

γῶ τὴν φοράν ἢ αὐτὴ ἴσται τῇ Λ Π, καίτοι τῷ μή-  
κει ἐκείνης αὐτὴ μέρος ἂν εἴη ἀπειρασίη.

20. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ. Δύο εἴς τε σημεία ἰσοπέ αἴση  
ἴσται τὴν δέση ἀπέσης εὐθείας.

21. ΠΟΡΙΣΜΑ Η'. Δύο εἴς τε εὐθείαι ἐπ' ἀλλήλων  
ἐν ἐπὶ σημείῳ διατμηθήσονται, ἢ, ὁ ταυτὸν, δύο εὐ-  
θείαι ἐν μόνῳ κοινῷ ἔξωσι σημείῳ. ἄλλως γὰρ ἐκ ἂν  
μεταξὺ δύο σημείων μία διατεθείη εὐθεία (19).

22. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ'. Ἀπὸ πάντες σημεία Λ ἐπὶ  
πάν σημείων ἀπειρῶ τῶν ἀριθμῶν πεμπύλαι ἀχθῆσαι δύ-  
νεται· ἔξωσαι γὰρ ἕως ἀπὸ τῆ Λ ἐπὶ τὸ Π χωρεῖσθαι,  
ἢ διὰ τῆ Ζ, ἢ διὰ τῆ Θ, ἢ διὰ πάντες ἄλλο ἀπει-  
ρῶ διαλείπειν σημεία ἐπ' ἀπειρῶ, ἢ ἐκ τῆ ἀκολουθε μάλ-  
λον ἢ μᾶλλον ἔξωχύσας καταγράψαι πεμπύλας ἀπει-  
ρασίμους.

23. Αἴτημα. Ἐξώσω ἀπὸ πάντες σημεία ἐπὶ πάν  
σημείων εὐθείαν γραμμὴν ἀγνοῦσθαι, ὁ δὲ ἢ εὐθείαν ἐπι-  
ζῆξαι λέγεται.

24. Αἴτημα. Καὶ γραμμὴν εὐθείαν πεπερασμένην  
κατὰ τὸ συνεχές ἐκβάλλειν.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

### Περὶ τοῦ Κύκλου.

25. Νοεῖδω ἢ ΠΖ εὐθεία (α. β.) περιγόμενη  
καρὶ τὸ Π σημείον ἀκινήτων, ἢ ὅλην περιγωγὴν διε-  
κῶσα. Τὸ ἐν Ζ σημείον, πέρασ ἐν ταύτης τῆς εὐθείας,  
ἢ ἐκείνου ἀπειρασίη διακόμετος ἴσως τε ἢ ἀπειρασίη ἀ-

ποκίσσεται τῆς ἐαυτῆς τρίτης φασ, ἢ τῆς ἐλαχίστης πεμπύλης  $\Lambda\beta\kappa\omicron\zeta$  καταγράφει.

26. Ἡ τοίνυν ὅλη πεμπύλη  $\Lambda\beta\kappa\omicron\zeta$ , ἢ τὰς ἐπι τῷ  $\zeta$  σημείῳ καταγεγραμμένη κυκλικὴ περιφέρεια ὁμῶς δὲ ἢτε περιφέρειαι πῶς, ἢ τὸ ἐμπεριεχόμενον ἐντὴ χωρίον ὀνομάζεται Κύκλος· πολλὰς δὲ καὶ μόνη ἢ περιφέρειαι καλεῖται κύκλος· τὸ δὲ  $\Pi$  σημείον τὸ ἐπι τῷ τὸ μέσον τῆς περιφέρειας κείμενον ἀπὸ τοῦ  $\kappa$  ἐστὶ τὸ κέντρον· τὸ ἔξω δὲ τῷ κύκλῳ, ὅ,τι δήποτε μέρους τῆς περιφέρειας, εἶναι τὸ  $\zeta\omicron$ .

27. Ἐν ᾧ ἄρα τὸ  $\zeta$  τὴν ἐαυτῆς καταγράφει κυκλικὴν περιφέρειαν  $\Lambda\beta\kappa\omicron\zeta$ , ἕκασον τῶν τῆς  $\Lambda\Pi\zeta$  γραμμῆς σημείων καταγράφει τὸν ἐαυτῆς ἴδιον κύκλον· τὸ μὲν  $\Delta$  φέρει τὸν  $\Delta\eta\tau$ , τὸ δὲ  $\iota$  τὸν  $\iota\Gamma\tau$  ἢ ἕξῃ ὡσαύτως.

28. Πάντες ἔτσι οἱ κύκλοι  $\Lambda\beta\kappa\omicron\zeta$ ,  $\Delta\eta\tau$ , κτλ· γεγραμμένοι ὑπὸ τῶν διαφόρων σημείων  $\zeta$ ,  $\Delta$ , κτλ τῆς αὐτῶν γραμμῆς περιεχθείσης περὶ ἀκνητῶν τὸ  $\Pi$ , κενρὸν ἕξουσι κέντρον τὸ  $\Pi$ , ἢ παρὰ τῆς κληθείσης κύκλοι ὁμοκέντροι· τοσούτω δὲ ἴσονται τῶν ἄλλων ἐλάττω, ὅσα τὸ γωνίῳ ἕκασον σημείον ἐγγύς γίνεσθαι τῷ κέντρῳ, ἢ μέγιστος μὲν ἀπείτων εἶναι ὁ  $\Lambda\beta\kappa\omicron\zeta$ , ὃν καταγράφει τὸ  $\zeta$  σημείον, ἐλάχιστος δὲ, ἢ κύκλος ἀπειρος, ὁ καταγραφόμενος ὑπὸ τῷ σημείῳ, ὁ ἀπαιτῆς ἀμέσως μετὰ τὸ κέντρον  $\Pi$ .

29. Τῶν αὐτῶν κειμένων, ἕκασον τῶν τὴν  $\Pi\zeta$  συντιθέτων σημείων, περιγεγραμμένης τῆς  $\Pi\zeta$ , ἰσάριθμος ὀδεύσει διαδίματα· εἴπει γὰρ ἅπαντα τὰ σημεία τῆς αὐτῆς ἐπιπέδου γραμμῆς, ἰδύνατον ἐν μὲν αὐτῶν κινεῖσθαι, τὰ δ' ἄλλα ἠρεμεῖν· εἴδ' ἐν μὲν ἠρεμεῖν, κινεῖσθαι δὲ τέλλει.

30. Ἐκαστὸν ἄρα τῶν σημείων ἰσάριθμα διαβήματα διαιρῶν, ἢ μεθ' ἑκαστὸν ἀπειροσίων διείδημα, σημείων ἐαυτῷ ὅμοιον καταλείπει εἰς σαχίαν τῆς ὀλικῆς περιύλης, ἵνα: π δῆτε συγκροτήσῃ τὴν ἐαυτοῦ περιύλην ἐξ ἰσάριθμων σαχίων.

31. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Λ' ἐπίτωσιν ἄρα τῶν κύκλων, ἴσα ἰσάριθμα σαχίαια, ὁ μείζων κύκλος ἢ μὴ διείσῃ τῷ ἐλάττωσιν, ἔτι μὴ τῷ ἑκαστῷ τῷ ἐλάττωσιν σαχίαν λόγῳ ἴσῃ πρὸς ἑκαστὸν τῷ μείζωνσιν, ὅν ὅλος ὁ ἐλάττωσιν πρὸς ὅλον τὸν μείζωνσιν.

32. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ταῦτα δὲ τὰ σαχίαια ἀπειροσίων μέρη ὄντα, ἑκαστὸν τῷ ὅ ἑπαισῆμα κύκλου, ἔσται σημεία (4). ἐν δὲ σημείων περιφερείας τοπὸς πρὸς ἑτέρῳ ἰτέρως λόγῳ ἔξει, ὅν ἡ πρώτη περιφέρεια πρὸς τὴν δευτέραν (6).

33. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. ἑκαστὸν δὲ τῶν δὲ τῶν σημείων, ἢ τῶν σαχίων, γραμμὴ ἔσῃ εὐθεία ἀπειροσίων· εἰ μὴ γὰρ γραμμὴ· εἴτε γὰρ γραμμὴ ἔσῃ ἅπαν μῆκος· ἀλλὰ μὴ τὸ σαχίαν τῷ κύκλω, εἴτ' ἔν τῷ σημείῳ, εἰ μέρους ἀπειροσίων μῆκος πεπερασμένον, εἴτ' ἔν τῷ ὀλικῷ κύκλω, ἢ δὴ ἔσται ἢ πῦτό μῆκος· ἄρα τὸ σημείον, τὸ κυκλικὸν σαχίαν, ἔσται γραμμὴ, ἢ γραμμὴ ἀπειροσίων (8)· εἴτη δ' ἔσται εὐθεία· εἰ γὰρ τὸ ἴχνος, ὁ καταλείπει ἐν ἑκάστῳ διαβήματι τὸ γωνίων σημείον ἐν τῷ περιέγουσιν τὴν ΠΖ γραμμὴν· ἀλλὰ τὸ γωνίων σημείον ἢ μεταβάλλει τὴν φασίν, εἰ μὴ μεταβείη ἀπὸ διαβήματος εἰς διάδημα· τὸ ἄρα ἴχνος ἢ ἢ ἀπειροσίων γραμμὴ, ἢ καταλείπει τὸ σημείον ἐφ' ἑνὸς διαβήματος, ἔσῃ εὐθεία.

34. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἐκ τῶν εἰρημένων ἄρα δυοῖν μεθ' ἀλληλοσυνωγαγείν, ὡς ἅπασιν κύκλοις ἐκληρήθῃσι δύνανται

ὡς ἄνευ συγκριτικῶν ἢ ἀπειρηθῶν ἰσαλλήλων γραμμῶν εὐθειῶν, εἴτ' ἔπλευρῶν.

35. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Πάντες οἱ κύκλοι μεγάλοι καὶ μικροί, ὅμοια σχήματα ὄντες, καθ' ὅ,τι ἰσαριθμοὶ πάντες πλευρὰς ἔχουσι, καὶ ἕκαστος ἰσαλλήλως, διίσταται τὸν αὐτὸν τρόπον διαιρεθῆναι, εἴτ' οὖν εἰς μέρη ἰσ. ἀριθμοῦ.

36. Κοιῆ ἔνδοξε Γεωμετρῶν πασι τὴν κυκλικὴν περιφέρειαν εἰς μέρη 360 ἰσαλλήλα διελθῆναι, ἃ μέρη ἐκάλεσαν· μοῖρα ἄρα εἰς τὸ τριακοντὸν ἑξακοντὸν μέρος ἀπάσης κυκλικῆς περιφέρειας· μοῖραι δὲ δύο δύναν διαφόρων κύκλων ἀνάλογοί εἰσι τὰς ὅλικαῖς περιφερείαις ὧν εἰσι μοῖραι (Συμ. λ. 234)· ἄρα μοῖρα μία ἔκ εἰς ποσὶ ὠρισμένων ἢ μόνιμον· ἀλλὰ κατὰ τὸ μέγεθος τῆς αὐτῆς περιφέρειας ἴση εἶναι, πολλή, ὑργιῆ, λεύγη κτλ.

37. Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς λεπτά πρῶτα 60, ὡς ἕκαστον εἰς 60 δεύτερα· ἕκαστον δὲ τούτων εἰς 60 τρίτα ἢ ἔτις ἑξαξῆς· γράφεται δὲ ἔτω: 60', 60'', 60''', κτ. ἀναγινώσκονται δὲ: 60 μοῖραι, 60 πρῶτα λεπτά, 60 δεύτερα, 60 τρίτα κτλ.

38. Δύω εὐθεῖαι ΠΖ, ΠΟ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀλληλοδιαδόχως κύκλου ΙΓΤ, ΔΗΤ, ΖΟκ ἀγόμεναι περιέχουσι τόξα, ἢ μέρη τῆς περιφέρειας, ἃ ἢ ἀνίστα ἀλλήλοις ὄντα, εἰσὶν ἐμπὴς μέρη ὅμοια ἕκαστα τῆς αὐτῆς περιφέρειας· εἰὰν φέρῃ τὸ ΖΟ τόξον δέκατον μέρος ἢ τῆς αὐτῆς περιφέρειας ΖΠκ, ἢ τὸ τόξον ΔΗ δέκατον μέρος εἰς τῆς αὐτῆς περιφέρειας ΔΗΤ, ἢ τὸ ΙΓ τῆς ΙΓΤ· ἢ γὰρ σημεῖα ἰσαριθμοῦ τὰ Ζ, Δ, Ι τῆς γραμμῆς ΠΖ διήλυσαν ἰσαριθμὰ διαστήματα, τῆς ὅλικῆς γραμμῆς.

38. ΠΖ ἐκ τῆ Ζ εἰς τὸ Ο κεντρικῆς (29)· ἐπιπέδον ἄρα ἴσα σημεία εἴσιν ἐπὶ τῆ ΙΓ τήξει, τῶν αὐτῶν καὶ ἐπὶ τῆ ΔΗ, κτλ· ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν διὰ τῶν σημείων ἑμφανισθῆναι τῶν ἀριθμῶν τῶν διαθεμάτων, ἃ ἕλθουσιν ἢ ΠΖ γωνιῶν ἐκ τῆ Ο μέχρι τῆ Ζ.

39. Πᾶσα εὐθεία ἐκ τῆ κέντρος ἀρχαμένη εἰς τὴν περιφέρειαν τελευτῶσα καλεῖται Ἀκτίς· ἔτω τῆς μὲν ΖΟκ περιφερείας ἀκτῆς εἴσιν αἱ ΠΖ, ΠΟ τῆς δὲ ΔΗΤ· ΠΔ, ΠΗ

40. Εὐθεία δὲ ἀπὸ τῆς περιφερείας ἀρχαμένη εἰς τὸ κέντρον διήκουσα, εἰ ἐφ' ἑτέρῳ σημείῳ τῆς αὐτῆς περιφερείας ἀφικουμένη Διάμετρος ἕκαστη· ἔτω τῆς μὲν ΖΟκ περιφερείας διάμετρος εἴσιν ἡ ΖΠκ, τῆς δὲ ΔΗΤ ἡ ΔΠΕ· ἐκ ἐκείνων περιφερείας σημείων, ἐφ' ἃ μὴ ὡς ἴσχυον ἐπιπέδουσαι εὐθείαι, ἀρχαμένη μὲν εἰς τὸ κέντρον, ἐκ τούτου δὲ μέχρι τῆ ἀπέναντι τῆς περιφερείας σημείου ἕκαστη (34)· δυνατὸν ἄρα ἐπιπέδουσαι ἐν ἀεὶ κίκλῳ ἀπειραριθμὸς μὲν ἀκτῶν, ἀπειραριθμὸς δὲ καὶ διαμέτρων.

41. Πρῶτος κύκλος τῆ ΖΟκ εἴσιν αἱ ἀκτῆς ΠΖ, ΠΟ, Πκ, κτλ. τῆ ΠΖ ἀκτῆσι τῆ διὰ περιγῶγῆς τῶν κύκλων γωνησίση ἴσαι πρὸς ἄλλω ἔσιν, εἰ ἀλλήλων ἴσαι ἴσονται (26). Ἀλλ' αἱ ἀκτῆς ΠΖ, ΠΟ κτ. μετρήσει πρὸς τὸ τῆ κέντρον Π ἀπὸ πρῶτος σημείου τῆς περιφερείας ἀπόστημα· πάντες ἄρα τῆς περιφερείας σημεία ἐπίσης τῆ κέντρον ἔκαστοι.

Ἐξέσται ἄρα τὸν κύκλον ὀρίσαι καμπύλων, ἢς καὶ τὰ σημεία ἐπίσης ἀφίστανται ἀπὸ σημείου ἐπὶ τῆς περιφερείας κειμένου, ὃ καλεῖται κέντρον.

Διάμετρος πᾶσα ἡ ΖΠκ κατὰ τὸν ἥδη ἐκδηλώθη.

ὀρισμῶν, εἶδεν ἔστιν ὅτι μὴ ἀκτῖνες δύο ΠΖ ἢ Πκ ἐπι  
 τῆς αὐτῆς κείμεναι φαρῆς· ἄρα ἡ ἀκτίς τὸ ἡμισὺ ἐστὶ τῆς  
 διαμέτρου· ἀλλὰ πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες εἰσὶν ἰσάλληλαι· ἄρα  
 (Συμ. λ. 234) ἢ πᾶσαι αἱ διαμέτροι ἀλλήλαις εἰσὶν ἰσῆς.

42. Τὸ τριγωνικὸν χωρίον ΠΖΟ, τὸ ὑπὸ δύο ἀκτι-  
 νων τῶν ΠΖ, ΠΟ περιεχόμενον, ἢ τῷ ΖΟ τόξῳ τῷ ὑ-  
 πὸ τῶν διὰ τῶν ἀκτῖνων ἀπολαμβανομένῳ, καλεῖται Τρι-  
 μείς· ἢ τὰ χωρία ἄρα ΠΖΛ, ΛΠΒ, κτλ. εἰσὶ Τριμείς

43. Χορδὴ, ἢ ὑποτεινύσα καλεῖται (χ. 3.)  
 εὐθεῖα πᾶσα ἀφ' ἐνὸς ἐφ' ἑτέρον περιφερείας σημείων ἐπι-  
 ζευγυμένη· ὕτως αἱ εὐθεῖαι ΠΑ, ΖΓ, Ια εἰσὶ χορδαὶ  
 τῷ ΟΖΥΓ κύκλῳ.

Δῆλον ἄρα ὡς ἢ πᾶσα διάμετρος ὡς ἀφ' ἐνὸς ἐφ'  
 ἑτέρον τῆς αὐτῆς περιφερείας ἀγομένη σημείων, ἐστὶ χορ-  
 δὴ, ἡμὴν δὲ ἢ πᾶσα χορδὴ ἐστὶν ἢ αὐτὴ ἢ διάμετρος· ἡ  
 μὲν γὰρ εὐθεῖα ΖΚΓ ἐστὶν ἄμα ἢ χορδὴ ἢ διάμετρος, ἡ  
 δὲ ΠΑ μόνον χορδὴ.

Πᾶσα χορδὴ ΠΑ αἰεὶ τέμνει τὸ κυκλικὸν χωρίον  
 ΟΠΥΓ εἰς δύο, ὧν ἑκάτερον ὀνομάζεται Τμήμα· τὸ  
 τε ὕν ὑπερθεῖν τῆς ΠΑ χωρίον ΟΠΒΑ, ἢ τὸ ταύτης ὑ-  
 περθεῖν ΠΧΥΓΑ εἰσὶ δύο τμήματα ὑπὸ τῆς ΠΑ χορδῆς  
 ὑποτεινόμενα.

44. Ἐπεὶ πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες ἰσάλληλαι, ἐκ τούτου  
 ἄρα καμπυλότης ἔσται ἡ αὐτὴ ἐν ἀπάσῃ τῇ κυκλικῇ περι-  
 φερείᾳ· ἐντεῦθεν ἄρα, ἀνευ ἄλλης τινὸςδείξεως, τὰ ἐφε-  
 ξῆς συναχθῆναι δύνανται.

45. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Πᾶσα χορδὴ διὰ τῷ κέντρῳ  
 διήκουσα, ἢ ΖΚΓ, πᾶσα ἐκ τῷ ἀκολουθεῖ διάμετρος, εἰς  
 δύο ἰσάλληλα τμήματα διχοτομεῖ τὸν κύκλον, τὰ ΖΚ  
 ΓΥ, ΖΚΓΟ, ἢ εἰς δύο δὲ ἰσάλληλα τόξα τὰ ΖΟΓ,

**ΖΥΓ.** Πῶτα δὲ τὰς τῶν διμέτρων χορδῆ ἢ ΛΠ τί-  
μινα τὸν κύκλου εἰς δύο αἰσά τμήματα, διαίρει ἢ τὴν  
επιπλευρὴν περιφέρειαν εἰς δύο αἰσά τόξα· ἢ τὸ μὲν με-  
ζοῦ μέρους τὸ ΠΑΚΨ καλεῖται τὸ μῆμα μείζον περὶ  
τμήτων ὑπὸ τῷ μείζονος καλυμένῳ τόξῳ ΠΨΛ (44).  
τὸ δ' ἔλαττον, ἔλαττον ἢ ἔλάττωσ τοῦ ξου περι-  
φριζόμενον.

**46. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'.** Πᾶσα ἄρα χορδῆ ἢ ΠΛ ἴση  
τῷ μὲν δύο τόξα τὰ ΠΟΛ, ΠΨΛ.

**47. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'.** Χορδαὶ ἄρα ἴσαι εἰπὶ τῷ αὐτῷ  
κύκλῳ, ἢ εἰπὶ ἰσοκλήλων κύκλων, ἴσα τόξα ὑποτείνουσιν·  
ἴση γὰρ ἢ ΠΛ χορδῆ ἴση τῇ Ικ· ἢ δὴ τὸ ἔλαττον τό-  
ξον ΠΟΛ τὸ ὑποτεινόμενον ὑπὸ τῆς ΠΛ χορδῆς ἰσωθῆ-  
σεται τῷ ἔλάττω Ικψ τῷ ὑποτεινόμενῳ ὑπὸ τῆς χορ-  
δῆς Ικ· αἱ δὲ αἰσά χορδαὶ ΠΛ, ΧΤ ὑποτείνουσιν αἰσά  
τόξα τὰ ΠΟΛ, ΤΨΧ· Ἄλλα γὰρ ἐν δυσὶ κύκλοις δια-  
φέρεισιν ΟΠΨΛ, ΡΗΔ, χορδαὶ εἰς ὑποθέσεως ἴσαι αἱ  
Ικ, ΗΔ, ὑποτεῖνῃσι τόξα αἰσά· φημὶ δὴ ὡς τὸ ΙΨκ  
τόξον μείζον εἰς τῷ ΗνΔ· ἔχ' ὅτι ἰσοδυναμοὶ γραμμῆ  
εὐθεία μείζον, ὡς φανήσεται ἐν ταῖς ἐφεξῆς, διὰ τὸ εἶναι  
καμπυλωτέραν, ἀλλ' ὅτι, καθὰ δεῖ ἐνταῦθα ἐκληροθῆναι,  
μείζον εἰς τῷ μέρει τῷ ἔλάττωσ κύκλου, ἢ εἰς τὸ ΗνΔ  
τῷ μείζονος· τῶντι γὰρ εἰάν τὸ ΙΨκ τὸ πέμπτον ἢ φέ-  
ρε τῷ ἔλάττωσ κύκλου, τὸ ΗνΔ ἔλαττον εἰσὶ ἢ πεμ-  
πημόριον τῷ μείζονος (44).

**48. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'.** Ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ ΖΨΚ  
τὸ μείζον τόξον ὑπὸ μείζονος χορδῆς ὑποτείνεται, τὸ δ'  
ἔλαττον ὑπ' ἔλάττωσ, ἢ ἀντίστροφως· τὸ γὰρ τόξον  
ΙΨκ μείζον εἰς τῷ ΧΨΤ, ἢ δὲ χορδῆ Ικ μείζον τῆς ΧΤ.

**49. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'.** Ἐπει ἄρα ἐν ἡμικυκλίῳ ἢ ἢ

μυδιάμετρος τὸ μέγιστον ὑποτείνει τόξον, ἔστι ἄρα αὕτη ἢ μέγιστη πασῶν τῶν χορδῶν.

50. ΠΟΡΙΣΜΑ ς'. Ἐν ἡμικυκλίῳ ἄρα αἱ χορδαὶ ἀρχόμεναι ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὁ καλίστις δυνάμεθι οὗ ὡς πρὸς πεπερασμένον τι τόξον (Συμκ. λογ. 530.). ἢ κτὰ μικρὰ αἰξέσαι, τελειώσιν εἰς τόξον μεγάλων 180, ἴσον τῷ ἡμισί τῆς ὀλικῆς περιφέρειας (37).

51. ΠΟΡΙΣΜΑ ζ'. Ἐν δισίῳ ἄρα ἡμικυκλίῳ ἰσοῦς τὰς χορδαὶ ΖΟΚ, ΖΥΚ, αἱ ἴσων ἀπέχουσι ἀπὸ τοῦ κέντρου χορδαὶ ΠΑ, Ια ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, ἢ αἱ ἴσαι ἴσων ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπέχουσι (44).

52. ΠΟΡΙΣΜΑ η'. Ἐν κύκλῳ τῷ ΟΖΥΓ εἰς χορδὴν πρὸς χορδὴν παραβληθῆ ὡς πρὸς τὰ μείζω, ὡς ἐλάττω ὑποτείνει, τόξον, ὅσῳ μείζον ἔστι τὸ τόξον, τοσούτω ἐλάττω ἔστι ἡ χορδὴ· ὅπως ἡ ΧΤ χορδὴ τὸ μείζω ὑποτείνουσα τόξον ΧΟΤ ἐλάττω ἔστι τῆς χορδῆς Ια τῆς ἐλάττω ὑποτείνουσας τόξον.

53. ΠΟΡΙΣΜΑ θ'. Ἐντεῦθεν ἄρα μετὰ τὸ παραβλεῖν τὰς 180, εἰς ἅς τὰ τόξα αἰξάνται, αἱ χορδαὶ φθίνουσιν εἰς 360 (37).

54. ΣΧΟΛΙΟΝ. Συχνάκις συμβαίνει αἰξέσεως τινὸς ποσότητος ἢ ἑτέραν συναύξειν, ἢ μόντοι ἀναλόγως· ἐπιβάσειος ἄρα ἀτενῆς χρεια ἐπὶ τῶν τοιούτων ποσοτήτων· σαφὲς γὰρ φέρε, ὅτι ὅσῳ μείζων ἐστὶν ἀριθμός τις, τοσούτω μείζων ὑπάρχει καὶ ὁ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνος· ἀλλὰ γὰρ οὐκ εἰσὶ τετράγωνοι δύνανται ἀνάλογοι ταῖς αὐτῶν ῥιζαῖς. εἴγε τοῦ μὲν διπλασίου ὄντος, ἢ ἄλλου, ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνος, ὡς ἡ φύσις τῆς ἀναλογίας ἀπαιτεῖ, ἢκ ἔσαι τῷ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου διπλασίου, μᾶλλον μὲν ἢν τετραπλασίου· εἰάν δὲ ἕτερος ἢ



ἴτις τριπλάσιος, ὁ ἀπὸ τῆ πρώτης τετραγώνου ἰσοπε-  
 τλάσιος (Συμβ. λογ. 310) ἔχει τῆ ἀπὸ τῆ δευτέρας, ἀλλ'  
 ἑξαπλάσιος· Τούτων ἄρα παρατηρητέον καί τι τῶ τό-  
 ξω ἐ χορδῶν. συναυξουσὶ μὲν γὰρ αἱ χορδαὶ τὰς τόξους  
 μέχρι 180°, τότε τὸ τε ἀυξομίκτων ἐκίθηαι φθίνουσι εἰς τὰς  
 360°, ἤμισα μάλιστα κατ' ἀναλογίαν· εἰς γὰρ ἐν ἡμικυ-  
 κλίῳ τόξῳ τι διπλάσιον ἢ φέρει ἑτέρω (30), ἢ παρὰ τῆ-  
 τος ἢ ἡ χορδὴ ἐκίθηαι διπλασιᾶ ἴσεται τῆς τότε· ὁμοίως  
 γὰρ (χ. 4.) δὴ τὸ τόξον ΠΟΑ διπλάσιον εἶναι τῆ τόξου  
 ΠηΟ· ἔκων παρὰ τῆτος ἢ ἡ ΠΑ χορδὴ διπλασιᾶ ἴσεται  
 τῆς ΠΟ χορδῆς· διὰ γὰρ τὰ ἰσάλληλα τόξα ΟΒΑ,  
 ΠηΟ, ὡς περ' ἑκάστη ἡμισὺ εἰς τῆ ΠΟΑ τόξου, εἴτε ἢ ΠΑ  
 χορδὴ διπλασιᾶ ἢ τῆς ΠΟ, ἴσεται ἄν ταῖς διῶσι ΠΟ, ἐ ΟΑ,  
 ἢ τῆ ὅλη γωνίῳ ΠΟΑ. ἀλλὰ μὲν τῆς τε ΠΑ εὐθείας  
 ἐ τῆς ΠΟΑ γωνίῳ ἀπὸ τῆ αὐτοῦ π σημείου ἐπὶ τὸ  
 αὐτὸ Α ἐπιζευγυμένῳ, (17) ἢ εὐθείας τῆς γωνίῳ  
 ἔχει ἐλάττων· ἢ ἄρα ΠΑ χορδὴ καίτοι ἰσοτείνουσα τό-  
 ξον διπλάσιον τῆ ΠηΟ, ἢ μάλιστα παρὰ τῆτος εἰς διπλα-  
 σία τῆς χορδῆς, ἢ ἰσοτείνει τὸ ΠηΟ τόξον· ἐν γένει ἄρα  
 ἐν ἡμικυκλίῳ τῶν χορδῶν τοῖς τόξοις συναυξουσῶν μὲν εἰς  
 τὰς 180°, φθίνουσῶν δὲ ἐν τῶ ἐκίθηαι αὖξιν εἰς τὰς 360°,  
 εἴθ' ἢ αὖξιν τῆ αὖξιν, εἴθ' ἢ μείωσις τῆ αὖξιν ἀ-  
 ναλόγως γίνονται.

35. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐν κύκλῳ, ἢ ἐν δισὶ ἴσας  
 κύκλοις, αἱ ἴσαι χορδαὶ ἴσων ἀπέχουσι ἀπὸ τῆ κέντρου, ἢ  
 ἐπιτείνουσι.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΑ'. Τὸ γινώσκον σημεῖον Z (χ. 2)  
 κατ' ἀνάγκην ἐν ἐκείνῳ διαβήματι περιτρέπεται τῆς  
 προῦ φέρῃς (25)· ἐκ διαδοχῆς ἄρα πῶτε τὰ τῆς  
 περιφέρειας σημεῖα μεταβάλλεται τὴν ἐκείνῳ φέρῃ.

56. α. Ἄρα ἡ κυκλικὴ περιφέρεια ἔχει τρία σημεῖα ἐπ' εὐθείας γραμμῆς· ἢ τὰυτα τὰ ἀλληλοδιαδοχα σημεῖα φέρει ἢ μεταβαλεῖται, ὅπερ ἀποκρίνεται (ἀνωτ.).

57. β'. Χρῆσθ' ἡ ΑΠ (χ. 3) ἢ δύναται τέμνειν τὸν κύκλον κατὰ σημεῖα πλείω, ἢ δύο τὰ Α, Π· ἄλλως γὰρ ἡ κυκλικὴ περιφέρεια ἔχει τρία σημεῖα κατὰ τῆ ΑΠ εὐθείας, δι' ὧν ὑποθεθήσεται τέμνειν τὸν κύκλον· ἀδύνατον δὲ τῆτο, ὡς ἤδη δίδεικται.

58. γ'. Εὐθεία ἡ ΑΠ (χ. 5) ἐπὶ κύκλου περιφέρειαν προσπίπτουσα, αὐτὴν μὲν μὴ τέμνουσα, κατ' ἐν μόνον σημεῖον τὸ Π αὐτῆς ἐφάπεται· εἰ γὰρ κατὰ δύο, προσχθεῖσα ἐπέκεινα τῷ Π, ἕως ἂν διελεῖται ἐπ' εὐθείας μέροςτι κυκλικόν, ἐπιψαύσει τῆς κυκλικῆς περιφερείας ἐκ νέου, ἄψεται κατὰ σημεῖα τρία αὐτῆς, ὅπερ ἤδη ἀδύνατον δίδεικται.

59. δ'. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εὐθεία ἡ ΞΡ κύκλου διαπερῶσα ἢ δύναται τέμνειν αὐτὸν κατὰ πλείω ἢ δύο σημεῖα τὰ Ψ, τ.

60. ε'. Κύκλος ὁ ΟΔΤ ἢ δύναται ἐπιψαύειν κύκλου τῷ ΔΖΨ κατὰ πλείω ἢ ἐν σημεῖον τὸ Δ.

61. ς'. Δύο κύκλοι ἑκκεντροί, ὧν ἀμέλει ἐκ ἑσὶ κέντρον κοινόν, οἱ ΟΔΤ, ΟΤΠ κατὰ δύο μόνον τέμνονται σημεῖα τὰ Ο, Τ. Αὐτίκα γὰρ δῆλον, ὅτι τὸ τῷ ΔΖ κύκλου γεννητικὸν σημεῖον ἐπειδὴν κατὰ τὸ Δ συναυτήσῃ τῷ τῷ ΟΔΤ κύκλου γεννητικῷ σημεῖω, εὐθὺς ἀλλήλων ἀποχωρήσουσι ἐ τὸ μὲν ἐνεχθήσεται πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Ζ, τὸ δὲ πρὸς τὰ ἐπὶ τὸ Τ.

62. ζ'. Δύο ἄρα κύκλοι τρία κοινὰ σημεῖα ἔχειν ἔξουσιν· εἰ γὰρ τῆτο, ἐν τρισὶ τμηθήσονται σημείαις, ὅπερ ἀδύνατον (61).

63. η'. Ἰκανὰ ἄρα τρία σημεῖα τὴν τῷ κύκλου θεί.

εἶν ὀρίσαι· καταδηλῶν δὲ ἐκ τούτου, ὅτι δύο κυκλικαὶ περιφέρειαι ἐν δυσὶ μόνον σημείοις διατέμνονται ὑπ' ἀλλήλων (61).

64. Δύο δὲ σημεία τὰ  $O, T$  ἔχ' ἰκανῶσιν ὀρίσαι τὴν τῷ κύκλῳ θέσιν, ὡς ὀρίζουσι τὴν τῆς εὐθείας· διὰ γὰρ δύο σημείων δύο διάφοροι κύκλοι οἱ  $OAT, OTΠ$  διαίαι δύνανται.

65. Αἰτησόμεθα ἔν ἐν τοῖς ἐφεξῆς πρὸς κατασκευῆν, Παντὶ σημείῳ ὡς κέντρῳ, ἢ ἄλλῃ τῇ τυχούσῃ, κύκλον γράφειν.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

#### Περὶ εὐθειῶν Καθέτων ἢ Πλαγίων.

66. Εὐθεία ἢ  $ηβ$  ἐφ' ἑτέραν τὴν κδ πίπτουσα (χ. 6) ποιεὶ σὺν αὐτῇ δύο ἀνοίγματα, ἃ καλεῖνται γωνίαι· τοιαῦτα εἰσὶ τὸ χωρίον  $β$ , ὃ ποιεὶ ἢ  $ηβ$  ἢ  $βδ$ , ἢ τὸ χωρίον  $χ$ , ὃ ποιεὶ ἢ αὐτὴ  $ηβ$  σὺν τῇ  $χκ$ .

67. Γωνία ἄρα εἴσι χωρίον ἀπολαμβανόμενον ὑπὸ δυσὶν εὐθειῶν, ὧν ἑτέρα ἐπὶ τὴν ἑτέραν ἐπίσκηκε τὸ δὲ  $β$  σημεῖον, καθ' ὃ συνάπτεται αἱ δύο εὐθεῖαι, καλεῖται κορυφὴ τῆς γωνίας· αἱ δὲ εὐθεῖαι  $ηβ, βδ$  αἱ διευρηγόμεναι τῷ γωνιώδει χωρίῳ, πλευραὶ τῆς γωνίας· αἱ μὲν ἔν  $ηβ, βδ$  πλευραὶ εἰσι τῆς  $β$  γωνίας, αἱ δὲ  $ηβ, χκ$  τῆς  $χ$ .

68. Διττεχῶς σημαίνεται ἡ γωνία· α'. ἐνὶ μόνῳ γράμματι ἐπιχαρασσομένῳ τῇ τῆς γωνίας κορυφῇ, ἢ ἐντὸς αὐτῆς τῆς γωνίας· β'. τρισὶ γράμμασιν, ὧν τὸ μὲν πρῶτον ἢ τρίτον ἐπιχαρασσεται τοῖς τῶν πλευρῶν πέρας.

σι, τὸ δὲ μέσον τῆ κορυφῆ τῆς γωνίας· ἔτω τὴν πρὸς τῷ β γωνίαν δυνάμεθα ἐκδηλῶν λέγοντες: ἡ β γωνία, ἢ κ διὰ τῶν τριῶν γραμμῶν η, β, δ, τῷ μέντοι μέσῳ μάλις α τὸν γέν προσέχοντες ὡς ἐκείνῳ ἀληθῶς τὴν γωνίαν ἐμφαίνοντι· ἀναγινώσκομεν δὲ ἔτως: ἡ ὑπὸ ηβδ γωνία, ἢ μόνον ἢ ηβδ γωνία.

69. Κάθετος ἢ πρὸς ὀρθὰς ἴσαμένη καλεῖται εὐθεῖα ἢ ηβ, ἢ πίπτουσα ἐφ' ἐτέρας εὐθείας τῆς κδ ἢ κλίνει μᾶλλον ἐπὶ θάτερα, ἢ ἐπὶ θάτερα, τὰς τε ἐφεξῆς γωνίας χ κ β ἴσας ποιῶσα, κ αὐταῖς παρασκευάζουσα καλεῖσθαι γωνίαις ὀρθαῖς.

70. Πλαγία δὲ εὐθεῖα καλεῖται ἢ ΠΔ (9. 7), ἢ ἐφ' ἐτέρας τῆς ΑΟ πίπτουσα κλίνει μᾶλλον ἐπὶ θάτερα, ἢ ἐπὶ θάτερα· αἱ δὲ ἐφεξῆς γωνίαι Δ κ Α, ἄς σὺν τῇ ἐτέρᾳ ποιεῖ ἢ πλαγία, εἰσὶν ἄνισοι· ἢ γὰρ πρὸς ἄ μᾶλλον ἢ πλαγία κλίνει γωνία ἔσι τῆς ἐτέρας ἐλάττων· τέτων δὲ ἢ μὲν ἐλάττων Δ καλεῖται Ὀξεία, ἢ δὲ μείζων Α, Αμβλεία.

71. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἡ πλαγία ἄρα κ ἔτως ὀριζήσεται, ὡς ἔστιν ἀμέλει ἢ ἐφ' ἐτέρας γραμμῆς εὐθείας πίπτουσα, κ δύο ἀνίσκας γωνίας συνισῶσα.

72. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Τὸ αὐτὸ διάνοιγμα (9. 6), ὃ ἀφορίζει τὴν ἐτέραν τῆς ἐτέρας εὐθείας κοινόν ἐσι πάντως ἐμφοτέραις· ἢ κεν εἴαν εὐθεῖα ἢ κβ κάθετος ἢ ἐτέρα τῆ βδ, κ ἢ βδ ἔσαι ἀμοιβαδὸν κάθετος τῆ ηβ· ἢ, ὁ ταυτὸν, εἴαν πρὸς ὀρθὰς τῆ κβδ πίπτῃ ἢ ηβ, ἐξέσαι εἰπεῖν, ὅτι κ ἢ βδ πρὸς ὀρθὰς πίπτει τῆ ηβ προαχθείση, ταυτὸν εἰπεῖν τῆ ηβ Ζ.

72. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, εἴαν ἢ ΑΠ (9. 7)

πλαγία· ἢ ἐπὶ τῆς ΑΟ, καὶ ἡ ΑΟ ἔσαι πλαγία ἐπὶ τῆς ΑΠ.

74. ΑΙΤΗΜΑ. Ἡ ΠΖ εὐθεία ἐπιτεθείσα τὸ κατ' ἀρχὰς τῆ ΠΟ (α. 2) περιήχθω περὶ τὸ μένον σημεῖον Π ἡμικυκλικὴν περιαγωγὴν τὴν ΟΖΑΒ· ἐκ ταύτης ἐν τῆς κινήσεως ἐκ τῆ Ο ἕως τῆ Α γεννηθήσονται πᾶσαι ἀδυναταὶ ὀξείαι γωνίαι (\*). ἔ γὰρ μετὰ τὸ πρῶτον διάβημα, καθ' ὃ ἀποχωρίζεται τὸ Ζ σημεῖον τῆ Ο, σχηματίζεται ἐκ τῆς κινήσεως εὐθείας ἔ τῆς μενέσης ΠΟ γωνία ἀπειροσῶς ὀξεία· μεθ' ἑκάστων δὲ τῶν ἐφεξῆς διαβημάτων ἡ ΠΖ μετὰ τῆς ΠΟ ἀεὶ ποιήσει καινὴν γωνίαν ὀξείαν μείζω τῆς πρὸ αὐτῆς· τέλος δὲ, πρὶν ἢ διανύσῃ τὴν αὐτῆς ὁδὸν ἡ ΠΖ, πρὶν ἢ τὸ ἑαυτῆς σημεῖον Ζ συμπίπτῃ τῷ Α, ποιήσει μετὰ τῆς ΠΟ τὴν μεγίστην πασῶν ὀξείαν γωνίαν· ἐν δὲ τῷ διαβήματι, καθ' ὃ τὸ Ζ τῷ Α συναφθήσεται σημεῖω ἢ ὑπὸ ΑΠΟ γωνία τῆ μὲν εἶναι ὀξεία παύσεται, γενήσεται δὲ ὀρθή· ὅ ἐστιν ἢ ὑπὸ ΑΠΟ συρισμένη τῆνικαῦτα ὑπὸ τῆς ΠΖ εὐθείας συμπίπτέσης τῆ ΠΑ ἰσωθήσεται τῆ β ΠΑ γωνία (69).

Ἀλλὰ γὰρ ἡ ΠΖ γραμμὴ ἐφικομένη ἐπὶ τῆς ΠΑ θέσεως ποιείτω ἔτι διάβημα ἐν πρὸς τὰ ἐπὶ β· ἔκυν ἡ νέα γωνία, ἣν ποιήσει μετὰ τῆς ΠΟ ἔσαι μείζων τῆς ὀρθῆς ΑΠΟ γωνίας, εἴτ' ἐν ποιήσει γωνίαν ἀπειροσῶς ἀμβλείαν, εἴ δει ἔτω φάναι, εἴτ' ἐν γωνίαν ἀμβλείαν πασῶν τῶν ἀμβλειῶν ἐλαχίστην.

75. Ἡ ΠΖ ἔτω συνεχίζουσα τὴν ἑαυτῆς ὁδὸν ἐς ὃ

(\*) Εὐθεία ἡ ΠΖ εὐθεία ἑτέρα ἐφικομένη τῆ βΠΟ δύο μὲν γωνίας ποιεῖ· ἡμῖν δ' ἐνταῦθα μία μόνη ἐξετάζεται, εἴτ' ἐν ἢ ἐντοῖς δεξιόις κειμένη ὑπὸ ΖΠΟ.

συμπέση τῆ Πβ παράξει ἐκ διαδοχῆς πάσας τὰς δυνα-  
τὰς ἀμβλείας γωνίας· ἐν ᾧ δὲ ἐνὸς μόνου διαβήματος δεῖ  
πρὸς τὸ τὴν ΠΖ συμπέσειν τῆ Πβ, ἐν τέτρῳ δὲ μετὰ  
τῆς ΠΟ εὐθείας ποιήσει ἀμβλείαν γωνίαν, ἣτις ἔστι πα-  
σῶν μεγίστη τῶν ἀμβλείων.

76. Συμπέσεως δὲ ἤδη ἐν τῷ ἐσχάτῳ τῷδε δια-  
βήματι τῆ Πβ, ἔν ἐν γενομένοι ἀμφω, ἕδεμίαν τῆ Λοι.  
πῆ ποιήσασσι γωνίαν.

**ΠΟΡΙΣΜΑ.** Δῆλον ἄρα ἐντεῦθεν, ὡς ὅταν ποσό-  
της, ὅσον ἂν ἐξῆ, αὐξηθῆ, ἔν ἐπὶ τὸ καλύμενον Με-  
γιστον ἴκηται, εἰάν τῷ τυχόντι ἔτι προσαυξηθῆ, ὑφ'  
ἐαυτῆς ἀφανίζεται· εἰάν γὰρ τῆ μεγίστη ἀμβλεία γω-  
νία προσεπιτεθῆ ἐν ἔτι διάβημα ἔν ἀπείρως μικρὸν, ἢ ἀμ-  
βλεία γωνία ἐπὶ τὸ μηδὲν τρέπεται· τοῦτ' ἔστιν ἢ πα-  
σα γωνία ἕτως ἐξυδενῦται.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

### Περὶ μέτρων τῶν γωνιῶν.

77. Εὐδηλον ἅπαντι ὡς ἢ ὑπὸ ΖΠΟ γωνία (σ. 2)  
ἢ ὑπὸ τῶν ΠΖ, ΠΟ εὐθειῶν περιεχομένη, ἔστιν ὁ ἀριθμὸς  
τῶν διαβημάτων, ὧν διήνυσεν ἢ ΠΖ ἴν' ἐκ τῆ Ο ἐπὶ τὸ  
Ζ ἐφίκοιτο· ὁ δὲ δύναται ἀδιαφόρως ἐκτεθῆναι, εἴτε διὰ  
τῆ ΖΟ τόξου, εἴτε διὰ τῆ ΔΗ, εἴτε διὰ τῆ ΙΓ κτ. δέ-  
δεικται γὰρ πρὸ μικρῆ, ὅτι ὅσα σημεῖα περιέχει τὸ ΟΖ,  
τοσαῦτα ἔν τὸ ΔΗ, ἔν τὸ ΙΓ, κτ., ἔν δὲ ὅτι ὁ τῶνδε  
τῶν σημείων ἀριθμὸς παρίσησι τὰ διαβήματα, ἃ διήνυσεν  
ἢ ΠΖ ἐκ τῆ Ο ἕως τῆ Ζ (38)· ἐντεῦθεν ἄρα.

78. α. Μέτρον γωνίας τῆς ν ἔστι τόξον τὸ ΖΟ, ἢ

μέρος  $ZO$  τῆ  $ZOK$  κύκλου τῆ γεγραμμένη περι τὴν  $\nu$  κορυφὴν ταύτης τῆς γωνίας ὡς περι κέντρον, ἀπολαμβάνομεν ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς  $\Pi Z$ ,  $\Pi O$ .

79. β'. Ἡ γωνία τῆς  $\nu$  δύναμις ἔδ' ἐκ τῆ μήκους τῶν πλευρῶν αὐτῆς, ἔδ' ἐκ τῆ μεγέθους τῆ περι αὐτὴν γεγραμμένη κύκλου ἤρτηται· εἶδομεν γὰρ ὡς γωνία ἡ  $\nu$  ἐπίσης ἔχει μετρηθῆναι τῶτε τόξῳ  $ZO$  τῷ ἀπολαμβανόμενῳ ὑπὸ τῶν  $\Pi Z$ ,  $\Pi O$  πλευρῶν, ἢ τῷ τόξῳ  $\Delta H$  τῷ ὑπὸ τῶν  $\Pi \Delta$ ,  $\Pi H$ , αἱ ἐλάττους τε εἰσι τῶν  $\Pi Z$ ,  $\Pi O$ , ἢ κύκλῳ ἐλάσσονι τῆ  $ZOK$  ἐπανήκεσι (77).

80. γ'. Εἰς καταμέτρησιν ἕν γωνίας ἀπάσης τῆς  $\nu$  ἀποχρήσει ἔχειν ἡμικύκλιόντι, μείζον ἢ ἐλάττον, διηρημένον μέντοι εἰς τὰς ἑαυτῆ 180 μοίρας· τιθεμένῳ γὰρ τῆ μὲν κατ' αὐτὸ κέντρον ἐπὶ τῆς  $\Pi$  κορυφῆς τῆς γωνίας, τῶν δὲ πλευρῶν  $\Pi Z$ ,  $\Pi O$  μειώσει ἢ προαγωγῆ πρὸς τῆ περιφέρειᾳ τῆ ἡμικυκλίῳ ἐπεριωθεισῶν, αὐτίκα δὲ διηρευθήσεται ἡ δύναμις τῆς γωνίας· εἰ μὲν γὰρ φέρεται  $\Pi Z$ ,  $\Pi O$  πλευραὶ περιέχουσι τόξον  $50^\circ$ , ἡ γωνία ἔσεται μοιρῶν 50.

Τυτὶ δὲ τὸ ἔτω διηρημένον ἡμικύκλιον Ἄναγωγεὺς λέγεται, ἢ Γραφόμετρον.

Ἄναγωγεὺς ἔστιν ἡμικύκλιον, οἷον τὸ  $ZAHK$  (χ. 8) ἐσκαμμένον τὰ ἐντὸς πρὸς τὸ δύνασθαι τὸν Γεωμέτηρην ὀρεῖν ἐν τοῖς κενοῖς τὴν τῶν πλευρῶν τῆς εἰς καταμέτρησιν προκειμένης γωνίας διεύθυνσιν.

81. Τὸ δὲ Γραφόμετρον (χ. 9) τὸ αὐτὸ τᾶλλα ὄν τῷ Ἄναγωγεὶ ἔχει ἢ κανόνα τὸν  $OK$  προσηροσμένον μὲν τῶν  $K$  κέντρῳ, κινητὸν μέντοι περι τὸ κέντρον, ὃς ἀκρίβει Γωνιόμετρον· πρὸς ὀρθὰς δὲ αὐτῷ ἐπὶ τῶν περάτων ἐσθήκασιν δύο κωνίδια χάλυβος, ἢ ἐτέρας ὕλης,

τὰ κχ, πν· εἰσὶ δὲ τετρημένα δι' ὅλα πρὸς τὸ διευθύνε-  
 ωσι αὐτόθεν τὸν ὀφθαλμόν· καλεῦνται δὲ Διόπτραι.

82. Ἰδὲ δὴ νῦν αἱ ἀρχοειδέσεται χρήσεις ἐκ-  
 τέρα τῶνδε τῶν ὀργάνων· χρῶνται δ' αἰεὶ ἐπὶ μὲν χάρτε  
 τῷ Ἀναγωγῆι, ἐπεὶ δὲ τῆς γῆς τῷ Γραφομέτρῳ.

83. Ἐπὶ μὲν ἔν χάρτε, τιθεμένε τῆ κατὰ τὸν Ἀν-  
 αγωγέα κέντρο ἐπὶ τῆς κατὰ τὴν γωνίαν κορυφῆς, ὁ-  
 ρῶμεν πόσας μοίρας περιέχουσιν ἐπὶ τῆ Ἀναγωγέως αἱ  
 τῆς γωνίας πλευραὶ, ὡς ἔῃ ἤδη εἴρηται (80).

84. Ἰνα δὲ τὴν ἐπιταχθεῖσαν γωνίαν ἐν χάρτε  
 γράψωμεν (9. 7), τὴν  $25^\circ$  φέρε· α'. ἤχθω εὐθεῖα ἢ  
 ΑΟ· β'. τὸ τῆ Ἀναγωγέως κέντρον τεθεισθω ἐπὶ τῆ Α  
 πέρατος ταύτης τῆς εὐθείας, ἔ σημειωθήτω τὸ Ο σημεῖον  
 τῆς περιφερείας τῆ Ἀναγωγέως, ἔνθα ἐπαριθμῶνται  $25^\circ$   
 σημειωθήτω δὲ αὐτῷ ἀντίστοιχον ἐπὶ τῆ χάρτε τὸ Π, ἐξ  
 ἔ ἐπὶ τὸ Α ἤχθω ἢ ΑΠ εὐθεῖα· εὐδηλον ἔν αἰς ἢ ΑΠ σὺν  
 τῆ προτῆ ΑΟ περιέξουσι γωνίαν τὴν ὑπὸ ΠΑΟ μετρημέ-  
 νην ὑπὸ τόξῳ  $25^\circ$ .

85. Ἐὰν δὲ ζητῆται γωνίαν συσῆσαι (9. 10) ἴσην  
 τῆ δοθείση ΑΠΖ, ληφθείσης διὰ τῆ Ἀναγωγέως τῆς  
 κατὰ τὴν δοθείσαν γωνίαν δυνάμεως, μοιρῶν φέρ' εἶπειν  
 ἔσης 40, συσῆσομεν ἑτέραν μοιρῶν 40 κατὰ τὸν ἄρτι εἰ-  
 ρημένον τρόπον.

Ἐξέσαι δὲ γωνίαν συσῆσασθαι καινὴν τὴν ΓΘΧ ἴσην  
 τῆ δοθείση ΑΠΖ ἔ κατὰ τόνδε τὸν τρόπον.

86. α'. ἤχθω γὰρ διὰ τῆ κανόνος εὐθεῖα ἢ ΓΘ  
 β'. κέντρῳ μὲν τῷ Θ ἀκτίνι δὲ τῆ ΘΓ γεγράφθω ἀόρι-  
 σον τόξον τὸ ΕΟΔ (65)· γ'. κέντρῳ μὲν τῆ Π κορυφῆ  
 τῆς δοθείσης ὑπὸ ΑΠΖ γωνίας, διαστήματι δὲ τῷ αὐτῷ, ἔ  
 ἔ πρὶν, γεγράφθω τὸ ΗΙ τόξον· δ'. εἰλήφθω τῷ διαβῆ-  
 τῆ Κ.τ.Π



τη τὸ μῆκος τῆς  $HI$  τόξου, ἢ μεταβιβασθήτω ἐκ τῆς  $E$  ἐπὶ τῆς ἀορίστου τόξου  $EOΔ$ , ἢ σεσημειώσθω τὸ  $O$  σημεῖον, ἐφ' ἧς ἴσεται τὸ σκέλος τῆς διαβήτου· ε'. ἐπεζεύχθω ἡ  $ΘΟΧ$ , ἣτις σὺν τῇ  $ΓΘ$  εὐθείᾳ ποιήσει γωνίαν τὴν ὑπὸ  $ΓΘΧ$  ἴσην τῇ ὑπὸ  $ΑΠΖ$ .

Ἐκ γὰρ τῆς τῆς γήματος κατασκευῆς τὰ τόξα  $HI$ ,  $EO$  εἰσὶν ἰσάλληλα· ἐπεὶ ἔν μέρη εἰσὶν ἴσα δυοῖν ἰσαλλῶν κύκλων γεγραμμένων περὶ τὰς κορυφὰς τῶν  $\Pi$ ,  $\Theta$  γωνιῶν, ἢ αἱ γωνίαι ἄρα  $ΑΠΖ$ ,  $ΓΘΧ$ , ἃς αὐτὰ μετρεῖσιν, εἰσὶν ἰσάλληλοι (78).

87. Εἰς καταμέτρησιν δὲ γωνίας τῆς ὑπὸ  $ΑΠΖ$  (9. 10) ἐπὶ τῆς γῆς γεγραμμένης, πρῶξις δὴ αὕτη χρησιμωτάτη τῶν τῆς Γεωμετρίας, ἢ συχνάκις ἐπαναλαμβάνομένη, χρῆσέον τῷ Γραφομέτρῳ· α'. κείμενος τῆς κατὰ τὸ Γραφόμετρον ποδὸς ἐπὶ τῆς  $\Pi$  κορυφῆς τῆς εἰς καταμέτρησιν προκειμένης γωνίας, τιθέσθω τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς ὅσον ἢ παραλλήλως τῷ τῆς καταμετρηθησομένης γωνίας ἐπίπέδῳ· β'. διευθυνέσθω ἔτω τὸ Γωνιόμετρον, ὡς εἶναι ὁρᾶν διὰ τῶν διοπτρῶν ἀντικείμενόν τι ἐπὶ τῆς  $\Pi A$  γραμμῆς, οἰκοδόμημά τι φέρε κείμενον ἐπὶ τῆς  $A$ , ἢ σημειώσθω ἐπὶ τῆς περιφέρειας τῆς Γραφομέτρου τὸ σημεῖον, ἢ ὁ  $H$  ἀριθμὸς, ὃς ἀντιστοιχεῖ τῷ Γωνιόμετρον· γ'. περισρεφέσθω πρὸς τὸ  $Z$  τὸ Γωνιόμετρον, ἕς τ' ἂν ἴδῃ ὁ θεατῆς ὁρατόν τι κείμενον ἐπὶ τῆς  $\Pi Z$  γραμμῆς, ἄνθρωπον φέρε ἰσάμενον ἐν τῷ  $Z$ · δ'. ζητεῖσθω ἐπὶ τῆς Γραφομέτρου πόσας μοίρας διήλθε τὸ Γωνιόμετρον ἐν τῇ περιφέρειᾳ ἢ ἢ διεύθυνσις  $\Pi A$  εὐρεθείη ἐπὶ τῆς διεύθυνσεως  $\Pi Z$ · ἔστω ἔν ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν, ἢ ἢ ἡ δύναμις τῆς  $HI$  τόξου τῆς ἐν τῷ Γραφομέτρῳ ὑπὸ δυεῖν διεύθυνσεων  $\Pi A$ ,  $\Pi Z$  τῆς Γωνιομέτρου περιεχομένης, ἐμφανεῖ ὄντως ἐν μοίραις

δύνταμι τῆς ὑπὸ ΑΠΖ κατὰ γῆν προκειμένης εἰς κατα-  
μέτρησιν γωνίας, ὅπερ ἐκ τῶν ἄρτι εἰρημένων κατάδηλοι.

88. Ἴνα δὲ συσταθῆ κατὰ γῆς ἐν τῷ Π γωνία ἴση  
τῇ δοθείσῃ, φέρ' εἰπεῖν  $40^\circ$ , τίθεσθω τὸ γραφόμετρον  
ἐπὶ τῷ σημείῳ Π, ἔ προστηγνύσθω πάσσαλος κατὰ τὴν  
φορὰν ΠΑ, ἣν ἠνέχθη τὸ Γωνιόμετρον· ἐκ τούτου δὲ περι-  
σρεφέσθω ἡ δίοπτρα πρὸς τὸ Ζ φέρε μέχρῃς ἂν διέλθῃ  
μοίρας τῷ Γραφομέτρῳ  $40^\circ$ · ἐξῆς δὲ προστηγνύσθω πάσ-  
σαλος κατὰ τὴν ΠΙΖ φορὰν, ἐφ' ἧς ὀρίζονται αἱ  $40$  μοί-  
ραι, φέρ' εἰπεῖν ἐπὶ τῷ Ι. Τέλος δὲ αἱ ἐκ τῷ Π ἀχθεῖσκι  
εὐθεῖαι, ἡ μὲν πρὸς τὸν Α πάσσαλον, ἡ δὲ πρὸς τὸν Ζ,  
περιέξουσιν τὴν ζητούμενην  $40^\circ$  γωνίαν· μετρηθήσεται γὰρ  
αὕτη ὑπὸ τῷ κατὰ τὸ Γραφόμετρον τόξῳ ΗΙ, ὃ ἐστὶ μοι-  
ρῶν  $40$ .

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

### Παντοίων γωνιῶν ἐκτίμησις.

89. Ἦνίκ' ἂν εὐθεῖα ἡ ΚΖ (α. 11) ἐφ' ἑτέρας τῆς  
ΒΚΟ σταθῆ, τὸ ἄθροισμα τῶν δυεῖν γωνιῶν ΖΚΟ, ΖΚΒ,  
τῶν ἐπ' αὐτῆς γινομένων, αἰ καταμετρεῖται διὰ ἡμικυ-  
κλίῃς, εἴτ' ἔν μοιρῶν  $180^\circ$ · εἴγε ἡ μὲν ὀξεῖα γωνία ΖΚΟ  
μετρεῖται ὑπὸ τῷ τόξῳ ΖΟ, ἡ δ' ἀμβλεία ΖΚΒ ὑπὸ  
τῷ ΖΑΒ· ἐστὶ δὲ  $ZO + ZKB = OZAB = 180^\circ$ .

90. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Πᾶσαι ἄρα αἱ γωνίαι, αἱ ἐπὶ  
μιας εὐθείας ἐκ πολλῶν ἐφ' ἐνὸς αὐτῆς σημείῳ συνισθῶν  
εὐθειῶν συνιστάμεναι, αἰ ἔσονται  $180^\circ$ · εἴγε αἱ γωνίαι ΖΚΟ  
+ ΖΚΑ + ΑΚΒ καταμετρῶνται ἀκριβῶς ὑπὸ τῷ ἡμικυ-  
κλίῃ ΒΑΟ.

91. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Τῆς ΑΠ (α. 2) πρὸς ὀρθὰς ἰσαμένης τῇ ΠΒ, ἢ ὑπὸ ΑΠΒ γωνία ἔσαι ὀρθή (69) ἢ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΠΟ· ἐπεὶ δὲ τῶν δυεῖν ὁμῶς μέτρον ἐστὶ τὸ ΒΑΟ ἡμικύκλιον, μίᾳς ὀρθῆς τῆς ΒΠΑ ἔσαι μέτρον τὸ ΒΑ τεταρτημόριον· ἀλλὰ πᾶς ὁ κύκλος διήρηται εἰς 360°· ἄρα τὸ ΑΒ κυκλικὸν τεταρτημόριον ἔσαι μοιρῶν 90°· ἐξέ-  
σαι ἄρα ὀρίσαι τὴν ὀρθὴν γωνίαν, ὅτι ἔστιν ἢ ὑπὸ τόξου 90° μετρομένη· ἕκῃν διάφορα εἶδη γωνίας ὀρθῆς ἕκ εἰ-  
σὶν, ἀλλ' εἰσὶν ἅπασαι ἰσάλληλοι.

92. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Τὸ ὀξείας γωνίας τῆς ΖΠΟ μέτρον ἐστὶ τόξον ἑλάττω τῆ κυκλικῆ τεταρτημορίᾳ· ὀρι-  
σθῆναι ἄρα δύναται ἢ ὀξεία γωνία, ὡς ἔστιν ἢ καταμετρη-  
μένη τόξῳ ἑλάττω ἢ 90°· ἕκῃν αὔξασθαι δύναται ἢ ὀ-  
ξεία ἀπὸ ἀπειροσῆς ἐς τὴν παραλήγουσαν τῶν 90°· ἄπει-  
ρα ἄρα τὰ τῆς ὀξείας γωνίας εἶδη.

93. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Τὸ δὲ τῆς ἀμβλείας γωνίας ΖΠΒ μέτρον ἐστὶ τόξον τὸ ΒΑΖ μείζον, ἢ τὸ κυκλικὸν τεταρτη-  
μόριον ΑΒ, ἢ δὴ μείζον τῶν 90°· ἐξέσαι ἄρα ἢ περὶ αὐ-  
τῆς εἶπειν, ὡς ἀμβλεία γωνία ἔστιν ἢ ὑπὸ τόξου μείζονοι  
ἢ 90° μετρομένη· αὔξασθαι ἄρα δύναται ἢ ἀμβλεία ἀπὸ  
90° μέχρι τῆ παραλήγοντος τῷ 180°· δύνανται ἄρα  
ὑπάρχειν ἢ ταύτης εἶδη ἀπειράριθμα.

94. Εἴρηται δὲ αὔξασθαι μέχρι τῆ παραλήγοντος  
λεπτῆ τῶν 180°· ἢ γὰρ ΠΖ εὐθεῖα μετὰ τῆς ΒΠΟ γω-  
νίαν μοιρῶν 180 συστήσασθαι ἢ δύναται· εἰ γὰρ συμπέσῃ  
τῇ ΒΠΟ, ἐν ἔσεται αὐτῇ, ἢ ὡς μία εὐθεῖα γραμμὴ λο-  
γισθήσεται, μηδεμίαν περιέχουσα γωνίαν· ἔπεται δὲ τῆτο  
ἐκ τῆ ἄρτι εἰρημένου (76).

95. Ὄταν δύο εὐθεῖαι ΒΚΟ, ΚΚΖ (α. 12) ὑπ'  
ἀλλήλων τέμνονται, τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπ' αὐτῶν συνιστα-

Τμ. Β.

Ν

μένων γωνιῶν  $\alpha, \eta, \Gamma, \chi$  μετρεῖται ὑφ' ὅλης τῆς κυκλικῆς περιφερείας  $\text{ΟΖβκΤ}$ , ὃ καθ' ἑαυτὸ δῆλον. Τὸ ἄρα ἄθροισμα τεσσάρων ἰσώνωνδῆποτε γωνιῶν, αἱ συνίστανται ὑπὸ δύο εὐθειῶν ἀλλήλαις διατεμνομένων, ἔσιν ἴσων μοίραις 360.

96. ΠΟΡΙΣΜΑ. Τὸ ἄρα ἄθροισμα ἀπειραριθμῶν γωνιῶν (σχ. 2) περὶ ἓν σημεῖον συνισταμένων ὑφ' ὅσων ἄν τις βύληται εὐθειῶν τῶν  $\text{ΑΠ}, \beta\text{Π}, \kappa\text{Π}, \text{ΟΠ}, \text{ΖΠ}$  ἔσαι αἰ ἴσον 360°. πᾶσαι γὰρ ἅμα ὑφ' ὅλης τῆς κυκλικῆς καταμετρῶνται περιφερείας.

97. Ἐὰν ἄρα πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ἴσον ἀλλήλων ἀπέχωσιν, ἐκάστη γωνία ἴση ἔσαι τῷ 360 διαιρεθέντι διὰ τῶν γωνιῶν ἀπασῶν ἀριθμῶν.

Δυσὲν εὐθειῶν ὑπ' ἀλλήλων διατεμνομένων (σχ. 12), αἱ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κείμεναι εὐθείας γωνίαι καλῶνται γωνίαι ἐφεξῆς· ἔτως αἱ  $\alpha, \eta$ , ἢ αἱ  $\kappa, \chi$  εἰσὶν ἐφεξῆς γωνίαι ἐπὶ τῆς  $\kappa\text{Ζ}$ . αἱ δὲ  $\alpha, \chi$  ἢ  $\eta, \kappa$  εἰσὶν ἐφεξῆς ἐπὶ τῆς  $\beta\text{Ο}$  γραμμῆς· λέγονται δὲ γωνίαι κατὰ κορυφὴν αἱ διακρινόμεναι ὑπὸ τῆς τῶν εὐθειῶν διατομῆς· ἔτως αἱ  $\alpha, \kappa$  γωνίαι εἰσὶ κατὰ κορυφὴν, ὡσαύτως ἢ αἱ  $\eta, \chi$ .

Ἐπὶ τέτων ἔν τῶν γωνιῶν ῥᾶσα δειχθήσεται τάδε.

98. α'. Τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν ἴσον ἐσὶ μοίραις 180°· καὶ γὰρ  $\alpha + \eta$  μετρῶνται τῷ ἡμικυκλίῳ  $\kappa\beta\text{Ζ}$ . αἱ δὲ  $\eta + \Gamma$ , τῷ ἡμικυκλίῳ  $\beta\kappa\text{Ο}$  ἢ ἔτως ἐξῆς.

99. β'. Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ· ἢ γὰρ τὸ ἡμικύκλιον  $\beta\text{ΖΟ} = \text{ΖΟκ}$ . ἄρα  $\beta\text{ΖΟ} - \text{ΖΟ} = \text{ΖΟκ} - \text{ΖΟ}$ . ἄρα  $\beta\text{τΖ} = \kappa\text{τΟ}$ . ἄρα ἢ  $\alpha = \kappa$ . Ὡσαύτως δειχθήσεται ὅτι ἢ ἡ γωνία  $\eta$  ἴση ἐσὶ τῇ  $\chi$ .

100. γ'. Μιᾶς ἄρα γνωσθείσης τῶν τεσσάρων γωνιῶν.

γῶν, τῶν συνισταμένων ὑπὸ δύο ἀλλήλαις διατεμνομένων εὐθειῶν, καὶ αἱ ἄλλαι τρεῖς γνωσθήσονται· ἔστω γὰρ ἡ  $\alpha = 150^\circ$ · καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν ἄρα αὐτῆ  $\Gamma = 150^\circ$ · εἰσι δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι  $\alpha$ , ἡ ὁμῶς ἴσαι μοίραις  $180^\circ$ · ἀλλ'  $\alpha = 150^\circ$ · ἄρα  $\eta = 30^\circ$ · ἄρα καὶ  $\chi = 30^\circ$ .

101. δ'. Μιᾶς ἄρα τέττων τῆς χόρθῆς ἕσης (χ. 6), καὶ ἐκάστη τῶν ἄλλων τριῶν ὀρθὴ ἔσεται.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

### Περὶ τῆς Καθέτου.

102. Τῆς  $\eta\beta$  εὐθείας καθέτη τῆ  $\kappa\delta$  ἐφεσώσης, εἰς κληφθῶσι δύο σημεῖα τὰ  $\kappa$ ,  $\Gamma$  ἰσοδιεσῶτα τῷ σημείῳ  $\beta$ , ὃ εἰσι κοινὸν τῆς τε  $\beta\eta$ , καὶ τῆς  $\kappa\delta$ , ὡς εἶναι  $\beta\kappa = \beta\Gamma$ , φημί δὴ, ὡς καὶ ἅπαν ἄλλο σημεῖον τῆς  $\beta\eta$  καθέτου ἴσον ἀπέχει τῶν δύο σημείων  $\kappa$ ,  $\Gamma$  τῆς  $\kappa\delta$  εὐθείας· ἴσον φέρει ἀπέχει τὸ  $\eta$  τῶν  $\kappa$ ,  $\Gamma$ , καὶ ἔσιν  $\eta\kappa = \eta\Gamma$ · εἰ μὴ γάρ· ἔστω ἐγγύτερον τῷ  $\kappa$ , ἢ τῷ  $\Gamma$ · καὶ ἐπεὶ, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ  $\beta$  σημεῖον ταύτης τῆς καθέτου ἴσον ἀπέχει τῷ τε  $\kappa$  καὶ τῷ  $\Gamma$ · ἀναγκασίως ἡ κάθετος  $\beta\eta$  μᾶλλον ῥέψει πρὸς τὰ ἐπὶ  $\kappa$ , ἢ πρὸς τὰ ἐπὶ  $\Gamma$ · ὅκ ἔσιν ἄρα κάθετος, ὅπερ ἄτοπον· ὡσαύτως δὲ καὶ ἅπαν σημεῖον τῆς καθέτου ἴσον ἀπέχει τῶν δύο τέττων σημείων· εἴτ' ἔν ἔσιν  $\Theta\kappa = \Theta\Gamma$  καὶ ἐξῆς ὁμοίως.

103. Ἐὰν κάθετος ἡ  $\eta\beta$  προαχθῆ ἐπὶ τὸ  $Z$ , ἡ αὐτὴ αἰεὶ ἐκληφθήσεται εὐθεῖα (19)· καὶ τοίνυν δύο σημεῖα ἱκανά εἰσιν ὀρίσασθαι τὴν θέσιν τῆς εὐθείας (20)· ἐπεὶ ἔν δύο σημεῖα  $\beta$ ,  $\eta$  τῆς καθέτου  $\eta\beta Z$  ἴσον ἀπέχουσιν ἕκαστον