

τὰ ἐν αὐτοῖς ἀναλύσαι ὀνομαζόμενα σαυροφόρα, πεπολλαπλασιάσθω ὁ 8 φέρε, ἐπὶ 6, καὶ προσθεῖσθω μηδενικὸν τῷ 48, ἵνα γένηται 480.

Αἱ μέθοδοι αὗται, ἐνβραχεί πάνυ ἐκτελούμεναι, ἐσσεῖ ἐν τῇ πρακτικῇ προκρίνονται τῷ ἐπὶ τῷ πολλαπλασιασμῷ ἀποδοθέντος (98) γενικῷ κανόνος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ Διαίρεσεως.

104. Διαίρεσις ἐστὶ πράξις, δι' ἧς, ὅσον ἐνδέχεται ἀριθμὸς ἕτερος ἑτέρῳ ἀφαιρεῖται, ἵνα γνωσθῇ ὅσάκις ἐκείνῳ ἐμπεριείχεται· διακριδὸν δὲ καταλέγνται ἀπάσῃ διαίρεσει ἀριθμοὶ τρεῖς, ὁ διαιρέτης, ὁ διαιρετέος, καὶ τὸ πηλίκον.

105. Διαιρέτης μὲν ἔν καλεῖται ὁ ἀφαιρέμενος· διαιρετέος δὲ ὁ, ἀφ' οὗ ἡ ἀφαίρεσις γίνεται· τὸ δὲ πηλίκον, τῆς πράξεως ἐκπερανθείσης, ἐμφαίνει ὅσάκις τῷ διαιρετέῳ ἀφηρέθη ὁ διαιρέτης, εἴτ' ἔν, ὅσάκις ἐκείνῳ ἐμπεριείχεται· οἷον, τῷ 8 ἀφαιρῆν δυνάμεθα τὸν 2 τετράκις· 8 ἄρα διαιρεθεὶς διὰ 2 δίδωσι 4· καὶ 2 μὲν ἐστὶν ὁ διαιρέτης· 8 δὲ ὁ διαιρετέος· 4 δὲ τὸ πηλίκον.

106. Ἐπειδὴ ἄρα αἱ τῷ πηλίκῳ μονάδες παρισώσιν, ὅσάκις ὁ διαιρέτης ἔνεσι τῷ διαιρετέῳ, ὁ διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην, ὅσάκις τὸ πηλίκον περιέχει τὴν μονάδα· οἷον ἐπὶ τῷ ληφθέντος ὑποδείγματος, ὁ 8 περιέχει τὸν 2, ὅσάκις τὴν μονάδα ὁ 4.

107. Ἐὰν ἄρα πολλαπλασιασθῇ τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἢ τὰνάπαλιν, ἐπειδήπερ ἐκ τέττε ὁ διαι-

ρέτης ληφθήσεται, ὅσάκις ἀφήρηται τῆ διαιρετέῃ, τῆ ἐκ τῆς διαίρεσεως καταλοίω, εἴπερ εἴη, προσθεντός τῷ παραγομένῳ, ἐπανακάμψει αὖθις ὁ διαιρετέος· ἐν ἔν τῷ φθάσαντι ὑποδείγματι τὸ πηλίκον 4, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2, ἀποδώσει τὸν 8 διαιρετέον. Μαρτύριον ἄρα ὑγιῶς διαπερανθείσης διαίρεσεως, εἰ, ἐπαχθὲν τὸ πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἀποκαταστήσει αὖθις τὸν διαιρετέον.

108. Ἐπειδήπερ ἐπὶ τῆ πολλαπλασιασμῷ αἱ τῆ πολλαπλασιασῆ μονάδες ἐκδηλῶσιν, ὅσάκις ὁ πολλαπλασιαστέος ἔνεσι τῷ παραγομένῳ, ἢ ἀντιτρόφως (85), διαίρῃσιν ἄρα προκύπτοντα διὰ τῆ ἑτέρου τῶν αὐτῆ ποιητῶν, προκύψει πηλίκον τῶν παραγόντων ὁ ἕτερος· παράγοντες, φέρ' εἰπεῖν, τὸν 15 ὑπάρχουσι 3 ἢ 5· διελόντες ἔν 15 διὰ 3 ἔξομεν 5, διελόντες δὲ 15 διὰ 5 εὐρήσομεν 3.

109. Εἰσόμεθα ἄρα, εἴπερ ἀσφαλῶς διαπεωῆρανται ὁ πολλαπλασιασμός, εἴαν, τὸν προκύπτοντα διελόντες διὰ τῆ πολλαπλασιασῆ, ἀπολάβωμεν τὸν πολλαπλασιαστέον· ἢ τὸν πολλαπλασιασῆν, διελόντες διὰ τῆ πολλαπλασιαστέου.

110. Ἐὰν, προκύπτοντός τινος γινωσκομένου, καὶ θατέρου τῶν παραγόντων αὐτὸν, ζητῆται ὁ ἕτερος, διηρήσθω ὁ προκύπτων ἔτος διὰ τῆ γνωστῆ παράγοντος, τὸ δὲ πηλίκον ἀποδώσει τὸν ζητέμενον ποιητήν· γινώσκοντες, φέρ' εἰπεῖν, τὸν 30 παραγόμενον ὑπὸ 6, ἢ ἄλλου ἀριθμῷ, ὃν εἶδέναι ζητέμενον, διαίρῃμεν δι 6 τὸν 30, ἢ λαμβάνομεν πηλίκον τὸν 5, ὅς ἐστιν ὁ ζητέμενος.

Καθάπερ δὲ ὁ πολλαπλασιασμός ἐκ αἰεὶ αὖξει τὴν ποσότητα, ὡς εἶναι μείζω τῆ πολλαπλασιαστέου τὸν γινόμενον· ἔτως ἢ διαίρεσις ἐκ ἐλαττοῦ αἰεὶ τὸ ποσὸν, ὡς αἰεὶ

ἔλαττον ὑπάρχειν τῷ διαιρετέῳ τὸ πηλίκον· αὐτίκα γὰρ τῷ 6 προκειμένῳ εἰς διαίρεσιν, εἰ μὲν αὐτὸν διέλωμεν δι' ἀριθμῷ μονάδα ὑπερβαίνοντος, οἷον τῷ 2, πηλίκον ἔσαι ὁ 3, ἐλάττων τῷ διαιρετέῳ 6· εἰ δὲ διὰ τῆς 1, ὁ 6· τῷ γὰρ 6 ἔνεσιν ἑξάκις ἢ 1· καὶ δὴ τὸ πηλίκον ἰσωθήσεται τῷ διαιρετέῳ· εἰ δὲ διέλωμεν αὐτὸν διὰ $\frac{1}{2}$, ἔσαι πηλίκον 12, εἴγε ἐν τῷ 6 δωδεκάκις ὑπάρχει τὸ $\frac{1}{2}$ · καὶ δὴ τὸ πηλίκον ὑπερέξει τὸν διαιρετέον· τῆτι δ' ἅπαν ἀπογεννᾶται ἐκ τῆς κατὰ τὴν διαίρεσιν φύσεως· ἢ γὰρ τοὶ διαίρεσις πέφυκεν ἐν τῷ εὐρεῖν, ὅσάκις ἄτερος ἀριθμὸς περιέχεται ἐν τῷ αὐτῷ· φανερόν ἐν, ὡς ἄρα 1 μὲν ἑξάκις, 2 δὲ τρίς, τελευταῖον δὲ $\frac{1}{2}$ δωδεκάκις, ἕκαστος τῷ 6 ἐμπεριέχεται. Ἐντεῦθεν ἄρα ἐν γένει δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅτι τῷ διαιρετέῳ, ὑπερέχοντος μὲν τὴν μονάδα, τὸ πηλίκον ἔσαι ἔλαττον τῷ διαιρετέῳ· ἰσομένῳ δὲ μονάδι, ἰσῆται· ἐλάττωμένῳ δὲ τέλος τῆς μονάδος, ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον.

111. ΘΡΗΣΜΟΣ. Ἀπλῆ ἢ ἡμῖν κληθήσεται ἡ διαίρεσις, τῷ διαιρετέῳ ἓνα μόνον ἔχοντος χαρακτῆρα· σύνθετος δὲ, πλείους, ἢ ἓνα.

Περὶ τῆς ἀπλῆς διαίρεσεως.

112. Τῷ διαιρετέῳ ἀπλῶ ἀριθμῷ (54) ὄντος, Α' γράψον αὐτὸν ὑπὸ τὸν πρῶτον χαρακτῆρα, ἢ, εἰ ἐν αὐτῷ ἦκιστα ἐμπεριέχεται, ὑπὸ τὴν δύο πρὸς ἀριστερὰν χαρακτῆρα τῷ διαιρετέῳ.

Β'. Ζήτησον, πόσάκις ὁ διαιρετέος ἐμπεριέχεται τῷ δε τῷ χαρακτῆρι, ἢ καὶ ἀμφοτέροις ἅμα· τὸν δ' εὐρεθέντα ἀριθμὸν δεῖς εἰς πηλίκον.

Γ'. Πολλαπλασιάσον τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἢ τὸν προκύπτοντα ἄφελε τῷ χαρακτῆρος, ἢ τῶν δύο χαρακτῆρων, ὑφ' ἑς γέγραπται ὁ διαιρέτης.

Δ'. Καταγαγὼν τὸν ἐφεξῆς τῷ διαιρετέῳ χαρακτῆρα, φέσ πρὸς δεξιὰν τῷ καταλοίπῳ, εἰ δὴ τι κατελείπεται.

Ε'. Γράψον τὸν διαιρέτην ὑπὸ τὸ ἄθροισμα τῷ καταλοίπῳ, ἢ τῷ καταχθέντος χαρακτῆρος, ἢ, εἰ μηδὲν εἶη κατάλοιπον, ὑπὸ τὸν καταχθέντα χαρακτῆρα, ἢ ἐπανάλαβε, ἢν ἐδείξαμεν πρᾶξιν.

ς'. Τύτων ἕν εκ διαδοχῆς ἐφ' ἀπάντων τῶν τῷ διαιρετέῳ χαρακτῆρων ἐκτετελεσμένων τὰ κατὰ σειρὰν γραφέντα ἐξ ἀριστερῶν ἐπὶ δεξιὰ πηλίκα, ὁμῶς ληφθέντα, συγκροτήσῃσι τὸ ὅλικόν, ὃ ἐζητεῖτο, πηλίκον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Γραμμικὴ ὄργυα σύγκειται ἐκ ποδῶν ἕξ, πόδες ἦν 2634 πόσας παρέξονται ὄργυας; ἢ ὅσας πόδες 6 ἀφαιρεθῆναι δύνανται τῶν 2634· περιέσηκεν ἄρα εἰς τὸ διαιρεθῆναι τὸν 2634 διὰ 6.

α'. Γράψον ἕν τὸν 6 ὑπὸ τὸν 26.

β'. Λέγε, πόσας 6 ἐνυπάρχει τῷ 26; τετράκισ· γράψον ἐν τῇ τῶν πηλίκων χώρα, ὡς ὄρας, 4.

γ'. Πολλαπλασιάσον τὸν 6 διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον· τετράκισ 6 ποιῆσι 24, ὃν γράψας ὑπὸ τῆς δύο χαρακτῆραι 26 τῷ διαιρετέῳ, ἢ ἀφάρεσιν ποιήσας, φέσ τὴν 2 διαφορὰν ὑπὸ τὸν 4.

δ'. Καταγαγὼν τὸν τῷ διαιρετέῳ χαρακτῆρα 3, γράψον ἐν δεξιᾷ τῷ καταλοίπῳ 2· ὅθεν ἔσαι 23.

ε'. Γράψας τὸν 6 ὑπὸ τὸν 23, λέγε,

2634	6	
6		439
24		23
		6
		18
		54
		6
		54
		0

ποσάκις τῷ 23 ἐνυπάρχει ὁ 6; τρίς· γράψον πρὸς δεξιὰν τῆ πρώτῃ πηλίκῃ 4 τὸν 3, ἢ πολλαπλασιάσον τὸν 6 διὰ τῆ πηλίκῃ 3, ἢ θές ὑπὸ τὸν 23 τὸ προκύπτοντα 18· ἀφαιρέσεως δὲ γενομένης, λείπεται 5, ὃν θές ὑπὸ τὸν 8.

ς'. Καταγαγὼν γράψον ἐν δεξιοῖς τῆ καταλοίπῃ 5 τὸν ἕχοντα τῆ διαιρετέου χαρακτήρα 4· γεινήσεται ἔν 54· γράψας δὲ τὸν 6 ὑπὸ τὸν 54 λέγε, ἐν τῷ 54 ποσάκις περιέχεται ὁ 6; ἐννεάκις· γράψον τὸν 9 ἐν δεξιᾷ τῆ 3, ὡς τελευταίον πηλίκον· πολλαπλασιασθέντος δὲ 9 ἐπὶ 6, ἢ τῆ προκύπτοντος 54 ἀπαχθέντος ἀπὸ τῆ 54, ἔδεν καταλείπεται· οὕτως ἄρα πίδες 2634 παρέξασιν ὀργυρὰς 489.

113. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Ἰνα δὲ ἀπαιώτερον εὐρίσκωμεν πηλίκον ἕκασον, ξυντελεῖ τὰ μέγιστα ὁ Πυθαγόρειος ἄβαξ· ἔτιωσ ἵνα γνωσθῆ (91) ὡσάκις ὁ 6 ἐμπεριέχεται τῷ 54, ἐπερχόμεθα ὀφθαλμοῖς τὴν, ἐν ἣ ὁ 6, γραμμὴν ἀρισερόθεν ἰόντες πρὸς δεξιὰ, μέχρις ἂν ἀπαντήσωμεν τῷ 54, ὃν ὀρῶμεν κατὰ κάθετον ἐκ τῶν κάτω ἐπὶ τὰ ἄνω ἀντιστοιχῆντα τῷ 9· διὸ γράφομεν 9· ἵνα δὲ γνῶμεν ὡσάκις ὁ 6 ἔνεσι τῷ 23, παρατηρῆμεν, ποδηγετούμενοι ὑπὸ τῆ 6 ἐξ ἀρισερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ, τὸν 18 τὸν μείζω ὄντα προκύπτοντα ἐκ τῆ 6 τῶν, ἢ περιέχει ὀλοχερῶς ὁ 23· ἐπεὶ δὲ ὁ 18 ἀντιστοιχεῖ κατὰ κάθετον τῷ 3, σημειῶμεν ὡς πηλίκον τὸν 3.

114. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Στίζειν δὲ ἕκασον τῶν καταγομένων τῆ διαιρετέου χαρακτήρων, τὴν ἀμφιβολίαν ἀφίσησι.

ΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἐφασμά τι πήχεων 7 τιμᾶται ὅλον ἀργυρίων 133· πόσῃ ἄρ' ἕκασος πήχυς; διελεῖν ἔν χρη δὲ 7 τὸν 133· γράψας δὲ τὸν 7 ὑπὸ τὸν 13 λέγε, ἐν 13 ἄπαξ ὁ 7· σημείωσον 1 ὡς πηλίκον· ἢ πολλα-

πλασιάσας τὸν 7 διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον
 2, ἢ ἀφελὼν τὸν προκύπτοντα ἀπὸ τῆ 13,
 ἕξαις κατάλοιπον τὸν 6· ἐν δεξιοῖς τῆ 6
 γράψον τὸν τῆ διαιρετέου χαρακτήρα 3, ἢ
 τὸν 7 ὑπὸ τὸν 63· ἐν τῷ 63 ὁ 7 ἐννεάκις·
 σημείωσον ὡς πηλίκον τὸν 9· ὁ ἔν προκύπτων
 ἐκ τῆ 7 ἢ 9 ἀπαχθῆς ἀπὸ τῆ 63, καταλείπει 0· ὁ ἄ-
 ρα σῆχος τιμηθήσεται ἀργυρίων 19.

$$\begin{array}{r} 133 \overline{) 7} \\ 7 \overline{) 19} \\ 63 \\ 7 \\ 63 \\ 0 \end{array}$$

115. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'. Ο' πηλίκον ὁ διαιρετέος ἢκ ἔ-
 σιν ἀκριβῶς πολλαπλῆς τῆ διαιρέτου (77), μὲν τι λει-
 ψανον μετὰ τὴν διαίρεσιν· τῆτο ἔν πρὸς δεξιὰ τῆ πηλί-
 κης, γραμμῆς ὀριζοντεῖς ἀχθείσης, γράφεται ἐπ' αὐτῆς,
 ὑποσημειωμένον τῆ διαιρέτου· ὁ δηλοῖ πάντως, ὅτι τὸ κ-
 τάλοιπον τῆτο προσδεῖται ἔτι διαίρεσως, ἣτις γενήσε-
 ται, ὡς ὀψόμεθα.

116. ΣΧΟΛΙΟΝ Δ'. Λειψάνον δὲ μηδενὸς ὅλως
 λειπομένον, ἢ τῆ καταχθέντος χαρακτήρος τὸν διαιρέτην
 μὴ χωρῆντος, τίθεται τηρικᾶτα ο εἰς πηλίκον· ἐν γένει
 δὲ ἐπὶ πάσης διαίρεσως τοσαῦτα δεῖ ο εἰς πηλίκον τίθε-
 ναι, ὅσους κατάγομεν τῆ διαιρετέου χαρακτήρας, εἰς συμ-
 πλήρωσιν ἀριθμῶ τὸν διαιρέτην περιέχοντος· ἀναγκαῖον
 δὲ τῆτο, ἵνα τὸ πρῶτον δετικὸν πηλίκον τεθῆ ἐν τῷ
 χώρῳ, ἐν ᾧ κεῖται ὁ δετικὸς τῆ διαιρετέου χαρακτήρ,
 ὁ τότε τὸ πηλίκον παρέχων.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Πέντε κληρονόμοι διανεμάσθαι
 σφίσι βέλονται κληρονομίαν ἀργυρίων 501054· πόσα
 κληρώσεται ἕκαστος;

Ἐν 5 ἄπαξ ὁ 5· γεγράφθω 1 πηλίκον· ἄπαξ 5
 ποιεῖ 5, ἢ ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῆ 5, καταλείπεται 0·
 κατήχθω τῆ διαιρετέου τὸ 0, ἢ ἐπεὶ τῆτο μὴδ' ἄπαξ

περιέχει τὸν διαιρέτην, τεθείσθω
 ο πηλίκον· κατήχθω ἢ 1, ἥτις ἐδ'
 αὐτὴ περιέχει τὸν διαιρέτην 5·
 γεγράφθω ἔτι ἐν μηδενικὸν εἰς
 πηλίκον· κατήχθω εἶτα τὸ ἐφε-
 ξῆς ο τῷ διαιρετέῳ· ὅθεν γίνε-
 ται 10· ἐν 10 δις ὁ 5· γεγρά-
 φθω 2 εἰς πηλίκον· δις 5 ποιεῖ 10, ὃ ἀφαιρεθέντος, κα-
 ταλείπεται 0· κατήχθω ὁ 5, ὅς δίδωσι πηλίκον 1, ἢ
 ἀφαιρέσεως γινομένης, λείπεται 0· κατήχθω τελευταῖον
 ὁ 4, ὃ τινος μὴδ' ἀπαξ περιέχοντος τὸν διαιρέτην 5,
 τεθείσθω μὲν εἰς πηλίκον 0· τὸ δὲ κατάλοιπον 4 γεγρά-
 φθω ἐν δεξιᾷ τῷ πηλίκῳ ἔτω $\frac{4}{5}$.

$$\begin{array}{r} 501054 \overline{)5} \\ \underline{5} \\ 0010 \\ 5 \\ 10 \\ 05 \\ 5 \\ 0\frac{4}{5} \end{array}$$

ΠΟΔΕΙΓΜΑ Δ΄. Ἡμέραι

14815 πόσας ἑβδομάδας συγκρο-
 τεῖσι;

$$\begin{array}{r} 14815 \overline{)7} \\ \underline{7} \\ 14 \\ 021 \\ 7 \\ 21 \\ 0\frac{5}{7} \end{array}$$

Περὶ τῆς συνθέτου διαίρεσεως.

117. Τηρηθήτωσαν ἐν τῇ συνθέτῳ διαίρεσει ἅπαν-
 τες οἱ κανόνες οἱ ἐπὶ τῆς ἀπλῆς ἀποδοθέντες, ἔτω. Α΄. ὅλος
 ὁ διαιρέτης γεγράφθω ὑπὸ χαρακτῆρας τῷ διαιρετέῳ ἐν
 τοῖς ἀριστεροῖς κειμένῳ, ὡς αὐτὸν ἐκείνοις ἐμπεριέχεσθαι,
 ἢ σιχθῆτω ὁ ἔσχατος ἐν δεξιοῖς χαρακτήρ τῷ διαιρετέῳ,
 ἢ ὁ διαιρέτης ἀντιστοιχεῖ.

Β΄. Ζητηθήτω, πόσῳ ὁ ἐν δεξιοῖς πρῶτος τῷ διαι-
 ρέτῳ χαρακτήρ περιέχεται ἐν τῷ πρώτῳ, ἢ τοῖς δυσὶ πρῶ-
 τοῖς τῷ διαιρετέῳ, οἷς ἀντιστοιχεῖ.

Γ'. Πρὶν ἢ σημειωθῆναι τὸ πηλίκον, σκεπτέον μὴ εἶη μείζον τῆ ἀπαιτημένῃ· πολλαπλασιασθήτω ἔν ὅλος ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ πηλίκον, κ' ἢν ὁ προκύπτων μὴ ὑπερέχει τῆς τῆ διαιρετέου χαρακτῆρας, οἷς ἀντιστοιχεῖ ὁ διαιρέτης, ἢκ ἔσι μείζον, ἢ ὅσον ἔδει, τὸ πηλίκον· διὸ σημειωθήτω ἐν τῷ χώρῳ τῶν πηλίκων· ἀλλ' ὑπερέχοντος τῆ γινομένης τῆς χαρακτῆρας, μειωθήτω τὸ πηλίκον μονάδι, ἔστ' ἂν ὁ προκύπτων ἐκ τῆ διαιρέτου κ' τῆ καινῆ πηλίκου μὴ ὑπερτερῆ τῶν εἰρημένων χαρακτῆρων· τυτὶ ἔν τὸ καινὸν σημειωθήτω εἰς πηλίκον.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Στρατιῶται 35 διηρέθησαν εἰς λειτουργίαν ἕκαστος ἰδίαν, οἷς ἅπασιν ὁ στρατηγὸς ἔδωρῆσατο ἀργύρια 640· πόσ' ἄρ' ἐπανήκυσιν ἑκάστῳ;

Θεὶς τὸν 35 ὑπὸ τὸν 64 λέγε· ἐν	640 35
6 πρὸς ἀριστερὰν πρώτῳ χαρακτῆρι τῆ διαιρετέου, ὧ περ ἀντιστοιχεῖ ὁ 3, πρῶτος	35 18 2/3
πρὸς ἀριστερὰν χαρακτῆρ τῆ διαιρέτου, πο-	290
σάκις ὑπάρχει αὐτὸς ὁ 3; δις· πρὶν ἔν ἢ	35
γράφῃς τὸ πηλίκον 2 πολλαπλασίασον	280
	2/3

τὸν διαιρέτην 35 ἐπὶ 2· ἐπεὶ δὲ ὁ προκύπτων 70 ὑπερέχει τὸν 64, ὧ ἀντιστοιχεῖ ὁ διαιρέτης, δῆλον ὅτι ὁ 2 πηλίκον εἴληπται μείζον τῆ δικαίῃ· ἀντὶ ἔν τῆ 2, εἰλήφθω 1, ἐφ' ἣν πεπολλαπλασιάσθω ὁ διαιρέτης 35· ἅπαξ 35 ποιεῖ 35, ἔκ ἔτι ὑπερβαίνοντος τὸν 64, γεγράφθω πηλίκον 1, κ' ἀφηρήσθω ὁ προκύπτων 35 ἀπὸ τῆ 64· καταλειπομένης ἔν 29, πρὸς δεξιὰν αὐτῷ καταχθὲν γεγράφθω τὸ τῆ διαιρετέου 0· ὅθεν γίνεται 290· γραφῆτω ἔν αὐθις ὁ 35 διαιρέτης ὑπὸ τὸν 290, ὡσεὶ δύνασθαι ἐνεῖναι αὐτῷ, εἰτ' ἔν ἀντιστοιχεῖν τὸν μὲν 3 τῷ 29, τὸν δὲ 5 τῷ 0.

Λέγε δὴ: ἐν τοῖς δυσὶ χαρακτῆρσιν, οἷς ὁ πρὸς ἀριστερὰν πρῶτος χαρακτήρ τῆ διαιρέτε ἀντιστοιχεί, ποσάκις ὑπάρχει ὁ 3; ἐννεάκις· ἐξητάσθω ἔν ὁ 9· ὅλος ὁ 35 διαιρέτης ἐπαχθεὶς ἐπὶ 9, παράγει 315, ὃς ὑπερέχει τὸς, οἷς ὁ διαιρέτης ἀντιστοιχεί, χαρακτῆρας τῆ διαιρετέε· μειωθήτω ἄρα τὸ πηλίκον μονάδι, ταῦτόν εἰπεῖν ἐξετασθήτω ὁ 8· πολλαπλασιασθεὶς δὲ ὁ 35 ἐπὶ 8, ἐπεὶ ποιεῖ 280, ὃς ὑπέτι ὑπερέχει τὸν 290, σημαίνει, ὅτι 8 ἐστὶ τὸ ἀπαιτούμενον πηλίκον, ὃ δὴ ἐ γεγράφθω· ἀφαιρεθεὶς δὲ ὁ 280 ἀπὸ τῆ 290, καταλείπει 10 ἕτως ἄρα ἕκαστος τῶν στρατιωτῶν λήψεται ἀργύρια 18, ἐ ἐτι ἕναπολείφθησονται 10 σφίσι διανεμηθήσόμενα.

118. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰσέον δὲ ὅτι τὸ καθάπαξ σημειόμενον πηλίκον ἐκ ἂν ἔχοι ληφθῆναι μείζον τῆ 9· αἶε γὰρ προκύψει, τῆ διαιρέτε ἐπὶ πηλίκον τῆ 9 ὑπεραλλόμενον πολλαπλασιασθέντος, ἀριθμὸς μείζων τῶν τῆ διαιρετέε, οἷς ὁ διαιρέτης ἀντιστοιχεί, χαρακτῆρων· ὀπηγίκα ἔν δοκεῖ εἶναι πηλίκον 10, ἢ 11 κτ., ἀπόπειραν λαμβάνομεν τῆ 9.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Δάκτυλον

144 συμπληρῶσιν ἕνα τετραγωνικὸν πόδα· πόσοι ἔν ἔσονται τετραγωνικοὶ πόδες ἐν δακτύλοις 130320;

Τῆ 144 διαιρέτε μὴ περιεχομένη ἐν τοῖς τρισὶ πρῶτοις χαρακτῆρσιν

τῆ διαιρέτε, προσληπτέον ἐ τὸν τέταρτον, εἴτ' ἔν 1303· ἐ δὴ λέγε· ἐν 13, πρῶτοις ἀμέλει πρὸς τὰ εὐώνυμα χαρακτῆρσιν τῆ διαιρετέε, οἷς συστοιχεῖ 1, πρῶτος ἐ αὐτὸς χαρακτήρ τῆ διαιρέτε, ποσάκις περιέχεται ἢ 1; δεκατρεῖς· ἀποπειρατέον ἔν τῆ 9 (118)· ἐ δὴ ὁ 144 διαιρέτης πολ.

130320	144
144	905
1296	
720	
144	
720	
0	

λαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ πηλίκον 9, ποιεῖ 1296, ὅς ἐχ
 ὑπερβάλλει τὸν 1303, ᾧ συσσιγχεῖ ὁ διαιρέτης· γραπτέον
 ἄρα πηλίκον 9 ἢ ἀφαιρετέον τὸν 1296 ἀπὸ τῆς 1303,
 ὅθεν καταλειφθήσεται 7. Ἐν δεξιᾷ τῆς καταλοίπου 7 γε-
 γραφθῶ ὁ 2 τὸ διαιρέτεον, ἢ τῆς 72 μὴδ' ἅπαξ περιέ-
 χοντος τὸν 144, σημειωθήτω πηλίκον 0, καὶ κατήχθω
 τῆς διαιρέτεον τὸ 0· 1 ἐν 7 ἑστώκεις· πολλαπλασιασθή-
 τω ἔν 144 δι 7, ἢ αὐθις δι 6, ἢ ἔπει ἐκατέρωθεν προ-
 κύπτει μείζων τῆς 720, ἀποσπειρατέον τῆς 5, ἐξ ἧς καὶ
 τῆς διαιρέτεον ὁ γινόμενος, ἔπει ἐχ' ὑπερέχει τῆς 720, ἀ-
 φαιρεθεὶς ἀπὸ 720 καταλείπει 0, πηλίκον λαμβανομένον
 5· ἄρα 130329 δάκτυλοι συμπληρῶσι πόδας τετραγω-
 νικὸς 905.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Δια-
ρῆσθω ὁ 31169 διὰ τῆς 152.

$$\begin{array}{r}
 31169 \text{ A} \mid 152 \text{ B} \\
 \hline
 152 \quad \mid 205 \text{ Γ} \text{ τζε} \\
 304 \\
 769 \\
 152 \\
 760 \\
 \text{τςε}
 \end{array}$$

119. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν ἁπάσῃ διαιρέσει, εἰ μετὰ
 τὴν ἀφαιρέσιν τῆς γινομένου ὑπὸ τῆς διαιρέτεον, ἢ τῆς ἤδη
 γεγραμμένου πηλίκου, τὸ κατάλοιπον μὴ ἦ ἥττον τῆς δι-
 αιρέτεον, δῆλον ὅτι ἔτι ἅπαξ ἀφαιρεθῆναι ἠδύνατο ὁ διαι-
 ρέτης· διὸ αὐξητέον τὸ πηλίκον μονάδι· τεθείσθω γὰρ,
 ὡς ἐξηπάτημαι, λέγων· ἐν 50 ἑστώκεις ὁ 6· ἑστώκεις
 ἔν 6 ποιεῖ 42, ὅς ἀφαιρεθεὶς ἀπὸ 50 καταλείπει 8,
 ὅπερ ἐστὶ λείψανον μείζον τῆς διαιρέτεον 6· περιέχεται ἄρα
 ὁ 6 ἔτι ἅπαξ ἐν τῷ 50· διὸ ἀντιτίθημι εἰς πηλίκον τὸν 8.

Δείξις τῆς διαιρέσεως.

120. Τῇ προεκτεθείσῃ θεωρίᾳ ἐπόμενοι, ἠριθμήσαμεν ὅσῳκις ὁ διαιρέτης περιέχεται ἐν τοῖς ἀλληλουχούμενοις τῷ διαιρέτῳ χώροις, ἐξ εὐωνύμων χωρῶντες ἐπὶ τὰ δεξιὰ· ἐσημειώσαμεν δὲ εἰς πηλίκον ἕτε τῷ δικαίῳ πλεον· ἔτι γὰρ ἂν ἀφῆρείτο ὁ προκύπτων ἀπὸ τῶν ἀντισοιχόντων χαρακτήρων (117. Γ.). ἕτε μὴν ἔλαττον· ἢ κατελείπετο ἂν λείψανον τῷ διαιρέτῳ ὑπερεκπίπτον (119)· ἀλλὰ μὴν ἢ πᾶσα τῆς διαιρέσεως θεωρία στηρίζεται ἐπὶ τῷ λαβεῖν τὴν μονάδα τοσῳκις, ὅσῳκις ἔνεσι τῷ διαιρετέῳ ὁ διαιρέτης· ὀρθῶς ἄρ' ἔτω διαπεραίνεται ἢ διαίρεσις (116). Ο. Ε. Δ.

Βάσανος τῆς διαιρέσεως.

121. Πολλαπλασιασθήτω τὸ εὐρεθὲν πηλίκον ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἢ εἰ κατελείφθη ἐν τῇ διαιρέσει ἔλαττόν τι τῷ διαιρέτῳ (119), προσθεῖσθω τῷ παραγομένῳ· ὁ ἔν προκύπτων ὑπὸ τῷ πηλίκῳ ἢ τῷ διαιρέτῳ συνάμα τῷ καταλοίπῳ, εἰ εἶη, ἰσωθήσεται τῷ διαιρετέῳ (107).

Οἷον, ἐπὶ τῷ ἐσχάτῳ τῶν προεκτεθέντων τῆς διαιρέσεως ὑποδειγμάτων, πολλαπλασιασθήτω τὸ Γ πηλίκον ἐπὶ τὸν Β διαιρέτην, ἢ τῷ ἐκ τέτων γινομένῳ 31160 προσθεῖσθω τὸ λείψανον 9, ὅπερ ἐστὶν ἔλαττον, ἢ 152· ἀποδιδόμενος δὲ αὐθις τῷ αὐτῷ διαιρέτῳ Α, συνάγεται ὅτι ἢ διαίρεσις ἐγένετο ὑγιᾶς.

Βάσανος γενικὴ τῷ πολλαπλασιασμῷ.

122. Πέωρακται ἀσφαλῶς ὁ πολλαπλασιασμός,

D

εάν ὁ παραγόμενος, διαιρεθεὶς διὰ τῆς πολλαπλασιασῆς, ἀποδῶ τὸν πολλαπλασιασέον, ἢ, διαιρεθεὶς διὰ τῆς πολλαπλασιασῆς, παρέχη τὸν πολλαπλασιασὴν (109)· ἐπὶ τῆς δευτέρου τῆς συνθέτου πολλαπλασιασμῆς ὑποδείγματος, ὁ προκύπτων Κ, διὰ τῆς πολλαπλασιασῆς Β διαιρεθεὶς, ἀποδίδωσι τὸν πολλαπλασιασέον Α· ἀσφαλῶς ἄρα πέπρακται ὁ πολλαπλασιασμός.

Ἐπιτετμημένη διαίρεσις.

123. Α'. Ἐν ἐκάσῃ μὲν διαίρεσει γέγραπται ὁ διαιρέτης ὑπὸ τὸν διαιρετέον, ἢ ἔτω, τοῖς πρωτοπαίροις ῥάων ἢ παρὰ πολὺ ἢ θεωρία· ἐπὶ μέντοι τῆς τῶς ἀποχρήσει διὰ μνήμης αὐτὸν φέρειν, ἢ ὑποτιθέντι κείμενον ὑπὸ τῆς ἀπαιτημένης τῆς διαιρετέου χαρακτῆρας, ὥστε αὐτοῖς ἐμπεριέχεσθαι.

124. Β'. Ἐπὶ τῆς ἀπλῆς διαίρεσεως, τῆς διαιρέτου τῶν ἀπλῶν ἀριθμῶν ὄντος, οἷον 2, 3, 4, 5, λίαν ἢ πρᾶξις ἐπιτετμηθήσεται, λαμβανομένη ἀφ' ἐκάστου τῶν ἀριστέρου ἐπὶ δεξιὰν προϊόντων χαρακτῆρων τῆς ἡμίσεως, εἴαν ὁ διαιρέτης ἢ 2, τριτημορίου, εἴαν ἢ 3 κτ. δεῖ δὲ μόνον τὸν νῦν προσέχειν τῆς γενικῆς θεωρίας. α'. ὁ τιθέναι εἰς πηλίκον ὑπὲρ παντός χαρακτῆρος, ὅστις συνάμα τῷ λειψάνῳ, εἴπερ εἴη, μὴ περιέχοι τὸν διαιρέτην. β'. προσλαμβάνειν ἐν παντὶ ἐξῆς διαιρετέῳ τὸ ἐκ τῆς προηγηθέντος χαρακτῆρος κατάλοιπον, εἴ εἴη, συνάμα τῷ ἐπομένῳ χαρακτῆρι, ἢ τὸν, περὶ ἕ ἐτέθη πηλίκον ο, συνάμα τῷ ἐπομένῳ χαρακτῆρι.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ὀλυμπιάς ἐκαλεῖτο πάλαι διάστημα χρονικόν, ἐτῶν 4 περιεκτικόν· πόσας ἄρ' Ὀλυμπιάδας συγκροτήσασιν ἔτη 812641;

Ἐφ' ᾧ ἔν ἐπιμηθῆναι τὰ τῆς διαιρέσεως, εἰλήφθω, ὡς ὁράται ἐνταῦθα, τὸ τέταρτον τέτε τῷ ἀριθμῷ. Τὸ τέταρτον τῷ 8 ἐστὶ 2, ὅς γεγράφω $812641 \overline{)4}$ φθω ἀντὶ πηλίκου, μηδενὸς λειπομένον. Τὸ τέταρτον τῆς 1 ληφθῆναι ἔδύναται· γεγράφω ἔν ἀντὶ πηλίκου 0 (116)· ἢ 1, προσλαβῶσα πρὸς δεξιὰ τὸν 2, ποιεῖ 12, ἔ τὸ τέταρτόν ἐστὶ 3, ἄνευ λειψάνου· τεθείσθω ἔν ἔ 3 εἰς πηλίκον. Τὸ τέταρτον τῷ 6 ἐστὶ 1 μετὰ λειψάνου τῷ 2· ἔ δὴ γεγράφω ἔ 1· ὁ δὲ 2, προσλαβὼν τὸν 4, ποιεῖ 24, ἔ τέταρτόν ἐστὶν ὁ 6 σὺν ἔδενι λειψάνῳ· σημειωθήτω ἔν εἰς πηλίκον ἔ ὁ 6· ἔκ δὲ 1 τεταρτημορίου μὴ λαμβανομένου, πηλίκον μὲν γεγράφω 0 (116), προσκείσθω δὲ τὸ λειψάνον 1 ἐπὶ τῷ 4 διαιρέτω.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Πενταετηρίς καλεῖται διάσημα χρονικὸν ἔτων πέντε· ἔτη ἔν 5063 πόσας ἀποτελεῖσι πενταετηρίδας; εἰλήφθω τὸ πέμπτον τῷ 5063, εἴτ' ἔν 1012, ὅς δηλοῖ τὰς πενταετηρίδας συνάμα ἔτεσι 3.

125. Γ'. Ἐπὶ δὲ τῆς συνθέτου διαιρέσεως, ὅτε ῥᾶσα καταφαίνεται ὁσάκις ὁ διαιρέτης ἔνεσι τοῖς τῷ διαιρέτῳ, οἷς ἀντιστοιχεῖ, χαρακτηῖσι, γεγράφω πρῶτον τὸ πηλίκον, εἴτα ἐπανειλήφθω ἐξῆς τὰ τῆς πράξεως· κείσθω, φέρε, διελεῖν 5790 διὰ 25· ἔ $5790 \overline{)25}$ μέσως καταφαίνεται, ὅτι ὁ 25 δις ἔνεσι τῷ 57 μετὰ λειψάνου τῷ 7· γραφέντος ἔν πηλίκου 2, κατήχθω πρὸς τῷ 7 ὁ 9, ἔ πάντων κατὰ τὰ ὀρθοτηθέντα γενομένων, προκύψει πηλίκον $231\frac{1}{2}$.

126. Δ'. Ἐνὸς δὲ ἢ πλείονων 0 ἐπαριθμημένων πρὸς τῷ τέλει τῷ διαιρέτῳ, ἔ τῷ διαιρέτῳ, ἀποκόπτειν δυνάμεθα ταῦτα ἰσαριθμῶς ἀφ' ἑκατέρου, διαιρῶντας τὸ τῷ

διαιρετέον κατάλοιπον, διὰ τῆ ἐν τῷ διαιρέτῃ· ἔσαι δὲ ἢ διαίρεσις ἀσφαλῆς, εἶγε ἐπαγομένον εἶτα τῆ πληθικῆ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἔχοντα ὡς τὸ κατ' ἀρχαῖς, τὰ ἐκκοπέοντα ο ἀπὸ τῆ διαιρετέου, εὐρισκόμενα ἢ ἐπὶ τῆ διαιρέτου, εἰσελεύσονται ἐντεῦθεν ἢ ἐν τῷ παραγομένῳ (101. Β'), ὅς παρὰ τῆτο ἰσωθήσεται τῷ διαιρετέῳ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἡ τάξις ἐν ὑποθέσει συγκροτεῖται ἐκ στρατιωτῶν 500· στρατός τις στρατιωτῶν 35000 πόσας περιέχει τάξεις;

350,00	5,00
170	

Τ' ὑποδιεσάλω δύο ο τῆ διαιρέτου, ὅθεν καταλειφθήσεται 5· ὑποδιεσάλω δὲ ἢ δύο ο τῆ διαιρετέου, ἐναπολειπομένον τῆ 350· διαιρεθέντος ἐν 350 διὰ 5 προκύπτουσι τάξεις 70· εἰς δέ γε τὴν τύτῃ βάσανον, πεπολλαπλασιάσθω ὅλος ὁ 500 ἐπὶ τὸ πληθικόν 70, ἢ ἀποληφθήσεται αὐτός ὁ πρῶτος διαιρετέος 35000.

127. Ε'. Ἴνα διαιρεθῆ ἀριθμός τις διὰ 10, ὑποδιεσάλω εἰς χαρακτήρ ἐκ τῶν δεξιῶν αὐτῆ· ἴνα δὲ διαιρεθῆ δι' 100, ὑποδιεσάλωσαν δύο· ἴνα δὲ διὰ 1000, τρεῖς, ἢ ἔτις ἐφεξῆς· τὸ δὲ καταλειπόμενον πρὸς ἀριστερὰν τῆς ὑποδιαστολῆς, ἐμφανεῖ τὸ πληθικόν· εἰ δὲ πρὸς δεξιὰν τῆς ὑποδιαστολῆς, ὡσι δεστικοὶ χαρακτῆρες, γεγράφθω ὑπ' αὐτῆς ὁ διαιρέτης, σχηματιζόμενον ἔτι καταλοίπων τινος διαίρεσεως. Συμβαίνει δὲ τῆτι, ὅτι ἀριθμός διὰ 10 πολλαπλασιασθεὶς, προσλαμβάνει ο ἐν ἐν τοῖς δεξιοῖς· διὰ δὲ 100, δύο ο, διὰ δὲ 1000, τρία, ἢ ἔτις ἐφεξῆς (101).

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τῆ Αἰῶνος 100 ἔτη περιέχοντος πόσοι ἂρ αἰῶνες ἐμπεριλαμβάνονται ἐν ἔτεσι 25000; ἀπότεμε δύο ο ἐκ τῆ 25000, ἢ ἔξεις αἰῶνας 250, ὡ.

σαύτως, διαιρούμεν τῆ 504 διὰ 10, πηλίκον ἔσαι $50\frac{4}{10}$ ·
διαιρούμεν δὲ τῆ 35849 διὰ 1000, ἔσαι $35\frac{849}{1000}$.

128. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ὅτι δὲ ἕδὲν διαφέρει πολλαπλασιάζειν ἀριθμὸν ἐφ' ὅλον τὸν πολλαπλασιασῆν, ἢ ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ πάντας τὰς τῆ πολλαπλασιασῆ ποιητὰς (89), ἐκ τῆς ἄρα ἀδιάφορον ἔσαι ἀριθμὸν τινὰ δι' ὅλου τῆ διαιρέτου διελεῖν, ἢ πρῶτον μὲν δι' ἐνὸς τῶν τὸν διαιρέτην παραγόντων, μετὰ δὲ, τὸ πηλίκον διὰ στατέρου· ἐντεῦθεν ὑποσυνάψομεν τὰ ἑξῆς.

129. Α'. Ἰνα διέλωμεν ἀριθμὸν διὰ 12, ὡς ὅτε βυλόμεθα τὰς δακτύλους ἀγαγεῖν εἰς πόδας, ἢ τὰς μῆνας εἰς ἔτη κτ., ἐξέσαι λαβεῖν τὸ τέταρτον τῆ προβληθέντος ἀριθμοῦ (106) εἶτα τὸ τρίτον τῆ τετάρτου ἐκείνου (124), ἢ πρῶτον τὸ τρίτον, εἶτα τῆ τρίτου τεταῖ τὸ τέταρτον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Δάκτυλοι 237 πόσους συμπληροῦσι πόδας; τὸ τῆ 237 τέταρτόν ἐσι 59 μετὰ λειψάνου 1· τὸ δὲ τῆς τρίτου 19 μετὰ λειψάνου 2.

130. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σημειωτέον δ' ὅτι ἐν ἀσάσῃ διαιρέσει, κατὰ διαδοχὴν γινομένη, ἐκάσῃ μονάδῃ τῆ καταλοίπου δύναται τόσας μονάδας τῆ διαιρέτου τῆς προτέρας διαιρέσεως, ὅσας περιέχει ὁ πρότερος διαιρέτης· ἐν τῷ ἤδη ἐκτεθέντι ὑποδείγματι τὸ δεύτερον λειψάνον 2 δύναται δύο μονάδας τῆ πρὸ τῆ διαιρέτου, ἢ δύο πολλαπλασιασθεῖσας ἐπὶ τὸν πρὸ τῆ διαιρέτην 4 εἴτ' ἐν 8, καὶ τὸ ὅλον λειψάνον ἔσαι 9· τὸ ἄρα πηλίκον ἔσαι $19\frac{2}{3}$.

131. Β'. Ἰνα δὲ διέλωμεν δι' 20, διαιρούμεν πρῶτον διὰ 10, ἀποτέμνοντες τὸν ἔσχατον ἐν δεξιοῖς χαρακτῆρα (127)· εἶτα λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τῆ καταλοίπου (129).

132. Γ'. Ἴνα δὲ διαιρεθῆ ἀριθμός τις διὰ 40, ὡς ὅτε ζητεῖται τὰς παράδας εἰς γρόσια ἀγαγεῖν, ἀποκεκόφθω ὁ πρὸς ἀριστερὰν αὐτῆ ἑξατος χαρακτήρ (127)· καὶ εἰλήφθω τῆ λοιπῆ τὸ τέταρτον (103)· πόσα ἔν γρόσια συγκροτῆσι παράδαι 972; ἀποχωρισθῆτω τῆ δοθέντος ἀριθμῆ ὁ 2, καὶ εἰλήφθω τῆ 97 τὸ τέταρτον, ὃ ἐστὶν 24 μετὰ λειψάνῃ 1, ὅπερ δυνάμενον 10 (120) συνάμα τῷ καταχωρισθέντι 2 συνίστησι 12· ἔστιν ἄρα πηλίκον 24 γρόσια καὶ παράδαι 12.

133. Δ'. Ἴνα δὲ διὰ 60 διέλωμεν, ὡς ὅτε θέλωμεν τὰ σαυροφόρα ἀγαγεῖν εἰς φιορίνια, ἢ λεωτὰ χρονικὰ εἰς ὥρας, ἢ γῆν κυκλικὰ εἰς μοίρας, διακεκρίσθω ὁ ἑξατος πρὸς δεξιὰν χαρακτήρ, καὶ εἰλήφθω τῆ λοιπῆ τὸ ἕκτον, τετῆσι τὸ ἥμισυ, καὶ αὐθὶς τῆ ἡμίσεως τῆ τρίτον (129)· πόσα, φέρε, φιορίνια ἀποπληρῆσι σαυροφόρα 588; ἀποκοπέντος ἐν δεξιοῖς τῆ 8, καὶ ληφθέντος τῆ ἐν 58 ἕκτε, εἴτ' ἔν 9, καὶ τῆ 4 καταλοίπων (ὃ ἤδη δύναται 40) συναφθέντος τῷ ἀφορισθέντι 8, ἔξομεν φιορίνια 48 σὺν σαυροφ. 48.

134. Ε'. Δυνάμεθα δὲ ἐν ἑκ ὀλίγαις περιπτώσεσι μεταποιεῖν τὴν σύνθετον διαίρεσιν εἰς ἀπλήν (111). Προκειμένη γὰρ διελεῖν ἀριθμὸν δοθέντα δι' 24, λαβεῖν ἐξέσαι τῆ ἀριθμῆ τὸ ἕκτον, μεθ' ὃ, τὸ τέταρτον τῆ ἕκτῃ· ἢ τῆ ἀριθμῆ τετῆ τὸ ἥμισυ, εἴτα τῆ ἡμίσεως τὸ τρίτον, ἐξ ἧ, τῆ τρίτῃ τῆ δὲ τὸ τέταρτον· ἢ γῆν τὸ ὀγδοον κατ' ἀρχὰς, εἴτα τῆ ὀγδόῃ τὸ τρίτον, εἴγε τετράκις 6 ποιεῖ 24, δις δὲ 3 ποιεῖ 6, τετράκις δὲ 6 ποιεῖ 24, καὶ τρίς 8 ποιεῖ ὡσαύτως 24.

135. Ἴνα διαιρεθῆ ὁ 797 διὰ 24, ληφθῆτω τῆ τῆ 797 ἕκτον, ὅπερ ἐστὶ 132, λειπομένη 5, εἴτα τὸ τε-

ταρτον τῷ 132, ὅπερ ἐστὶ 33· ψηλίκον ἄρα πρόεισι 33 με-
τὰ λειψάνῃ 5.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Περὶ Κλασμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Τί ἐστὶ Κλάσμα.

136. Ἀριθμὸς ὀλοσχερῆς καλεῖται ὁ ἄπασξ, ἢ πλεονάκισ, ὀλοσχερῶς περιέχων τὴν μονάδα· οἷον 5 γροσῖά ἐστιν ἀριθμὸς ὀλοσχερῆς, περὶ οὗ εἴρηται ἐν τῷ Α΄ Τμήματι. Κλασματίας δὲ ἢ κλάσμα, περὶ ἐν ἡμῖν διαλαθεῖν πρόκειται ἐν τῷ ἀνά χειρας, ὀνομάζε-
ται ἐν ἡ πλείω μέρη τῆς μονάδος· ἔτω, τῷ γροσῖα 40 παράδας περιέχοντος, οἱ παράδαί ἔσονται μέρη τεσσα-
κοσὰ τῷ γροσῖα, καὶ δὴ 5 αὐτῶν συσῆσθαι ἀριθμὸν κλα-
σματίαν, ὄντες πέντε τεσσαρακοσὰ τῷ γροσῖα, καὶ παρι-
στάμενοι ἔτω 45. Ἐπὶ παντὸς δὲ κλάσματος, οἷον τὸ 45, ὁ μὲν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἀριθμὸς καλεῖται Παρο-
νομασίης, ὡς ἀπὸ αὐτῆ παρονομαζομένων τῶν τῆς μο-
νάδος μερῶν, καὶ ἐπὶ τῷ προκειμένῃ ὑποδείγματις τεσσα-
ρακοσῶν ἀπὸ αὐτῆ καλεσμένων· ὁ δὲ ὑπερθεν τῆς γραμ-

μῆς ἀριθμῶς, ἀκεί Α'ριθμητῆς, ὡς ἀριθμῶν, ὅποσα τῶν τοιῶνδε μερῶν τὸ κλάσμα ἐμφαίνει, οἷον ἐνταῦθα παρίσῃσι τεσσαρακοσὰ πέντε· αἱ δὲ ἐκθέσεις $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ κτ. ἀναγινώσκονται ἕτως· ἐν τριτημόριον, ἢ ἐν τρίτον, δύο τεταρτημόρια, ἢ δύο τέταρτα, τρία πεμψημόρια, ἢ τρία πέμπτα, ἕξ ἑωπημόρια, ἢ ἕξ ἑβδομα κτ.

137. Δυνάμεθα δὲ εἰ κλάσμα ἅπαν, οἷον $\frac{40}{40}$, ὡς σεσημειωμένην ἐκδέξασθαι διαίρεσιν, εἰ ἐπὶ τῆς ἐκθέσεως ταύτης ἀδιεφόρως, εἴτε ὡς κλάσματος ἐκλαμβανομένης, ἀπαγγέλλειν· πέντε τεσσαρακοσὰ· εἴτε δὲ θεωρημένης, ὡς εἴπερ εἴη σεσημειωμένη διαίρεσις· πέντε διαιρεῖν διὰ 40· φημί δὲ, ὅτι πέντε τεσσαρακοσὰ, ἢ διαιρεῖν πέντε διὰ τεσσαράκοντα, ἢ δὲν διενηνόχατον· 1 γὰρ διανεμηθεῖσα τοῖς 40, ἐκάσῳ παρέχεται τεσσαρακοσὸν ἓν· ἄρα 5 διανεμομένων τοῖς 40, ἕκασος λήψεται τεσσαρακοσὰ πέντε.

138. Α'. Ἐξέσαι ἄρα διαίρεσιν πᾶσαν, οἷον 4 διὰ 2 διαιρῶντας, ἐν σχήματι παρισῶν ἕτω $\frac{4}{2}$.

139. Β'. Καὶ δὲ ἐτι ὀλοχερῆ ἀριθμὸν ἅπαντα, οἷον 5, πασῶν τῶν ἐν τοῖς κλάσμασι πράξεων ἐπιδεκτικὸν καθιστάναι, διαμορφῶντας αὐτὸν, ὡς διὰ 1 διαιρέμενον, ἕτω $\frac{5}{1}$, ὃ τὴν δύναμιν αὐτῆς ἠκιστα λυμαίνεται, εἴγε 5 διαιρεθεὶς διὰ 1 παρέχει 5 (104).

140. Γ'. Ταυτόν ἐσι λαβεῖν δύο τρίτα ποσότητός τινος, εἰ ἐν τρίτον τῆς αὐτῆς ποσότητος διπλασιασθείσης· ἢ γὰρ λαβεῖν τέτταρα ἑβδομα ποσότητός τινος, καὶ ἐν αὐτῆς τετραπλασιασθείσης· κείσθω γὰρ διανεῖμαι χρυσίνος δύο τρισὶν ἀνθρώποις· ἢ ἐν $\frac{2}{3}$ ἐκθεσις, ἐκληφθεῖσα ὡς σεσημειωμένη διαίρεσις, παρίσῃσι 2 διαιρέμενον διὰ 3, ἢ τὸ τρίτον τῶν δύο χρυσίνων· θεωρῶντας μὲν τοὶ τὴν ἐκθεσιν ὡς κλάσμα, δεήσει εἶπειν· δύο τρίτα ἐνὸς χρυσί-

γε (136): σαφές ἄρα, ὅτι τὸ τρίτον δυοῖν χρυσίνοι ταύ-
τὸν δύναται δυοὶ τρίτοις χρυσίνοι ἑνός.

141. Δ'. Πάνθ' ὅσα δέδεικται ἐπὶ τῆς διαιρέσεως,
ἐκληφθῆναι δύναται καὶ ἐπὶ τῆ κλάσματος, τῆ μὲν ἐν
αὐτῷ ἀριθμητῆ ὡς διαιρετέα, τῆ παρονομαστῆ δὲ ὡς διαι-
ρέτε θεωρημένων (137).

142. ΑΞΙΩΜΑ Α'. Ἐὰν ἐν ἀσάση διαιρέσει, ἢ
ἐξηρηματισμένῳ πηλίκῳ, οἷον $\frac{12}{4}$, ὅτε διαιρετέος καὶ ὁ
διαιρέτης ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν, φέρ' εἰπεῖν τὸν 5, πολ-
λαπλασιασθῶσιν, ἐξ ἧ γίνεται $\frac{60}{20}$, ἢ τῆ πηλίκου δύνα-
μις ἀμεταπαύητος ἔσεται· ἐπεὶ 12 διαιρεθεὶς διὰ 4, πα-
ράγει 3, καὶ 60 διαιρεθεὶς διὰ 20, ἀποδίδωσιν αὐτῆς καὶ αὐ-
τὸς 3· καί γε εἰκότως· ὁ γὰρ 60 διαιρετέος, πενταπλά-
σιος τῆ 12 γεγονώς, ὀφείλει περιέχειν τὸν διαιρέτην
20, γεγονότα καὶ αὐτὸν πενταπλάσιον τῆ 4, τοσάκις, ὅ-
σάκις ὁ 12 περιέχει τὸν 4.

143. Ἀλλὰ καὶ ἐὰν ὅτε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης τῆ
 $\frac{12}{2}$ διὰ τῆ αὐτῆ ἀριθμῆ, οἷον τῆ 2 διαιρεθῆ, ἀμετακίνη-
τος ὡσαύτως διαμενεῖ ἢ τῆ κλάσματος δύναμις· 6 γὰρ
διαιρεθεὶς διὰ 2, παρέχεται 3, ὃν καὶ ὁ 12, διαιρεθεὶς διὰ
4· ὁ δέ γε τέτατος λόγος, ὅτι παρὰ τὴν διὰ 2 διαίρεσιν
ὑποδιπλάσιος γεγονώς ὁ 6 τῆ 12, ὀφείλει περιέχειν το-
σάκις τὸν διαιρέτην 2, γεγονότα καὶ αὐτὸν τῆ 4 ὑποδιπλά-
σιον, ὅσάκις τὸν 4 περιέχει ὁ 12.

144. ΑΞΙΩΜΑ Β'. Ἐὰν σύμμετρον μέρος (81)
ὅλα τινὸς ἀπαχθῆ ἀπ' αὐτῆ τῆ ὅλα, γενήσεται μετὰ τὴν
ἀφαίρεσιν κλάσμα, ἢ ὁ παρονομαστῆς ἔσαι μονάδι ἐλάτ-
των ἢ πρότερον· ἐὰν μὲν τοι ἐξ ἐναντίας, σύμμετρον μέ-
ρος τινὸς ὅλα αὐτῷ συναφθῆ τῷ ὅλῳ, μονάδα μίαν προσ-
κλήσεται ὁ παρονομαστῆς, ἀναφερόμενος πρὸς τὸ καινὸν

ὄλον· δι' ὑποδειγμάτων ἐκλευκανῶμεν ἄμφοτερά· 4, ὅς ἐστι μέρος τῆ 20 σύμμετρον, εἴτ' ἔν ἔν πέμπτον αὐτῆ, δηλούμενον διὰ τῆ $\frac{1}{5}$ κλάσματος, αὐτὸς ὁ 4 γίνεται $\frac{1}{5}$ τῆ 20 πλὴν 4, εἴτ' ἔν τῆ 16· ὁ αὐτὸς δὲ 4 ἀποκαθίσταται $\frac{1}{8}$ τῆ 20 σὺν 4, εἴτ' ἔν 24· εἰ γὰρ 4 ἐνεσι πεντάκις τῷ 20, ἐνέσαι πάντως τετράκις τῷ 20 πλὴν 4, ἢ τῷ 16, καὶ δὴ ἔσαι αὐτῆ $\frac{1}{4}$ · ἐνέσαι μέτοιγε ἑξάκις ἐν τῷ 20 σὺν 4, ἢ 24, καὶ ἔτως ἔσεται τηρικᾶυτα αὐτῆ τὸ $\frac{1}{6}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Ἀναγωγῆς τῶν Κλασμάτων.

145. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἀναγωγὴ ἐν γένει καλεῖται, μεταμόρφωσις τις, ἢ μεταβολὴ ποσῆ, φαινομένη, τῆς κατ' αὐτὸ δυνάμεως ἀμετακινήτου αἰεὶ διατελέσης.

Πρόβλημα Α'.

146. Κλάμα τὸ δοθὲν ἀναγαγεῖν εἰς ὄλον.

ΛΥΣΙΣ. Φανερόν, ὡς ἔ δυνάμεθα ἀπὸ κλάσματος ὄλον συγκροτῆσαι, μὴ τῆ κλάσματος τῆτε ἰσημένε γῆν μονάδι μιᾶ, καὶ δὴ μὴ τῆ ἀντὶ διαιρέτε. παρονομασῆ ἕξισημένε τῷ ἀντὶ διαιρετέε ἀριθμητῆ (141)· τῆτε ἔν συγκυρήσαντος, θεωρεῖσθω τὸ κλάμα ὡς σεσημειωμένη διαιρέσις, καὶ ἔτω διηρήσθω ὁ ὑπὲρ τὴν γραμμὴν ἀριθμὸς διὰ τῆ ἐνερθεν.

Α'. Πόσον συμπληρῶσιν 24 τέταρτα τῆ γρόσια; Γραφέντος ἔν $\frac{24}{4}$, διηρήσθω 24 διὰ 4, καὶ εὑρίσκεται ὄλον γρόσια 6· παρὰ ταῦτα συναγαχεῖν ἕκαστος ἐκ τῆ