ΣΕΙΡΑΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ

ΕΚ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ ΣΥΛΛΕΧΘΕΙΣΩΝ

ΥΠΟ Κ. Μ. ΚΟΥΜΑ

ΛΑΡΙΣΣΑΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

Περιέχων τοῦ Συμβολικοῦ Λογισμοῦ τὰ περὶ Λογαρίθμων, τὰ περὶ Ἐξισώσεων, τὰ περὶ Σειρῶν, καὶ τὰ Στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας.

ΕΝ ΒΙΕΝΝΗι ΤΗΣ ΑΥΣΤΡΙΑΣ

ΕΚ ΤΗΣ ΤΥΠΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΕΝΔΩΤΟΥ.

ΑΩΖ.

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΤΩΝ ΗΜΑΡΤΗΜΕΝΩΝ.

Σελίδι 11, στίχῳ 17, *Μετιένων*, Γράφε, *Μετιέναι*. — Σελ. 14. στίχ. 18. *Τὸ*, Γρ. *Τόν*. — Σελ. 24. στίχ. 30. Ἐστιν ἤ, Γρ. Ἐστιν· ἤ. — Σελ. 25. στίχ. 14, $45\frac{11}{100}$. Γρ. $54\frac{11}{100}$ — Σελ. 34. στίχ. 16, *Τάξις*, Γράφ. *Σύνταξις*. — Σελ. 35, στίχ. 9, *Εἰλήφθων*, Γρ. *Εἰλήφθω*. Σελ. 39, στίχ. 23. ἐξάλειψον τὸ μέν. Σελ. 44. στίχ. 9. *Τῶδε*, Γρ. *Τῶτε*. — Σελ. 48. στίχ. 21, *Ἐφαίνη*, Γρ. *Ἐμφαίνη*. — Σελ. 58. στίχ. 15, $\frac{\chi}{10}$, Γρ. $\frac{\times}{20}$. Σελ. 63, στίχ. 12, *Τρισὶ*, Γρ. *Δυσί*. — Σελ. 68, στίχ. 24, (441), Γρ. (440). — Σελ. 70, στίχ. 23, (488), Γρ. (388). Σελ. 74, στίχ. 22, $85 =$, Γρ. $85 = \beta$. — Σελ. 75, στίχ. 11, $2\beta\, 3\gamma$ · —, Γρ. $2\beta - 3\gamma$. — Σελ. 78, στίχ. 9, $\frac{\upsilon}{9} + \frac{\omega}{5}$, Γρ $\frac{\upsilon}{9} = \frac{\omega}{5}$. — Σελ. 80, στίχ. 5, $\psi\frac{\alpha}{2}$, Γρ. $\psi = \frac{\alpha}{2}$. — Σελ. 87, στίχ. 17, (134), Γρ. (459). — Σελ. 94, στίχ. 27. *Ἀνυπαρκτέσης*, Γρ. *Ἐνυπαρχέσης*. — Σελ. 95, στίχ. 19, *Τριτοβαθμίε*, Γρ. *Τεταρτοβαθμίε*. στίχ. 21, *Σὺν δύο*, Γρ. *Σύντρεις*. — Σελ. 103, στίχ. 14. $\upsilon \times \chi$, Γρ. $\upsilon = \chi$. — Σελ. 111, στίχ. 11. $\frac{\beta}{2} +$, Γρ. $\frac{\beta}{2} -$. στίχ. 19. $\frac{\beta}{2} +$, Γρ. $\frac{\beta}{2} -$. — Σελ. 119, στίχ. 2, $\sqrt{\varkappa}$, Γρ. $\sqrt{2}$. — στίχ. 21, $\pi\varkappa\rho + \eta$, Γρ. $\pi\varkappa\rho = \eta$. — Σελ. 121, στίχ. 27, $\varkappa_y = 4$, Γρ. $\varkappa_y\ \varkappa = 4$. — Σελ. 123, στίχ. 9, $\mu = \nu$, Γρ. $\mu + \nu$. — Σελ. 126, στίχ. 20, *Τῶν ἀρτίε*, Γρ. *Τῦ ἀρτίε*. — Σελ. 138, στίχ. 20, (125), Γρ. (430). — Σελ. 148, στίχ. 16, 549, Γρ. 543. — Σελ. 149, στίχ. 11 $= \upsilon^3$, Γρ. $+ \upsilon^3$. — Σελ. 152 στίχ. 4, $\frac{\upsilon^4}{4\alpha^2} =$, Γρ. $\frac{\upsilon^4}{4\alpha^2} +$. — Σελ. 153, στίχ. 10, (128), Γρ. (126). Σελ. 156, στίχ.

18. $\frac{1}{3}$ Γρ. $\frac{1}{5}$. Σελ. 189. ςίχ. 27 · ΟΓκ, Γρ. ΟΚκ. — Σελ. 194, ςίχ. 1, Γ, Γρ. Κ — ςίχ. 25. Γ. Γρ. Κ. — Σελ. 195, ςίχ. 3, Γ, Γρ. Κ. — Σελ. 199, ςίχ. 16 ΔΓ, Γρ. ΔΚ, ς. 17, ΓΗ Γρ. ΚΗ. — Σελ. 203, ςίχ. 15, Ὕπερθεν, Γρ. Ἔνερθεν. — Σελ. 209, ςίχ. 9. Γο. Γρ. Κο. — Σελ. 212. ςίχ. 22. (84). Γρ. (102). — Σελ. 224. ςίχ. 12, Ἔςι $> 90°$, τέτων δὲ < 90. Γρ. Ἔςι τῶν μὲν ἀμβλειῶν μέτρον $> 90°$, τῶν δὲ ὀξειῶν $< 90°$. — Σελ. 233. ςίχ. 17. (220). Γρ. (209). Σελ. 240. ςίχ. 28. (225) γρ. (228). — Σελ. 242. ςίχ, 8. Ἴσαι, Γρ. Ἴσα. — Σελ. 251. ςίχ. 8 Δυατὸν, Γρ. Δυνατόν. — Σελ, 269. ςίχ. 24. (51). Γρ. (5). — Σελ. 284. ςίχ. 25. Ὁ κύκλος, Γρ. Κύκλος. — Σελ. 287. ςίχ. 11, 365, Γρ. 366. — Σελ. 288. ςίχ. 22, KK^2, Γρ. $ΔK^2$, — ςίχ. 26. $ΔΔ^2$, Γρ. $KΔ^2$. — Σελ. 292, ςίχ. 13, (31) Γρ. (34). — Σελ. 297, ςίχ. 22. (236) Γρ. (240). — Σελ. 307, ςίχ. 16. (339) Γρ. (338). — Σελ. 308, ςίχ. 23, 292, Γρ. 392. — Σελ. 309, ςίχ. 20, (398) Γρ. (397). Σελ. 317. ςίχ. 28, Ἐπακήκεσα, Γρ. Ἐπανήκεσσα. — Σελ. 323. ςίχ. 16. (249) Γρ. (449). — ςίχ. 25. (268). Γρ. (298). — Σελ. 324. ςίχ. 10 (405) Γρ. (396). — Σελ. 328. ςίχ. 1, (237), Γρ. (239). Τὰ ἐν σελίδι 318, § 437 μετιὼν, ὅρα τὸ 99 σχῆμα.

ΣΕΙΡΑ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΩΝ.

Τμήματος δευτέρου τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Περὶ λογαρίθμων.

313. Λογάριθμοι καλοῦνται ποσότητες ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ χωροῦσαι ἀντιστοίχως ἑτέραις, συνιστώσαις γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἐὰν τὸ α, πᾶσαν πρὸς τὸ δοκοῦν ἐξεικονίζον ποσότητα, ἀρθῇ ἐφεξῆς ἐπὶ βαθμοὺς, ὧν τοῦ μὲν πρώτου δείκτης εἴη 0, τοῦ δὲ δευτέρου 1, ϗ ἐφεξῆς ὡσαύτως, συσταθήσεται ἥδε ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $\div\!\!\div\ \alpha^0 : \alpha^1 : \alpha^2 : \alpha^3 : \alpha^4 : \alpha^5 : \alpha^6$ (276), ἧς οἱ δεῖκται συνιστῶσι τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον $\div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$ κτ. ὅθεν ἀποτελοῦνται αἱ ἐφεξῆς δύω πρόοδοι Β ϗ Δ

$$\div\!\!\div\ \alpha^0 : \alpha^1 : \alpha^2 : \alpha^3 : \alpha^4 : \alpha^5 : \alpha^6 : \alpha^7 : \quad \text{B}$$

$$\div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . \quad \Delta$$

ἕκαςος ἓν ὅρος τῶν ἐν τῇ ἀριθμητικῇ προόδῳ Δ καλεῖται λογάριθμος τοῦ αὐτῷ συςοιχοῦντος ἐπὶ τῆς γεωμετρικῆς προόδου Β· 2 φέρ' εἰπεῖν ὁ ἐν τῇ Β ἐςὶ λογάριθμος τοῦ ἐν τῇ Δ α^2· 3 δὲ ἐςὶ λογάριθμος τοῦ α^3 κτ.

314. Νῦν οὖν ἐὰν ἐπὶ τῆς Β προόδου ὑποτεθῇ $\alpha = 10$, ἡ πρόοδος γενήσεται $\div\!\div\ 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 :$ κτ. ἐκτιμῶντες δὲ τοὺς βαθμοὺς, ἐπεὶ $10^0 = 1$ (59) ἕξομεν τὴν πρόοδον $\div\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000$ κτ.

Ἐὰν ταύτῃ τῇ γεωμετρικῇ προόδῳ Β ὑποςρωθῇ ἀντίςοιχος ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος Δ, προκύψουσιν αἱ ἑξῆς δύω πρόοδοι, ἡ μὲν γεωμετρικὴ, ἀριθμητικὴ δὲ ἡ ἑτέρα·

$\div\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000$

$\div\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$

315. Οὐκοῦν ο μὲν ἐςι λογάριθμος τῆς 1· 1 δὲ τοῦ 10· 2 δὲ τοῦ 100· 3 δὲ τοῦ 1000, καὶ οὕτως ἑξῆς· κατὰ τὴν φύσιν ἄρα τῶνδε τῶν δύω προόδων, ὁ λογάριθμος, φέρ' εἰπεῖν, 5 τοῦ γινομένου ὑπὸ τῶν δύω ποσοτήτων 100 καὶ 1000, εἴτ' οὖν τοῦ 100000, εὑρεθήσεται συναφθέντος τοῦ κατὰ τὸν πολλαπλασιαςέον 100 λογαρίθμου 2 τῷ τοῦ πολλαπλασιαςοῦ 1000 λογαρίθμῳ 3

316. Τοὐναντίον δὲ ὁ 4 λογάριθμος τοῦ 10000 πηλίκου, τοῦ διαιρέσει τῆς 1000000 ποσότητος διὰ τῆς 100 προκύπτοντος, εὑρεθήσεται, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ 2 λογάριθμος τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον 1000000 λογαρίθμου 6.

317. Τοῦ παντὸς ὅρου βαθμοῦ ὁ λογάριθμος εὑρεθήσεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ τοῦ ὅρου τοῦδε λογάριθμος ἐπὶ τὸν τοῦ βαθμοῦ δείκτην· οὕτως εὑρεθήσεται ὁ λογάριθ.

μος τοῦ ἀπὸ 100 κύβου 1000000, πολλαπλασιασθέντος τοῦ 3 κυβικοῦ δείκτου ἐπὶ τὸν τοῦ 100 λογάριθμον 2.

318. Τοὐναντίον δὲ θηρευθήσεται ὁ πάσης ῥίζης παντὸς ὅρου λογάριθμος, διαιρεθέντος τοῦ κατὰ τὸν ὅρον λογαρίθμου διὰ τοῦ ἐπισήμου· οὕτως εὑρεθήσεται 3 λογάριθμος τοῦ 1000, ὅς ἐστι ῥίζα τετραγωνικὴ τοῦ 1000000, διαιρεθέντος τοῦ κατὰ τὸν 1000000 λογαρίθμου 6 διὰ τοῦ 2 τετραγωνικοῦ ἐπισήμου. Πάντα δὲ τὰ ἤδη εἰρημένα ἐπαληθεύοντα δείκνυται γενικώτερον ἐπὶ τῶν προειλημμένων δύω προόδων Β καὶ Δ.

319. Ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν ÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 κτ. παρέχει τοὺς λογαρίθμους πάντων τῶν ἀριθμῶν τῶν συμπεριειλημμένων ἐν τῇ κατὰ τὸ δεκαπλάσιον χωρούσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ ∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 κτ., ὡς ἰδεῖν ἐνταῦθα ἔνεστι

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : 10000000 : κτ

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . κτ

320. Ἢ, ὅπερ ἐστὶν ἀμέλει ταὐτὸν, ἡ φυσικὴ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν 0, 1, 2, 3, 4 κτ. παρέχει τοὺς λογαρίθμους πάντων τῶν κατὰ τὸ ἐφεξῆς βαθμῶν 10^0 . 10^1 . 10^2 κτ, εἴτ' οὖν τοῦ 10, ἔχοντος δείκτην ὁλοσχερῆ ἀριθμόν· ἀλλὰ γὰρ τοῦ κατὰ 1 λογαρίθμου ὄντος 0, τοῦ δὲ κατὰ τὸν 10 ὄντος 1, οἱ λογάριθμοι τοῦ 2, 3, 4 κτ. ἕως γε τὸν 10, ἔσονται πάντως κλασματικοὶ ἀριθμοί· ὡσαύτως δὲ τοῦ μὲν κατὰ τὸν 10 λογαρίθμου ὄντος 1, τοῦ δὲ κατὰ τὸν 100 ὑπάρχοντος 2, οἱ τῶν μεταξὺ 10 καὶ 100 ἀριθμῶν λογάριθμοι ἔσονται 1 μετά τινος κλάσματος.

Ἐν γένει δὲ, ὁ ὁτινοσοῦν ἀριθμοῦ, μὴ περιλαμβανομένου ἐν τῇ δεκαπλασίῳ προόδῳ ∺ 1 : 10 : 100 κτ, λογάριθμος ἔσεται κλασματίας.

321. Ἐντεῦθεν ἄρα ἐν παντὶ λογαρίθμῳ δύω διακρίνονται ἀριθμοὶ, ὅ,τε ὁλοχερὴς, τυτέςιν ὁ πρὸς ἀριςερὰν τῆς ὑποδιαςολῆς γεγραμμένος χαρακτὴρ (Ἀριθ. 224), ἢ οἱ κλασματώδεις δεκαδικοὶ χαρακτῆρες, οἱ κατὰ δεξιάν· ὁ δὲ ὁλοχερὴς καλεῖσθαι εἴωθε τὸ χαρακτηριςικὸν τῦ λογαρίθμυ· ὕτως ἐπὶ τῦ λογαρίθμυ 1,0791812, ὅς ἐςι τῦ ἀριθμῦ 12, ὁ μὲν 1 ὁλοχερὴς ἔςι τὸ χαρακτηριςικὸν, πάντες δὲ οἱ ἑπόμενοι εἰσὶ δεκαδικοί.

322. Τὸ χαρακτηριςικὸν περιέχει ἀεὶ τοσαύτας μονάδας πλὴν μιᾶς, ἐξ ὅσων χαρακτήρων σύγκειται ὁ ἀντίςοιχος αὐτῷ ἀριθμὸς, ἢ, ὃ ταυτὸν, οἱ χαρακτῆρες τῦ ἀριθμῦ μονάδι ὑπερβάλλυσι τὰς τῦ ἀντιςοίχυ λογαρίθμυ μονάδας· ἢ γὰρ, ὡς παντὶ ἔνεςιν ἰδεῖν, τὸ χαρακτηριςικὸν ἁπάντων τῶν μέχρι 10 ἀριθμῶν ἔςι 0· τὸ δὲ τῶν μεταξὺ 10 ἢ 100 περιλαμβανομένων ἐςὶ 1· 2 δὲ τὸ πάντων τῶν μεταξὺ 100 καὶ 1000, ἢ ἑξῆς ὕτω· γνωσθέντος ἄρα τῦ ἐν παντὶ λογαρίθμῳ χαρακτηριςικῦ, αὐτίκα ἐξέςαι συναγαγεῖν, ἐξ ὅσων σύγκειται χαρακτήρων ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ᾧτινι ἀπανήκει ὁ λογάριθμος ὗτος· ἐξ ἐναντίας δὲ τῦ φυσικῦ ἀριθμῦ γνωσθέντος, γνωσθήσεται ἢ τὸ χαρακτηριςικὸν τῦ ἐν αὐτῷ λογαρίθμυ.

Ἐὰν τὸ χαρακτηριςικὸν ᾖ 3, ἐκ τύτυ συναχθήσεται, ὡς ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ᾧ ἐπανήκει ὁ λογάριθμος, ἔχει χαρακτῆρας 4· ἐὰν δ' ἀριθμός τις συγκέηται ἐκ 3 χαρακτήρων, γνωσθήσεται ἐκ τύτυ, ὅτι ὁ τῦ κατ' αὐτὸν λογαρίθμυ χαρακτηριςικὸς ἔςαι 2.

323. ΣΧΟΛΙΟΝ. Εὑρίσκονται ἐν ἰδίῳ τεύχει οἱ

πίνακες τῶν λογαρίθμων, καὶ τῶν ἡμιτόνων, ἅμα δὲ καὶ ἡ ἀναγκαία ἑρμηνεία τῆς αὐτῶν χρήσεως. (*)

324. Πρὸς ἀποφυγὴν τῆς τῶν κλασμάτων ἀτοπίας, δεῖν ᾠήθησαν προσεπιγράφειν κατὰ τὰ δεξιὰ τῶν ἐν τοῖς τοῦ 10 βαθμοῖς δεικτῶν τοὐλάχισον 7 δεκαδικὰ (Ἀριθ. 232) ὅθεν ἀντὶ τῆς προόδου $\div\!\div$ $10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 :$ κ. τ., πρόεισιν ἡ $\div\!\div$ $10^{0,0000000} : 10^{1,0000000} : 10^{2,0000000} : 10^{3,0000000}$ κτ. ἐπὶ τοίνυν τῆς καινῆς προόδου $\div\!\div$ $10^{0,0000000} : 10^{1,0000000}$ κτ. ἀεὶ ἐπαύξοντες μονάδι τὰ ἐπὶ τοῦ δείκτου τοῦ πρώτου ὅρου δεκαδικὰ, ἀπ' ἀρχῆς τοῦ $10^{0,0000000}$ μέχρι τέλους τοῦ $10^{1,0000000}$ ἕξομεν πρόοδον γεωμετρικὴν συγκειμένην ἐκ δέκα μιλλιονίων ὅρων, ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἔσαι $10^{0,0000000}$, ὁ δὲ δεύτερος $10^{0,0000001}$, ὁ δὲ τρίτος $10^{0,0000002}$ . . . ὁ δὲ δέκατος $10^{0,0000009}$ . . . . ὁ δὲ πρὸ τοῦ ἐσχάτου $10^{0,9999999}$.

325. Ἐν τοῖς παντοίοις τοιούτοις ὅροις, οἵτινες ἅπαντες βαθμοί εἰσιν ἐπιδήλως τοῦ 10, εἷς τις ἰσοδυναμήσει τῷ 2, μετὰ βραχὺ δὲ ἕτερός τις ἰσοθενήσει τῷ 3, καὶ ἑξῆς οὕτως ἕως τοῦ 10· ὡσαύτως ἀπ' ἀρχῆς τοῦ $10^{1,0000000}$ μέχρι τέλους τοῦ $10^{2,0000000}$, ἀποληφθήσεται πρόοδος δέκα μιλλιονίων περιέχουσα ὅρους, ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἔσαι $10^{1,0000000}$, ὁ δὲ δεύτερος $10^{1,0000001}$ κτ. ἐν αὐτοῖς δὲ τοῖς ὅροις ὁ πρῶτος μὲν ἰσοδυναμήσει τῷ 10, ἕτερος δέ τις τῷ 11, καὶ

(*) Τοιοῦτο Γεώργιος Βέγας ἐξέδοτο ἐν Λειψίᾳ τὸ δεύτερον κατὰ τὸ 1800 ἔτος, ὃ ποθ' ἡμῖν, εὐκαιρίας τυχοῦσι, μεταφρασθὲν ἐκδοθήσεται· ἔσι γὰρ ἐπιεικῶς καὶ τοὺς πίνακας, εἴτι καὶ ἄλλο πλῆρες, καὶ τὰ περὶ τῆς εὑρέσεως τῶν λογαριθμικῶν τύπων εὐμεθόδως πάνυ πραγματευόμενον, καὶ τὴν τῶν πινάκων χρῆσιν εὐκρινέσατα ἑρμηνεῦον.

ἑξῆς ὅτως ἔςγε τὸν 100. Ταὐτὸν δὲ ῥητέον περὶ πάντων τῶν ὅρων τῶν ἐν τῇ δεκαπλῇ προόδῳ $\div$ $10^{0,0000000}$: $10^{1,0000000}$: $10^{2,0000000}$: $10^{3,0000000}$ κτ.

326. Α῎παντες ἄρα οἱ Φυσικοὶ ἀριθμοὶ ὅτως ἔσονται βαθμοὶ τῦ 10, οἱ δὲ τέτων δεῖκται γενήσονται οἱ αὐτοὶ λογάριθμοι τέτων τῶν ἀριθμῶν.

Α᾿λλὰ γὰρ ἵν᾿ εὑρεθῇ, ὅςτις ἐςὶν ὁ ἰδιαίτερος δείκτης τοῦ τοῦ 10 βαθμοῦ, ἰσουμένου παντὶ Φυσικῷ ἀριθμῷ, εἴτ οὖν ὁ λογάριθμος παντὸς δεδομένου ἀριθμοῦ, τῦτ᾿ ἔςιν, ὅπερ ὑπὸ Νεπέρου, ἀνδρὸς εὐγενῦς, τῶν λογαρίθμων εὑρέτυ, ἀνέπτυκται, ναὶ μὴν καὶ ἄλλων, ἐπὶ ταύτης τῆς ὕλης ἐκπονησάντων· ἡμεῖς δὲ ἤδη ἰδέαν οἱόν τινα τῆς τέτων εὑρέσεως παράσχωμεν ἐπὶ τῦ κατὰ τὸν 9 ἀριθμὸν λογαρίθμυ.

327. Ι῞ν᾿ ὖν εὕρωμεν τὸν τῦ 9 λογάριθμον, ὑποσυνάπτομεν τῷ 1 ϗ 10 ἑκάτερῳ ἑπτὰ δεκαδικά· ὅθεν ὁ μὲν ἔςαι 1,0000000, ὁ δὲ 10,0000000· ζητῦμεν εἶτα μεταξὺ αὐτῶν διὰ πράξεων πολλῶν ἱκανὺς μέσυς γεωμετρικῶς ἀναλόγους μέχρι τῦ 9,0000000, ὅς ἔςιν ἴσος τῷ 9· γράφομεν ὡσαύτως τῷ 0 λογαρίθμῳ τῆς 1, ϗ τῷ 1 λογαρίθμῳ τῦ 10 ἑκατέρῳ ἑπτὰ δεκαδικά· ὅθεν ὁ μὲν ἔςαι 0,0000000. ὁ δὲ 1,0000000· καὶ ζητῦμεν μεταξὺ τῶν δύω τέτων ἀριθμῶν τὸν μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον, τὸν δίκην λογαρίθμυ συςοιχῦντα τῷ ἄρτι εὑρημένῳ μέσῳ γεωμετρικῶς ἀναλόγῳ.

ΠΡΑΞΙΣ ΠΡΩΤΗ. Εἰς εὕρεσιν τῦ πρώτυ μέσυ γεωμετρικῶς ἀναλόγυ μεταξὺ 1,0000000, ϗ 10,0000000, γράφομεν $\div$ 1,0000000: χ: 10.0000000· ὁ ὖν μέσος ζητέμενος ἀνάλογος χ ἔςαι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένε, ἢ $\sqrt{10,00000000000000}$ = 3,1622777 πλὴν ἑνὸς μικρῦ δεῖν δεκαμιλλιονιςημορίε (254).

Ζητῦμεν ἑξῆς τὸν μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον μεταξὺ τῦ 0,0000000 λογαρίθμου τῆς 1, καὶ τῦ 1,0000000 λογαρίθμε τῦ 10 κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν τῶν τριῶν μέθοδον ὕτω ÷ 0,0000000· x· 1,0000000 (108), τὸ x ἄρα ὀφείλει ἐξισῦσθαι τῷ ἡμίσει τῦ ἀθροίσματος τῶν ἄκρων, καὶ ἐπεὶ ὁ πρῶτος ὅρος ἐςὶν ἴσος τῷ 0, ἑπομένως $x = \frac{1,0000000}{2}$ = 0, 5000000, ὅς ἐςὶν ὁ ζητέμενος μέσος ἀριθμητικῶς ἀνάλογος, καὶ δὴ ὁ λογάριθμος τῦ ἄρτι εὑρημένε μέσε γεωμετρικῶς ἀναλόγε 3, 162 κτ.

ΠΡΑΞΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ. Ἐπεὶ ὁ εὑρεθεὶς μέσος γεωμετρικὸς ἀνάλογος ἐλάττων ἐςὶν ἢ 9,0000000· τέτε δὴ χάριν ζητῦμεν δεύτερον μέσον γεωμετρικῶς ἀνάλογον μεταξὺ τῦ 3,1622777 καὶ 10,0000000 γράφοντες ∺ 3,1622777: x : 10,0000000: καὶ πράξει ὁμοίᾳ τῇ προτέρᾳ εὑρήσομεν x = 5,6324132 δεύτερον μέσον γεωμετρικῶς ἀνάλογον· ζητῦμεν εἶτα τὸν λογάριθμον τῦδε τῦ μέσε ἀναλόγε, εἴτ' ὖν τὸν μέσον ἀριθμητικῶς ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύω τελευταίων λογαρίθμων τῆς πρὸ ταύτης συνεχῦς γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ὕτω ÷ 0,5000000· x· 1,0000000, ὃς ἐςὶν ἴσος τῷ ἡμίσει τῦ τῶν ἄκρων ἀθροίσματος, εἴτ' ὖν 0,7500000, λογάριθμος τῦ 5,6234132.

Τῆς δὲ πράξεως ὁμοίως ἐπαναλαμβανομένης εὑρήσομεν τρίτον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύω προλαβόντων ὅρων γεωμετρικῶς μὲν τὸν 7,4989421, ἀριθμητικῶς δὲ, εἴτ' ὖν λογάριθμον τῦδε τῦ γεωμετρικῦ, τὸν 0,8750000.

Διὰ δὲ τῆς τετάρτης πράξεως τέταρτος γεωμετρικῶς μὲν μέσος ἀνάλογος εὑρεθήσεται ὁ 8,6596432, ἀριθμητικῶς δὲ ὁ 0,9375000.

Ο᾽ δὲ γεωμετρικῶς μέσος ἀνάλογος 9,3057204, ὁ διὰ τῆς πέμπτης εὑρισκόμενος πράξεως, ἐπεὶ ὑπερέχει τοῦ ζητουμένου 9,0000000, ζητητέον ἤδη μέσον ἀναλογον μεταξὺ τούτουτε καὶ τοῦ 8,65 κτ. οὕτω ∺ 8,6596432 : χ : 9,3057204· ὅθεν προκύψει κοινὸς μέσος ἀνάλογος γεωμετρικῶς 8,6768713· ὁ δὲ αὐτοῦ λογάριθμος, τὸ ἥμισύ ἐςι τοῦ ἀθροίσματος τῶν κατὰ τοὺς προηγησαμένους ὅρους λογαρίθμων, εἶτ᾽ οὖν 0,9531250.

Τοῦδε δὲ τοῦ μέσου γεωμετρικῶς ἀναλόγου 8,92 κτ. ἐλάττονος ὄντος τοῦ ζητουμένου, εὑρίσκομεν καινὸν ἄλλον μεταξὺ τούτουτε καὶ τοῦ 9,3057204, καὶ οὕτως ἑξῆς μέχρις εἰκοστῆς πέμπτης πράξεως, ἐξ ἧς πρόεισιν ὁ 9,0000000, εἶτ᾽ οὖν 9, καὶ λογάριθμος αὐτοῦ ὁ 0,9542425.

Ἴδε δὴ ὑπ᾽ ὄψιν καὶ ὁ πίναξ τῶνδε τῶν πράξεων.

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι.	Οἱ τούτων λογάριθμοι.
α΄.	1, 0000000	0, 0000000
	3, 1622777	0, 5000000
	10, 0000000	1, 0000000
β΄.	10, 0000000	1, 0000000
	5, 6234132	0, 7500000
	3, 1622777	0, 5000000
γ΄.	10, 0000000	1, 0000000
	7, 4989421	0, 8750000
	5, 6234132	0, 7500000
δ΄.	10, 0000000	1, 0000000
	8, 6596432	0, 9375000
	7, 4989421	0, 8750000
ε΄.	10, 0000000	1, 0000000
	4, 3057204	0, 9687500
	8, 6596432	0, 9375000

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι.	Οἱ τούτων λογάριθμοι.
ς'.	9, 3057204	0, 9687500
	8, 9768713	0, 9531250
	8, 6596432	0, 9375000
ζ'.	9, 3057204	0, 9375000
	9, 1398170	0, 9604375
	8, 9768713	0, 9531250
η'.	9, 1398170	0, 9609375
	9, 0579777	0, 9570312
	8, 9768713	0, 9531250
θ'.	9, 0579777	0, 9570312
	9, 0173333	0, 9550781
	8, 9768713	0, 9531250
ι'.	9, 0173333	0, 9550781
	8, 9970796	0, 9541015
	8, 9768713	0, 9531250
ια'.	9, 0173333	0, 9550781
	9, 0072008	0, 9545898
	8, 9978796	0, 9541015
ιβ'.	9, 0072008	0, 9545898
	9, 0021388	0, 9543457
	8, 9970796	0, 9541015
ιγ'.	9, 0021388	0, 9543457
	8, 9996088	0, 9542236
	8, 9970796	0, 9551015
ιδ'.	9, 0021388	0, 9543457
	9, 0008737	0, 9542846
	8, 9996088	0, 9542236
ιε'.	9, 0008737	0, 9542846
	9, 0002412	0, 9542541
	8, 9996088	0, 9542236
ις'.	9, 0002412	0, 9542541
	8, 9999250	0, 9542388
	8, 9996088	0, 9542236
ιζ'.	9, 0002412	0, 9542541
	9, 0000831	0, 9542465
	8, 9999250	0, 9542388

	Μέσοι γεωμετρικῶς ἀνάλογοι.	Οἱ τούτων λογάριθμοι.
ιη'.	9, 0000831	0, 9542465
	9, 0000041	0, 9542427
	8, 9999250	0, 9542388
ιθ'.	9, 0000541	0, 9542271
	8, 9999650	0, 9542408
	8, 9999250	0, 9542388
κ'.	9, 0000541	0, 9542408
	8, 9999845	0, 9542421
	8, 9999650	0, 9542408
κα'.	9, 0000541	0, 9542278
	8, 9999943	0, 9542422
	8, 9999845	0, 9542421
κβ'.	9, 0000541	0, 9542427
	8, 9999992	0, 9542424
	8, 9999943	0, 9542422
κγ'.	9, 0000541	0, 9542427
	9, 0000016	0, 9542425
	8, 9999992	0, 9542424
κδ'.	9, 0000016	0, 9542425
	9, 0000004	0, 9542424½
	8, 9999992	0, 9542424
κε'.	9, 0000004	0, 9542424½
	8, 9999998	0, 9542424¼
	8, 9999992	0, 9542424
κς'.	9, 0000004	0, 9542424½
	9, 0000000	0, 9542424⅜
	8, 9999998	0, 9542424¼

Προσετέθη δὲ ἐν τῇ κδ'. πράξει κ᾽ ἐφεξῆς ἐπὶ τῶν λογαρίθμων τὰ κλάσματα εἰς πλείω εὐκρίνειαν· ἤρξαντο γὰρ ἐκεῖθεν ἰσάλληλοι γίνεσθαι οἱ λογάριθμοι· ἐκοῦν λογάριθμος τοῦ 9,0000000, εἴτ᾽ οὖν τὸ 9, ἐστὶν ὁ 0,9542424⅜. λαμβάνεται μέντοι ἐν τῇ χρήσει ὡς λογάριθμος τοῦ 9, εἴτε ὁ 0,9542424, εἴτε ὁ 0,9542425, ὅτι ἀνεπαίσθητον ὅλως τὸ διάπτωμα.

Διὰ τῆς αὐτῆς τῶν πράξεων ὁδȣ̃ ἰȣ̃σιν εὑρεθήσεται ὅ,τε τȣ̃ 8 ϗ τȣ̃ 7 οἱ λογάριθμοι.

328. Εὑρόντες τέλος τὸν λογάριθμον τȣ̃ 9, τȣ̃ 8 ϗ τȣ̃ 7, ἀταλαιπώρως ἤδη εὑρήσομεν τὸν τȣ̃ 2, λαμβάνοντες τὸ τρίτον τȣ̃ κατὰ τὸν 8 (313), τὸν δὲ τȣ̃ 4, διπλασιάζοντες τὸν τȣ̃ 2 (317), τὸν δὲ τȣ̃ 3, τὸ ἥμισυ λαμβάνοντες τȣ̃ κατὰ τὸν 9 (318), τόν δὲ τȣ̃ 5, ἀφαιρȣ̃ντες τȣ̃ κατὰ τὸν 10 ὡς διαιρετέον τὸν τȣ̃ 2 ὡς διαιρέτȣ (316)· τὸν δὲ τȣ̃ 6, συνάπτοντες τῷ τȣ̃ 2 τὸν τȣ̃ 3 (315.)

329. Ὡσαύτως δὲ, συνάπτοντες, ἀφαιρȣ̃ντες, πολλαπλασιάζοντες, ῥᾷστα εὑρήσομεν τȣ̀ς τῶν ὑπὲρ τὸν 10 ἀριθμῶν λογαρίθμȣς ὄντων ἤτοι βαθμῶν τῶν ἐλασσόνων ἢ 11 ἀριθμῶν, ἢ γινομένων ἐν γένει ὑπὸ δύω παραγόντων, ὧν ἤδη εὕρηνται οἱ λογάριθμοι.

Ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν 11, 13, 17, 19 κτ. ἀποτεύξεται τῶν ἐλπίδων, εἴ τις ζητήσει τȣ̀ς τȣ́των λογαρίθμȣς ὡσαύτως· μετιένων ȣ̃ν τȣ̀ς τȣ́των χρεὼν, καθάπερ ϗ τὸν τȣ̃ 9.

330. Χρῆσθαι δὲ δεῖ ἐπὶ τῇ εὑρέσει τῶν λογαρίθμων πλείοσι δεκαδικοῖς, ἵν' ἐξῇ τὸν τῷ ἀληθεῖ μᾶλλον πελάζοντα λογάριθμον εὑρίσκειν τῶν μεταξὺ 1 ϗ 10, 10 ϗ 100 κτ. ἀριθμῶν· ἐπεὶ γὰρ συχνάκις ἀδύνατον εὑρεῖν τελείαν τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἥτις εἴη ὁ ζητȣ́μενος μέσος ἀνάλογος, ἐπάναγκες ϗ τὸν τȣ́τȣ λογάριθμον ἀτελῆ εἶναι· ἀλλὰ γὰρ διὰ τῶν δεκαδικῶν ἔγγιον γινόμεθα τῆς ἀληθȣ̃ς ῥίζης παντὸς βαθμȣ̃ εἰς ἄπειρον (144)· εἰ ȣ̃ν χρησώμεθα ἑπτὰ δεκαδικοῖς, ἡ ἔλλειψις τῶν λογαρίθμων ἐςὶν ἐξ ἀνάγκης ἐλάσσων μονάδος τῆς ἐνδεξιᾷ τῶν δεκαδικῶν ἐσχάτης τάξεως, ὅ ἐςιν ἐλάσσων ἢ $\frac{1}{10000000}$.

331. Τετὶ δὲ τὸ ἔλειμμα μᾶλλον ἔτι ἀναιπαίσθητον ἔσαι, εἰ, καθάπερ ἐπὶ πολλῶν λογαριθμικῶν πινάκων, τεθῶσι 10, μᾶλλον δὲ 14 δεκαδικά.

Ἐξέσαι δὲ ὐδὲν ἧσσον εἰς κατάςρωσιν λογαριθμικῦ πίνακος, λαβεῖν ἄλλην πρόοδον, ἢ τὴν δεκαπλῆν, ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς προόδε $\div\!\div\, \alpha^0 : \alpha^1 : \alpha^2 : \alpha^3$ κτ. ὑποτεθῇ πρὸς τὸ δοκῦν $\alpha = 2$, ἡ πρόοδος $\div\!\div\, \alpha^0 : \alpha^1 : \alpha^2$ κτ. γενήσεται $\div\!\div\, 1 : 2 : 4 : 8$ κτ. αἱ δὲ δύω πρόοδοι B, Δ (313) ἀποκατασαθήσονται $\div\!\div\, 1 : 2 : 4 : 8$ κτ. B,

$\div\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3.$ κτ. Δ. ὕτως ὖν ὁ τῆς Δ ὅρος 2 ἔσαι λογάριθμος τῦ τῆς B ὅρυ 4· ὁ δὲ 3 ἔσαι λογάριθμος τῦ 8 ϗ ἐφεξῆς ὡσαύτως· ἀλλὰ πάσης γὰρ ἄλλης ἐπίπροθεν ἄγυσιν οἱ Γεωμέτραι τὴν χωρῦσαν κατὰ τὸ δεκαπλῦν διὰ τὴν μεγάλην εὐμάρειαν τῦ τῶν δεκαδικῶν ὑπολογισμῦ.

Λογισμὸς τῶν ἐν ταῖς κλασματικαῖς ποσότησι λογαρίθμων.

332. Ἐὰν διαιρεθῇ α^1 διὰ α^2 πηλίκον πρόεισιν α^{-1} (55)· διδομένης ἄρα τῷ α δυνάμεως ἡστινοσῦν, μείζονος μέντοι ἢ 1, α^1 διαιρεθὲν διὰ α^2 ἀεὶ προάξει κλάσμα τῆς μονάδος ἔλαττον· ὅθεν τὸ μὲν α^{-1}, ὅ ἐςι πηλίκον τῦ α^1 διαιρεθέντος διὰ α^2, ἐξεικονίζει κλάσμα τῆς μονάδος ἧττον, ὁ δὲ δείκτης -1, ὁ λογάριθμος δηλονότι τέτε τῦ πηλίκε, ἔςιν ἀεὶ λειπτικός.

333. Ἐν γένει δὲ τῦ τῆς 1 λογαρίθμε ὄντος 0 (315) ὁ παντὸς κλάσματος, ἐλάττονος τῆς μονάδος, λογάριθμος ἔσαι ἐλάττων τε 0, τουτέςι λειπτικός· τἀνάπαλιν, δείκτης λειπτικὸς κείμενος ἐπὶ γράμματος ὑ,

ποτιθεμένου ἐμφαίνειν ἀριθμὸν, τῆς μονάδος ὑπερκείμενον, σημανεῖ πάντοτε κλάσμα τῆς μονάδος ἔλαττον (149)· οὐκοῦν ἐὰν ᾖ $\alpha = 10$, ἐπεὶ $\alpha^{-1} = \frac{\alpha^1}{\alpha^2} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$,

$\alpha^{-2} = \frac{\alpha^1}{\alpha^3} = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ καὶ ἑξῆς ὡσαύτως· τ' ἀνάπαλιν δὲ λογάριθμος τοῦ μὲν $\frac{1}{10}$ ἔσται -1, τοῦ δὲ $\frac{1}{100}$ ἔσται -2, κτ.

334. Παρὰ ταῦτα δὲ, ἐὰν ἐπὶ τοῦ συνήθους τῶν λογαρίθμων συστήματος, τουτέστιν, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ δεκαπλῆ πρόοδος, αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ μιᾷ ἢ πλείοσι μονάσι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ καθ' ἕνα τινὰ ἀριθμὸν λογαρίθμου, μηδ' ὁτιοῦν τῶν δεκαδικῶν μετακινουμένων, τοσάκις διὰ 10 ὁ ἀριθμὸς πολλαπλασιασθήσεται ἢ διαιρεθήσεται, ὅσαι μονάδες ἤτοι προστεθήσονται ἢ ἀφαιρεθήσονται *). ἐὰν, φέρ' εἰπεῖν, τὸ τοῦ κατὰ τὸν 180 λογαρίθμου 2,255273 χαρακτηριστικὸν μονάδι αὐξηθῇ, τηνικαῦτα ὁ 3,255273 ἔσται λογάριθμος τοῦ 1800· τοὐναντίον δὲ, ἐὰν ἀπ' αὐτοῦ μονὰς ἀφαιρεθῇ, ὁ 1,255273 ἔσται λογάριθμος τοῦ 18.

335. Τέλος δὲ, δυοῖν ἀριθμοῖν φυσικῶν μειζόνων τοῦ 900, μηδενὶ ἀλλ' ἢ μονάδι, ἢ δυσὶ μονάσι διαφερόντων, κἂν αἱ διαφοραὶ αὐτῶν μὴ ὦσιν ἀνάλογοι ταῖς τῶν ἐπ' αὐτοὺς λογαρίθμων, δύνανται μέντοι ἐκλαμβάνεσθαι τοιαῦται δίχα τινὸς ἀξιολόγου διαπτώματος, ὃ δὴ τοσούτῳ ἐλαττωθήσεται, ὅσῳ μείζους ἔσονται οἱ ἀριθμοί· ἐ-

*) Εἰς πλείω μέντοι κατάληψιν τῶν λεγομένων ἐπάναγκες ἔχειν ἀεὶ ὑπ' ὄψιν τοὺς, περὶ ὧν εἴρηται (323) λογαριθμικοὺς πίνακας.

πὶ τῶν ἀριθμῶν, φέρε, 900, 901, 902, τιθεμένων ἐξ μόνων δεκαδικῶν, ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἀναλογίαν: ὁ 2 (διαφορὰ τῦ 902 πρὸς 900) πρὸς τὴν 1 (διαφ. τῦ 900 πρὸς 901) λόγον ἔχει, ὃν ὁ 964 (διαφ. τῦ κατὰ τὸν 900 λογαρίθμυ πρὸς τὸν τῦ 902) πρὸς τὸν 482 (διαφ. τῶν τῦ 900 ϗ 901).

Ἐκ δὲ δὴ τύτων ἐξαρυόμεθα τὴν τῶν ἐφεξῆς, ὧν πάνυτι χρήζομεν ἐν τῷ τῶν λογαρίθμων λογισμῷ προβλημάτων, ἐπίλυσιν.

336. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α΄. Κλάσματος Δοθέντος εὑρεῖν τὸν αὐτῦ λογάριθμον.

ΛΥΣΙΣ. Ἄφελε ἀπὸ τῦ κατὰ τὸν ἀριθμητὴν λογαρίθμυ τὸν τῦ παρονομαςῦ· ἡ ὖν διαφορὰ ἔςαι τῦ κλάσματος λογάριθμος, εἴτ᾽ ὖν τῦ πηλίκυ, ὃ παρίςησιν ἀληθῶς τὴν δύναμιν τῦ κλάσματος.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶν γὰρ κλάσμα πηλίκον ἐςὶ σεσημειωμένον, πρὸς ὃ τὴν τῦ λογαρίθμυ εὕρεσιν ἀφελεῖν χρὴ τὸν λογάριθμον, εἴτ᾽ ὖν τὸ δείκτην τῦ διαιρέτυ, ἀπὸ τῦ λογαρίθμυ, εἴτ᾽ ὖν τῦ δείκτυ τῦ διαιρετέυ (316).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Εἰς εὕρεσιν τῦ λογαρίθμυ τῦ κλάσματος $\frac{7}{9}$, ζητητέον ἐν τοῖς λογαριθμικοῖς πίναξι τὸν τῦ 7 λογάριθμον, ὅς ἐςι, 0, 845098, ϗ τὸν τῦ 9, ὅς ἐςι 0, 954243· ἐπεὶ δὲ ὁ τῦ παρονομαςῦ, ὅς ἐςιν ἀφαιρετέος, μείζων ἐςὶ τῦ πρώτυ, ἀφ᾽ ὖ ἔςαι ἡ ἀφαίρεσις, ἀφαιρετέον τἀνάπαλιν, εἴτ᾽ ὖν τὸν πρῶτον ἀπὸ τῦ δευτέρυ, ϗ γραπτέον ἐν ἀποφατικῷ σημείῳ τὴν διαφοράν· ὕτως ὖν λογάριθμος τῦ $\frac{7}{9}$ ἐςιν ὁ — 0, 109145.

337. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β΄. Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον ἀριθμῦ ὁλοσχερῦς σὺν κλασματώδει.

ΛΥΣΙΣ. Ἀνακτέον ἐπὶ κλάσμα τὸν ὁλοσχερῆ (Α.

ριθ. 170), καὶ ζητητέον τὸν λογάριθμον τοῦ ὁλικοῦ κλάσματος, ὡς ἀνωτέρω (336).

Ἵν᾽ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ $4+\frac{2}{3}$, ἀναχθέντος τοῦ 4 ἐπὶ τρίτα, καὶ συναφθέντος τῷ $\frac{2}{3}$, ζητητέον τὸν τοῦ $\frac{14}{3}$ λογάριθμον, ἀφαιροῦντας τὸν τοῦ 3 ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸν 14 λογαρίθμου.

338. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ Γ΄.** Εὑρεῖν τὸν λογάριθμον ὁλοκεροῦς ἀριθμοῦ πάντων τῶν ἐν τοῖς πίναξι μείζονος.

ΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἀριθμὸς ὁ 580420. Θετέον δὲ ὅτι ὁ μέγιστος τῶν ἐν τοῖς πίναξιν ἀριθμῶν ἐστιν ὁ 10000· ἀποκοπτέον οὖν τοῦ προτεθέντος ἀριθμοῦ ἐκ δεξιῶν ἱκανοὺς χαρακτῆρας, ὥστε τὸν λειπόμενον εὑρίσκεσθαι ἐν τοῖς πίναξι, δύω φέρ᾽ εἰπεῖν χαρακτῆρας· λείπεται οὖν 5804, οὗ λογάριθμος εὑρίσκεται ἐν τοῖς πίναξι, ὁ 3,763727· αὐξητέον δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦδε τοῦ λογαρίθμου τοσαῖσδε μονάσιν, ὅσοι χαρακτῆρες ἀφῄρηνται ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ, δύω δηλονότι ἐπὶ τοῦ παρόντος ὑποδείγματος· πρόεισιν οὖν 5,763727 λογάριθμος τοῦ $5804 \times 100 = 580400$ (334).

Ἵνα δ᾽ ἐκ τούτου εὑρεθῇ ὁ ἀληθὴς λογάριθμος τοῦ μὲν 580400 οὐχὶ, τοῦ δὲ 580420, ζητητέον ἐν τοῖς πίναξι, πόσῳ ὁ λογάριθμος τοῦ 5805 ὑπέρκειται τοῦ κατὰ τὸν 5804. αὕτη οὖν ἡ ὑπεροχὴ, ἢ ἡ διαφορὰ εὑρεθήσεται σεσημειωμένη κατὰ πλευρὰν τῶν λογαρίθμων· ἔσται δὴ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ κατὰ τὸν 5804 καὶ 5805 λογαρίθμων ὁ 75· ἐὰν οὖν αὐξηθῇ δισὶ μονάσι τὸ τοῦ 5805 λογαρίθμου χαρακτηριστικὸν 3, ἀποληφθήσεται ὁ λογάριθμος τοῦ $5805 \times 100 = 580500$· ἑξῆς δὲ φημί· ἐὰν ὁ 100, διαφορὰ τοῦ 580500 ὑπὲρ τὸν 580400, ἔχῃ 75 διαφορὰν τῶν λογαρίθμων αὐτῶν, πόσην παρέξεται ὁ 20; (335)· ἐντεῦθεν ἡ ἀναλογία 100 : 75 :: 20 : χ = 15· συναπτομένε ἄρα τῦ 15 τῷ 5, 763727 λογαρίθμῳ τῦ 580400, πορισθήσεται ὁ ζητέμενος λογάριθμος τῦ 580420.

339. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Δ'. Εὑρεῖν ἀριθμὸν φυσικὸν, ᾧτινι ἐπανήκει λογάριθμος μὴ ἐκπίπτων τῶν ἐν τοῖς πίναξιν ὁρίων.

ΛΥΣΙΣ. ά. Ἐὰν ὗτος ὁ λογάριθμος κέηται ἐν τοῖς πίναξιν, ἀπόνως εὑρεθήσεται κατ' ἀριςερὰν αὐτῦ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς ᾧτινι ἐπανήκει. β'. Ἐὰν ὁ δεδομένος λογάριθμος ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν ἐν τοῖς πίναξι περιεχομένων, εἰ ἔςι μείζων μὲν τῦ πρώτε, ἐλάττων δὲ τῦ δευτέρε, ὡς ἔςι, φέρ' εἰπεῖν, ὁ 3, 928961 ὅςις ἐςὶ μείζων μὲν τῦ λογαρίθμε τῦ 8491, ἐλάττων δὲ τῦ 8492, ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ᾧτινι ὗτος ἐπανήκει, ϗ ὅς ἐςιν ὁ ζητέμενος, ἔςαι 8491 σύντινι κλάσματι.

Ἵν' ἄρα τυτὶ τὸ κλάσμα εὑρεθῇ, φημὶ: ἐὰν 51. διαφορὰ εὑρισκομένη ἐν τοῖς πίναξι μεταξὺ τῦ λογαρίθμε τῦ 8491 ϗ τῦ 8492, διδῷ 1 μεταξὺ τέτων τῶν δύω ἀριθμῶν διαφορὰν, πόσον παρέξεται ὁ 2, διαφορὰ μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῦ 8491 καὶ τῦ 8492 μετάτινος κλάσματος; ἐκ τῆς μεθόδε τῶν τριῶν 51 : 1 : 2 : $\chi = \frac{2}{51}$ ἔςαι ὁ ζητέμενος ἀριθμὸς $8491 + \frac{2}{51}$.

340. Ἀλλ' ἐὰν ἀριθμὸς, ὡς ἐνταῦθα, ὁ μεταξὺ δύω προσεχῶν ἀριθμῶν κειμένων ἐν τοῖς πίναξιν, ἥττων ᾖ τῦ 900, αἱ διαφοραὶ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὐκ' ἂν τῦ λοιπῦ ἐκληφθείησαν ὡς ἀνάλογοι ταῖς διαφοραῖς τῶν ἐν αὐτοῖς λογαρίθμων, τοσῦτῳ δὲ ἧττον, ὅσῳ ὁ φυσικὸς ἀριθμός ἔσεται ἐλάσσων· ὅπερ εὐχερῶς φανήσεται, εἰ ληφθῶσιν ἐπι τῶν πινάκων δύω φυσικοὶ ἀριθμοὶ, ϗ αἱ δια-

φοραὶ τῶν ἐν αὐτοῖς λογαρίθμων, ἐν τέτῳ ἕν' ἵν' εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς, ᾧτινι ἐπανήκει ὁ δεδομένος λογάριθμος, τοῖς ἑξῆς χρηςέον.

Ἔςω γὰρ δοθεὶς λογάριθμος ὁ 1,099680, ὃς ἀπαντᾷ μεταξὺ τῦ κατὰ τὸν 12 ϗ τῦ κατὰ 13· ἐκῦν ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς, ᾧτινι ὗτος ἐπανήκει, ἔςαι 12 σύντινι κλάσματι· ἵν' ἂν εὑρεθῇ τυτὶ τὸ κλάσμα, αὔξομεν (334) τὸ χαρακτηριςικὸν τῦ προτεθέντος λογαρίθμυ τοσαῖς δε μονάσιν, ὥςε μὴ ὑπερέχειν τῶν περιλαμβανομένων ἐν τοῖς ἀνὰ χεῖρας πίναξι, δύω, φέρ' εἰπεῖν, μονάσιν· ὅθεν ἔςαι 3,099680, λογάριθμος ὡς ἔγγιςα ἐπανήκων τῷ 1258· ἀποκόπτομεν δὲ εἶτα ἐκ δεξιῶν τυτυῒ τῦ ἀριθμῦ δύω χαρακτῆρας ὡς δεκαδικὲς, ἐπεὶ (334) τὸ χαρακτηριςικὸν δυσὶ μονάσιν ηὐξήσαμεν· ἔςαι ἂν 12,58 ὁ ζητέμενος ἀριθμὸς πλὴν σχεδὸν ἴσος (Ἀριθ. 225).

341. Ἐὰν δ' ἐπὶ τῆς τελευταίας περιπτώσεως ἡ τῦ λογισμῦ ἀκρίβεια ἀπαιτῇ ἐπὶ τῶν λογαρίθμων πλείω ἢ ἓξ δεκαδικὰ, ἐφαρμοςέον τοῖς ἐλάττοσιν ἢ 2000 τὰ ἤδη εἰρημένα ἐπὶ τῶν ὑπὲρ 900 ἀριθμῶν· δυοῖν γὰρ ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι, ὅσῳ πλείω περιέχυσι δεκαδικὰ, τοσύτῳ πλείω περιέξυσι ϗ αἱ τῶν λογαρίθμων αὐτῶν διαφοραὶ, ϗ δὴ ἀνεπαισθητότερον αἱ τῶν λογαρίθμων ϗ τῶν ἀριθμῶν διαφοραὶ τῆς ἀναλογίας ἐκπεσῦνται.

342. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ε΄. Εὑρεῖν ἀριθμὸν φυσικὸν, ᾧτινι ἐπανήκει λογάριθμος δοθεὶς, ὑπερκείμενος τῶν ἐν τοῖς πίναξι περιεχομένων.

ΛΥΣΙΣ. Δεδόσθω ὁ λογάριθμος 9,797299· ἀφαιρετέον ἐν τῦ κατ' αὐτὸν χαρακτηριςικῦ τοσαύτας μονάδας, ὥςε μὴ ὑπερέχειν τὸν λειπόμενον τῶν ἐν τοῖς ἀνὰ χεῖρας πίναξι περιεχομένων· 6 φέρ' εἰπεῖν μονάδας· γενήσεται ἂν ὁ δοθεὶς 3, 797299, ὅς ἐστι μεταξὺ τοῦ κατὰ τὸν 6271 καὶ τοῦ κατὰ τὸν 6270· ὁ τούτου ἄρα ἀριθμὸς ἐστιν 6270 μετά τινος κλάσματος, οὗτινος εὑρεθέντος κατὰ τὸν ἄρτι δεδειγμένον τρόπον (341) ἐκπορίζεται ὁ ἀριθμὸς $6270 + \frac{31}{89}$· ἀλλὰ γὰρ διὰ τὰ ἀπὸ τοῦ ἐν ἀρχῇ δεδομένου λογαρίθμου ἀφαιρεθέντα ἓξ δεκαδικὰ, πολλαπλασιαστέον τὸν $6270 + \frac{31}{89}$ ἐπὶ 1000000 (Ἀριθ. 200)· ἔστιν ἄρα ὁ τοῦ ἐν ἀρχῇ δοθέντος λογαρίθμου ἀριθμὸς $6270000000 + \frac{31000000}{89}$, εἴτ' οὖν ἀναγωγῇ τοῦ κλάσματος ἐφ' ὁλοσχερῆ $6270449275 + \frac{35}{89}$.

343. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ** ϛʹ. Λειπτικοῦ λογαρίθμου δοθέντος, εὑρεῖν τὸν οἰκεῖον αὐτοῦ ἀριθμόν.

ΛΥΣΙΣ. Ἀνάγκη πᾶσα κλάσμα εἶναι τὸν ἀριθμὸν τόνδε, τῆς μονάδος ἔλαττον (333)· ἔστω τοίνυν δοθεὶς λογάριθμος ὁ — 3, 029789· συναπτέον οὖν τῷ τούτου χαρακτηριστικῷ — 3, μονάδας τινὰς ὑπαρκτικὰς, φέρ' εἰπεῖν, 5· ἢ ὅπερ ταὐτὸ, ἀφαιρετέον τὸν 3, 029789 ἀπὸ τοῦ 5,000000· οὕτω καταλειφθήσεται 1,970211 λογάριθμος ἀριθμοῦ, κειμένου ἐν τοῖς πίναξι μεταξὺ 93 καὶ 94. Θῶμεν οὖν ὡς ἐστιν ὁ ζητούμενος· ἐπεὶ δὲ 5 συνήψαμεν τῷ τοῦ δοθέντος λογαρίθμου χαρακτηριστικῷ, ἐκ τούτου χρὴ τὸν 93 διὰ 100000 διελεῖν (334). τὸ ἄρα κλάσμα $\frac{93}{100000}$ ἐστιν ἀριθμὸς, ὃς ἐζητεῖτο πλὴν $\frac{1}{100000}$ περίπου.

Χρῆσις τῶν Λογαρίθμων.

344. Αʹ. Δυνάμεθα δι' αὐτῶν τούστε βαθμοὺς σχηματίζειν, καὶ τὰς αὐτῶν ῥίζας ἐξάγειν.

345. Ἵν' εὕρωμεν, φέρε, τὸν ἀπὸ ἀριθμοῦ τινος τετράγωνον, διπλασιάζομεν τὸν αὐτοῦ λογάριθμον· ὁ δὲ ἀριθμὸς τοῦ διπλοῦ τούτου λογαρίθμου ἔσται ὁ ζητούμενος τε-