' ἀνάπαλιν δὲ, ἐὰν ἀκτὶς ἡ ΚΕ (σχ. 24) δίχα τέμνη τὴν χορδὴν ΠΧ, ἢ τὸ ὑφ' ὃ ὑποτείνει τόξον, ἢ τὴν γωνίαν τὴν τῷ τόξῳ μετρυμένην, πρὸς ὀρθὰς ἐφέςηκε τῇδε τῇ χορδῇ· ϗ γὰρ α΄. ἐὰν ἡ ΚΕ ἀκτὶς δίχα τέμνη τὴν ΠΧ, τὸ ν αὐτῆς σημεῖον ἴσον ἀπέχει τῶν Π, Χ· β΄. ἀπέχει δὲ ϗ τὸ Κ, ὡς κέντρον τῦ κύκλυ, ἴσον τῶν Π, Χ (41)· ἡ ἄρα ΚΕ ἀκτὶς ἔχει δύω σημεῖα, ὧν ἑκάτερον ἴσον ἀπέχει δύω σημείων Π, Χ τῆς ΠΧ χορδῆς· ἄρα ἡ ΚΕ κάθετος ἐφέςηκεν αὐτῇ (102).

Ὡσαύτως ἐὰν ἡ ΚΕ ἀκτὶς δίχα τέμνη τὸ ΠΕΧ τόξον, ἢ τὴν ὑπὸ ΠΚΧ γωνίαν, δύω σημεῖα αὐτῆς, προαχθείσης εἰς τὸ τόξον ἐν τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει, τὰ Κ, Ε ἴσον ἀπέχυσι δύω σημείων τῆς χορδῆς ΠΧ, τῶν Π, Χ· κάθετος ἄρα αὐτῇ ἐςήξει.

165. ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄. Ἐὰν κάθετος ἡ ΚΕ δίχα τέμνη χορδὴν τὴν ΠΧ, διὰ τῦ κέντρυ διήξει· ἐπεὶ γὰρ τὸ ν σημεῖον τῆς ΚΕ καθέτυ ἴσον ἀπέχει τῶν Π, Χ, ἡ κάθετος ΚΕ προαχθεῖσα πρὸς τὸ Κ διελεύσεται διὰ σημείων ἴσον ἀπεχόντων τῦ Π, ϗ τῦ Χ, ϗ δὴ ϗ διὰ τῦ κέντρυ (41).

166. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ΄. Δυνατὸν ἄρα διὰ τριῶν σημείων τῶν Π, Ε, Χ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων κύκλον καταγράψαι· ἐπιζευγνύτωσαν γὰρ τὰ τρία ταῦτα σημεῖα δύω εὐθεῖαι αἱ ΠΕ, ΕΧ, ϗ τύτων ἑκατέρα τετμήσθω δίχα διὰ τῶν καθέτων Κδ, Κο (106) αἵτινες προαχθεῖσαι συμπεσῦνται ἀλλήλαις κατὰ τὸ κέντρον τῦ γραφησο-

μένȣ κύκλȣ· ὡς ἂν ὁ κέντρῳ μὲν τῷ ὕτως εὑρεθέντι Κ, διαςήματι δὲ τῷ ΚΠ, γραφεὶς κύκλος, ᾗ δι᾽ ἑκατέρȣ τῶν λοιπῶν δύω σημείων Ε, Χ διελεύσεται, ἐκ τῶν προειρημένων εὐμαρέςατα συνάγεται.

167. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι΄. Ι῎ν᾽ ἄρα τȣ͂ δοθέντος κύκλȣ ΠΕΧμ τὸ κέντρον εὑρεθείη, ἤχθωσαν μὲν πρὸς τὸ δοκȣ͂ν δύω χορδαὶ αἱ ΠΕ, ΕΧ, ᾗ τέτων ἑκατέρα δίχα τετμήσθω διὰ καθέτων τῶν Κδ, Κο, αἵτινες προαχθεῖσαι δείξȣσι τὸ ζητȣ́μενον κέντρον Κ.

168. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΑ΄. Τόξȣ ἄρα δοθέντος τȣ͂ ΠΕΧ, ἵν᾽ ἀναπληρωθῇ ὁ κύκλος α΄. ἤχθωσαν δύω χορδαὶ αἱ ΠΕ, ΕΧ· β΄. εὑρεθήτω τὸ τȣ͂ τόξȣ κέντρον, ὡς ἀνωτέρω· τȣ͂ δὲ κέντρȣ εὑρεθέντος, ῥᾷςα ὁ κύκλος ἀναπληρωθήσεται.

169. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύω τόξα μεταξὺ δύω παραλλήλων εὐθειῶν κείμενα, ἴσα ἀλλήλοις εἰσί.

ΔΕΙΞΙΣ. Ε῎ςωσαν δύω τόξα τὰ ΠΖ, ΑΔ (σχ. 26) κείμενα μεταξὺ δύω παραλλήλων τῶν ΠΑ, ΖΔ· ἀχθεῖσα ȣ͂ν ἡ ΚΟ ἀκτὶς κάθετος ταῖς χορδαῖς ΠΑ, ΖΔ, α΄. ποιήσει ΟΑ = ΟΠ· β΄. ΟΔ = ΟΖ (158)· ἐὰν ἄρα δύω ἰσάλληλα τόξα τὰ ΟΔ, ΟΖ ἀπὸ δυοῖν ἰσαλλήλων τόξων τῶν ΟΑ, ΟΠ ἀφαιρεθῶσι τὰ κατάλοιπα ΑΔ, ΠΖ εἴτ᾽ ȣ͂ν τὰ μεταξὺ δύω παραλλήλων τῶν ΠΑ, ΖΔ κείμενα ἴσα ἔσονται Ο. Ε. Δ.