## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

## Περὶ λόγων συνθέτων.

287. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.** Εἰς εὐχερῆ κατάληψιν τῶν ῥηθησομένων, ἀναπολητέον ἀεὶ κατὰ νοῦν, ὅτι λόγος οὐδέν ἐςιν ἀλλ' ἢ πηλίκοντι.

Λόγου ἐπὶ λόγον πολλαπλασιαζομένου, τὸ προκύπτον, ὅπερ ἀληθῶς οὐδὲν ἕτερόν ἐςιν, ἢ καινὸν πηλίκον σεσημειωμένον, καλεῖται λόγος σύνθετος.

288. Προκειμένων ὁ τοῦ λόγου, ἢ τοῦ σεσημειωμένου πηλίκου τοῦ $\frac{\alpha\varpi}{\alpha}$, καὶ θατέρου λόγου, ἢ ἑτέρου σεσημειωμένου πηλίκου τοῦ $\frac{\delta\varpi}{\delta}$, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἕτερον ἐπὶ τὸν ἕτερον (231), τὸ προκύπτον ἢ ὁ καινὸς λόγος, εἴτ' οὖν τὸ ἐντεῦθεν προϊὸν καινὸν σεσημειωμένον πηλίκον $\frac{\alpha\pi\delta\varpi}{\alpha\delta}$ (287) καλεῖται λόγος σύνθετος· οἱ δὲ, ἐφ' ὧν παράγεται, λόγοι $\frac{\alpha\pi}{\alpha}$, $\frac{\delta\pi}{\delta}$ καλοῦνται λόγοι ἁπλοῖ ἢ συνθετικοί.

289. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** Πᾶς λόγος σύνθετος καινόν ἐςι σεσημειωμένον πηλίκον, ὃ πρόεισιν ἐκ δύω ἑτέρων σεσημειωμένων πηλίκων, πολλαπλασιαζομένων θατέρου ἐπὶ θάτερον.

290. Ὅταν δύω λόγοι ἴσοι, ἢ δύω πηλίκα ἴσα, πολλαπλασιάζωνται, τὸ παραγόμενον, ἢ ὁ λόγος, εἴτ'

ὧν τὸ νέον σεσημειωμένον πηλίκον, καλεῖται λόγος διπλασίων.

$\frac{\alpha\pi}{\alpha}$ καὶ $\frac{\delta\pi}{\delta}$ εἰσὶ δύω ἴσοι λόγοι, δύω ἴσα πηλίκα· εἰ γε $\frac{\alpha\pi}{\alpha}$ καὶ $\frac{\delta\pi}{\delta}$ τὸ αὐτό εἰσι πηλίκον π· τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, ἢ τὸ καινὸν πηλίκον, τὸ ἐκ τῶν δε τῶν ἴσων λόγων προερχόμενον, $\frac{\alpha\delta\pi^2}{\alpha\delta}$, ἐςὶ λόγος σύνθετος, ὅςτις νυνὶ καλεῖται διπλασίων.

$\frac{6}{2}$ καὶ $\frac{12}{4}$ δύω ἰσαλλήλων ὄντων λόγων· ἑκάτερος γὰρ ἴσος τῷ 3· τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον καλεῖται λόγος διπλασιων.

Οἱ τρεῖς ἤτοι λόγοι $\frac{\alpha\pi}{\alpha}$, $\frac{\delta\pi}{\delta}$, $\frac{\zeta\pi}{\zeta}$ εἰσὶν ἴσοι· ἕκαςος γὰρ τούτων ἴσος ἐςὶ τῷ π· ἐντεῦθεν ὁ ἐξ αὐτῶν σύνθετος λόγος, τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, τὸ καινὸν σεσημειωμένον πηλίκον, $\frac{\alpha\delta\zeta\pi^3}{\alpha\delta\zeta}$, καλεῖται λόγος τριπλασίων.

Τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τεσσάρων λόγων ἰσαλλήλων ὀνομάζεται λόγος τετραπλασίων, καὶ ἑξῆς ἤτως.

ΠΟΡΙΣΜΑ. Διπλῆ ἄρα καὶ τετραπλῆ κτ. πρὸς διπλασίονα, τριπλασίονα κτ. λόγον πολύτι καὶ πραγματικόν ἐςι τὸ διάφορον· ὁ μὲν γὰρ διπλῆς, καὶ τριπλῆς κτ. ἢ παράγεται ὑφ' ἑτέρων, ἀλλ ἔςιν εἷς ἁπλῆς λόγος, ἢ ὁ ἡγέμενος διπλῆς, τριπλῆς κτ. ὑπάρχει τῇ ἑπομένῃ· ὁ γεμὴν διπλασίων, τριπλασίων κτ. παραγόμενόν ἐςιν ὑπὸ δύω, τριῶν κτ. ἰσαλλήλων λόγων.

291. Θεώρημα ςοιχειῶδες· Τὰ παραγόμενα εἰσὶν ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν παραγόντων.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τοδὶ τὸ θεώρημα, ἀναμφηρίςως τὸ ξυντελέςατον καὶ χρηςιμώτατον ὑπάρχον ἅπαςι τοῖς ἐφεξῆς μέρεςι τῆς τε μαθηματικῆς καὶ φυςικῆς, ὐδεμίαν καθαράντε καὶ εὔληπτον τὸ κατ' ἀρχὰς παρίςησιν ἰδέαν τοῖς πρωτοπέροις· πειρασόμεθα ἀλλ' ὧν τήντε ἔννοιαν αὐτῷ ἀναπτύξαθαι, καὶ δὴ καὶ τὰ ἐκ τέτε ὑποςυνάψαθαι πορίςματα, ἅπερ θαυμαςίως συμβαλεῖ τοῖς μετιοῦςι τὸ ἐν χερςὶ συγγραμμα.

ΔΕΙΞΙΣ καὶ ἀνάπτυξις τοῦ θεωρήματος

ά. ἅπαν παραγόμενον δύω ἔχει παράγοντας, τὸν πολλαπλαςιαςέον καὶ τὸν πολλαπλαςιαςήν

292. β'. Ζητεῖται δὴ, πρὸς ἄλληλα παραβάλλοντας δύω παραγόμενα, ὁρίςαθαι τὴν ςχέςιν, ἢ τὸν μεταξὺ αὐτῶν λόγον, καὶ ἰδεῖν ἐκ τοῦ ἀκολούθε, ὅ,τι ἂν εἴη τὸ πηλίκον, εἰ ταῦτα τὰ παραγόμενα διαιρεθείη διὰ θατέρε θάτερον, καὶ ὅ,τι σύμμερον μέρος ἂν εἴη θάτερον παραγόμενον θατέρε· ζητεῖται ἄρα παραβαλεῖν ὅτω δύω παραγόμενα ὁμογενῆ, ἢ τῆς αὐτῆς φύσεως· κυρίως γὰρ εἰπεῖν δύω μόνον τῆς αὐτῆς φύσεως ποσότητες δύνανται πρὸς ἀλλήλας παραβαλλόμεναι ἡ ἑτέρα τέτων τῆς ἑτέρας μέρος ὀνομαθῆναι πηλίκον· εἴπωμεν τοίνυν περὶ δύω ὁμοειδῶν παραγομένων, χρόνε, φέρ' εἰπεῖν, διαςήματος, κινήςεως κτ., καὶ πρὶν ἢ κοθολικεῦςαι τὸ ζήτημα, λάβωμεν δύω μερικώτερα παραγόμενα ὑπὸ δύω μόνων παραγόντων.

Γινώςκομεν, φέρε, ὅτι ἡ παντὸς χωρίε ἐπιφάνεια ἐξιςῆται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ μήκους, καὶ τοῦ πλάτους· ἐκεῖν λάβωμεν δύω διάφορα χωρία, καλέςαντες αὐτὰ Α καὶ Β'.

Τοιγαρῦν ἡ μὲν τῦ Α ἀπιφάνεια, ἢ τὸ ἐμβαδὸν, ἔςιν ἴσον τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῦ κατ' αὐτὸ μήκυς καὶ πλάτυς· τὸ δὲ τῦ Β ὡσαύτως ἴσον τῷ ὑπὸ τῦ οἰκείυ μήκυς καὶ πλάτυς παραγομένῳ· τίς ἄρα ἔςαι ὁ μεταξὺ τύτων τῶν γινομένων, εἴτ' ὢν τῶν χωρίων λόγος; ἢ ἔςαι τὸ πηλίκον τῦ μείζονος, διαιρεθέτος διὰ τῦ ἐλάσσονος!

Θῶμεν ὢν ὅτι τὸ Α ἐςὶ μεῖζον τῦ Β· τοιγαρῦν ὑποτιθεμένυ ἴσυ ἀμφοῖν τῦ πλάτυς, δῆλον, ὅτι τὸ τῦ Α μῆκος περιέχει πλέον ἢ ἅπαξ τὸ τῦ Β, καὶ δὴ τὸ παραγόμενον, τὸ σημαῖνον τὴν τῦ Α ἐπιφάνειαν, ἔςι πλέον ἢ ἅπαξ περιεκτικὸν τῦ παραγομένυ τῦ σημαίνοντος τὴν τῦ Β ἐπιφάνειαν· ταὐτὸν δὲ κρατεῖν ἀνάγκη καὶ ἐπὶ τῦ πλάτυς, ὑποτιθεμένυ ἀμφοῖν ἴσυ τῦ μήκυς· ἐκῦν εὐχερῶς κατανοεῖται, ὅτι ἡ τῦ μήκυς τῦ χωρίυ Α πρὸς τὸ τῦ Β σχέσις, καὶ ἡ τῦ κατὰ τὸ Α πλάτυς πρὸς τὸ κατὰ τὸ Β, ἀμφότεραι συντελῦσι πρὸς αὔξησιν τῦ ἀριθμῦ, τῦ ἐμφαινόντος ποσάκις τὸ Α περιεκτικόν ἐςι τῦ Β, ἢ τὸ πηλίκον τῦ Α διαιρεθέντος διὰ Β.

Ἐφ ᾧ ὢν ὁρισόμεθα τὸ πηλίκον τυτὶ, ἢ τὴν μεταξὺ τῶν δύω γινομένων σχέσιν, εἴτ' ὢν τὴν μεταξὺ τῶν δύω χωρίων, λαμβάνομεν ὡρισμένοντι ποσὸν ἐκ τῶν δύω μηκῶν τε καὶ πλατῶν αὐτῶν· θῶμεν ὢν ὡς τὸ τῦ Α μῆκος ἔςιν = 20 ὀργυιαῖς, τὸ δὲ τῦ Β = 4· καὶ τῦ μὲν τὸ πλάτος = 16, τῦ δὲ Β = 2 ὀργυιαῖς·

Τοιγαρῦν τὸ Α χωρίον ἔσεται τῷ μὲν μήκει πενταπλάσιον, τῷ δὲ πλάτει ὀκταπλάσιον τῦ Β χωρίυ· τίς ἄρα ἔςαι ἡ τῦ παραγομένυ τῦ ἐμφαίνοντος τὸ Α πρὸς τὸ ἐκδηλῦν τὸ Β σχέσις; ἢ ποσημόριον τῦ Α ἔςαι τὸ χωρίον Β;

293. Ἔοικεν ὢν κατ' ἀρχὰς, ὅτι δυνατὸν τὴν σχέσιν

τὴν δε ὁρίσαιθαι, τὴν μεταξὺ δύω χωρίων, συνάψαντες τὴν τῶν μηκῶν τῇ τῶν πλατῶν σχέσει· ἐπεὶ γὰρ τὸ Α πενταπλάσιον μέν ἐςι κατὰ μῆκος, ὀκταπλάσιον δὲ κατὰ πλάτος τοῦ χωρίου, εἰκὸς ἄρα τρὶς δεκαπλάσιον εἶναι ὅλον τὸ Α ὅλου τοῦ Β.

294. Ἀλλὰ γὰρ τὸ ἐκτεθὲν θεώρημα βούλεται τὸ Α τεσσαρακονταπλάσιον τοῦ Β. ἄρα λέγοντες, ὅτι τὰ παραγόμενα πρὸς ἄλληλα εἰσὶν ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν παραγόντων, ἐννοοῦμεν τάδε: δύω παραγομένων, δύω ἐχόντων ἑκάςου παράγοντας, τὸν μὲν πολλαπλασιαςέον, τὸν δὲ πολλαπλασιαςήν, ἐὰν λάβωμεν τὸν λόγον, ἢ τὸ πηλίκον τῶν δύω πολλαπλασιαςέων, εἶτα τὸν λόγον, ἢ τὸ πηλίκον, τῶν πολλαπλασιαςῶν, καὶ πολλαπλασιάσωμεν ταῦτα θάτερον ἐπὶ θάτερον, τὸ παραγόμενον ὑπ' αὐτῶν ἔςαι τὸ πηλίκον, τὸ μεταξὺ τῶν δύω γινομένων ἐπιπρατεῖν.

Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῶν δύω χωρίων Α, Β λάβωμεν τὸν λόγον, ἢ τὸ πηλίκον, τῶν δύω πολλαπλασιαςέων, εἶτ' ἓν τῶν μηκῶν, ὅπερ ἐςὶ $\frac{20}{4}$, εἶτα τὸν λόγον, εἶτ' ἓν τὸ πηλίκον τῶν δύω πολλαπλασιαςῶν, τουτέςι τῶν πλατῶν, ὅ ἐςι $\frac{16}{2}$, καὶ ταῦτα θάτερον ἐπὶ θάτερον πολλαπλασιάσωμεν, ὁ σύνθετος λόγος, ἢ τὸ παραγόμενον, ἢ τὸ καινὸν, πηλίκον ἔςαι $\frac{320}{8} = 40$.

Οὐκοῦν τὸ θεώρημα δείκνυσιν, ὅτι τὸ παραγόμενον, ὃ ἐξεικονίζει τὴν τοῦ Α χωρίου ἐπιφάνειαν, περιέχει τὸ γινόμενον, τὸ ἐξεικονίζον τὴν τοῦ Β ἐπιφάνειαν, οὐκ ἔτι τρισκαιδεκάκις, ἀλλὰ τεσσαρακοντάκις· σκοπήσωμεν οὖν τὸ ἐντεῦθεν.

Οὐδείς ἐςιν, ὃς ἀμφιγνοεῖ, ἄλλως τε καὶ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ ἀκριβῶς δειχθήσεται, τὴν δυοῖν χωρίοιν ἐπιφά-

νειαν μὴ ὐχὶ παρεμφαίνεσθαι ὑπὸ τοῦ γινομένου ἐκ τῶν κατ' αὐτὰ μηκῶν τε καὶ πλατῶν (153).

Οὕτως οὖν ἡ τοῦ Α χωρίου ἐπιφάνεια δηλωθήσεται τῷ εἰκοσάκις 16, εἴτ' οὖν περιέξει ὀργιὰς τετραγωνικὰς 320· ἡ δὲ τοῦ Β σημανθήσεται τῷ τετράκις 2, ὅ ἐστι περιέξει ἀργιὰς τετραγωνείους 8· ἀλλὰ ἀ. 320 περιέχει τεσσαρακοντάκις τὸν 8, ἄρα τὸ Α τεσσαρακονταπλάσιόν ἐστι τοῦ Β. β'. εὕρομεν τὸν σύνθετον λόγον, ἢ τὸ προκύπτον, εἴτ' οὖν τὸ σεσημειωμένον πηλίκον, παρηγμένον ὑπὸ τῶν ἁπλῶν λόγων τοῦ μὲν τῶν μηκῶν, τοῦ δὲ τῶν πλατῶν, ὅτι ἦν $\frac{320}{8}$. νῦν δὲ πάλιν εὑρίσκομεν τὸ ἐπικρατοῦν πηλίκον μεταξὺ τῶν δύω παραγομένων, ἃ ἐμφαίνουσι τὰ δύω χωρία Α, Β, ὑπάρχον $\frac{320}{8}$· τὸ μὲν γὰρ πρῶτον γινόμενον ἔστι 320, τὸ δὲ δεύτερον 8· ὁ λόγος ἄρα ὁ μεταξὺ τῶν δε τῶν δύω γινομένων ἔστι σύνθετος ἐκ τοῦ ἁπλοῦ λόγου τῶν μηκῶν, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ἁπλοῦν λόγον τῶν πλατῶν· ὅπερ ἔδει ἀναπτύξαντας δεῖξαι ἐπὶ δύω παραγομένων ἑκατέρου ὑπὸ δυοῖν παραγόντων.

295. Δεικτέον δὲ τὸ προτεθὲν στοιχειῶδες θεώρημα γενικώτερόν τε καὶ ἀκριβέστερον.

Δύω ὁντινωνδήποτε παραγομένων οἱ δύω πρῶτοι παράγοντες, εἴτ' οὖν οἱ δύω πολλαπλασιαστέοι, δύνανται ἀεὶ καλεῖσθαι M, μ, οἱ δὲ δύω δεύτεροι, εἴτ οὖν οἱ πολλαπλασιασταὶ, N, ν· ὁ οὖν ἁπλοῦς λόγος ὁ ὑπὸ τῶν πολλαπλασιαστέων σχηματιζόμενος ἀεὶ παραστήσει ἂν διὰ $\frac{M}{\mu}$. ὁ δ' ὑπὸ τῶν πολλαπλασιαστῶν, διὰ $\frac{N}{\nu}$. καὶ τὸ μὲν πρῶτον γινόμενον ἔσται $M \times N = MN$, τὸ δὲ δεύτερον $\mu \times \nu = \mu\nu$· ὁ δὲ λόγος, ἢ τὸ σεσημειωμένον πηλί-

κον, τὸ μεταξὺ τῶν δε τῶν γινομένων, ἐκτεθήσεται ἀεὶ διὰ $\frac{MN}{\mu\nu}$. Τὸ ἄρα παραγόμενον ὑπὸ τῶν δύω προτέρων λόγων ἐσχηματισμένων τε μὲν ὑπὸ τῶν πολλαπλασιαστέων, θατέρε δὲ ὑπὸ τῶν πολλαπλασιαςῶν, εἴτ' ὖν ὑπὸ τῶν ἀντιςοιχούντων ποιητῶν, $\frac{M}{\mu} \times \frac{N}{\nu}$ ἔςιν ὁ αὐτὸς λόγος, ὃς ἐςι μεταξὺ τῶν δύω παραγομένων· Ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

296. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐπὶ μὲν τῶν προδεδειγμένων ὑπεθέμεθα δύω γινόμενα ἕκαςον ὑπὸ παραγόντων δύω. ῥᾷςα μέν τοι τὰ αὐτα καὶ κατανοηθήσεται καὶ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ παραγομένων ὑπὸ τριῶν, ἢ καὶ ὅσων ἂν τις βέληται παραγόντων.

Δυοῖν φέρε κιβωτίοιν, ὧν τὸ μὲν καλῶμεν Γ, τὸ δὲ Δ, τὸ μὲν πρῶτον περιέχει 8 πόδας μήκυς, καὶ 6 πλάτυς, καὶ 4 ὕψυς, τὸ δὲ δεύτερον, 4 μήκυς, καὶ 2 πλάτυς καὶ 1 ὕψυς· Τὸ ἄρα Γ ἔςι τῷ μήκει μὲν διπλάσιον, τῷ πλάτει δὲ τριπλάσιον, τῷ δὲ βάθει τετραπλάσιον τοῦ Δ.

Φημὶ δὴ ὅτι τὸ Γ κιβώτιον ἐκ ἔςιν ἐννεαπλάσιον τοῦ Δ, ὥσπερ ἐν ἀρχῇ φαίνεται συνάψει τῶν χέσεων, ἀλλὰ $2 \times 3 \times 4$, εἴτ' ὖν εἰκοσιτεσσαραπλάσιον, ὅ ἐςι περιέξει ὕλην εἰκοσιτεσσαραπλῆν, ἧς περιέχει τὸ Δ.

Ὁ μὲν γὰρ ἁπλοῦς λόγος τῶν μηκῶν ἔςιν $\frac{8}{4}$, ὁ δὲ τῶν πλατῶν $\frac{6}{2}$, ὁ δὴ τῶν βαθέων $\frac{4}{1}$· ὁ δ' ἐξ αὐτῶν σύνθετος ἔςι $\frac{8}{4} \times \frac{6}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{192}{8} = 24$· Τὸ ἄρα Γ κιβώτιον εἰκοσιτεσσαραπλάσιόν ἐςι τοῦ Δ.

297. Ἀνιχνεύσωμεν δὲ τὴν ἀναγκαίαν τυτοῖ δεῖξιν ὅτως· δειχθήσεται γὰρ ἐν τῇ Γεωμετρίᾳ, ὡς εἰς εὕρεσιν τῆς περιοχῆς, ἢ ςερεότητος τῶν δύω τυτωνὶ κιβωτίων

πολλαπλασιάζειν χρὴ τὸ μὲν μῆκος ἐπὶ τὸ πλάτος τὸ δ' ὑπὸ τούτων γινόμενον ἐπὶ τὸ ὕψος· τὸ ἄρα Γ κιβώτιον περιέξει $4 \times 6 \times 4 = 192$ πόδας κυβικοὺς (154)· τὸ δὲ Δ $4 \times 2 \times 1 = 8$· ἐκεῖν ἄ. 192 περιέχει τετράκις καὶ εἰκοσάκις τὸν 8· β'. ὁ λόγος, ἢ τὸ πηλίκον $\frac{192}{8}$, ὃς ἐστι μεταξὺ 192 καὶ 8 ἔστιν ὁ αὐτὸς σύνθετος λόγος, ὃς ἀποτελεῖται ὑπὸ τῶν τριῶν πηλίκων, ἢ λόγων ἁπλῶν τῶν συνεσηκότων ὑπὸ τῶν μηκῶν, πλατῶν, καὶ βαθέων· τὰ ἄρα γινόμενα, ἃ ἀναπτύσσει τὴν περιοχὴν, ἢ τὴν δεκτικότητα τῶν δύω κιβωτίων Γ καὶ Δ, εἰσὶν ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν μηκῶν, πλατῶν, καὶ βαθέων, ἢ τῶν τριῶν ἀντιστοιχούντων ποιητῶν· ἀληθεύει ἄρα τὸ θεώρημα καὶ ἐπὶ δύω ὑπὸ τριῶν ποιητῶν παραγομένων.

Δεῖξις γενικὴ ἐπὶ δύω παραγομένων ἐκ τριῶν ποιητῶν.

298. Ἔστω γὰρ δύω γινόμενα ΜΝΠ, μνϖ· πηλίκον ὂν ἢ λόγος μεταξὺ τούτων τῶν γινομένων ἔστι $\frac{\text{ΜΝΠ}}{\mu\nu\varpi}$. οἱ δὲ τρεῖς ἁπλοῖ λόγοι οἱ ὑπὸ τῶν τριῶν ἀντιστίχων ποιητῶν συνιστάμενοι, εἰσὶ $\frac{\text{M}}{\mu}$, $\frac{\text{N}}{\nu}$, $\frac{\Pi}{\varpi}$· ὁ δὲ σύνθετος λόγος, τὸ προκύπτον, ἢ τὸ καινὸν πηλίκον, τὸ ἐκ τούτων ἀποτελούμενον, ἔσται $\frac{\text{M}}{\mu} \times \frac{\text{N}}{\nu} \times \frac{\Pi}{\pi} = \frac{\text{ΜΝΠ}}{\mu\nu\pi}$, ὅπερ ἐστὶ ὁ αὐτὸς λόγος, ὃς ἐν ἀρχῇ εὕρηται μεταξὺ τῶν δύω γινομένων ΜΝΠ, μνπ· ἐκεῖν ὁ μεταξὺ τούτων τῶν γινομένων λόγος σύνκειται ἐκ τῶν κατὰ τὰς αὐτῶν ποιητὰς λόγων· ἀλλ' ἐφ ὡντινωνοῦν δύω γινομένων ὑπὸ τριῶν παραγόντων, δυνατὸν ἀεὶ τὴν μὲν τῶν πρώτων παραγόντων συζυγίαν

δηλῶσαι διὰ Μ, μ, τὴν δὲ διὰ Ν, ν, τὴν δὲ τρίτην διὰ Π, π· ἐν γένει ἄρα ὁ λόγος, ὁ μεταξὺ δύω ὠντινωνῦν γινομένων ὑπὸ τριῶν ποιητῶν, σύγκειται ἐκ τῶν λόγων τῶν κατ' αὐτὰ ποιητῶν, ἢ ὃ ταυτὸν, τὰ γινόμενα ταῦτα εἰσὶν ἐν λόγῳ συνθέτῳ ἐκ τῶν ἐν αὐτοῖς ποιητῶν.

299. Παρὰ γεμὴν ταῦτα πρόδηλον, ὅτι ἡ δεῖξις, ἡ ἐπὶ δύω γινομένων ὑπὸ δύω, ἢ τριῶν ποιητῶν, ἐφαρμοσθῆναι δύναται καὶ ἐπὶ τῶν γινομένων ὑφ' ὅσων ἄντις βέλῃται παραγόντων· ἐν γένει ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

300. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. Ἵνα τοίνυν ὁ μεταξὺ δύω γινομένων λόγος ὁρισθῇ, καὶ συναπτέον, ἀλλὰ πολλαπλασιαστέον τοὺς μεταξὺ τῶν ἐν αὐτοῖς ποιητῶν λόγους.

301. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ συνθέτου λόγου $\frac{MN}{\mu\nu}$, ὑποτεθῇ Μ=μ, καὶ Ν=ν, γεννήσεται ὁ λόγος $\frac{MN}{MN}=1$, ὅπερ δηλοῖ, ὡς τὰ δύω γινόμενα ΜΝ, μν, ἐξισοῦνται ἀλλήλοις· τὰ γινόμενα ἄρα, ὧν ἰσάλληλοι εἴτε πολλαπλαστέοι, καὶ οἱ πολλαπλασιαστεοὶ, ἀλλήλοις εἰσὶν ἴσα.

302. Τἐναντίον δὲ, ἐὰν δύω γινομένων ἰσαλλήλων ἡ ἑτέρα τῶν ῥιζῶν ἰσῶται τῇ ἐν θατέρῳ, ἀνάγκη εἶναι ἴσην καὶ τὴν ἑτέραν τῇ ἐν τῷ ἑτέρῳ· ἐκ γὰρ ΜΝ = μν πρόεισιν ἡ ἀναλογία Μ : μ : : ν : Ν (241)· ἀλλὰ Μ = μ, ἄρα καὶ ν = Ν.

303. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ συνθέτου λόγου $\frac{MN}{\mu\nu}$ ὑποτεθῇ Μ' μεῖζον, φέρ' εἰπεῖν, τοῦ μ· τὸ δὲ Ν ἀναλόγως ἔλασσον τοῦ ν, ὡς εἶναι Μ : μ : : ν : Ν, τὰ παραγόμενα ἔ-

σονται ἴσα, εἴγε (241) MN = μν· ὅ ἐςι, τὰ γινόμενα ἔσονται ἰσάλληλα, ὅταν οἱ πολλαπλασιαςέοι ὦσιν ἐν λόγῳ ἀντιπεπονθότι τῶν πολλαπλασιαςῶν.

304. Ἐπίσης δυνάμεθα συναγαγεῖν, ὅταν δύω γινόμενα ὑπ' ἀνίσων παραγόντων ὦσιν ἰσάλληλα, ὅτι οἱ πολλαπλασιαςέοι εἰσὶν ἀντιπεπονθότως ὡς οἱ πολλαπλασιαςαί· ἐκ γὰρ MN = μν προέρχεται M : μ :: ν : N (241).

305. ΣΧΟΛΙΟΝ. Οὐδὲν ἧττον δυνάμεθα δύω τινῶν προκυπτόντων, ἰσομένων ἀλλήλοις, συναγαγεῖν ἐν γένει, ὅτι οἱ πολλαπλασιαςέοι εἰσὶ πρὸς ἀλλήλες ἀντιςρόφως ἢ ὡς οἱ πολλαπλασιαςαί· ἔςι γὰρ MN = μν· ὅθεν ἀεὶ ἕπεται ἡ ἀναλογία M : μ :: ν : N· ἀλλ' ἐπὶ γὰρ τῆς πρώτης περιπτώσεως, ἔνθα οἱ πολλαπλασιαςαὶ καὶ οἱ πολλαπλασιαςέοι εἰσὶν ἰσάλληλοι, εἴγε M = μ, καὶ N = ν, ἐξέςαι ἀδιαφόρως γράψαι ἢ M : μ :: ν : N ἢ M : μ :: N : ν, καὶ ἐκ τοῦ ἀκολούθου ἀναγνῶναι, ἤτοι ὡς οἱ πολλαπλασιαςέοι εἰσὶν ἐν λόγῳ ἀντιςρόφῳ, ἢ ἐν λόγῳ ὀρθῷ τῶν πολλαπλασιαςῶν.

306. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ'. Ἐὰν ἐν τῷ συνθέτῳ λόγῳ $\frac{MN}{\mu\nu}$ ὑποτεθῇ M = μ, γενήσεται $\frac{MN}{M\nu}$· ὅθεν προκύψει ἡ ἀναλογία MN : Mν :: N : ν (240), ὅπερ ἐμφαίνει, ὡς δύω γινόμενα, οἷς κοινὸς ὁ πολλαπλασιαςέος M, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς οἱ πολλαπλασιαςαὶ, M, ν· ὡσαύτως ἐὰν ὑποτεθῇ N = ν, ὁ μὲν λόγος γενήσεται $\frac{MN}{\mu N}$, ἡ δὲ ἀναλογία MN : μN :: M : μ (240), εἴτ' ἓν, δύω παραγόμενα MN, μN κοινὸν ἔχοντα τὸν πολλαπλασιαςὴν N, πρὸς ἄλληλά εἰσιν, ὡς οἱ αὐτῶν πολλαπλασιαςέοι.

307. Ἔξεσαι ἄρα ἐν γένει εἰπεῖν ἀ. ὡς ἡνίκα δύω γινόμενα ἕνα κοινὸν ἔχωσι ποιητὴν, εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ δύω ἰδιάζοντες ποιηταί· β΄. ὅτε δύω γινόμενα κοινὸν ἕνα ἔχουσι ποιητὴν, καὶ εἰσὶ δύω ὅροι ἀναλογίας τινὸς, δυνατὸν, μὴ αἱρομένης τῆς ἀναλογίας, διελόντας αὐτοὺς διὰ τοῦ κοινοῦ ποιητοῦ, κατὰ χώραν ἐᾶσαι τοὺς ἑτέρους ποιητὰς (233)· ἐπὶ γὰρ MN : Mν : : N : ν διαιρουμένων τῶν δύω προτέρων ὅρων διὰ M, ἔσται N : ν : : N : ν (240).

308. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ συνθέτου λόγου $\frac{MN}{\mu\nu}$ ὑποτεθῇ M = N, καὶ μ = ν, ὁ σύνθετος λόγος ἀποκατασταθήσεται $\frac{MM}{\mu\mu}$· τοιγαροῦν ἀ. ὁ λόγος $\frac{MM}{\mu\mu}$ προδήλως σύγκειται ἐκ τῶν δύω ἁπλῶν, καὶ ἰσαλλήλων λόγων $\frac{M}{\mu}$, $\frac{M}{\mu}$, εἴγε $\frac{M}{\mu} \times \frac{M}{\mu} = \frac{MM}{\mu\mu}$. β΄. ἐπεὶ πᾶν τετράγωνον παρασταθῆναι δύναται διὰ MM, καὶ πᾶν ἕτερον τετράγωνον διὰ μμ· ὁ λόγος ἄρα ὁ μεταξὺ δύω ὧν τινωνοῦν τετραγώνων δύναται παρασταθῆναι διὰ τοῦ σεσημειωμένου πηλίκου $\frac{MM}{\mu\mu}$· ὁ ἄρα λόγος, ὁ μεταξὺ δύω ὧν τινωνδήποτε τετραγώνων, ἔστι σύνθετος ἐκ τῶν δύω ἴσων λόγων τῶν συνισταμένων ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰ ῥιζῶν, καὶ δὴ ἔστι διπλασίων λόγος τῶν κατ' αὐτὰ ῥιζῶν (290)· ἐντεῦθεν ἓν ῥηθήσεται ὅτι τετράγωνα δύω εἰσὶν ἐν λόγῳ διπλασίονι τῶν κατ' αὐτὰ ῥιζῶν.

309. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ διπλασίονος λόγου $\frac{MM}{\mu\mu}$ ὑποτεθῇ

$M = 4\mu$, ὁ λόγος γεννήσεται $\frac{16\mu\mu}{\mu\mu}$, ὅθεν προκύψει ἡ ἀναλογία: τὸ μεῖζον τετράγωνον 16μμ πρὸς τὸ ἔλαττον μμ λόγον ἔχει, ὃν ὁ 16 πηλίκου τοῦ ἀπὸ M τετραγώνου, διαιρεθέντος διὰ τοῦ ἀπὸ μ, πρὸς 1, εἴτ' ὂν 16μμ : μμ :: 16 : 1 (240)· καὶ ἐπειδὴ 16μμ ἔστιν ἴσον τῷ MM, ἄρα MM : μμ :: 16 : 1· καὶ ἐν γένει „δυοῖν τετραγώνων ἀπὸ ῥιζῶν ἀνίσων γινομένων τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον λόγον ἕξει, ὃν ἔχει τὸ πηλίκον τὸ διαιρέσει τῆς μείζονος ῥίζης διὰ τῆς ἐλάσσονος προϊόν, τετραγωνισθέν, πρὸς τὴν μονάδα."

310. Ἐὰν ἄρα ποσότης τις διπλασία ἢ τινὸς ἑτέρας, ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τοῦ πηλίκου, ὅ ἐστι 2, τετράγωνον ἔστιν = 4, τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος ποσότητος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος λόγον ἕξει, ὃν 4 πρὸς 1, τουτέστι τετραπλάσιον ἔσται τοῦδε τοῦ τετραγώνου.

311. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Ἐὰν ἐπὶ τοῦ συνθέτου λόγου $\frac{MN\Pi}{\mu\nu\pi}$ ὑποτεθῇ $M = N = \Pi$, καὶ $\mu = \nu = \pi$, γεννήσεται $\frac{MMM}{\mu\mu\mu}$ συγκείμενος ἐπιδήλως ἐκ τῶν τριῶν λόγων $\frac{M}{\mu}, \frac{M}{\mu}, \frac{M}{\mu}$, εἴγε $\frac{M}{\mu} \times \frac{M}{\mu} \times \frac{M}{\mu} = \frac{MMM}{\mu\mu\mu}$· καὶ δὴ ἔτος ἔσται λόγος τριπλασίων.

Ἐπεὶ δὲ δύω οἱτινεσοῦν κύβοι ἀεὶ παρασαθῆναι δύνανται, ὁ μὲν διὰ MMM, ἄτερος δὲ διὰ μμμ, ὁ λόγος, ἢ τὸ πηλίκον, τὸ μεταξὺ δύω τινῶν κύβων ἐπικρατοῦν, παρασαθείη ἂν διὰ $\frac{MMM}{\mu\mu\mu}$· ἄρα „ὁ μεταξὺ δύω ὁωτινωνοῦν

„κύβων λόγος σύγκειται ἐκ τῶν τριῶν ἰσαλλήλων λόγων „τῶν συνισταμένων ὑπὸ τῶν κατ' αὐτὰς ῥιζῶν, ἤτοι ἔστι τρι„πλασίων τῶν κατ' αὐτὰς ῥιζῶν· ἢ, ὅπερ ταυτὸν, δύω „κύβοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἐν λόγῳ τριπλασίονι τῶν κατ' αὐτὰς ῥιζῶν."

312. Ἐὰν ἐν τῷ τριπλασίονι λόγῳ $\frac{\text{MMM}}{\mu\mu\mu}$ ὑποτεθῇ $\text{M} = 5\mu$, γενήσεται ὁ λόγος $\frac{125\mu\mu\mu}{\mu\mu\mu}$· ὅθεν ἡ ἀναλογία $125\mu\mu\mu : \mu\mu\mu :: 125 : 1$· ἀκοῦν „δύω κύβων „ἐξ ἀνίσων ῥιζῶν γινομένων MMM, μμμ ὁ μείζων πρὸς „τὸν ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ὃν ὁ κύβος ὁ ἀπὸ τοῦ πηλί„κου τοῦ διαιρέσει τῆς μείζονος ῥίζης διὰ τῆς ἐλάσσονος „προερχομένου πρὸς τὴν 1."

## ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Α'. ΤΟΜΟΥ.

# ΠΙΝΑΞ ΚΕΦΑΛΑΙΩΔΗΣ.

## Τῶν ἐν τῷ Α΄ Τόμῳ περιεχομένων.

Σελ.

## ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΤΜΗΜΑ Γ'.



## ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΜΗΜΑ Α'.

## ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΜΗΜΑ Β΄,

# ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΤΩΝ ΗΜΑΡΤΗΜΕΝΩΝ.

ΣΕΛΙΔΙ 6, ςίχφ 21, Διακεδαννῦναι, Γράφε, Διασκεδαννῦναι. — Σελ. 21, ς. 4, Κέωνταν, Γρ. Κέωνται. — Σελ. 29, ς. 16, Ἐπὶ τῇ κάτω, Γρ. Ἐπὶ τὰ κάτω. — Σελ. 35, ς. 2, Ὡς γε, Γρ. Πρός γε. — Σελ. 36, ς. 3, Ἢ ἑκατέρω, ἢ ἀμφοῖν μηδενικά, Γρ. Ἢ ἑκατέρῳ, μηδενικά. — Σελ. 48, ς. 16, $\frac{9}{τσ}$, Γρ. $\frac{9}{τξ}$. — Σελ. 53, ς. 24, Ἢ δύω πολλαπλασιασθείσας, Γρ. Πολλαπλασιασθείσας. — Σελ. 54, ς. 7, (120), Γρ. (130). — Σελ. 55, ς. 12, Οὖν, Γρ. Οὗ. — Σελ. 56, ς. 17, Ἐν χήματι, Γρ. Ἐν χήματι κλάσματος. — Σελ. 60, Λέγα, Γρ. Λεύγη, ἔτω καὶ τοῖς ἑφεξῆς· τὸ γὰρ τῶν Γαλατῶν lieue λεύγη τοῖς πάλαι ἐκαλεῖτο, ὡς ἔςιν ἰδεῖν παρ' Ἡσυχίῳ. — Σελ. 64, ς. 9, Δραχμὰς· 400, Γρ. Δραχμὰς 400. — Σελ. 70, ς. 12, Ὁ ἀριθμητής... (168), Γρ. Ὁ ἀριθμητής, ἀναχθεὶς ἐπ' εἶδος ἔλαττον (168) διηρήσθω διὰ τοῦ παρονομαςοῦ. — Σελ. 78, ς. 15, (87), Γρ. (88). — Σελ. 79, ς. 11, $\frac{69}{σσ}$, Γρ. $\frac{89}{σσ}$. — ς. 12, $\frac{9}{σσ}$, Γρ. $\frac{29}{σσ}$. — Σελ. 98, ς. 3, 700 λεπτ., Γρ. 7 σολ. — Σελ. 102, ς. 24, $\frac{28}{29}$, Γρ. $\frac{28}{38}$. — Σελ. 116, ς. 19, Ἀναφύενται, Γρ. Ἀναφύονται. — Σελ. 118, ς. 5, 3, 1, 4, 5, Γρ. 3, 145. — Σελ. 120, ς. 17, Ἐπαύξεσι, Γρ. Τὰ ο ἐπαύξεσι. — Σελ. 132, ς. 19, Διὰ τοῦ τρίτου, Γρ. Διὰ τοῦ πρώτου. — Σελ. 133, ς. 5, 35 $\frac{1}{4}$, Γρ. 25 $\frac{1}{4}$. — Σελ. 136, ς. 1, 1250, Γρ. 1230. — Σελ. 142, ς. 6, Πάντων, Γρ. Πασῶν. — Σελ. 145, ς. 9, $4\frac{1}{4}$, Γρ. $4\frac{1}{2}$. — Σελ. 146, ς. 23, Προκτήσαθαι, Γρ. Προσκτήσαθαι. — Σελ. 153, ς. 3, αἱ, Γρ. Ἡ. — Σελ. 155, ς. 16, 32, Γρ. 22. — Σελ. 158, ς. 22, 120, Γρ. 12. — ς. 23, 14 ἀνὰ 7, Γρ. 7 ἀνὰ 14. — ς. 24, 16 ἀνὰ 3, Γρ. 3 ἀνὰ 16. — Σελ. 165, ς. 30, Ἴσως, Γρ. Ἴσως. — Σελ. 170, ς. 3, Ἔποι, Γρ. Εἴποι. — Σελ. 172, ς. 6, ἀποσβύναι, Γρ. ἀποσβῆναι. — ς. 13, 14 συναφθὲν τῷ $2α^2β$, Γρ. Συναφθὲν τῷ $4α^2β$. — Σελ. 173, ς. 10,

Ἀπολελοιφθωσαν, Γρ. Ἀπολοιφθωσαν. — ς. 12, Ἡλατ. Γρ. Ἡλατ. — Σελ. 181, ς. 17, ..$\beta^4$, Γρ. ..$\beta^4 + \beta^3$. — Σελ. 189, ς. 25, $\frac{\alpha\alpha\beta}{\gamma}$, Γρ. $\frac{\alpha\alpha\beta^2}{\gamma}$. — Σελ. 196, ς. 14, (59), Γρ. (57). — ς. 18, (60), Γρ. (58). — Σελ. 202, ς. 11, $\alpha\alpha - \beta$, Γρ. $\alpha\alpha - \beta\beta$. — Σελ. 214, ς. 24, $3\beta\gamma^2$, Γρ. $3\beta^2\gamma$. — Σελ. 215, ς. 22, $+ - \beta^2$, Γρ. $- \beta^2$. — Σελ. 223, ς. 26, $\frac{1}{\beta}$, Γρ. $\alpha\frac{1}{\beta}$. — Σελ. 239, ς. 18, Ἀναφέντος, Γρ. Συναφέντος. — Σελ. 243, ς. 6, (142), Γρ. (55). — Σελ. 244, ς. 11, $\frac{\alpha}{\beta}$, Γρ. $\frac{\beta}{\alpha}$, ὁμοίως καὶ τὰ λοιπὰ $\frac{\alpha}{\beta}$ τὰ ἐν τῇ αὐτῇ σελ. — Σελ. 246, ς. 6, (133), Γρ. (113). — ς. 11, (149), Γρ. (148). — Σελ. 250, ς. 12, (11), Γρ. (40). — Σελ. 252, ς. 17, Ῥίζαν, Γρ. Ῥίζαν. — Σελ. 254, ς. 4, $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$, Γρ. $\frac{\beta^\alpha}{\delta^\beta}$. — ς. 19, $\frac{\beta^{\frac{1}{\alpha}}\ \mu^{\frac{1}{\alpha}}}{\mu}$, Γρ. $\frac{\beta^{\frac{1}{\alpha}}\ \mu^{\frac{2}{\alpha}}}{\mu}$. — Σελ. 278, ς. 15, $- \delta +$, Γρ. $- \delta + \alpha$.