

ποιῆσι 14, καὶ 8 ποιῆσι 22· γράφων ὃν αὖθις ὑπὸ τὸν 8
τὸν τῶν μονάδων χαρακτῆρα 2, τὸν δὲ ἔτερον 2 τυρῶν
τῇ τετάρτῃ σήλη, σύγαπτε καὶ ταῦτα· 2 οἱ τυρηθέντες
καὶ 3 ποιῆσι 5, καὶ 3 ποιῆσιν ὀκτώ, ὃν ὑποκατάγραψαν
τελευταῖον τῷ 3· Οὐφελεῖ ἄρα τὰς πάσας μυᾶς 8234.

57. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Εὐ ἐμπορικῇ τινι ἔταιροις
ἔχεντο, ὁ μὲν Αὐρισκλῆς ἀργύρια 54630, ὁ 54630
δὲ Κλεονίας 946, ὁ δὲ Εὐαγόρας 17845, 946
ὁ δὲ Περιανδρος τελευταῖον 85796· πόσου ἄρετον 17845
ἔθευτο συλλήβδην ἅπαντες; Ταυτὰ ὃν πρᾶξας $\frac{85796}{159217}$
ἐνρήσεις ὅλην ἀθροισμα 159217.

58. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Χάριτον γυμνασίας. Στρατοῦ.
γός τις ἔλαβε κατὰ καιρὸν ἐκ τῆς ερατιωτικῆς τε. 37360
μείς τὸς ἐνορωμένυς ἀργυρίων ἀριθμός· ζητεῖ 914
ἢν ἢδη μαθετῇ, ὅσου ἐστι τὸ ὅλον ἀθροισμα τῶν 8523
ληφθέντων.
 $\frac{50}{56402}$
 $\underline{103449}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Αὐτορέσεως.

59. Οὐταν Αὐτορίθμος τις ἀπὸ ἀριθμοῦ χωρίζεται, ἵνα,
ὅσον ἀλλήλων διαφέρει, γνωσθῇ, ἡ πρᾶξις καλεῖται
Αὐτορέσις.

60. Ως ἂν ὃν ἀφέλης ἀριθμόν τινα ἀφ' ἔτερη,

Α'. Γράψου τὸν ἐλάσσω ὑπὸ τὸν μείζονα, μονάδας
ὑπὸ μονάδας, δεκάδας ὑπὸ δεκάδας κτ., εἰτ' ἀγαγε ὑπὸ^{III}
αὐτὸς γραμμὴν πλαγίαν.

Β'. Εάν μὲν ὁ πρὸς δεξιὰ πρῶτος χαρακτὴρ τῆς κάτω ἀριθμῆς ἵστος ἢ τῷ πρώτῳ χαρακτῆρι τῆς ἅπω ἀριθμῆς, θέσις διαφορὰν αὐτῶν τὸ ο (15). εἰὰν δὲ ἐλάχισσων, ἀφελῶν αὐτὸν ἀπὸ τῆς ἀνωτέρω ἀριθμῆς, γράψουν ὑπὸ τῆς γραμμῆς τὴν διαφοράν· εἰὰν δὲ τελευταῖον ἢ μείζων, λάβε ἐκ τῆς προσεχῶς ἔγγυς χαρακτῆρος τῆς ἀνωτέρω ἀριθμῆς μηδα, ἢ μετενεχθεσσα ἐπὶ τῷ πρὸ αὐτῆς εὖ τοῖς δεξιοῖς χαρακτῆρος, δύναται 10 (41). ἐκ τῆς ἀθροίσματος ἐν τῷ δε τῶν 10 ἢ τῆς προϋπάρχουτος χαρακτῆρος ἀφελῶν τὸν ἔνερθεν, ὑποκατάγραψου τὴν διαφοράν. Αὐτῷ δὲ τύτοις γενομένις καὶ πὶ τῶν ἑτέρων χώρων, δεκάδων ἀμέλειται, ἐκατοντάδων κτ., αἱ ἐκ δεξιῶν ἐπὶ τὰς ἀριστερὰς γραφεῖσαι μερικαὶ διδόσσονται τὴν ὄλικὴν ζητυμένην διαφορὰν.

ΔΕΙΞΙΣ. Πρόδηλον γάρ, ὅτι ὥτως ἔξεις τὸ κατάλοιπον τῶν μονάδων, δεκάδων κτ. τῆς ἀνωτέρω ἀριθμῆς, ὡς ἐσὶ τὸ κατάλοιπον τῆς ὅλης ἀνωτέρω ἀριθμῆς, ἀφελῶν ἀπὸ αὐτῆς τὰς ἐν τῷ κατωτέρῳ μονάδας, δεκάδας, κτ., ταῦτον εἰπεῖν ὅλον τὸν ἔνερθεν ἀριθμόν. ἔξεις ἡ δὲ ὥτω τὴν ὄλικην διαφορὰν, ἢ ἀλλήλων οἱ διθέντες ἀριθμοὶ διαφέρονται.

Ο. Ε. ΙΙ.

61. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Εἴ τῶν, ὃν ὀφείλει τις, 9594 ἀργυρίων ἀπέδωκε 2834· πόσ' ἂρ' ἔτι ὀφείλει;

Τὸ κατάλοιπον τῆς ὀφλήματος ἔται ἀναμφιβόλως ἢ διαφορὰ, ἢ διαφέρει ὁ 9594 ἀριθμὸς τῆς 2834· εἰς δὲ εὑρεσιν ταύτης τῆς διαφορᾶς, αἱ γράψουν ὑπαλλήλους τὰς δύο ἀριθμοὺς, ἀγαγών γραμμὴν ὑπὸ αὐτὰς· β'. ἀρξά· 9594 μενος ἀπὸ τῶν μονάδων, λέγεται, 4 πλὴν 4 ἵστος ο, $\frac{2834}{6760}$ ὅνπερ γράψουν ὑπὸ τὸν 4· μετάβηθε εἰτα ἐπὶ τὸν τῶν τῶν δεκάδων χῶρον, 9 πλὴν 3 ἵστος 6; δην γράψουν ὑπὸ τὸν 3· ἐπὶ δὲ τὸν τῶν ἐκατοντάδων χῶρον λέ-

γε, 5 πλὴν 8, ὅπερ γενέσθαι ἀδύνατον. Ληφθεῖσα ἡ
μονὰς μία ἀπὸ τῆς ἐπομένης χαρακτῆρος 9, καὶ μετενεχθεί-
σα ἐπὶ τὸν 5, δύναται 10 (41), ὃς συνάμα τῷ 5 ποιεῖ
15. Λέγε εὖ, 15 πλὴν 8 ἵστος 7. ὃν ὑποκαταγράψας
μάτελθε τὰς χιλιάδας. Εγθα, ἐπεὶ ἐκ τῆς 9 ἐλήφθη μο-
νὰς, καὶ μετηνέχθη ἐπὶ τὸν 5, ὃς 9 ισοδυναμεῖ ἢδη τῷ 8 (α).
Λέγε εὖ, 8 πλὴν 8 ἵστος 6, ὃν ὑπογράψας, ἔξεις τὸ λοι-
πὸν τῇ ὁφλήματος ἀργύρῳ 6760.

62. Οὐταν ὁ, ἀφ' ἧς δέοι τὴν μονάδα λαβεῖν, ἀριθμὸς
ὑπάρχῃ 0, λάμβανε ἐκ τῆς πρώτης ἀπαγωγῶντος θετικὴ
χαρακτῆρος μονάδα, ἵτις μετενεχθεῖσα ἐπὶ τῷ 0 δύνα-
ται 10 (41). τέτη δὲ τῷ 10, ὃν δύναται ὁ 0, ληφθεῖσα
αὖ μονὰς, καὶ μεταχθεῖσα ἐπὶ τὸν ἐν τοῖς δεξιοῖς τῷ 0
κείμενον χαρακτῆρα, ισχύσει καὶ αὗτῇ 10 πρός γε τῶν
τὸν χαρακτῆρα (αὐτοῦ.), αὐτὸς δὲ ὁ 0 καταλείπεται
δυγάμενος μόνον 9.

63. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Αὔγρος τις παρέχει ἐτή-
σιου πρόσσοδου ἀργύρῳ 5031. ἀλλ' εἴξι αὐτῶν δαπα-
νᾶται τοῖς ἐπισιτεῖσιν ἀργ. 250. πόσου ἀρρέστησι τὸ καθα-
ρὸν τῆς προσόδου; 1 πλὴν 0 ἵση 1, ἣν γρά. 5031
ψευ ύπὸ τὸν 0. 3 πλὴν 5 γενέσθαι ἀδύνατον. 250
Τῇ δὲ ἐπομένης χαρακτῆρος τῇ ἀνωτέρᾳ ἀριθμῷ 4781
ὑπάρχοντος καὶ αὗτῇ 0, εἰλήφθω μονὰς ἐκ τῆς 5, ἵτις
μεταχθεῖσα ἐπὶ τῷ 0 ισοδυναμήσει 10. ἐπὶ τῇ 3
ἵση 10. 10 ἦν καὶ 3 ποιεῖσι 13. 13 πλὴν 5 ἵστος 8, ὃς
γεγράφθω ύπὸ τὸν 5. ἐπεὶ δὲ τὸ 0 δύναται ἢδη 9 (62).

(α) Οὐταν ἀπὸ χαρακτῆρος τινὸς δαυειζόμενα μονάδα, ἐκ
ἔσιν ἄχρησου ἐπισιτεῖσιν αὐτῷ σίγια (·), ἵνα μην-
σκάμενα, ὅτι μονάδας ἐλαττον δύναται ὁ χαρακτήρ.

9 αρα πλὴν 2 ἵσος 7, ὃς ὑποκατάγεται ράφθω· ὁ δὲ 5 ἵσος.
δυναμεῖ 4, ὃν ὑπογράψει τελευταῖον εὑρίσεις τὴν ζητο-
μένην καθαρὰν πρόσοδον 4781.

64. Οὐτόταν πλείω κατὰ συνέχειαν κέωνται· οὐδὲ-
λου, ὅτι διαβιβασθεῖσα μονὰς μία ἐκ τῆς ἐγγὺς θετικῆς
χαρακτῆρις ἐπὶ τῷ ἀριστερῷ πρώτῳ τῶν οἱ, ἀνα-
δεῖξει τοτὲ τὸ ο δυνάμενον 10. ἐάν δὲ ἐκ τέτων μετα-
βιβασθῇ 1 ἐπὶ τῷ ἔπειρον ἐν τοῖς δεξιοῖς οἱ, τοτὶ μὲν οὐ
αὐτὸ δυνάμεται 10, τὸ δὲ ἡγάμενον ἐν ἀριστερῷ μηδενικὸν
δυνάμεται μόνον 9. τέτο δὲ κατὰ διαδοχὴν γένεται,
πάντα μὲν τὰ ο δυνάμεται ἕκαστον 9. μόνον δὲ τὸ ἐν δε-
ξιᾷ πρῶτον δυνάμεται 10. ἐάν δὲ οὐ ἐξ αὐτῶν τῷ ἐν τῇ
δεξιᾷ πρώτῃ ληφθῇ μονὰς, οὐ αὐτὸ τότο ἐμφανεῖ 9.

65. ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Τὸ πῆρχεν ἐν τῷ δημοσίῳ τα-
μείῳ ἄθροισμα χρυσίων 90005002. ἀφηρέθησαν δὲ ἐξ αὐ-
τῆς 1453276. πόσοι ἄρα κατελείφθησαν ἐν 90905003
τῷ ταμιείῳ; Μονὰς μία ληφθεῖσα ἐκ τῷ $\frac{1453276}{88554726}$
5 οὐ μετενεχθεῖσα ἐπὶ τῷ ἐγγὺς οἱ, διδω-
σιν αὐτῷ δύναμιν 10, ἀλλ' ἐπεὶ κατὰ διαδοχὴν μετενεχθῆ-
ναι δεῖ τὴν μονάδα ἐπὶ πάντων τῶν ο μέχρι τῷ 2, ἥποι
ο δυνάμεται μόνον 9. 12 πλὴν 6 ἵσος 6. 9 πλὴν 7 ἵσος
2. 9 πλὴν 2 ἵσος 7. 4 πλὴν 3 ἵσος 1. Μεταβιβασθεί-
σης οὐ πάλιν μονάδος ἐκ τῷ 9 ἐπὶ τὸ ἐγγὺς οἱ, καὶ ἐκ
διαδοχῆς ἐπὶ τῶν ἀλλων, τὸ μὲν ἐν δεξιᾷ ο δυνάμεται
10. τὰ δὲ ἄλλα δύο, τὰ πρὸς ἀριστεράν, ἕκαστον 9. 10 πλὴν
5 ἵσος 5. 9 πλὴν 4 ἵσος 5. 9 πλὴν 2 ἵσος 8. τέλος
δὲ, ἐπεὶ ὁ τὴν μονάδα δανείσας ο δύναται ἡδη 8, γεγρά-
φθω ὑπὸ τὴν γραμμὴν ὁ 8. 6700800053456

Τὸ πόδειγμα ἀφαιρέσεως ὑπὲρ περισσοῦ,
τῶν, οὓς ἔφθηκεν εἰπόντες, περικτώσεων. $\frac{346244^{\circ}65726}{6354585987730}$

66. ΣΧΟΛΙΟΝ. Βάσανος πράξεως ἀριθμητικῆς ἐσι πρᾶξις ἄλλη, διὸ βεβαιώμεθα, εἰ ἀσφαλῶς ἡ πρώτη διήνυσαι· ἔπει δὲ ἡ Πρόσθεσις, καὶ ἡ Αφαίρεσις τὴν ἔγαντίαν ἀλλήλαις βαίνεται, τῆς ἐτέρας καθαιρύσης τὸ ὑπὸ τῆς ἐτέρας οἰκοδομηθὲν, καὶ ἀποκαθισώσης ἀριθμόν τινα, ὃς εἶχε πρό τῆς κατὰ τὴν ἐτέραν πράξεως· οἷον εἰ τῷ 9 ἀφαιρεθῇ ὁ 5, καὶ καταλειφθῇ ὁ 4, προσθετὸς ὁ 4 τῷ ἀφαιρεθέντι 5 ἐπανάγει τὸν 9, ὃν εἶχομεν πρὸ τῆς ἀφαιρέσεως· αὗται ἄρα αἱ διτταὶ πράξεις συμβαλλόνται ἀμοιβαδὸν ἐπὶ τῇ ἀλλήλων βασάνῳ· ὅτι δὲ ταῦτον ἐσι ρῆτέν καὶ περὶ τῆς Πολλαπλασιασμῆς, καὶ τῆς Διαιρέσεως, φανήσεται καὶ πάνυ λαμπρῶς ἐν τοῖς ἐφεξῆς.

Βάσανος τῆς Προσθέσεως.

67. Αὐτελε, ἀρχὴν ποιησάμενος ἀριστερόθεν, τὸ ἐκάστης σύλης ἀνωθεν ἐπὶ τὰ κάτω γυνόμενον ἀθροίσματα ἀφ' ἐκάστης χαρακτῆρος τῇ ὀλικῇ ἀθροίσματος, τῇ διὰ τῆς προσθέσεως συναχθέντος· ἐάν δὲ μετὰ πάσας τὰς ἀφαιρέσεις μηδὲν κατάλοιπου ἢ μή τε τῷ ἀθροίσματος, μή τε τῶν συλῶν, ἀσφαλῶς ἐπράχθη τὰ τῆς προσθέσεως· Εὐ τῷ προκειμένῳ τῆς προσθέσεως ὑποδειγματι, ἡ πρώτη ἐπὶ τῶν ἀριστερῶν σύλη περιέχει μόνον 8, ὃς τις ἀφαιρεθεὶς ἐκ τῆς χαρακτῆρος 9, ὃς συσιούχεται αὐτῷ ἐπὶ τῷ A 780 ἀθροίσματος, καταλείπει 1, ἡ τις γεγράφθω 875 ὑπὸ τὸν 9, καὶ κατήχθω ὁ τῷ ἀθροίσματος 8049 χαρακτὴρ 7 ἐν δεξιᾷ τῆς καταλειφθείσης 1. 9704. A
καὶ συνήφθω ἡ τῷ 17 ἀντισοιχῆσσα σύλη· 8 17
καὶ 7 ποιῶσι 15· ἀφηρόσθω δὲ ὁ 15 τῷ 20
17, καὶ ὁ καταλειπόμενος 2 γεγράφθω 14

ὑπὸ τὸν γ· καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς καταλειφθέντος 2 γρα-
φὴν τὸ ο, ὃ ἐσιν ἐν τῷ Α ἀθροίσματι, παρέχει τὸν 20·
4 σὺν γ ἰσος 11, σὺν 8 ἰσος 19· τῇ ἦν 19 ἀφαιρεθέν-
τος ἀπὸ τῆς 20, καταλείπεται 1, ἵτις γεγράφθω ὑπὸ
τὸ ο· κατήχθω δὲ αὖ τελευταῖον ὁ ἔσχατος τῷ ἀθροί-
σματος χαρακτήρ 4 ἐν τοῖς δεξιοῖς τῆς 1, μεθ' ἣς συνή-
σεται ὁ 14· 5 ἐν 9 ποιεῖσθαι 14, καὶ ἀφαιρεθέντος ἀπὸ τῆς
14, ἐν τῷδεν καταλείπεται· τῇθ δὲτέρη ἡμέρᾳ καθίσησθαι
βεβαίας, μηδεμίαν ὅλως παρεισφρῆσαι τῇ προσθέσει ἀ-
πάγμ.

ΤΠΟΔΕΙΜΑ ἔτερον βασανιζόμενης προσθέσεως
πρὸς ἄσκησιν τῶν πρωτοκείρων. 10579

68. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Σαφῆς δὲ ὁ λόγος,	3899
ἔφ' ὃν ἡ βάσανος αὗτη συρίζεται· τῇ γὰρ ἀ- θροίσματος, τῇ διὸ τῆς προσθέσεως ἀγειρομένη, συμπληρώματος ὅτος ἀπασχῶν τῶν συναφθεισῶν συλῶν, ἀνάγκη ἄρσε τὰς σύλλας ταύτας ἀφαι- ρεῖσθαι ἔχειν ἀπὸ τῆς ἀθροίσματος, ἐνὸς μηδενὸς καταλειπομένη (15).	 577 15255 05 22 25 25 0

69. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Εὐ τῇ τῆς προσθέσεως βασά-
νῳ ἐπαναλαμβάνειν ἔξεσαι τὰ τῆς πρᾶξεως ἐκ τῶν κά-
τω πρὸς τὰ ἄνω ἴσται, εἰ τὸ κατ' ἀρχὰς ἐκ τῶν ἄνω ἐπὶ¹
τὰ κάτω ἡ πρᾶξις ἔχωρησε, ἢ τὸ ἀνάπταλυ. Διὸ γὰρ
ἔξηπατῆσθαι τὰντὸ διὸ δυεῖν ἐποκτεῖσθαι, φασί, ἀπίθα-
νον· ἀραρότως ἐν ἕκαστος πεισθήσεται ἐπὶ τῆς πρᾶξεως,
τὴν ἥν ἄρτι δεδώκαμεν βάσανον, ἐν γένει εἰπεῖν, βε-
βαίαν ὑπάρχειν.

Βάσανος τῆς Ἀφαιρέσεως.

70. Τῇ, ὃν ἀφείλομεν ἀριθμὸν, συναφθέντος τῇ εὑρεθείσῃ διαφορᾷ, τὸ ἀθροισμα ἀποδώσει αὐτὸν. ἐκεῖγον τὸν ἀριθμὸν, ἀφ' ἧς ἔχεντο ἡ ἀφαίρεσις (9). ἐν τῷ πρώτῳ τῶν ήγησαμένων τῆς ἀφαιρέσεως ὑποδειγμάτων, τῷ ὑπὸ ὄψιν ἥδη κειμένῳ, προσθέντες τὸν Β ἀριθμὸν, ὃν ἀφείλομεν, εἰτ' ἐν τὸν 2834 τῷ Γ ἀριθ. μῶ, ὃν διαφορὰν εὑρομεν, ἔξομεν τὸ α ἀθροισμα, τὸ ιάτω γεγραμμένον, ἵσου τῷ ἄνω κειμένῳ ἀριθμῷ Α, ἀφ' ἧς ἔγενετο ἡ ἀφαίρεσις. 9594 Α
2334 Β
6760 Γ
9594 α

71. ΣΧΟΛΙΟΝ. Οἳ ταῦ δὲ προκένται ἀριθμὸς πολλάκις ἐαυτῷ προσεθησόμενος, ἢ πολλάκις ἀφ' ἑτέρῳ ἀφαιρεθησόμενος, τὸ μὲν πρῶτον ἐκτελεῖται διὰ συντόμειασθεσεως, ἢ καλεῖται Πολλαπλασιασμός. τὸ δὲ, διὰ ἀφαιρέσεως ἐπιτετμημένης, ἦτις ὄνομάζεται Διαίρεσις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ.

72. Πολλαπλασιασμὸς ἀκάει, ὅπόταν ἀριθμός τις, ὃς καλεῖται Πολλαπλασιασέος, τοσάκις λαμβάνεται, ὃσαι ἔγεισι ρουάδες ἑτέρῳ ἀριθμῷ, ὃς ὄνομαζεται Πολλαπλασιασής· καὶ γὰρ δὲ ὄγκοις ὃ, τε πολλαπλασιασέος, καὶ ὁ πολλαπλασιασής καλεῖται ποιηταί, ἢ παράγοντες· ὃ δ' ὑπὸ αὐτῶν γνόμενος τριτος ἀριθμὸς προκύπτων λέγεται, καὶ γινόμενος, καὶ παραγόμενος· ἐν, ἐν τῷ πολλαπλασιάζειν 5 ἐπὶ 4, εἰτ' ἐν τετράκις λαμβάνειν τὸν 5, τόξον γίνεται.

μέν εἶνι ὁ πολλαπλασιασέος, 4 δὲ ὁ πολλαπλασιασῆς,
20 δὲ ὁ προκύπτων, κτ..

73. Α'. Εἴη ἄρα ὁ πολλαπλασιασμὸς, ἀλλως τε
τῷ πολλαπλασιασθεῖ πολάκις τὴν μονάδα περιέχετος, ἐπι-
τετμημένη πρόσθετις· καὶ γὰρ πολλαπλασιάζω^θ τὸν 5
ἐπὶ 4, ἢ τὸν 5 τετράκις λαμβάνω, τάυτὸν ποιήσεις,
ὡς εἰ κατέ τὸ συνέχεις τετράκις γράψεις τὸν 5, τὰ τῆς
προσθέσεως διατράξαιο, ὡς ὅρᾶται ἐν τῷ ὑπ' ὅψιν πινα-
κίσκῳ.

74. Β'. Οὐ προκύπτων εὑρεθήσεται περέ·
χων τὸν πολλαπλασιασέον, δισάκις τὴν μονάδα ὁ 5
πολλαπλασιασῆς· ὥτας ὁ 20 τετράκις περιέχει 5
τὸν 5, ὥσπερ ὁ 4 τετράκις περιέχει τὴν μονάδα. 20

75. Γ'. Πεισόμεθα ἄρα, ὡς ἡ εἰς πολλα-
σιασμὸν διδομένη μέθοδος εἶνι ἀληθής, εἰ τοσάκις ἔνει-
τῷ προκύπτοντι ὁ πολλαπλασιασέος, ὅσαι τῷ πολλα-
σιασῆ ἐνυπάρχουσι μονάδες.

76. Δ'. Συγάγεται δὲ ἔτι ἐγτεῦθεν, ὡς ὁ πολλα-
πλασιασμὸς ἐξ ἴδιας φύσεως ὁδόλως μεγεθύνει τὴν πολ-
λαπλασιάζομένην ποσότητα, ἀλλὰ νῦν μὲν αὐτὴν μεγε-
θύνει, τῷ πολλαπλασιασθεῖ τὴν μονάδα ὑπερέχετος,
νῦν δὲ ἐλάττον, ἐλάττονος ἡ μονάς ὅντος τῷ πολλαπλα-
σιάζοντος· τοῦ δὲ ἥκισα μεταβάλλει τὴν ταύτης δύναμιν,
μονάδι τῷ πολλαπλασιάζοντος ἰσθμένη. Αὐτίκα γὰρ ὁ δι-
ζῶν ἔσαι τῷ πολλαπλασιασέν· καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς
ἀνταῦθα μεγάλυνει τὴν ποσότητα· ἐὰν δὲ πολλαπλα-
σθῇ ὁ διπλοτυμόριον, ληφθήσεται τὸ τρίτον τῷ διπλο-
τυμονίῳ εἶτεν ὁ εἰς προκύπτοντα· καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς

ώδε σμικρύνετ τὴν ποσότητα· τέλος δὲ, εάν ὁ δέποι ο πολλαπλασιασθῇ, προκύπτων εἶσαι ὁ δέ· γένος πολλαπλασιασμὸς ἥκισα μεταβαλεῖ τὴν ποσότητα.

77. Ε'. Οταν ἀριθμὸς θεωρεῖσθαι ἔχῃ ὡς ἀκριβῶς προκύπτων ἀφ' ἀτέρυτην ἀριθμόν, πολλαπλασιασθέντος ἐφ' ἑαυτὸν, ή ἐπ' ἄλλον ἀριθμὸν, πολλαπλῆς ἀκύτης ἀριθμῷ ἐκείνῳ· γάτως ὁ 16 πολλαπλῆς ὑπάρχει τῇ 4, ὅτι τετράκις 4 ποιεῖ 16· ὁ δὲ 12 ἐστι πολλαπλῆς τῇ 4, ὥσπερ τῷ 3, ὅτι τετράκις 3, ή τρὶς 4 ποιεῖ 12· αὐτὸς δὲ γάτος ὁ 12 πολλαπλῆς ὡς εἴσι τῇ 5, ὅτι ὡς εἴσιν, ἐφ' ὃν πολλαπλασιασθεὶς ἀποτελοῖ 12.

78. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Αὕτης ἀριθμὸς πολλαπλῆς εἴσι τῆς μονάδος, εἴγε πᾶς ἀριθμὸς ἑαυτὸν παράγει, ἐπειδή τὴν μονάδα πολλαπλασιασθεὶς (72).

79. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Εγγὺ ταυτὶ πολλαπλασιασμῷ τὸ προκύπτον εἴσι πολλαπλῶν τῆτε πολλαπλασιασμένων, τῷ τῷ πολλαπλασιάζοντος.

80. Αριθμοὶ ὄλογχερετοι, οἱ μηδενὸς ἀριθμῷ πλὴν τῆς μονάδος ὄντες πολλαπλοί, καλεῖνται Πρῶτοι· οἷον ὁ 5 εἴσιν ἀριθμὸς πρῶτος· γέδεις γάρ εἴσιν ὄλογχερης ἀριθμὸς, οἵ; ἐφ' ἑαυτὸν, ή ἐπ' ἄλλον, πλὴν τῆς μονάδος, πολλαπλασιασθεὶς, τὸν 5 παράγει· γέ δὴ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἰσιν: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, κτ.

81. Αριθμὸς, ὃς τις πλεονάκις ή ἄπαξ λαμβανόμενος ἀριθμὸν τινα παράγει, καλεῖται μέρος σύμμετρον ἀριθμῷ τῷ παραγομένῳ· γάτως ὁ 3 εἴσι μέρος σύμμετρον τῇ 12, ὡς τεταρτημόριον αὐτῷ ὑπάρχων· λαμβανόμενος γάρ τετράκις παράγει τὸν 12· γένος δέ εἴσι σύμμετρον μέρος τῇ 12, τὸ τρίτον αὐτῷ ὡν, εἴγε ληφθεὶς τρὶς πα-

ρέχει τὸν 12· καθ' ἑαυτὸν μέν τοι σαφὲς, ὅτι ὁ 4 ἡκισθ
ὑπάρχει σύμμετρον μέρος τῆς 15.

82. Αριθμὸς, ὃς, περιεχόμενος ἐν ἔτερῳ, μὴ ἦ αὐτοῖς σύμμετρον μέρος αὐτῆς, καλεῖται ἀσύμμετρον αὐτῆς μέρος· γάτως ὁ 4 εἶναι ἀσύμμετρον μέρος τῆς 15.

83. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α'**. Εὐ παντὶ πολλαπλασιασμῷ ἐκάτερος τῶν ποιητῶν μέρος σύμμετρον εἴη τὸ προκύπτοντος.

84. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β'**. Οἱ πρῶται ἀριθμοὶ μερῶν συμμέτρων εἰσὶν ἄμειροι.

85. Αἱ τῷ πολλαπλασιάζοντος μονάδες ἐμφαίνουσιν, ὅσάκις ὁ προκύπτων περιέχει τὸν πολλαπλασιαζόμενον (72)· ἀλλὰ όχι αἱ τῷ πολλαπλασιάζομέναι μονάδες παρισῶσιν, ὅσάκις ὁ προκύπτων περιέχει τὸν πολλαπλασιαζήν· οἷον ἐν τῷ τῷ 4 διὰ 3 πολλαπλασιασμῷ, ὁ μὲν 3 παρισῶσιν, ὅτι ὁ 4 τρὶς περιέχεται ἐν τῷ προκύπτοντι, ὁ δὲ 4 ὡσαύτως ὅτι τετράκις ὁ 3· προβαλλομένων ἄρα δυοῖν ἀριθμῶν ἐπὶ τῷ πολλαπλασιασθῆναι διὰ ἀλλήλων, ὅδε διοίσει, ὅπότερος ἂν αὐτῶν ληφθῇ πολλαπλασιαζής, ἢ πολλαπλασιαζέος· τὸν γὰρ αὐτὸν προκύπτοντα 12 ἀποσομαῖ, εἴτε τετράκις τὸν γάλαβον, εἴτε τρὶς τὸν 4.

86. Πολλαπλασιάζοντες ἄρα ἀριθμὸν τὸν Α ἐφ' ἑτερον τὸν Β, τὴν πρᾶξιν ἀσφαλῶς πεπράχθαι κρινόμενοι, εἰ πολλαπλασιάσαντες εἴτε τὸν Β ἐπὶ τὸν Α, προκύπτοντα ἔξομεν τὸν αὐτὸν τῷ προτέρῳ.

87. **ΣΧΟΛΙΟΝ.** Ως τὰ πολλὰ δὲ τὸν ἐλάττω τῶν δυοῖν ἀριθμὸν εἰς πολλαπλασιαζήν τιθεμεν εὔμαρείσις ἔνεικα.

88. Επεὶ γάρ ἀδιάφορον ὅλως, ὅπότερον τῶν δυοῖν

ἀριθμῶν θώμεθα πολλαπλασιασθήν, ἢ πολλαπλασιασέων (85), εἰκὸς ἐκ τύτῳ, πλειόνων ἀριθμῶν ἐπ' ἄλλήλους πολλαπλασιασθῆναι προκειμένων, μηδὲν ὥσπερτως διαφέρειν, καθ' ἣν ἂν τάξιν πολλαπλασιασθῶσιν· ἀδὲν ἡττού γὰρ ὁ δο προκύψει ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν 3, 4, 5, καὶν εἶπωμεν, τρὶς ὁ 4 ποιεῖ 12, πεντάκις ὁ 12 ποιεῖ 60· εἴτε, τρὶς ὁ 5 ποιεῖ 15, τετράκις ὁ 15 ποιεῖ 60· εἴτε δὴ, τετράκις δὲ 5 ποιεῖ 20, τρὶς ὁ 20 ποιεῖ 60.

89. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οὐταν ἀρχὴ πολλαπλασιαστής, οὗτος ὁ 24, ἢ προκύπτων ἐκ δυοῖν, ἢ πλειόνων παραγόντων, ἀδιαφόρως ἔξει πολλαπλασιάζειν τὸν πολλαπλασιασέον, οἷος ὁ 5, ἢτοι δι' ὅλης τῆς πολλαπλασιασθεῖ 24, ἐξ ἃ προκύπτει 120 ἢ κατὰ διαδοχὴν ἐπὶ τὰς παράγοντας τὸν 24, εἰτ' ὧν 2, 3, 4 λέγοντας· διὸς ὁ 5 ποιεῖ 10· τρὶς ὁ 10 ποιεῖ 30· τετράκις ὁ 30 ποιεῖ 120· ἢ ὅπως ἂν ἄλλως ἢ τάξις κτυψθείη, ὁ προκύπτων ἔστι ἀμεταποίητος.

90. Οὐ παραγόμενος ἔσται ὥσπερτως ἀμεταποίητος, εἴτε τῆς πολλαπλασιασθεῖ, οὗτος τῆς 20, ἐφ' ὅλου τὸν πολλαπλασιασθήν, οὗτος τὸν 5, πολλαπλασιασθέντος, ὅθεν προκύπτει ὁ 100, εἴτε τὸ πρῶτον πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ μέρος τῆς 5, εἰτ' ὧν τὸν 3, ἐξ ὃ πρόεισιν 60, εἴτα ἐπὶ τὸ κατάλοιπον μέρος 2, ὅθεν προκύπτει 40, οὐ ἐκ τύτῳ τῶν δύο προκυπτόντων συναπτομένων ἄλλήλοις· σαφὲς γὰρ, ὅτι όχι ἡττού ἐκατέρως ληφθήσεται ὁ 20, ὃσάκις περιέχεται ἢ μονάς ἐν τῷ 5.

91. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ή τῆς διὰ συνθετωτέρων ἀριθμῶν πολλαπλασιασμᾶς θεωρία ἀεὶ κεῖται ἐν τῷ λαβεῖν ἀπαντας τὰς προκυπτοντας ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς ἀπλατεύσαντας (54)· ἔστιν ἄρα τῶν ὧν ἀκάνευ τὰς ἐκ τῶν ἀπλεύσαντας

πύκτοντας τὸν πρωτόπειρον ἐκδιδαχθῆναι· εὑρεθήσονται δὲ πάντες εὐμαρῶς ἐν τῷ προκειμένῳ Αἴσακι, ὃν Πυθαγό-ρειον μνουγὺν πάντες ἐκάλεσαν.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	3	12	16	20	24	28	32	30
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

92. Ι'δὺ δὴ ὅπως χρησόμεθα τῷδε τῷ Αἴσακι· εἰς εὑρεσιν τῷ ὑπὸ τῷ 6 καὶ 5 παραγομένῳ, ζητητέον τὸν οἰκίσκον 30, ἔνθ' ἀμέλει ἢ ἐν ἣ ὁ 6 σύλη, ἢ ἐκ τῶν ἄνω ἐπὶ τῇ κάτω χωρᾶσσα, συμπίπτει τῇ ἐξ ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιὰ. Ιάση, ἐφ' ἣς κεῖται ὁ 5. Ήναε δ' εὑρωμεν τὸν ὑπὸ τῷ 8 καὶ 7 γιγνόμενον, λαμβάνοντες τὸν 8 ἐν τοῖς ἄνω τῷ Α-. Αἴσακος, τὸν δ' 7 ἐν τῇ ἀριστερᾷ, ζητῶμεν τὸν οἰκίσκον 56, ὅπει αἱ δύο σύλαι, ἢ μὲν τῷ 8 ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἢ δὲ τῷ 7 ἐκ τῶν ἀριστερῶν ἐπὶ τὰ δεξιά, προϊστησαι, ἀλλήλαις συμπίπτει.

93. Οὐ γε μὴν ἐκ τῷ 9, ἐφ' ἕαυτὸν ἢ ἄλλον ὄγκιναῖν ἀπλῶν ἀριθμὸν ἀχθέντος, παραγόμενος εὐπλετέσερον εὑρεθήσεται, προσέχει τοῖς ἐπομένοις· διὸς γὰρ ὁ 9 ποιεῖ 20 πλὴν 2, εἰτ' ἐν 18· τρὶς ὁ 9 ποιεῖ 30 πλὴν 3, 27· τετράκις ὁ 9 ποιεῖ 40 πλὴν 4, 36· πεντάκις ὁ 9 ποιεῖ

50 πλὴν 5, 45· ἐξάκις ὁ 9 ποιεῖ δο πλὴν 6, 54...
τέλος δὲ, ἐννεάκις ὁ 9 ποιεῖ 90 πλὴν 9, 81.

94. Τῶν προκυπτόντων ἐκ τῶν ἀπλῶν ἀριθμῶν 6,
7, 8, 9, ἐπ' ἀλλήλους πολλαπλασιαζομένων, εἰς εὐ-
ρεσιν δυχερεύερων συτῶν, ἐξέναι παρ' ἐλλείψιν τῆς Πν-
θαγορείας ^{Διακος εύρισκεν} τρόπῳ τιῷδε.

Α. Τὸν ψύσθων τῆς μὲν δεξιᾶς δάκτυλοι ὑπὲρ τῶν
ἀπλῶν ἀριθμῶν τέ πολλαπλασιασθεῖσι, τῆς δὲ ἀριστερᾶς,
ὑπὲρ τῶν ἀπλῶν τέ πολλαπλασιασθεῖσι. ὑψόσθων δὲ, εἰς
μὲν ὑπὲρ τῆς 6, δύω δὲ ὑπὲρ τῆς 7, τρεῖς δὲ ὑπὲρ τῆς 8.
τέσσαρες δὲ ὑπὲρ τῆς 9. ἕκαστος δὲ τῶν ὑψωμένων δάκτυ-
λων ἐμφαινέτω δεκάδα μίαν.

Β'. Πεπολλαπλασιάσθω ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων,
οἱ λειποῦται κεκλεισμένοι, τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἐπὶ τὸν τῶν
κεκλεισμένων τῆς ἀριστερᾶς. ὁ δὲ προκύπτων, τῷ τῶν δε-
κάδων ἀθροίσματι συναφθεῖσι, ποιήσει τὸν ζητώμενον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ι"ν γε εὔρεθῇ ὁ ὑπὸ 6 ἢ 7 πα-
ραγόμενος, ὑψόσθωσαν δύω μὲν δάκτυλοι τῆς δεξιᾶς ὑ-
πὲρ τῆς 7, εἰς δὲ τῆς ἀριστερᾶς ὑπὲρ τῆς 6. οἱ ὑψωμένοι
τρεῖς δάκτυλοι δηλεῖσθαι τριάκοντα. τρεῖς δὲ οἱ κεκλεισμέ-
νοι τῆς δεξιᾶς, πολλαπλασιασθέντες διὰ τῶν τεττάρων κε-
κλεισμένων τῆς ἀριστερᾶς, ποιήσει 12. 12 γε 30 ποιήσει
42, ὃς ἐσὶ γινόμενος ὑπὸ τῆς 6 ἢ 7.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ι"ν γε δὲ ὁ ὑπὸ 8 ἐπὶ τὸν 8,
εὔρεθῇ, ὑψωμένοι 3 ἐν τῇ δεξιᾷ, ἢ τοστοι ἐν τῇ ἀριστερᾷ
δηλεῖσιν 60. δύω δὲ κεκλεισμένοι ἐν τῇ δεξιᾷ διὰ δύω
τῶν ἐν τῇ ἀριστερᾷ πολλαπλασιασθέντες, διδόσει 4. προ-
σθέσει ἄρα εὑρίσκεται προκύπτων 64.

95. ΟΡΙΣΜΟΣ. Πολλαπλασιασμὸν ἀπλῶν ὅμο-
μίζομεν, ἢ τινος ὁ πολλαπλασιασθεὶς ἐγὸς μόνος χαρακτῆ-
ρισμός.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΜΑΧΑΓΙΑΝΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΜΑΧΑΓΙΑΝΗΣ

ρός εἰς περιεκτικὸς, σύνθετον δὲ, οὐ πλείσ τὸ ἔνε
χαρακτῆρας ὁ πολλαπλασιανὸς περιέχει.

Πολλαπλωσιασμὸς Α^ε πλάγη.

96. Α. Ο^ς ἐλάσσων ἀριθμὸς (37) οὗτος ὁ πολλα-
πλασιανὸς, γεγράφω ὑπὸ τὸν μετρου· καὶ πεπολλαπλω-
σιάσθω ἐπὶ τὸν ἔνερθεν ἀριθμὸν ὁ πρῶτος ἐν δεξιᾷ χαρα-
κτήρ^α τῆς ὑπερθεν, καὶ γεγράφθω ὑπὸ τὸν πολλαπλασια-
νὸν ὁ ἐκτεῦθεν γινόμενος· ἐὰν δὲ ὅτος δύω περιέχῃ χα-
ρακτῆρας, γεγράφθω μόνον ὁ τῶν μονάδων συμαντικὸς
(33)· ὁ δὲ δηλῶν δεκάδας, τηρηθήτω ἐπὶ τῷ συναφθῆ-
ναι, οἷα δὴ καὶ μονάδες (42) τῷ ἐφεξῆς προκύπτοντι ἐκ
τῆς προσεχῶς κειμένης χαρακτῆρος τῆς πολλαπλασιασέν.

Β'. Πεπολλαπλασιάσθων ὥσπαίτως ἄπαντες ἐξῆς οἱ
χαρακτῆρες τῆς ἀνωτέρω διὰ τῆς κατωτέρω, καὶ γεγρά-
φθων οἱ ἐξ αὐτῶν προκύπτοντες κατὰ τὸν προρρήθεντα τρό-
πον, ἐκ δεξιῶν χωρῶντες πρὸς τὰ λαϊ· τὸ δ' ὅλου εἶσαι
ὁ γινόμενος ἀριθμὸς, ὃς ἐζητεῖτο.

Γ'. Ο^ς πηγίκας οἱ ἀπαντᾶ ἐν τῷ πολλαπλασιασέω,
τηρύμενος τις ἀριθμὸς ἐκ τῆς πρὸι γεγονότος, γεγρά-
φθω ἐν τῷ χώρῳ τῆς προκύπτοντος ἐκ οὗ· οὐδὲνος τηρο-
μένη, τεθείσθω ὡς παραγόμενος τὸ ο.

ΔΕΙΞΙΣ. Α^ριθμός τις πολλαπλασιασθησόμενος, οὐ
καλῶ Α, ἐκ εἴσιν ἀλλ' η συμπλήρωμα μονάδων, δεκά-
δων, ἑκατοντάδων, ἐξ ὧν σύγκειται (9)· ἀλλὰ γὰρ,
οὐ εἴρηται πρὸ μικρῶν, διαπερισυθέντος, λαμβάνονται αἱ
μονάδες, μεθ' οἷς αἱ δεκάδες, εἴτα αἱ ἑκατοντάδες κτ. τῆς
Α ἀριθμῶν, ὃσάκις εἴνεται η μονὰς τῆς Β ἀριθμῶν, οὐ ὑπο-
τίθημι πολλαπλασιασέν· εἰληπται ἄρετος, τύτος ὑπερ-

γότος, ἀπας ὁ Α ἀριθμὸς, ὃ σάκις τὴν μονάδα ὁ πολλαπλε-
σιασμὸς περιέχει (72) Ο. Ε. Δ.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Δρυμῶν τις, περιέχων δένδρα
300420, πεπώληται ἀπας, τιμηθέντος ἐκάστη δένδρος ἀρ-
γυρίων 4. Πόση ἀρ' εἶναι ὡλη τῆς δρυμῶνος τιμή;

Φαγερόν 8ν, ὅτι εἶναι 300420 τετράκις λιφθεῖς ζυτει-
ται τούνη ἢ ὁ 300420 πολλαπλασιασθῆ 300420
ἐπὶ 4, ὁ γεγήσεται ὕτω· α'. γεγρά.
φθωσκη ἀμφιτεροὶ οἱ ἀριθμοὶ ὑπαλλήλων, 1201680 Γ
ῶς ὀρῶνται· β'. λέγε: τετράκις τὸ ο ποιεῖ ο· γεγρά-
φθω τὸ ο ὑπὸ τὸν 4· τετράκις ὁ 2 ποιεῖ 8· γεγράφθω
8 πρὸς ἀριθμόν τῆς ο· τετράκις 4 ποιεῖ 16· γεγράφθω
6 τηρηθεῖσης τῆς 1 (96)· τετράκις ο ποιεῖ ο· γε-
γράφθω ἡ τηρηθεῖσα μονάς· τετράκις ο ποιεῖ ο· γε-
γράφθω ο (96. Γ')· τετράκις 3 ποιεῖ 12· γραφέντος ἀρι-
θτε, ὁ Γ ἀριθμὸς εἶναι ὡλος ὁ προκύπτων, ὃς δηλο-
ῦλη τὴν τιμὴν τῆς δρυμῶνος.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Πόση ἀρ' εἶναι ἡ τιμὴ ὁργυῶν
γῆς 7097, 9 ἀργυρίων τιμηθεῖσης ὁργυᾶς 7097
ἐκάστης; Τῶν αὐτῶν πραχθέντων εὑρεθή.
στα 63873. 63873 Δ

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. 34056 Α
6
204336 Β

Βάσανος τῆς ἀπλῆς πολλαπλασιασμῆς.

97. Δυνάμεθα δὲ τὴν τῆς πολλαπλασιασμῆς βάσα-
νου ἐκτελέσαι ἄνευ τῆς ἀπὸ τῆς διαιρέσεως συνδρομῆς
τρόπῳ τοιῷδε.

Εάν μὲν γὰρ ὁ πολλαπλασιαζῆς ἢ πολλαπλῆς, πεπολλαπλασιάσθω πρῶτον ὁ πολλαπλασιαζέος δι ἐνὸς τῶν τὸν πολλαπλασιαζῆν παραγόντων, εἴθ' ἔτως ὁ προκύπτων ἐπὶ τὸν ἔτερον (89). οἷον, ἐπὶ τῇ ἐρχόμενῃ τῶν ὑποδειγμάτων, τῇ 6 πολλαπλασιαζῆ πολλαπλῆ ὑπάρχοντος τῇ 2 καὶ 3, πεπολλαπλασιάσθω ὁ Α πρῶτου ἐπὶ τῷ 3, ἐξ ὧν πρόειστι 102168. οὗτος δ' είτα ἐπὶ τὸν 2, ὅθεν προκύπτει ὁ Β ἀριθμὸς, ὃς εὑρηται κατ' ἀρχὰς τῇ πολλαπλασιαζῆ ἐπὶ 6 ἐπιτηδευθέντος.

Εάν δὲ ὁ πολλαπλασιαζῆς ἀριθμὸς ἢ πρῶτος, οἷος ὁ 7, ἐφ' οὐ ἄν προκέοιτο πολλαπλασιάσαι τὸν 3485, ὅθεν παράγεται 24395· πεπολλαπλα. 3485

σιάσθω ὁ 3485 δι ἐνὸς μέρυς τῇ 7, λι-	7
φθέντος κατὰ τὸ δοκῦν, τῇ 4 φέρε,	<u>24395</u>
είτα διὰ τῇ καταλοίπει μέρυς 3· τῇ δὲ	3485
ἀθροίσματος τῶν δύο ἀνὰ μέρος προκι-	
πτόντων 13940, καὶ 10455, παρεχομένης	13940
τὸν αὐτόν, συναχθήσεται ἐντεῦθεν, ὡς	<u>10455</u>
ὑγιῶς διακέπρακται τὰ κατὰ τὸν πρῶ-	24395
τού πολλαπλασιαζόν.	

Περὶ τῇ συνδέτῳ πολλαπλασιαζῆ.

98. Εάν ὦ, τε πολλαπλασιαζέος, καὶ ὁ πολλαπλασιαζῆς σύνθετοι ὥσι, τηρηθήτωσαν αἱ αὐταὶ μέθοδοι, αἱς περὶ τῇ ἀπλῆ πολλαπλασιαζῆ ἀπεδώναμεν, κατὰ τὸν ἐπόμενον τρόπον.

A'. Πολλαπλασιασθήτωσαν ἀπαντεῖς οἱ τῇ πολλαπλασιαζέευ χαρακτῆρες ἐπὶ τὸν πρῶτον ἐνδεξιοῖς χαρακτῆρας τῇ πολλαπλασιαζῆ· είτα πάντες ἐπὶ τὸν δεύτε-

ρού; καὶ ὅτας ἐφεξῆς· γεγράφθωσαν ὑπάλληλοι οἱ προκύπτοντες ἕκτε τῷ πολλαπλασιασέ, ό γένεσις τῶν τῷ πολλαπλασιασέ χαρακτήρων, ὅπως ἔκαστος τῶν ἐφεξῆς προκυπτόντων ὀπισθοδρομῇ χώρου ἔνα (44) ἐπὶ τὰ λαιδά, πρός γε τὸν πρὸς αὐτὴν γιγόμενον.

Β'. Τέλος δὲ συναφθέντων ἀπάντων τῶν προκυπτόντων, τὸ τέταρτον ἄθροισμα ἔσαι ὁ γινόμενος, ὃς ἐζητεῖται.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Πόσες τιμηθήσεται ὑφασματίχεων 189, ἐκάστη πήχεως 17 τιμωμένης ἀργυρίων; Ἡ τιμηθήσεται ἐπτακαιδεκάκις 189· εἰς ὃν εὑρεσιν τέττα τῷ παραγομένῳ, πεπολλαπλασιάσθῳ ὁ 189 189 πρῶτον μὲν ἐπὶ τὸν 7, ὅθεν πρόεισιν ὁ Β, 17 εἰτ' ὃν ὁ 1323· εἶτα δ' ἐπὶ 1, ἐνθα μένει ὁ 1323 Β πολλαπλασιασέος ἡμετάτρεπτος, εἰτ' ὃν 189· 189 Γ ἐκῆν προσθέσει τῶν δύο προκυπτόντων Β καὶ 3213 Δ Γ εὑρίσκεται ὁ Δ, εἰτ' ὃν 3213 δηλωτικὸς ἀπάσης τῆς τιμῆς τῷ ὑφάσματος.

99. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ο δεύτερος τῷ πολλαπλασιασέ χαρακτὴρ συμαίνει 10 πρός γε τὸν πρῶτον 7· ἄρα ὁ προκύπτων ἐκ τῶν 189 καὶ 1 συμαίνει δεκάδας πρός γε τὸν πρῶτον προκύπτοντα ἐκ τῷ 189 καὶ 7, καὶ δὴ διηγήσεται τὸν 1890· γραπτέον ἄρα τὸν ἐν τοῖς δεξιοῖς πρῶτον αὐτῷ χαρακτήρα, εἰτ' ὃν τὸν 9, ἐν τῇ τῶν δεκάδων χώρᾳ, εἰτ' ὃν ὑπὸ τὸν 2. Ε'αν δὲ τριῶν εύμοιρῆ χαρακτήρων ὁ πολλαπλασιασής, ὁ παραγόμενος ὑπὸ τῷ πολλαπλασιασέ 8 καὶ τῷ ἐπὶ τὰ λαιδά τρίτῳ τῶν τῷ πολλαπλασιασέ χαρακτήρων πρός γε τὸν πρὸς αὐτὴν γιγόμενον ἐμφαίνει ἑκατοντάδας· ὁ πρῶτος ἄρα κατὰ δεξιὰν τῶν αὐτῆς χαρακτήρων γραφήγεται ἐν τῷ τῶν ἑκατοντάδων χώρῳ, καὶ ὅτας ἐφε-

ξῆς· ὅδεν ἀρ̄ ἀπεικὸς, ἐκεῖνον τῶν ἐφεξῆς παραγομένων
όπισθοποδετοῦ χῶρον ἔνας ἐπὶ τὰ λαῖς, ὡς γε τὸν πρὸ αὐτῶν.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. τὸ συνθέτε τολλαπλασιασμόν.

Α' πὸ καταβολῆς κόσμης παρῆλθον ἐνιαυτοὶ 7314· ἐὰν ἦν ὁ ἐνιαυτὸς ὑποτεθῆ συγκείμενος ἐξ ἡμερῶν 365· πόσαι ἄρ̄ ἡμέραι παρῆλθον μετὰ τὴν δημιουργίαν τὴν κόσμη;	
7314 πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 5 ποιεῖ	7314 Α
τὸν Ε· ἐπὶ δὲ τὸν 6, τὸν Ζ, οὗτος	365 Β
τὸν πρῶτον ἐνδεξιοῖς χαρακτήρα γρα-	36570 Ε
πτέου ὑπὸ τὸν 7· πολλαπλασιασθεὶς	43884 Ζ
τελευταῖον ἐπὶ τὸν 3, παράγει τὸν Θ,	21942 Θ
εἰ τὸν 2 χαρακτήρα θετέων ὑπὸ τὸν 8	2669610 Κ
τὸν δεύτερον τὴν προγενομένην· οἱ ἦν Ε, Ζ, Θ ἀριθμοὶ	
συναφθέντες ποιῶσι τὸν Κ· τυτέοι μετὰ τὴν τὴν κόσμη	
δημιουργίαν παρῆλθον ἡμέραι 2669610.	

Βάσανος τὸ συνθέτε τολλαπλασιασμόν.

Ποίει τὸν μὲν πολλαπλασιασθεῖν, τὸν δὲ πολλαπλασιαζέον πολλαπλασιασθεῖν, πράττε αὖθις τὸν πολλαπλασιασμόν· καὶ γέ-	17
νηται ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς, ἀσφαλῆς ἦν ἢ πρᾶξις·	•189
οἷον ἐπὶ τὴν πρώτην ὑποδείγματος, ἐπειδὴ ὁ αὐ-	153
τὸς γίγνεται 3213, πέπρακται ὑγιῶς ὁ πολ-	136
λαπλασιασμός.	17
	3213

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ πρὸς ἀσκησιν. Πό-	57809
σην δαπανηθήσεται εἰς ἵρατῷ συγχροτυμένῳ	207
ἐκ ἵρατιωτῶν 57809, δαπανωμένων ἐκά-	464663
τῷ ἀργυρῷ 207;	00000
	115618
	11966403

Πολλαπλασιασμὸς ἐπιτετμημένος.

100. Πολὺ δὲ τῆς πρᾶξεως ἐπιτέμνεται, εἴαντι τοι
διατέρῳ τῶν παραγόντων, οὐ ἐκατέρῳ, οὐ καὶ ἀμφοῖν μη-
δεικὰ προσῆν· τηγικάντα γάρ συντομώτερον πολλαπλα-
σιάσομεν κατὰ τὰ ἐφεξῆς.

A'. Εἴαν, ὡς ἐπὶ τῷ ἔχατε τῶν ὑποδειγμάτων, ἀ-
παντήσῃ κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐν ο, πάντα τὰ ο,
εἰς οὐσίαν κροτεῖται ο, εἰτ' ὅνδε προκύπτων ἐκ τῷ πολλα-
πλασιασέν καὶ τῷ ο, ἀχριζόσει πλὴν τῶν δύο πρὸς
δεξιὰν πρώτων, αἱ δείκνυσι, ὅπερι θετέον τὸν ἐφεξῆς
παραγόμενον· ἀποχρήσει ἄρα τὰντα τὰ δύο ο συμειω-
θέντα εὐ τοις δεξιοῖς· ὅτας ἐπὶ τῷ ὁμοίεντος ὑποδειγμα-
τος ἀποβληθῆναι δύναται τὰ πρὸς τὰ λαῖς τρία ο.

B'. Ήνίκα πρὸς τῷ τέλει τῷ πολλαπλασιασέν, οὐ
τῷ πολλαπλασιασῆ, οὐ καὶ ἐκατέρῳ, ἐν οὐ πλείω πρωταριθ-
μῶνται ο, δυνάμεθα πολλαπλασιάσαι, ἀρξάμενοι ἀπὸ
τῶν πρώτων ἐνδεξιοῖς θετικῶν χαρακτήρων, εὐ δὲ τῷ
τέλει προσθεναι κατὰ δεξιὰν τῷ ὀλικῇ γυμνένι πάντα
τὰ τῷ πολλαπλασιασέω, καὶ τῷ πολλαπλασιασῆ προ-
σόντα ο· ἀποβίσεται γάρ τ' αὐτὸν, οὐ καὶ διὰ τῷ χοινο-
τενεσέρος πολλαπλασιασμός· τατὶ μέν τοι ἐπειδὴ γενέσθαι
ἀμήχανον ἐπὶ τῶν κατὰ τὸ μέσον τῶν χαρακτήρων ἀπαγ-
γόντων μηδενικῶν, τηγικάντα καὶ τύτων κατὰ τὰ ὁρο-
θετηθέντα ποιητέον.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ. Πόσας περιέχει τετραγωνικὰς ὁρ-
γυὰς ἑκτασίς ἀγρῶς, οὐ τὸ μὲν μῆκος ὁργυαὶ 70500,
τὸ δὲ πλάτος 48030.

Εἴπειδήπερ, ζητῶντες εὐ τετραγωνικαῖς ὁργυαῖς τὴν
ἑκτασίν χωρίς τινὸς, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος ἐπὶ

τὸ πλάτος, πολλαπλασιασθήσεται κάντακα ὁ 70500 ε.-
πὶ τὸν 48030· βιβλομένοις δὲ ἐπιτεμεῖν τὰ τῆς πράξεως,
παραπτέον τὰ πρὸς τῷ τέλει τῶν δύο τετταυνίᾳ ἀριθμῶν ο,
εἰτ' ἦν πολλαπλασιαζέσθαι μάγον τὸν 705
705 ἐπὶ τὸν 4803· ὁ ἥκι εἰκ τέτταυ
προκύπτων ἔτι 3386115, ἐφ' οὐ
τῇ δεξιᾷ χρησπτέον 3 μηδενικά, ἅτε
δὴ ὑπαρχόντων δυοῖν μὲν ἐπὶ τῇ
πολλαπλασιαζέσθαι, ἐνὸς δὲ ἐπὶ τῇ
πολλαπλασιαζέσθαι· ὁ δὲ Α ἀριθμὸς
ἔσαι δηλωτικὸς τῶν τετραγωνικῶν ὀργυψῶν τῶν ἐν τῷ ά.
χρῶ περιεχομένων.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΝ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΦΙΛΟΒΟΥΛΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗΣ ΚΑΡΔΙΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΦΙΛΟΒΟΥΛΟΥ

101. Εἰκ τῶν ἄρτι εἰρημένων ἔπειται, ὡς, εἰς ἀριθμὸν παντὸς ἐπὶ 10 πολλαπλασιασμὸν, ἀποχρήσει ἐν ο προσθεῖναι ἐν τοῖς αὐτοῖς δεξιοῖς πολλαπλασιάζοντες γάρ ἀριθμὸν ἄπαντα ἐπὶ τὴν 1, ἔξομεν προκύπτουσε αὐτὸν ἐκεῖνον τὸν δεδομένον ἀριθμὸν (78)· οὐ γάτως ἀλυσίτελες ἔσαι τὸ τῇ πολλαπλασιασμῷ χρῆμα· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον πολλαπλασιάζοντες ἀριθμὸν τινα δὶ 100 τιθεμεν δύο ο ἐν τοῖς αὐτοῖς δεξιοῖς· διὸ δὲ 1000, τρία ο, οὐ ἐφεξῆς γάτως.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Ταλάντα τινὸς καθ' ὑπόθεσιν τιμωμένα ὀργυρίων 4256, τόσων χιλιάδων ὀργυρίων τιμᾶται χιλιατάλαντα.

Δέον γάρ πολλαπλασιάσαι 4256 ἐπὶ 1000, ἀποχρήσει δεῖναι πρὸς δεξιὰν τῇ πρώτῃ τῶν ἀριθμῶν ο τρία, οὐ περανθήσεται ὁ πολλαπλασιασμός· τὰ ἄρτα χιλιατάλαντα περιέχουσιν ἀργύρια 4256000.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Πόλις κατὰ μῆκος μὲν περιέχεσσα εἴδης 300, κατὰ δὲ πλάτος 100, τόσων ἔσαι

περιεκτική τετραγωνικῶν εὐθίων; Ἡν' ὡν πολλαπλασιασθῆ ὁ 300 ἐπὶ 100, ἄλις ἔσαι, εἰ γραφείησαν ἐν τοῖς τῷ 300 δεξιοῖς μηδενικὰ δύο· εὑρεθήσονται δὲ ὅτῳ εάδια τετραγωνικὰ 30000.

ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Τί δή ποτε προκύψει ἐκ τῷ 1000, ὃ 1000; ἔχεις εἰδὺς τὸν προκύπτοντα, γράψας κατ' ἀκολυθίαν τρία οὕτω 1000000.

102. Εἴπεικερ ἀδιαφόρως ἔξει πολλαπλασιάζειν, ἢτοι ἐφ' ὅλων τὸν πολλαπλασιασμὸν, ἢ ἐκ διαδοχῆς ἐπὶ τὴς αὐτὸν παράγοντας (89), ἐπενεγκετοῦ δυνάμεθα τὰς ἀφεξῆς μεθόδους, αἱ συχνότεροι ἐπὶ τῆς πρακτικῆς ὄγκοις οὗτοι.

Ἴνα πολλαπλασιασθῶσι, φέροντες εἰπεῖν, 35 ἐπὶ 6, ὡς ὅτε βυλόμεθα ἀναγαγεῖν ὄργυας εἰς πόδας κτ., παρατηροῦντες, ὅτι ὁ 6 ἐπὶ προκύπτων ἐκ τῷ 2 καὶ 3, πολλαπλασιάζομεν τὸν 35 πρῶτον ἐπὶ τὸν 2, εἶτα τὸν ἐκ τύτου, εἴτ' οὖν τὸν 70 ἐπὶ 3, καὶ ὅτῳ προελείσεται 210, ὃς προκύψει καὶ ἐπὶ 6 τῷ πολλαπλασιασμῷ γεγονότος.

103. Οὐ προκύπτει ἐκ 2 ὃ 10·30, ἐκ 3 ὃ 10·40, ἐκ 4 ὃ 10·60, ἐξ 6 ὃ 10· Ἡν' ὡν πολλαπλασιασθῆ ἀριθμός τις ἐπὶ 20, πολλαπλασιασθήτω ἐπὶ 2, προεθέντος ἂμα κατὰ δεξιὰν τῷ γιγαντιώφ τῷ 0° εἰς δὲ τὸ πολλαπλασιάσαι ἀριθμόν τινα ἐπὶ 30 γενέσθω μὲν ἐπὶ 3 ὁ πολλαπλασιασμὸς, τεθείσθω δὲ ἐν δεξιᾷ τῷ παραγόμενῳ 0°. Ἰνα δὲ πολλαπλασιάσωμεν 8 ἐπὶ 40, ὅπως ἀναγάγωμεν φέροντες, 8 γρόσια τυρκικὰ εἰς παρύδας, πολλαπλασιάσωμεν 8 ἐπὶ 4, ὃ προσθῶμεν ο τῷ 32. Τέλος δὲ εἰς τὸν ἐπὶ 60 πολλαπλασιασμὸν ἀριθμῷ τικος, ὡς ὅτε πρόκειται τὰ τῆς Αἰγαίας καλύμενα φιορίνας εἰς

τὰ ἐν αὐτοῖς ἀναλύσαι ὄγομαζόμενα ταυροφόρα, πεπολλαπλασιάσθω ὁ 8 φέρε, ἐπὶ 6, οὐ προεθείσθω μηδε. οὐκὸν τῷ 48, ἵνα γένηται 480.

Αἱ μέθοδοι αὗται, ἐνθραχεῖ πάντα ἔκτελύμεναι, εἰσὶν ἐν τῇ πρακτικῇ προκρίνονται τῷ ἐπὶ τῷ πολλαπλασιασμῷ ἀποδεθέντος (98) γενικῆ κανόνος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ Διαιρέσεως.

104. Διαιρεσίς ἐστι πρᾶξις, διὸ τοις, ὅσου ἐνδέχεται ἀριθμὸς ἔτερος ἑτέρᾳ ἀφαιρεῖται, ἵνα γνωσθῇ ὁ σάκις ἐκείνῳ ἐμπεριείχετο· διαιριδὸν δὲ καταλέγονται ἀπάση διαιρέσει ἀριθμὸι τρεῖς, ὁ διαιρέτης, ὁ διαιρετέος, οὐ τὸ πηλίκον.

105. Διαιρέτης μὲν ὃν καλεῖται ὁ ἀφαιρόμενος· διαιρετέος δὲ ὁ, ἀφ' οὗ ἡ ἀφαιρεσίς γίνεται· τὸ δὲ πηλίκον, τῆς πρᾶξεως ἐκπερανθείσης, ἐμφαίνει ὁ σάκις τῷ διαιρετέῳ ἀφηρέθῃ ὁ διαιρέτης, εἰτ' οὗ, ὁ σάκις ἐκείνῳ ἐμπεριείχετο· οἶον, τῷ 8 ἀφαιρεῖν δύναμεθα τὸν 2 τετράκις· 8 ἄρα διαιρεθεὶς διὰ 2 διδωσι 4· οὐ 2 μέν εἴη ὁ διαιρέτης· 8 δὲ ὁ διαιρετέος· 4 δὲ τὸ πηλίκον.

106. Εἴπειδη ἄρα αἱ τῷ πηλίκᾳ μονάδες παρισῶσιν, ὁ σάκις ὁ διαιρέτης ἔνεσι τῷ διαιρετέῳ, ὁ διαιρετέος περιέχει τὸν διαιρέτην, ὁ σάκις τὸ πηλίκον περιέχει τὴν μονάδα· οἶον ἔστι τῷ λιφθέντος ὑποδειγματος, ὁ 8 περιέχει τὸν 2, ὁ σάκις τὴν μονάδα ὁ 4.

107. Εἴ τοι ἄρα πολλαπλασιασθῇ τὸ πηλίκον ἔστι τὸν διαιρέτην, οὐ τάναταλιν, ἐπειδήτερ ἐκ τύττων ὁ διαι-