αὐτὸ γενικῶς ἐστι τύπος τοῦ συνάπτειν ἁπάσας τὰς σειρὰς τῶν κλασμάτων, ὧν οἱ μὲν ἀριθμηταὶ ἀριθμητικήν, οἱ δὲ παρονομασταὶ γεωμετρικήν, συνεχοῦσι πρόοδον.

561. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δὲ ἡ ἄπειρος σειρὰ μὴ ἔχῃ ἀνάγεσθαι ἐπὶ κεφάλαιον πεπερασμένον, πειρατέον παντὶ τρόπῳ συγκλίνουσαν αὐτὴν ἀπεργάσασθαι· τηνικαῦτα γὰρ ἐνίους τῶν προτέρων ὅρων συνάπτοντες τοὺς ἄλλους παρορῷν δυνάμεθα ἄτερ ἐπαισθητοῦ διαπτώματος· ἐπὶ γὰρ φέρε $\sqrt{a^2 + \upsilon} = a + \frac{\upsilon}{2a} - \frac{\upsilon^2}{8a^3} + \frac{\upsilon^3}{16a^5}$ κτ. ὅσωπερ ἡ ποσότης υ ἐλάττων ἢ τῆς a, τοσούτῳ τάχιον ἡ σειρὰ συγκλίνει· βραχύνονται γὰρ ἀεὶ οἱ ἀριθμηταὶ ὥσγε πρὸς τοὺς αὐτῶν παρονομαστάς.

Τεθείσθω γὰρ $a = 10$, καὶ $\upsilon = 1$· ἔστι δὴ $\sqrt{a^2 + \upsilon} = \sqrt{101} = 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{1600000}$· σαφὲς οὖν τὸν τέταρτον ὅρον ὑπάρχειν βραχύτατον, ἐξαρκοῦσι δὲ τοὺς πρώτους τρεῖς ὅρους μόνον πρὸς παράστασιν τῆς τῇ ἀληθεῖ προσεγγιζούσης ῥίζης $10 + \frac{399}{8000}$.

562. Ἐὰν ληφθῶσιν οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5 κτ. οἱ μὲν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνοι ἔσονται 1, 4, 9, 16, 25 κτ. οἱ δὲ κύβοι 1, 8, 27, 64, 125 κτ. οἱ δὲ τέταρτοι βαθμοὶ 1, 16, 81, 256, 625 κτ., καὶ ἑξῆς ὡσαύτως· αὗται οὖν καλοῦνται σειραὶ ἄπειροι τῶν βαθμῶν τῶν ἀπὸ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν· ἵνα δὲ τὰς τοιάσδε σειρὰς συνάπτειν μάθωμεν, χρησόμεθα συλλογισμοῦ ἐφόδῳ τοιᾷδε.

Ἐπείπερ αἱ ῥίζαι τούτων τῶν βαθμῶν, φυσικοὶ ἀριθμοὶ οὖσαι, μονάδι ἀεί ποτε ἀλλήλων διενηνόχασιν, ἐὰν ληφθῶσιν ὁσαιδήποτε αὐτῶν, καὶ κληθῶσι λ, μ, ν, ξ, π, ἐν ἔςαι $\rho = \pi + 1$, ϗ $\pi = \xi + 1$, ϗ $\xi = \nu + 1$, ϗ $\mu = \lambda + 1$· ἐὰν ἐν αὗται αἱ ἐξισώσεις ὑψωθῶσι συνεχῶς ἐπὶ βαθμούς, προκύψουσιν αἱ ἐφεξῆς ἐξισώσεις

$$\begin{array}{l|l}
\rho^2 = \pi^2 + 2\pi + 1 & \rho^3 = \pi^3 + 3\pi^2 + 3\pi + 1 \\
\pi^2 = \xi^2 + 2\xi + 1 & \pi^3 = \xi^3 + 3\xi^2 + 3\xi + 1 \\
\xi^2 = \nu^2 + 2\nu + 1 & \xi^3 = \nu^3 + 3\nu^2 + 3\nu + 1 \\
\nu^2 = \mu^2 + 2\mu + 1 & \nu^3 = \mu^3 + 3\mu^2 + 3\mu + 1 \\
\mu^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 & \mu^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\rho^4 = \pi^4 + 4\pi^3 + 6\pi^2 + 4\pi + 1 \\
\pi^4 = \xi^4 + 4\xi^3 + 6\xi^2 + 4\xi + 1 \\
\xi^4 = \nu^4 + 4\nu^3 + 6\nu^2 + 4\nu + 1 \\
\nu^4 = \mu^4 + 4\mu^3 + 6\mu^2 + 4\mu + 1 \\
\mu^4 = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1
\end{array}$$

Ἐν ταῖς πρώταις ἐξισώσεσιν ἑκάςου τῶν τριῶν συςημάτων ἀντικαταςαθήτωσαν, ἀντὶ μὲν π^2 ἡ αὐτοῦ δύναμις, ἀντὶ δὲ ξ^2 ἡ ἰδία αὐτοῦ δύναμις, ϗ οὕτως ἑξῆς ἕως τῆς τοῦ λ^2 δυνάμεως· ὅπου ἕξομεν

$$\begin{array}{rl|rl}
\rho^2 = & + 2\pi + 1 & \rho^3 = & + 3\pi^2 + 3\pi + 1 \\
 & + 2\xi + 1 & & + 3\xi^2 + 3\xi + 1 \\
 & + 2\nu + 1 & & + 3\nu^2 + 3\nu + 1 \\
 & + 2\mu + 1 & & + 3\mu^2 + 3\mu + 1 \\
 \lambda^2 & + 2\lambda + 1 & \lambda^3 & + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\rho^4 = & + 4\pi^3 + 6\pi^2 + 4\pi + 1 \\
 & + 4\xi^3 + 6\xi^2 + 4\xi + 1 \\
 & + 4\nu^3 + 6\nu^2 + 4\nu + 1 \\
 & + 4\mu^3 + 6\mu^2 + 4\mu + 1 \\
 \lambda^4 & + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1
\end{array}$$

563. Ἐκ δὲ δὴ τῶνδε τῶν ἐξισώσεων ἀποφέρονται τάδε τὰ θεωρήματα „ἐὰν δοθῶσι πολλοὶ φυσικοὶ ἀριθμοί:

α΄. „ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου τετράγωνος ρ^2 ἴσος ἐςὶ „τῷ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετραγώνῳ λ^2, συνάμα τῷ διπλῷ ἀθροίσματι ἁπάντων τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, εἴτ' οὖν + „$2\pi + 2\xi + 2\nu + 2\mu + 2\lambda$, καὶ ἔτι σὺν τῷ ἀριθμῷ „τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, εἴτ' οὖν $+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1$". ἔςωσαν γὰρ φυσικοὶ ἀριθμοὶ 2, 3, 4, 5· ἔςαι οὖν ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου τετράγωνος $25 = 4 + 4 + 6 + 8 + 1 + 1 + 1 = 25$· ἔςωσαν αὖθις φυσικοὶ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6· οὖν ἔσεται ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου τετράγωνος $36 = 1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 36$ κτ.

β΄. „ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου κύβος ρ^3 ἴσος ἐςὶ τῷ „ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου κύβῳ λ^3, συνάμα τῷ τριπλῷ ἀθροί„σματι τῶν τετραγώνων τῶν ἀφ' ἁπάντων τῶν ὅρων τῶν „πρὸ τοῦ ἐσχάτου, καὶ τῷ τριπλῷ ἀθροίσματι ἁπάντων τῶν „πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, καὶ ἔτι σὺν τοσαύταις μονάσιν, ὅσοι „εἰσὶν οἱ πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅροι". ἔςω γὰρ σειρὰ φυσικῶν ἀριθμῶν 4, 5, 6, 7· δῆλον γοῦν ὅτι ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου κύβος $7^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 1 + 1 + 1$, εἴτ' οὖν $343 = 64 + 48 + 75 + 108 + 12 + 15 + 18 + 3$.

γ΄. „ὁ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου τέταρτος βαθμὸς ρ^4 „ἴσος ἐςὶ τῷ ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου τετάρτῳ βαθμῷ λ^4 συνά„μα τῷ τετραπλῷ κεφαλαίῳ τῶν κύβων τῶν ἀφ' ἁπάν„των τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, καὶ τῷ ἑξαπλῷ κεφαλαίῳ „τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν ὅρων, καὶ τῷ τε„τραπλῷ κεφαλαίῳ τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων, καὶ τοσαύ„ταις μονάσιν, ὅσοι εἰσὶν οἱ πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅροι".

Τὰ αὐτὰ δὴ καὶ περὶ τῶν ἄλλων δυνάμεων ὡσαύτως εὑρίσκεται, καὶ ἀριθμητικοῖς ποσοῖς ὅτι ῥᾷςα ἐφαρμόζεται.

564. Ἐὰν ἄρα ὁ μὲν πρῶτος ὅρος κληθῇ α, ὁ δὲ ἔσχατος ω, τὸ δὲ ἁπάντων τῶν ὅρων κεφάλαιον κ, ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν πρὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρων ἔσται $\omega - \alpha$, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν ἀφ' ἁπάντων τῶν ὅρων κ^2, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν κύβων κ^3· καὶ τὸ μὲν κεφάλαιον ἁπάντων τῶν πλὴν τοῦ ἐσχάτου ὅρων ἔσται $= \kappa - \omega$, τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν ὅρων $= \kappa^2 - \omega^2$· τὸ δὲ κεφάλαιον τῶν κύβων τῶν ἀπὸ τῶν αὐτῶν ὅρων ἔσται $= \kappa^3 - \omega^3$· καὶ τοῦ μὲν πρώτου θεωρήματος τὸ συμβολικὸν σχῆμα ἐκτεθείσεται οὕτω· $\omega^2 = \alpha^2 + 2\kappa - 2\omega + \omega - \alpha$, εἴτ' οὖν $\omega^2 = \alpha^2 - \alpha + 2\kappa - \omega$· τοῦ δὲ δευτέρου οὕτω· $\omega^3 = \alpha^3 + 3\kappa^2 - 3\omega^2 + 3\kappa - 3\omega + \omega - \alpha$, τουτέστι, $\omega^3 = \alpha^3 - \alpha + 3\kappa^2 - 3\omega^2 + 3\kappa - 2\omega$· τέλος δὲ τοῦ τρίτου· $\omega^4 = \alpha^4 + 4\kappa^3 - 4\omega^3 + 6\kappa^2 + 6\omega^2 + 4\kappa - 4\omega + \omega - \alpha$, ὅ ἐστι, $\omega^4 = \alpha^4 - \alpha + 4\kappa^3 - 4\omega^3 + 6\kappa^2 - 6\omega^2 + 4\kappa - 3\omega$ κτλ.

Ἐκ μὲν οὖν τοῦ πρώτου τύπου εὑρίσκεται $\kappa = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha$, ἧς δυνάμεως ἀντικατασταθείσης ἐν τῷ δευτέρῳ τύπῳ, γίνεται $\omega^3 = \alpha^3 + 3\kappa^2 - \frac{3}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega - \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha$· ὅθεν προέρχεται $\kappa^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{6}\alpha$· ἐὰν δὲ αὕτη ἡ δύναμις ἀντικατασταθῇ ἐν τῷ τρίτῳ τύπῳ, εὑρεθήσεται ἐντεῦθεν $\kappa^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2 - \frac{1}{4}\alpha^4 + \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{1}{4}\alpha^2$. Ταῦτοι δὲ τύποι εὑρεθῆναι δύνανται καὶ περὶ καθυπερτέρων βαθμῶν· ἔστω οὖν $\alpha = 4$, καὶ $\omega = 10$, καὶ ζητηθήτω τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῆς φυσικῆς σειρᾶς 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10· ἐκεῖ ἔσται $\kappa^2 = \frac{1}{3}10^3 + \frac{1}{2}10^2 + \frac{1}{6}10 - \frac{1}{3}4^3 + \frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{6}4 = \frac{1}{3}1000 + \frac{1}{2}100 + \frac{1}{6}10 - \frac{1}{3}64 + \frac{1}{2}16 - \frac{1}{6}4 = \frac{1000}{3} + \frac{100}{2} + \frac{10}{6} - \frac{64}{3} + \frac{16}{2} - \frac{4}{6} = \frac{936}{3} + \frac{116}{2} + \frac{6}{6} =$

$312 + 58 + 1 = 371$, ὃ δὴ εὑρεθήσεται καὶ ἐὰν ἑξῆς πάντες οἱ ἀριθμοὶ τετραγωνισθῶσι, καὶ ἀλλήλοις ἐπισυναφθῶσιν οἱ τετράγωνοι· τὰ αὐτὰ δὲ φανήσεται κἂν ἄλλη σειρὰ φυσικῶν ἀριθμῶν ληφθῇ, καὶ δὴ καὶ εἰ τῷ τρίτῳ προσεφαρμοσθῇ τύπῳ.

565. Ἐὰν δὲ ὁ πρῶτος τῆς σειρᾶς ὅρος ᾖ 0 ἢ 1, γενήσονται $x = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\omega$· καὶ $x^2 = \frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{6}\omega$, καὶ $x^3 = \frac{1}{4}\omega^4 + \frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{4}\omega^2$.

566. Ἐὰν δὲ ἄπειρος ᾖ ἡ σειρὰ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἔσται δῆτα ὁ ἔσχατος αὐτῆς ὅρος $= \infty$, ὅτινος ἀντὶ ω ἀντικατασταθέντος ἐν τῷ τύπῳ τοῦ τῶν τετραγώνων κεφαλαίου, προκύψει $x^2 = \frac{1}{3}\infty^3 + \frac{1}{2}\infty^2 + \frac{1}{6}\infty - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a$· τουτέστι $x^2 = \frac{1}{3}\infty^3$ διὰ τὸ εἶναι πάντας τοὺς ἄλλους ὅρους ἀπειροστοὺς τοῦ $\frac{1}{3}\infty^3$· τουτέστι $x^2 = \frac{1}{3}\infty^2 \times \infty$· ὅ ἐστι „τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγώνων τῶν ἀφ' „ἁπάντων τῶν ἐν φυσικῇ σειρᾷ ἐπ' ἄπειρον προϊόντων ἀ„ριθμῶν ἴσον ἐστὶ τριτημορίῳ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ ἀπὸ τοῦ „ἐσχάτου ὅρου τετραγώνου καὶ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ.“

567. Ὡσαύτως εὑρίσκεται τὸ κεφάλαιον τῶν κύβων τῶν ἀπ' ἀριθμῶν, ἐν φυσικῇ σειρᾷ ἐπ' ἄπειρον προϊόντων, τεταρτημόριον ὂν τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου κύβου καὶ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ. Ἀντικατασταθέντος γὰρ τοῦ ∞ ἀντὶ ω ὁ τύπος τρέπεται ἐπὶ τόνδε $x^3 = \frac{1}{4}\infty^4$· καὶ ἐν γένει „τὸ κεφάλαιον τῶν βαθμῶν, οἷς δείκτης πεπε„ρασμένος ὑπάρχει μ, τῶν ἐξ ἀριθμῶν φυσικῇ σειρᾷ ἐπ' „ἄπειρον χωρούντων ἴσον ἐστὶ τῷ $\frac{1}{\mu+1}$ τοῦ γινομένου ἐκ τοῦ „βαθμοῦ ∞^μ τοῦ ἀπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου καὶ τοῦ τῶν ὅρων ἀρι„θμοῦ ∞, εἴτ' οὖν $x^\mu = \frac{1}{\mu+1}\infty^{\mu+1} = \frac{\infty^{\mu+1}}{\mu+1}$

568. Ἔτι δὲ καὶ ταῖς ὁμοθεσμίαις τῶν ῥιζῶν τῶν ἐν φυσικῇ σειρᾷ ἐπ' ἄπειρον προϊόντων ἀριθμῶν ἐφαρμόζεται· εἰ γὰρ ζητοῖντο τῶν ῥιζῶν αἱ τετραγωνικαὶ, ἔσται $\mu = \frac{1}{2}$

$$(148)\cdot \text{ καὶ } \mu + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{ καὶ } \frac{1}{\mu + 1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\cdot$$

ὥστε „τὸ κεφάλαιον τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν ἀπείρου σειρᾶς ὅρων τάξει φυσικῇ προϊόντων ἴσον ἐστὶ δυσὶ τριτημορίοις τοῦ γινομένου ἐκ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ ἐσχάτου ὅρου, καὶ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ“ εἴτ' οὖν $\frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$· καὶ γὰρ $\frac{2}{3}\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty = \frac{2}{3}\infty^{\frac{1}{2} + \frac{2}{2}} = \frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$· ἐπεὶ δὲ $\frac{2}{3}\infty^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\infty}$ (148)· ἐκεῖν $\frac{2}{3}\infty^{\frac{1}{2}} \times \infty = \frac{2}{3}\sqrt{\infty} \times \infty = \frac{2}{3}\sqrt{\infty^3}$ (167)· ἄρα ὁ τύπος $\frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$ ἰσοδυναμεῖ τῷ τύπῳ $\frac{2}{3}\sqrt{\infty^3}$.

569. Πρὶν ἢ δὲ τέλος ἐπιθεῖναι τῷ Συμβολικῷ λογισμῷ δεῖν ᾠήθην διὰ βραχέων διαλαβεῖν, ὅπως ὁ περιώνυμος Εὔλερος κέχρηται ταῖς ἀποκλινούσαις σειραῖς εἰς εὕρεσιν τῶν κατὰ τὰς ἐξισώσεις ῥιζῶν· Θεμέλιος δὲ ὑπόκειται αὐτῷ τῇ μεθόδῳ τὸ ὑπὲρ ἑκάστης ἐξισώσεως ἐξευρεῖν προσδιορίσασθαι σειρὰν ἀριθμῶν α, β, γ κτλ. οὕτως ἐχόντων φύσεως, ὡς ἕκαστον ὅρον τῶν τῆς σειρᾶς διὰ τοῦ ἡγουμένου διαιρούμενον ἐμφαίνειν τὴν δύναμιν τῆς ῥίζης τοσούτῳ ἀκριβέστερον, ὅσον ἄντις μᾶλλον προαγάγοι τὴν τῶν ἀριθμῶν σειράν.

Ὑποτεθείσθωσαν, φησὶν, ὅροι κατὰ σειρὰν οἱ π, κ, ρ, σ, τ, υ, κτλ., οὕτως ἔχοντες φύσεως, ὡς τὸ ἑκάστου τινος πηλίκον διαιρεθέντος διὰ τοῦ ἡγουμένου ἐμφαίνειν ἄλις ἐγγὺς τὴν ῥίζαν χ, τουτέστιν ὡς ἔγγιστα ὑπάρχειν

$\frac{\kappa}{\pi} = \chi$, ϗ $\frac{\rho}{\kappa} = \chi$, ϗ $\frac{\sigma}{\rho} = \chi$ κτλ.· τούτων ὑποτεθέντων ἔσαι πάντως $\frac{\kappa}{\pi} \times \frac{\rho}{\kappa} = \chi \cdot \chi$, εἴτ' οὖν $\frac{\rho}{\pi} = \chi^2$, ϗ $\frac{\kappa}{\pi} \times \frac{\rho}{\kappa} \times \frac{\sigma}{\rho} = \chi\chi\chi$, εἴτ' οὖν $\frac{\sigma}{\pi} = \chi^3$· ὡσαύτως ϗ $\frac{\tau}{\pi} = \chi^4$, κτλ.

570. Ἔςω νῦν ἐξίσωσις $\chi\chi = \chi + 1$· ἐπεὶ οὖν ἐκ τῶν ἤδη ὑποτεθειμένων $\frac{\kappa}{\pi} = \chi$, ϗ $\frac{\rho}{\pi} = \chi^2$, ἀντικαταςάσει τούτων τῶν δυνάμεων ποριςθήσεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{\rho}{\pi} = \frac{\kappa}{\pi} + 1$, ϗ ἀφανισμῷ τῶν κλασμάτων $\rho = \kappa + \pi$· ἐπεὶ δὲ, ἐξ ὑποθέσεως, ϗ $\frac{\rho}{\kappa} = \chi$, ϗ $\frac{\sigma}{\rho} = \chi$· ἄρα ϗ $\frac{\rho}{\kappa} \times \frac{\sigma}{\rho} = \chi\chi$, εἴτ' οὖν $\frac{\sigma}{\kappa} = \chi^2$· ὥςε ἐν τῇ ἐξισώσει ἀντικαταςαθεισῶν ἀντὶ μὲν χ^2 τῆς $\frac{\sigma}{\kappa}$ ποσότητος, ἀντὶ δὲ χ τῆς $\frac{\rho}{\kappa}$, ἔςαι $\frac{\sigma}{\kappa} = \frac{\rho}{\kappa} + 1$, ϗ $\sigma = \rho + \kappa$· ἐπεὶ δὲ τέλος κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $\frac{\tau}{\sigma} = \chi$, ϗ $\frac{\sigma}{\rho} = \chi$· ἄρα $\frac{\tau}{\sigma} \times \frac{\sigma}{\rho} = \chi\chi$, εἴτ' οὖν $\frac{\tau}{\rho} = \chi^2$· ἀντικαταςάσει ἄρα γενήσεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{\tau}{\rho} = \frac{\sigma}{\rho} + 1$, καὶ $\tau = \sigma + \rho$· δῆλον ἄρα ἕκαςον ὅρον ταύτης τῆς σειρᾶς δεῖν εἶναι ἴσον

τῷ ἀθροίσματι τῶν δύω ἡγουμένων αὐτοῦ ὅρων. Τοιγαροῦν ἐὰν οἱ δύω πρῶτοι ὅροι δοθῶσιν, ἐφ' ὅσον ἄν τις καὶ βούλοιτο προεχθείη τὰ τῆς σειρᾶς· ληφθῆναι δὲ δύνανται (φησὶν ὁ ῥηθεὶς σοφὸς) οἱ δύω πρῶτοι ὅροι κατὰ τὸ δοκοῦν· ἐὰν οὖν ὑποτεθῶσι πρῶτοι οἱ 0, 1, χωρήσει ἡμῖν ἡ σειρὰ οὕτω· 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 κτλ. ἐν ᾗ παντὸς ὅρου διαιρουμένου διὰ τοῦ ἡγουμένου, ἐκφέρεται ἡ δύναμις τῆς χ, καὶ τοσούτῳ τῆς ἀληθοῦς ἐγγίων, ὅσῳ ἂν ἀπώτερος τοῦ πρώτου ληφθῇ ὅρος ὁ διαιρεθησόμενος· ἀρχομένοις μὲν γὰρ ἔστι μέγα τὸ διάστημα, προϊοῦσι δὲ ἐλαττοῦται· ἐὰν οὖν ληφθῇ $\chi = \frac{21}{13}$, ἔσται $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, ἔνθα τὸ διάστημα $= \frac{1}{169}$, τὰ δ' ἐφεξῆς τηλίκα ἔτι ἔλαττον αὐτὸ ἀπεργάζονται.

571. Ἔστω αὖ ἐξίσωσις $\chi\chi = 2\chi + 1$· καὶ ἐπειδὴ

$$\chi = \frac{\kappa}{\pi},\ \text{καὶ}\ \chi\chi = \frac{\rho}{\pi},\ \text{ἕξομεν}\ \frac{\rho}{\pi} = \frac{2\kappa}{\pi} + 1,$$

καὶ, ἐναλλαγῇ τῶν κλασμάτων, $\rho = 2\kappa + \pi$· εὑρίσκεται δέ, ὡς ἀνωτέρω, καὶ $\sigma = 2\rho + \kappa$, καὶ $\tau = 2\sigma + \rho$· ἐκ τούτων συνάγομεν, ὡς ἐν τῇ ἐπὶ τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως σειρᾷ, τὸ διπλοῦν ἑκάστου ὅρου συναφθὲν τῷ πρὸ αὐτοῦ ἀποδίδωσι τὸν ἐφεπόμενον ὅρον· ἐὰν οὖν πάλιν ἀρχὴ γένηται ἀπὸ τῶν 0, 1, ἕξομεν τὴν σειράν· 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408 κτ. ἐντεῦθεν ἄρα ἡ ζητουμένη δύναμις τῆς χ δηλωθήσεται ἀεὶ μᾶλλον ἀκριβέστερον διὰ τῶν κλασμάτων· $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{29}{12}$, $\frac{70}{29}$, $\frac{169}{70}$, $\frac{408}{169}$ κτ., ὧν ἑκάστῳ ἴση τιθεμένη ἀεὶ ἔγγιον γίνεται τῇ ἀληθεῖ δυνάμει $\chi = 1 + \sqrt{2}$.

572. Ἔστω πάλιν ἐξίσωσις $\chi^3 = \chi^2 + 2\chi + 1$·

$$\text{ἐπεὶ οὖν}\ \chi = \frac{\kappa}{\pi},\ \text{καὶ}\ \chi^2 = \frac{\rho}{\pi},\ \text{καὶ}\ \chi^3 = \frac{\sigma}{\pi},\ \text{ἔσται}\ \frac{\sigma}{\pi} =$$

$\frac{\rho}{\pi} + \frac{2\kappa}{\pi} + 1$, καὶ $\sigma = \rho + 2\kappa + \pi$· ὅθεν δῆλον, ὅτι διὰ τριῶν ὅρων τῶν π, κ, ρ προσδιοριςέον εἴη τὸν τέταρτον σ· καὶ ἐπεὶ ἡ ἔναρξις τῆς σειρᾶς ἐςὶν ἐλευθέρα, ἔξεςι συγκροτῆσαι τὴν σειρὰν 0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129 κτ.· τοιγαροῦν αἱ τῆς χ δυνάμεις ἐκ διαδοχῆς ἔσονται $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{28}{13}$, $\frac{60}{28}$, $\frac{129}{60}$ κτ.· ἐὰν οὖν ὑποτεθῇ $\chi = \frac{129}{60} = \frac{43}{20}$, τὸ μὲν πρῶτον μέλος τῆς προτεθείσης ἐξισώσεως ἐμφαίνει ἡ ποσότης $\frac{79507}{8000}$, δεύτερον δὲ μέλος ἔςαι $\frac{1849}{400} + \frac{43}{10} + 1 = \frac{79380}{8000}$, ἔνθα τὸ διάπτωμα ἐςὶν $= \frac{127}{8000}$.

573. Σημειωτέον μέντοι (φησὶν Εὔλερος) ὡς οὐκ εἰσὶν ἅπασαι αἱ ἐξισώσεις οἷαι ἐπιλύεσθαι διὰ ταύτης τῆς μεθόδου· ἄλλως τε, ἣν τύχωσιν ἐλλείπουσαι τοῦ δευτέρου ὅρου, ταύτῃ χρήσασθαι τῇ μεθόδῳ οὐδεμιᾷ μηχανῇ ἀνυςόν· ἔςω γάρ, φέρε, $\chi\chi = 2$· ἐπεὶ δὲ $\chi\chi = \frac{\rho}{\pi}$· ἄρα $\frac{\rho}{\pi} = 2$, καὶ $\rho = 2\pi$, εἴτ' οὖν $\rho = 0 \times \kappa + 2\pi$· ὅθεν ἀποφέρεται ἡ σειρὰ 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16 κτλ. ἐξ ἧς οὐδὲν ὅλως συνάγεται· ἕκαςος γὰρ ὅρος διαιρούμενος διὰ τοῦ ἡγουμένου ἀεὶ δίδωσιν ἤτοι $\chi = 1$, ἢ $\chi = 2$· ἐὰν δὲ προτεθῇ ἡ $\upsilon^3 = 2\upsilon + 1$, εὑρεθήσονται διὰ προσεγγίσεως αἱ ἡμῖν ἤδη προεκτεθεῖσαι ῥίζαι (570).

574. Σημειωτέον δὲ καὶ τοῦτο (προςίθησιν οὗτος ὁ σοφὸς περὶ ταύτης τῆς μεθόδου)· ἡνίκα γὰρ ἡ ἐξίσωσις περιέχει μίαν τινὰ λογικὴν ῥίζαν, εἰ ληφθῇ ἀρχὴ τῆς σειρᾶς τοιάδε, οἵα ἀποτελεῖν ταύτην τὴν ῥίζαν, ἕκαςος ὅρος ταύτης τῆς σειρᾶς διαιρεθεὶς διὰ τοῦ ἡγουμένου ὅρου ἀποδώσει οὐχ ἧττον τὴν ῥίζαν ταύτην ἀκριβῶς· ἔςω ἐξί-

σωσις $\chi\chi = \chi + 2$, ἧς μία τῶν ῥιζῶν ὑπάρχει $\chi = 2$· ἐπεὶ δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης πρόεισι τύπος τῆς σειρᾶς ὁ $\rho = \alpha + 2\pi$, ἐὰν ληφθῶσιν ὡς πρῶτοι ὅροι οἱ 1, 2, προκύψει σειρὰ, 1, 2, 4, 8, 16, 32 κτλ., ἥτις ἐςὶ γεωμετρικὴ πρόοδος αὔξουσα κατὰ πηλικότητα 2.

575. Ἡνίκα μέντοι ἡ τῆς σειρᾶς ἔναρξις οὐκ ἀποδίδωσι τὴν ῥίζαν, ἡ σειρὰ τὴν μὲν τῇ ἐλάττονι τῶν ῥιζῶν προσεχῆ ἥκιςα παράξει, τὴν δὲ τῇ μείζονι ἐγγὺς ἴσην· βουλομένοις δὲ ἐκ τῆς σειρᾶς εὑρεῖν τῶν ῥιζῶν τὴν ἐλάττονα, ἀνάγκη πᾶσα πρὸς τοῦτο προδιαθεῖναι τῆς σειρᾶς τῶν ὅρων τοὺς προτέρους· ἔςω γὰρ ἐξίσωσις $\chi\chi = 4\chi - 3$, ἧς ἡ μὲν τῶν ῥιζῶν ἐςὶ $\chi = 1$, ἑτέρα δὲ $\chi = 3$, ὁ δὲ πρὸς ἔκθεσιν τῆς σειρᾶς τύπος $\rho = 4\alpha - 3\pi$ ἐμφαίνει, δυοῖν ὅρων δοθέντων, τὸν τρίτον ἰσοῦσθαι τῷ τετραπλῷ δευτέρῳ πλὴν τοῦ τριπλοῦ πρώτου, ὡσαύτως δὲ ἔχειν καὶ ἕκαςον ὅρον τῆς σειρᾶς πρὸς τοὺς πρὸ αὐτοῦ δύο· οὐκοῦν ἐὰν εἰς εὕρεσιν τῆς ἐλάττονος ῥίζης τεθῶσι πρῶτοι ὅροι 1, 1, προκύψει σειρὰ 1, 1, 1, 1, 1, 1, κτλ. δεξιῶς ἔχουσα προβάλλειν ἀεὶ τὴν ἐλάττονα ῥίζαν· ὡς, εἴπερ ὑποτεθεῖεν πρῶτοι ὅροι οἱ ἀριθμοὶ 1, 3 οἱ ἀποδιδόντες τῶν ῥιζῶν τὴν μείζονα, ἐκ τῆς τοῦ τύπου ἐκφράσεως προκύψει ἡ σειρὰ 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 κτλ., ἀφ᾽ ἧς ἀκριβέςατα προέρχεται ἡ ῥίζα 3· ἐὰν δὲ τῆς σειρᾶς ἀρχὴ ἄλλη γένηται, οἵα μὴ ἀποδιδόναι τὴν ἐλάσσονα ῥίζαν, τοιάδε ἀναφυήσεται σειρὰ, ἧς τῶν ὅρων ἕκαςος διαιρούμενος διὰ τοῦ ἡγουμένου ἀποδίδωσιν ἀεὶ ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ῥίζαν προσεχῆ τῇ 3· τοσούτῳ δὲ μᾶλλον, ὅσῳ ὁ διαιρούμενος ἀπέχει τοῦ πρώτου ὅρου τῆς σειρᾶς· οὐδέποτε μέντοι τὰ πηλίκα προσπελάσουσι τῇ ἐλάσσονι τῶν ῥιζῶν.

576. Τελευταία ἔςω ἐξίσωσις $x^{m} = x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3}$ + κτλ. ἐπὶ ταύτης ὖν τῆς ἐξισώσεως τοιάνδε χρὴ εἶναι τὴν σειρὰν, ἧς ἰσῦται ὅρος ἕκαςος τῷ ἀθροίσματι πάντων τῶν ἡγεμένων ὅρων, εἴτ' ὖν 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 κτλ., ὃ δείκνυσι μίαν τινὰ τῶν ῥιζῶν τῆς προκειμένης ἐξισώσεως ὖσαν ἀκριβῶς 2· ἐὰν ὖν ἡ προτεθεῖσα ἐξίσωσις διαιρεθῇ διὰ x^{m}, προκύψει $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{xx} + \frac{1}{xxx}$ κτ. $= (559)\ \frac{x}{xx-x} = \frac{1}{x-1}$· ἄρα $1 = \frac{1}{x-1}$, ἢ $x-1 = 1$, ἢ $x = 2$.

577. ΣΧΟΛΙΟΝ. Μετ' ἐπιςασίας ἀνερευνήσαντι τὴν μέθοδον ταύτην, δῆλον εὐθὺς, ὡς ἥκιςα δεῖ τὺς πρώτους ὅρυς τῆς σειρᾶς ὑπάρχειν $= 0$, μηδ' ἐξεῖναι ἀπολύτως αὐτὺς τιθέναι πρὸς τὸ δοκῦν, ὥσπερ ἔοικε βύλεσθαι ὁ περικλεὴς Εὔλερος ὁ τῆς μεθόδυ εὑρετής· τῦθ' ὅπερ ἥκιςα ὅλως ἀπείργει μὴ ὐχὶ ὑπάρχειν κομψοτάτην ϗ χαριεςάτην τὴν μέθοδον· ἣν ἐνταυθὶ παρεθέμεθα τοῖς πρωταγωνιςαῖς τῶν Μαθηματικῶν χαριζόμενοι, ἵν' ἔχοιεν εἰδέναι, ὅπως καὶ διὰ τῶν σειρῶν αἱ ἐξισώσεις ἐπιλύεσθαι δύνανται· παρὰ γὰρ ταύτην τὴν καινοφανῆ τῦ Εὐλέρυ εἰσὶ ϗ ἄλλαι μέθοδοι παντοῖαι, ἃς εὑρήσει ὁ βυλόμενος μετιὼν τὺς κατὰ πλάτος περὶ τύτυ εἰπόντας.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΠΡΩΤΟΝ.

Περὶ Μηκομετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Ἀρχαὶ τῆς Γεωμετρίας, καὶ περὶ γραμμῶν.

1. Γεωμετρία ἐστὶν ἐπιστήμη τῶν τῆς ἐκτάσεως ἰδιοτήτων ἐξεταστική.

Ἡ μὲν κατὰ μῆκος ἔκτασις καλεῖται Γραμμή· ἡ δὲ κατά τε μῆκος καὶ πλάτος, Ἐπιφάνεια· ἡ δὲ κατά τε μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος, Στερεόν.

2. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἡ γραμμὴ ἄρα, καὶ ἡ ἐπιφάνεια, καὶ τὸ στερεόν, τὰ τῆς Γεωμετρίας εἰσὶν ὑποκείμενα· καὶ ὅσον μὲν αὐτῆς περὶ τὰς γραμμὰς ἀσχολεῖται, Μηκομετρία ὀνομάζεται· τὸ δὲ περὶ τὴν ἐπιφάνειαν, Ἐπιπεδομετρία· Στερεομετρία δὲ τέλος, ὅσον αὐτῆς περὶ τὴν τῶν στερεῶν στρέφεται καταμέτρησιν.

3. ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὸ στερεόν, ἐπεὶ ἄπειρον οὐχ ὑπάρχει, περιέχεται ἐξ ἀνάγκης ὑπὸ ἐπιφανείας, ἢ σχήματος, πανταχόθεν αὐτὸ περιορίζοντος· ἡ δ' ἐπιφάνεια, ὑπὸ γραμμῶν· καὶ πράγματι μὲν οὐκ ἂν εἴη γραμμὴ

πλάτους ἄμοιρος, οὐδὲ μὴν ἐπιφάνεια ἀβαθής· οὐδὲν ἀλλ' οὖν τὸ κωλύον τὸν Γεωμέτρην μὴ οὐχὶ διελεῖν, τῇ γοῦν ἐπινοίᾳ, τὴν ἔκτασιν εἰς γραμμὴν, ἐπιφάνειαν, καὶ στερεὸν, φύσει πως βαινουσῶν οὕτω τῶν κατὰ τὸ οἰκεῖον αὐτοῦ ὑποκείμενον πράξεων· ὑπὸ ταῦτα γὰρ τὰ τρία θεωρηθείη μόνως ἂν ἡ ἔκτασις, καὶ ταύτῃ δὴ καὶ διακεκριμένως ἐκμετρηθείη· ἡνίκα γὰρ, φέρε, τὸ μιᾶς ἀπ' ἄλλης πόλεως ἀπόστημα ζητεῖται, ἥκιστα τοῦ μεταξὺ πλάτους δεήσει, μηδὲν ὅλως τῷ μήκει συμπράττοντος· ἡνίκα δὲ μαθεῖν τὴν περιοχὴν ἀγροῦ τινος βουλόμεθα, οὐδόλως περὶ τοῦ τῆς γῆς βάθους, ὅσον πότ' εἴη, ἀνερευνῶμεν, ἀλλὰ μόνην τὴν ἐπιφάνειαν ἐκμετροῦμεν.

4. Σημεῖον ἐστι μέρος ἀπειροστὸν τῆς γραμμῆς.

5. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τὸ ἄρα σημεῖον οὐκ ἔστι ποσὸν ἀπόλυτον, ἀλλ' ἁπλῶς μόνον ὅρος συγκρίσεως, ἢ ἀναλογίας.

Ἐπινοήσωμεν γὰρ γραμμὴν ὁποιανοῦν, διῃρημένην εἰς μέρη ἄπειρα τῷ ἀριθμῷ (Συμ. λ. 525 καὶ ἑξῆς) ἰσάλληλα· ἕκαστον οὖν τούτων ἔσται τὸ ἐνταῦθα καλούμενον σημεῖον.

6. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δύω σημεῖα ἐπὶ γραμμῶν μήκει διαφερουσῶν κείμενα, ἀπείρως ὄντα μικρὰ (Συμ. λ. 222), οὐκ ἔσονται μέντοι ἰσάλληλα· ἀλλ' ἀνάλογα ἕκαστον ταῖς ἑαυτῶν γραμμαῖς (Συμ. λ. 234).

7. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Τὸ ἄρα σημεῖον, κατὰ τὸν ἀποδοθέντα ἡμῖν ὁρισμὸν, οὐκ ἔστιν ἀπολύτως ἁπλοῦν καὶ ἀδιαίρετον· θῶμεν γὰρ δύω γραμμὰς, ὧν ἡ ἑτέρα τῆς ἑτέρας εἴη διπλῆ· οὐκοῦν καὶ τὸ τῆς πρώτης σημεῖον ἔσται τοῦ τῆς δευτέρας διπλάσιον (Συμ. λ. 234)· ἀλλὰ μὴν οὐκ ἔστι πεπερασμένη γραμμὴ, ἢ οὐκ ἂν ὑποτεθείη ἑτέρας διπλῆ· ἄρα ἅπαν σημεῖον, ἐφ' ἧς ἂν ληφθῇ γραμμῆς πεπερασμέ-

της καὶ ὡρισμένης, ἐκληφθῆναι ἀεὶ δύναται δίκην συνθέτου ποσότητος.

8. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Οἱ δὲ ἡγησάμενοι μετὰ τῶν πλειόνων Γεωμετρῶν ἐκτάσεως ἁπάσης ἐκτὸς ὁρίζεσθαι τὸ σημεῖον· ὑπάρχουσι γὰρ ἄρα μέρη ἄτομα, ἀδιαίρετα κυρίως οὕτω καλούμενα, μέρη μὲν ὄντα τῆς ἐκτάσεως, αὐτὰ δ' ἐκτάσεως πάσης ἀπηλλαγμένα; ἀλλὰ τοῦτ' ἔστιν ὃ πολλῶν ἐρίδων καὶ λογομαχιῶν τὰ Γεωμετρῶν ἐνέπλησε· πολλοὶ μὲν γὰρ αὐτῶν μήδ' ὑπάρχειν μηδὲ δύνασθαι ὅλως ὑποτεθῆναι τοιάδε σημεῖα ἐκτάσεως οἷα σῶν ἄμοιρα διατείνονται· ἀλλ' ὡς ὀψόμεθα, τὸ μὲν στερεὸν ἐξ ἐπιφανειῶν, ἡ δ' ἐπιφάνεια ἐκ γραμμῶν, γραμμὴ δὲ πᾶσα ἐκ σημείων ἔχει τὴν σύνθεσιν· τὰ τοίνυν σημεῖα στοιχεῖά εἰσι πάντων τῶν περὶ ἃ ἡ Γεωμετρία· ἐὰν ἄρα ὁρισθῇ οὕτως, ὡς εἶναι τὴν ὕπαρξιν αὐτῶν ἀμφίβολον, δηλονότι, ὡς ἐστὶ σημεῖον ἅπαν μέρος ἀνέκτατον τῆς γραμμῆς, μὴ πεσεῖται ἅπαν τὸ τῆς Γεωμετρίας οἰκοδόμημα, ἐπερηρεισμένον ἐφ' οὕτω ῥοΐδους καί, ὡς εἰπεῖν, ἀνυπάρκτῳ τῷ θεμελίῳ; ἄλλοι δέ, οὐκ ὀλίγοι καὶ οὗτοι, ἀκριβέστερον ὁρίζονται τὸ σημεῖον μέρος ὑπάρχειν τῆς γραμμῆς ὡς ἀνέκτατον θεωρεῖσθαι δυνάμενον· ἐπιεικῶς γὰρ οὐ ξυνορῶ τὴν ἀνάγκην, δι' ἣν πάμπαν αἴρειν χρὴ ἀπὸ τοῦ σημείου τὴν ἰδέαν τῆς ἐκτάσεως· τοὐναντίον δέ, ἐπεὶ ὁσαδηποτοῦν ἂν σημεῖα συναφθῶσιν, οὐχ ὁρῶ ὅπως ἀνέκτατα ὄντα ἔκτασιν ὁποιανοῦν ἀπαρτίσαι ἕξουσιν· ἀποδοτέον ἄρα τῷ σημείῳ ἔκτασίν τινα ἐλαχίστην, καὶ ὅσον οὐ νοητήν· ἐπεὶ δ' ἡμῖν ὥρισται τὸ ἀπειροστὸν εἶναι τῆς γραμμῆς, εἴτ' οὖν ἐκτάσεως πεπερασμένης, ἕξει ἄρα ἔκτασιν ἀπειροστήν, ὅσην ἀπονεμητέαν σημείῳ κρίνομεν· διὰ ταῦτα δὴ καὶ τῇ γραμμῇ πλάτος, καὶ τῇ ἐπιφανείᾳ δὲ βάθος ἀπονέμομεν ἀπειροστόν.

9. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Πᾶσα γραμμὴ (σχ. 1) διὰ γράμμασιν ἐπὶ τῶν περάτων αὐτῆς σεσημειωμένοις ὁρίζεται· οὕτω τὰ Α καὶ Π γράμματα ὁρίζουσι τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἀρχομένην εἰς δὲ τὸ Π τελευτῶσαν γραμμήν, ἥτις καλεῖται Γραμμὴ ΑΠ.

10. Ἐπινοήσωμεν δὴ τὸ Α πέρας τῆς ΑΠ γραμμῆς, ὥσπερ ἀπειροστὸν μέρος αὐτῆς· τουτέστιν ἔστω ἡμῖν σημεῖον (4)· ἐπινοήσωμεν δὲ ἤδη, ὡς τὸ σημεῖον Α κινούμενον ἐπὶ τὸ Π, ἄπειρα ἴχνη καταγράφει, ὧν ἕκαστον ἐστὶ σημεῖον ἴσον αὐτῷ τῷ κινηθέντι Α· καὶ οὕτω βαδίζον, καταγράψει τὴν ΑΠ γραμμήν, ἥτις οὐδὲν ἐστὶν ἀλλ' ἢ συμπλήρωμα πάντων τῶν ὑφ' ἑκάστου βήματος καταλειφθέντων ἰχνῶν, ἢ πασῶν τῶν ἀπειροστῶν γραμμῶν, ἢ πάντων τῶν σημείων, ὧν ἕκαστον ἐστὶ στοιχεῖον ταύτης τῆς γραμμῆς.

11. Ἐὰν τὸ γεννῶν σημεῖον Α ἐπὶ τὸ Π χωροῦν τὴν αὐτὴν ἀεὶ ὁδεύῃ ὁδόν, καταγράψει οὕτω γραμμὴν εὐθεῖαν· ἐὰν δέ, ἕως τ' ἂν ἀφίκηται ἐπὶ τὸ Π, φέρηται μὲν ἀπαρεγκλίτως μέχρι τοῦ Ζ, ἐκεῖθεν δὲ ἅπαξ παρεκτραπὲν διανύῃ ἀπαρεκτρέπτως τὸ λοιπὸν διάστημα, καταγράψει δύω εὐθείας γραμμὰς ΑΖ, ΖΠ, ἡ δ' ὁλικὴ ΑΖΠ καλεῖται γωνιώδης· Ἀλλ' ἐάν, ἵν' ἀφίκηται τοῦ Π, ἐφ' ἑκάστου διαβήματος ἀπειροστῶς παρεκτρέπηται τῆς ὁδοῦ, καταγράψει γραμμὴν ἰδίῳ ὀνόματι καλουμένην Καμπύλην, οἷα ἡ ΑτΠ· ἐντεῦθεν ἀπαρτισόμεθα τοὺς ὁρισμούς·

12. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστιν, ἧς ἅπαντα τὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖται φορᾶς· οἷα ἐστὶν ἡ ΑΠ· Καμπύλη δέ, ἧς ἅπαντα διηνεκῶς παρεκτρέπεται ἀπειροστῶς τῆς ἐν ἀρχῇ ὁδοῦ, οἷα ἡ ΑτΠ· Γωνιώδης δὲ

ἡ γινομένη ὑπὸ δύο εὐθειῶν εἰς ἓν συνεχῶν σημείων, οἷα ἡ ΑΖΠ. Μικτὴ δέ, ἧς μέρος μὲν εὐθεῖα, μέρος δέ τι καμπύλη, οἷα ἡ ΘΑτΠ.

13. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐπείπερ εὐθείας γραμμῆς πάντα τὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς αὐτῆς κεῖται φορᾶς (12)· ἀπὸ παντὸς δὲ σημείου ἐπὶ πᾶν αὐτῷ συναφὲς σημεῖον μία μόνη ἐστὶν ἡ φορά· διὰ δύο ἄρα συναφῶν σημείων μία μόνη εὐθεῖα διελθεῖν δύναται.

14. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εἴτε τὰ δύο σημεῖα πλάτους ἄμοιρα ὑποτίθεται· καὶ δὴ δι' αὐτῶν οὐ μὴ διελεύσεται ὅτι μὴ μία εὐθεῖα· εἴτε ὑποτίθεται αὐτοῖς ἀπειροστόν τι πλάτος (8), καὶ ἐπεὶ τὸ αὐτὸ πλάτος ὑποτεθῆναι δεῖ καὶ περὶ τῆς ὑπὸ τῶν δυοῖν συναφῶν σημείων ἀποτελουμένης εὐθείας, τὸ τῆς εὐθείας πλάτος καλύψει τὸ τῶν σημείων· ἄρ' ἀεὶ ἔσται ἀληθὲς εἰπεῖν, ὡς διὰ τῶν σημείων τῶνδε μία μόνη εὐθεῖα διελεύσεται.

15. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Δύο ἄρα συναφῆ σημεῖα ἀναγκαίως συνιστῶσι μίαν εὐθεῖαν (13).

16. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Ἐπὶ πάσης ἄρα καμπύλης δύο σημεῖα ἀλλήλων προσεχέστατα συνιστῶσιν ἀεὶ μίαν εὐθεῖαν (ἀνωτ.)· ὅθεν καμπύλη πᾶσα ἐκληπτέα, ὡς ἀποτελουμένη ἐκ πολλῶν εὐθειῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἡ ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ ΑΠ ἡ ἐλαχίστη ἐστὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα Α, Π ἐχουσῶν· σαφὲς γάρ, ὅτι πᾶσα ἄλλη ὁδός, δι' ἧς δύναται τὸ Α ἐπὶ τὸ Π ἀφικέσθαι παρὰ τὴν ΑΠ, ἀφισταμένη τοῦ εὐθέος, ὥσπερ ἡ γωνιώδης ΑΖΠ, ἢ ἡ καμπύλη ΑτΠ, μείζων ἔσται τῆς ΑΠ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Σημειωτέον τοῖς πρωτοπείροις ἅπαξ τὰ ἐφεξῆς.

Ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ γενικῶς αἱ ἀλήθειαι ἀποδείκνυνται, ὑποτίθενται μέντοι γραμμαὶ μερικαί, ἐφ' ὧν γίνεται ἡ δεῖξις τοῦ προτεθέντος· τοῦτο δὲ οἰκονομεῖται ἢ πρὸς τὸ ὑποτιμεῖν τὸν λόγον, ἢ μάλιστα πρὸς τὸ ἀεὶ ἔχειν τὸ σχῆμα ὑπ' ὄψιν τὸν μελετῶντα, καὶ οὕτω ῥᾳδίως συνιέναι τοῦ προτεθέντος τὴν ἔννοιαν· τῆς μέντοι δείξεως γενομένης, τὰ μερικὰ γράμματα τοῦ σχήματος ἀπαλείφοντας, γενικῶς χρεὼν ἀπαγγέλλειν τὴν προαποδειχθεῖσαν πρότασιν· οὕτως ἐπὶ τῆς προλαβούσης περιπτώσεως, τὸ κατ' ἀρχὰς ἀπήγγελται: ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ΑΠ ἡ ἐλαχίστη ἐστὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα Α, Π, ἐχουσῶν· τὸ δὲ ἂν ὁ πρωτόπειρος καὶ τὸν αὐτὸν λόγον καλῶς γνῷ, ἐπὶ τὸ γενικώτερον ἀνατρέχων ὀφείλει ἀναγνώσκειν οὕτω: πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ ἐλαχίστη ἐστὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν· ὃν γὰρ λόγον ἐπὶ τῆς ΑΠ εὐθείας τοῦτο δέδεικται, τὸν αὐτὸν καὶ ἐφ' ἁπάσης ἄλλης δειχθήσεται.

18. **ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'.** Ἀπὸ παντὸς ἄρα σημείου Α ἐπὶ πᾶν σημεῖον Π μία μόνη ἐστὶν ἡ πασῶν ἐπιτομωτάτη ὁδὸς (17).

19. **ΠΟΡΙΣΜΑ ϛ'.** Διὰ δύο μονίμων καὶ ὡρισμένων σημείων, οἷα τὰ Α, Π, μία μόνη διατείνει γραμμὴ εὐθεῖα ἡ ΑΠ ὡρισμένη καὶ μόνιμος.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὡρισμένην καὶ μόνιμον εἰπόντες τὴν ΑΠ ἐπὶ μόνης τῆς φορᾶς αὐτῆς τοῦτο ἐνδεχόμεθα, ὅτι πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Π ἀχθεῖσα συμπεσεῖται ἀναγκαίως τῇ εὐθείᾳ ΑΠ· κατά γε μὴν μῆκος ἐστὶν ἀόριστος ὡς προαχθῆναι δυναμένη ἐπ' ἄπειρον ἔκ τε τῶν δεξιῶν αὐτῆς ἐκ τοῦ Α, καὶ ἐκ τῶν ἀριστερῶν ἐκ τοῦ Π· ἡ δ' οὕτω ἀποτελεσθῆναι δυναμένη ἄπειρος εὐθεῖα κατὰ γῦν τὴν φορὰν ἡ αὐτὴ ἔσεται τῇ ΑΠ, καίτοι τῷ μήκει ἐκείνης αὕτη μέρος ἂν εἴη ἀπειροστόν.

20. ΠΟΡΙΣΜΑ Ζ΄. Δύο ἄρα σημεῖα ἱκανά εἰσιν ὁρίσαι τὴν θέσιν ἑκάστης εὐθείας.

21. ΠΟΡΙΣΜΑ Η΄. Δύο ἄρα εὐθεῖαι ἐπ' ἀλλήλων ἐν ἑνὶ σημείῳ διατμηθήσονται, ἤ, ὃ ταυτὸν, δύο εὐθεῖαι ἓν μόνον κοινὸν ἕξουσι σημεῖον. ἄλλως γὰρ οὐκ ἂν μεταξὺ δύο σημείων μία διατείνειεν εὐθεῖα (19).

22. ΠΟΡΙΣΜΑ Θ΄. Ἀπὸ παντὸς σημείου Α ἐπὶ πᾶν σημεῖον ἄπειροι τὸν ἀριθμὸν καμπύλαι ἀχθῆναι δύνανται· ἐξέσται γὰρ οὕτως ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Π χωροῦσιν, ἤτοι διὰ τοῦ Ζ, ἢ διὰ τοῦ Θ, ἢ διὰ παντὸς ἄλλου ἀπωτέρου διελθεῖν σημείου ἐπ' ἄπειρον, καὶ ἐκ τοῦ ἀκολούθου μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐξεχούσας καταγράψαι καμπύλας ἀπειραρίθμους.

23. Αἴτημα. Ἐξέστω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν, ὃ δὴ καὶ εὐθεῖαν ἐπιζεῦξαι λέγεται.

24. Αἴτημα. Καὶ γραμμὴν εὐθεῖαν πεπερασμένην κατὰ τὸ συνεχὲς ἐκβάλλειν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ τοῦ Κύκλου.

25. Νοείσθω ἡ ΠΖ εὐθεῖα (σχ. 2.) περιαγομένη περὶ τὸ Π σημεῖον ἀκινήτου, καὶ ὅλην περιαγωγὴν διανύουσα. Τὸ οὖν Ζ σημεῖον, πέρας ὂν ταύτης τῆς εὐθείας, ἀφ' ἑκάστου ἀπειροστοῦ διαβήματος ἴσως τε καὶ ἀπειροστῶς ἀ-