## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

## Περὶ ἀναλογίας γεωμετρικῆς.

235. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄.** Πᾶσα γεωμετρικὴ ἀναλογία ἐκτεθῆναι δύναται διὰ τοῦ τύπου α : ακ :: δ : δκ.

**ΔΕΙΞΙΣ.** Τῶν ἅπασαν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν παρισώντων δύο λόγων ὁ μὲν πρῶτος ἀεὶ ἐκτεθῆναι ἔχει διὰ α : ακ, ὁ δὲ, ὡς τῷ πρώτῳ ἴσος (ἄλλως γὰρ οὐκ ἂν ουσαίη ἀναλογία (185)) διὰ δ : δκ (229)· ὅλος ἄρα ὁ τύπος ἔσται α : ακ :: δ : δκ. Ο. Ε. Δ.

236. **ΠΟΡΙΣΜΑ.** Ἵνα παραβληθῶσιν ἀλλήλαις δύο διαφέρουσαι ἀναλογίαι, ἐκτεθήσεται ἡ μὲν πρώτη διὰ α : ακ :: δ : δκ· κληθέντος δ' εἶτα π φέρε τοῦ ἴσου πηλίκου, τοῦ ἐπικρατοῦντος ἐν τῇ δευτέρᾳ ἀναλογίᾳ, ε τοῦ ἡγουμένου ὅρου τοῦ πρώτου λόγου τῆς δευτέρας τῆς δε ἀναλογίας, καὶ η τοῦ κατὰ τὸν δεύτερον ταύτης λόγον ἡγουμένου, προκύψει ὁ καινὸς τύπος ε : επ :: η : ηπ, ἐμφαίνων τὴν δευτέραν ἀναλογίαν (227, 229)

Τῶν δύο ἀναλογιῶν 2 : 6 :: 4 : 12 καὶ 1 : 5 :: 4 : 20, ἡ μὲν πρώτη δύναται ἐκτεθῆναι διὰ α : ακ :: δ : δκ, ἡ δὲ δευτέρα διὰ ε : επ :: η : ηπ.

237. **ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄.** Πᾶσα γεωμετρικὴ συνεχὴς ἀναλογία αὔξουσάτε καὶ μειουμένη (193) δύναται παρασταθῆναι διὰ τοῦ τύπου α : ακ : $ακ^2$.

**ΔΕΙΞΙΣ.** Πᾶσα γὰρ γεωμετρικὴ συνεχὴς ἀναλογία περιέχει ὅρους τρεῖς, ὧν ὁ δεύτερος διαιρεθεὶς διὰ τοῦ πρώτου τὸ αὐτὸ πηλίκον δίδωσιν, ὃ καὶ ὁ τρίτος διαιρεθεὶς διὰ τοῦ δευτέρου (187, 191)· κληθέντος ἄρα α μὲν τοῦ

πρώτου ὅρου, κ δὲ τοῦ πηλίκου, ὁ δεύτερος ὡς διαιρετέος ἰσωθήσεται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ πρώτου α ὡς διαιρέτου, καὶ τοῦ κ πηλίκου, εἴτ' οὖν τῷ ακ· ὁ δὲ τρίτος ὡς διαιρετέος ἰσωθήσεται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ δευτέρου ὡς διαιρέτου καὶ τοῦ κ πηλίκου, εἴτ' οὖν τῷ $\alpha\kappa^2$. Ο.Ε.Δ.

Ἐπὶ τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας ∺ 2 : 8 : 32 ἐκτεθέντος τοῦ 2 διὰ α, τοῦδ' ἐπικρατοῦντος πηλίκου 4 διὰ κ, ὁ μὲν 8 ἐκτεθήσεται διὰ 2 × 4, ἢ α × κ, ἢ ακ, ὁ δὲ 32 διὰ 8 × 4, ἢ ακ × κ, $\alpha\kappa^2$

238. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ'. Ἐφ' ἁπάσης γεωμετρικῆς ἀναλογίας τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν μέσων.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα γὰρ γεωμετρικὴ ἀναλογία παρασταθῆναι δύναται διὰ τοῦ τύπου α : ακ : : δ : δκ (235)· ἔνθα τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων α καὶ δκ γινόμενον αδκ, προφανῶς ἴσται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων ακ καὶ δ γινομένῳ ακδ Ο.Ε.Δ.

Ἐπὶ τῆς ἐν ἀριθμοῖς γεωμετρικῆς ἀναλογίας 2 : 8 : : 5 : 20 τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων 2 καὶ 20 γινόμενον ἐστὶν 2×20 = 40, τόδ' ὑπὸ τῶν μέσων 8 × 5 = 40

239. ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'. Τἀναντίον δὲ τέσσαρες ὅροι ἀναλογίαν συνιστῶσιν, ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἰσῶται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Φημὶ δὴ ὡς, ἐὰν ἐπὶ α, β, γ, δ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον αδ ἰσῶται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων βγ, οἱ τέσσαρες ὅροι ἀναλογίαν συνιστῶσιν, ἔσται δηλονότι α : β : : γ : δ (187).

ά. Πολλαπλασιάζω α καὶ β διὰ γ· ὅθεν αγ : βγ : : α : β (232).

β'. Πολλαπλασιάζω γ καὶ δ διὰ α· ὅθεν αγ : αδ : : γ : δ (232).

γ΄. Ἐπείπερ, ἐξ ὑποθέσεως, αδ = βγ, δύναμαι ἐπὶ τῆς δευτέρας τῶν προεκτεθεισῶν ἀναλογιῶν ἀντὶ αδ ἀντικαταστῆσαι βγ· ἡ δ' ἀναλογία γενήσεται αγ : βγ :: γ : δ.

δ΄. Ἐν ταύτῃ τῇ ἀναλογίᾳ διαιρῶ αγ καὶ βγ διὰ γ (233), ἀποκατασταθήσεται ἡν ἡ ἀναλογία α : β :: γ : δ Ο. Ε. Δ.

240. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Εἰς ἄρα πληροφορίαν, ὅτι τέσσαρά τινα ποσὰ ἀνάλογά εἰσι, ἀποχρήσει ἰδεῖν, εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἐξισῶται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ.

241. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐκδοσιν ἰσαλλήλων παραγομένων ἀεὶ ἀναλογίαν συστῆσαι δυνάμεθα, θατέρου μὲν τὸς δύω ποιητὰς ἄκρους ποιούμενοι, θατέρου δὲ, μέσους· ὅτως, εἴπερ εἴη αδ = βγ, ἕξομεν τὴν ἀναλογίαν α : β :: γ : δ. Ἐὰν δ' ἐν ἀριθμοῖς ἦ 2 × 10 = 4 × 5, ἐκ τούτων ἀπολαβεῖν ἕξομεν 2 : 4 :: 5 : 10· ἐντεῦθεν γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων 2 × 10 πορισθήσεται ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων 4 × 5.

242. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ΄. Τέσσαρες ὅροι ἀναλογίαν συνιστάντες, ὁκταχῶς μετατεθέντες, δύνανται καὶ ὕτω τὴν ἀναλογίαν μὴ λυμήνασθαι· ἁπάσης γὰρ ἀναλογίας διὰ α : απ :: δ : δπ παρισαμένης, ἐξέσται διαθεῖναι τὸς ὅρους ά. ὡς ἔχουσιν α : απ :: δ : δπ

β΄. μεταλλαγῇ τῶν μέσων θατέρου ἀντὶ θατέρου α : δ : απ : δπ, ἥτις ἐναλλὰξ ἀναλογία καλεῖται

γ΄. μεταλλαγῇ τῶν ἡγουμένων, απ : α :: δπ : δ

δ΄. τῶν ἑπομένων συνιστάντων τὸν πρῶτον λόγον, τῶν δὲ ἡγουμένων τὸν δεύτερον απ : δπ :: α : δ

ε΄. τιθεμένου πρώτου τοῦ δπ. δπ : δ : : απ : α
ς΄. τοῦ αὐτοῦ τιθεμένου πρώτου: δπ : απ : : δ : α
ζ΄. τιθεμένου τοῦ δ πρώτου δ : δπ : : α : απ
η΄. τιθεμένου τοῦ αὐτοῦ δ : α : : δπ : απ

Ἐπὶ πασῶν γὰρ τῶν δε τῶν διαθέσεων ἴσται τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ (240).

Ἐπὶ τῆς ἀναλογίας 2 : 4 : : 3 : 6 μετατιθέντες ἔκασον ἀλληλοδιαδόχως τῶν τεσσάρων τῆς ἀναλογίας ὅρων 2, 4, 3, 6, ἕξομεν α΄. 2 : 4 : : 3 : 6, β΄. 2 : 3 : : 4 : 6, γ΄. 4 : 2 : : 6 : 3, δ΄. 4 : 6 : : 2 : 3, ε΄. 3 : 6 : : 2 : 4, ς΄. 3 : 2 : : 6 : 4, ζ΄. 6 : 3 : : 4 : 2, η΄. 6 : 4 : : 3 : 2· ἐφ' ἑκάστης γὰρ διαφορᾶς διαθέσεως ἐξισοῦται τὸ ὑπὸ τῶν μέσων τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένῳ.

243. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ΄. Δυνησόμεθα ἔτι ἐπὶ τῆς ἀναλογίας α : απ : : δ : δπ ποιῆσαι τὰς ἐφεξῆς μεταβολάς, μηδὲν ὑφισαμένων τῶν ὅρων, ὥστε τοῦ ἀνάλογον εἶναι ἐξίσασθαι.

244. α΄. Δυνάμεθα γὰρ τοὺς ἑπομένους τοῖς ἡγουμένοις συνάψαι, ἢ καὶ τἀνάπαλιν· α + απ : απ : : δ + δπ : δπ

ἢ α : απ + α : : δ : δπ + δ

ἢ απ + α : α : : δπ + δ : δ κτ,

αὕτη δὲ ἡ μεταλλαγὴ Σύνθεσις λόγου ὀνομάζεται· ἐπεὶ δὲ ἐπὶ πασῶν τῶν διαφόρων τῶν δε διαθέσεων τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων παραγομένῳ, ἄρα τῆς ἀναλογίας οἱ ὅροι οὐκ ἐκπίπτουσι.

245. β΄. Δυνάμεθα τἀνάπαλιν ἀφελεῖν τοὺς ἑπομένους τῶν ἡγουμένων, ἢ καὶ ἀντιστρόφως.

α — απ : απ : : δ — δπ : δπ
α : απ — α : : δ : δπ — δ
απ — α : α : : δπ — δ : δ

καλεῖται δὲ τοῦτο λόγου Διαίρεσις· τὸ δ' ὑπὸ τῶν ἄκρων κἀνταῦθα τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ ἴσον εὑρίσκεται.

246. γ'. Διὰ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ κ πολλαπλασιάσαι δυνάμεθα, ἤτοι μόνους τοὺς ἡγουμένους, ἢ τούς τε ἡγουμένους καὶ ἑπομένους δύω λόγων, ἢ μόνους τοὺς ἑνὸς λόγου ὅρους ὅτω;

$$\begin{array}{lcl} & \alpha\kappa : \alpha\pi & :: \delta\kappa : \delta\pi \\ \text{ἢ} & \alpha : \alpha\pi\kappa & :: \delta : \delta\pi\kappa \\ \text{ἢ} & \alpha\kappa : \alpha\pi\kappa & :: \delta\kappa : \delta\pi\kappa \\ \text{ἢ} & \alpha\kappa : \alpha\pi\kappa & :: \delta : \delta\pi \\ \text{ἢ} & \alpha : \alpha\pi & :: \delta\kappa : \delta\pi\kappa \end{array}$$

ἀεὶ γὰρ ἐξισωθήσεται τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων τῷ ὑπὸ τῶν μέσων προκύπτοντι.

247. δ'. Καὶ διαιρεῖν δὲ δυνησόμεθα ὡσαύτως ἑκάστην τῶν προεκτεθεισῶν τάξεων (233).

248. ΘΕΩΡΗΜΑ Ε'. Ἐν ἁπάσῃ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου τετραγώνῳ.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα γὰρ συνεχὴς ἀναλογία παρίσταται δύναται διὰ τοῦ τύπου $\dot{\dot{\div}}\ \alpha : \alpha\pi : \alpha\pi^2$ (237)· ἀλλ' ἐπὶ τοῦδε τοῦ τύπου τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων προκύπτον $\alpha^2\pi^2$ (39, 40) ἴσον ἐστὶ τῷ τετραγώνῳ $\alpha\pi \times \alpha\pi$, ἢ $\alpha^2\pi^2$ (78) τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου ἀναλόγου $\alpha\pi$· Ο. Ε. Δ.

Ἐπὶ τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας $\dot{\dot{\div}}\ 2 : 6 : 18$ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον $2 \times 18$ ἴσον ἐστὶ τῷ $6 \times 6$, ἢ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου ἀναλόγου τετραγώνῳ.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Τὰ θεωρήματα Γ'. Δ'. Ε'. καὶ τὰ ἐντεῦθεν προπιδύοντα πορίσματα μεγίστην ἔχουσι χρῆσιν· εἰσὶ γὰρ τὰ στοιχεῖα τῶν πλειόνων γεωμετρικῶν δείξεων, καὶ μὴν καὶ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων, τότε μάλιστα ξυν-

τελοῦντα τῷ κοινωνικῷ βίῳ· τοῦτε γὰρ Γεωμέτρου καὶ τοῦ Ἀριθμητικοῦ ἡ πᾶσα τέχνη ἐν τούτῳ μάλιστα κεῖται, ἐπίστασθαι ἀμέλει χρῆσθαι ταῖς διαφόροις ταῖς δε ἰδιότησιν πρὸς ἀπάρτισιν τῶν δείξεων, ἢ γοῦν πρὸς τὸ ἀπευθύνεσθαι εἰς τὰς τοῦ λογισμοῦ ἐργασίας· σαφέστερον δὲ τὸ πρᾶγμα καταστήσεται διὰ τῶν δε.

249. Αὐτίκα γὰρ θῶμεν, ὅτι ποσότητες τέσσαρες, ἀριθμοὶ, φέρ' εἰπεῖν, ἢ γραμμαὶ, ἃ ἀεὶ καλεῖν δυνάμεθα α, β, γ, δ, ἀνάλογόν εἰσι, συνιστῶντα τὴν ἀναλογίαν α : β : : γ : δ. Μ.

250. ά. Συναγαγεῖν δυνάμεθα, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων (238).

$$\beta'.\ \text{Ὅτι}\ \alpha = \frac{\beta\gamma}{\delta},\ \text{καὶ}\ \delta = \frac{\beta\gamma}{\alpha}\ \text{καὶ}\ \beta = \frac{\alpha\delta}{\gamma}\quad \gamma = \frac{\alpha\delta}{\beta}$$

(Ἀριθ. 108).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἐπὶ τῆς Μ ἀναλογίας, ἔστω $\alpha = 2$, καὶ $\beta = 6$, καὶ $\gamma = 3$, καὶ $\delta = 9$· οὐκοῦν ἡ Μ ἀναλογία γενήσεται 2 : 6 : : 3 : 9· ἐντεῦθεν συνάγεται

ά. ὅτι $2 \times 9 = 6 \times 3$· β'. ὅτι $2 = \frac{6 \times 3}{9}$· γ'. $9 = \frac{6 \times 3}{2}$· δ'. $6 = \frac{2 \times 9}{3}$· έ. $3 = \frac{2 \times 9}{6}$.

251. Ἐκ τῶν τεσσάρων ἄρα α, β, γ, δ ἀναλόγων ὅρων, ἐὰν οἱ τρεῖς ἐγνωσμένοι ὦσι, ῥᾷστα καὶ ἡ τοῦ τετάρτου δύναμις γνωσθήσεται.

252. γ'. Ἐπὶ ταύτῃ δὲ τῇ ἀρχῇ καὶ ἡ τῶν τριῶν γεωμετρικὴ μέθοδος ἐρείδεται, ἡ τοσαύτην ἔχουσα ἐν τῷ κοινωνικῷ βίῳ τὴν χρῆσιν. Τεσσάρων γὰρ ἀριθμῶν, οὓς ἤδη ἐμφαίνω διὰ τῶν γραμμάτων α, β, γ, δ, ἀ-

νάλογον ὄντων πρὸς ἀλλήλους $\alpha : \beta :: \gamma : \delta$, τὰς τρεῖς μὲν γινώσκω, ἀγνοῶ δὲ τὸν τέταρτον· εἰ μὲν οὖν ὅτος εἴη ὁ δ, πολλαπλασιάζω ἐπὶ γ τὸ β, τὸ δὲ γινόμενον διαιρῶ διὰ α· ὑκῶν τὸ πηλίκον ἔσται ὁ ζητούμενος τέταρτος· εἰ δ' ὁ α, πολλαπλασιάζω β ἐπὶ γ, διαιρῶν διὰ δ τὸ γινόμενον· εἰ δ' ὁ β, τὸ ὑπὸ α ϗ δ προκύπτον διαιρῶ διὰ γ· εἰ δὲ τέλος ἀγνοοῖτο ὁ γ, διαιρῶ διὰ β τὸ ὑπὸ α ϗ δ παραγόμενον.

253. δ'. Γινώσκεται, ὅτι ϗ τρεῖς ποσότητες α, β, γ συγκροτοῦσι τὴν συνεχῆ ἀναλογίαν ∺ $\alpha : \beta : \gamma$ (P)· ἁ. ἐντεῦθεν συνάγεται ὅτι (248) $\alpha\gamma = \beta^2$, ὅθεν

$$\alpha = \frac{\beta^2}{\gamma}, \text{ ϗ } \gamma = \frac{\beta^2}{\alpha}, \text{ ϗ } \beta = \sqrt{\alpha\gamma}.$$

254. Ἐὰν ἄρα ἐπὶ τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας P γινώσκηται τὰ α ϗ β, βουλώμεθα δὲ εὑρεῖν τὸ γ, τετραγωνιστέον μὲν τὸ β, τὸ δὲ $\beta^2$ τετράγωνον διαιρετέον διὰ α· τὸ δὲ πηλίκον δώσει τὸ γ· ἐὰν δὲ γινώσκωμεν τὸ β ϗ γ, τὸ $\beta^2$ τετράγωνον διελόντες διὰ γ, ἕξομεν τὸ α· ἐὰν τέλος γινώσκωμεν α ϗ γ, τοῦ ὑπ' αὐτῶν γινομένου αγ ἐξαγαγόντες τὴν ῥίζαν τὴν τετραγώνειον ἀπολήψόμεθα τὸ β.

Ἐν ἀριθμοῖς. Ἐὰν ἦ ∺ $2 : 6 : \chi$· τοῦ ἀπὸ 6 τετραγώνου 36 διὰ 2 διαιρεθέντος, προκύψει $18 = \chi$· ἐὰν δ' ἦ ∺ $\chi : 6 : 18$, τὸν αὐτὸν 36 τετράγωνον διὰ 18 διελόντες ἕξομεν $2 = \chi$· τέλος δὲ ἐὰν ἦ ∺ $2 : \chi : 18$, τοῦ ὑπὸ 2 ϗ 18 γινομένου 36 ἐξαγαγόντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀπολήψόμεθα 6 μέσον ἀνάλογον.

ΣΧΟΛΙΟΝ. Ταυτὶ τὰ δισσὰ εἴδη τῆς τῶν τριῶν μεδόθου τὰ ἄρτι δεδειγμένα (252, 254) ἐκτελοῦνται

οὐχ ὅπως ἐν ἀριθμοῖς καὶ στοιχείοις, ἀλλὰ δὴ καὶ ἐν γραμμαῖς κτ.

255. ε΄. Ἐὰν τέτταρα ἐκτεθειμένα ποσὰ, τέσσαρες, φέρ᾽ εἰπεῖν, γραμμαὶ, συνιστῶσιν ἀναλογίαν α:β::γ:δ· ἐκ δὲ ταύτης τῆς τῶν ὅρων διαθέσεως μὴ ἕπηται εὐθέως ἡ ζητουμένη δεῖξις, λεπτέον μίαν τινὰ τῶν ἑτέρων ἑπτὰ δυνατῶν διαθέσεων, ἣ ἂν ἄγοι ἐπὶ τὸ σκοπούμενον (242) φέρ᾽ εἰπεῖν τὴν α:γ::β:δ.

256. ϛ΄. Ἐὰν μὴ ἐξῇ διὰ τῶν τεσσάρων τῆς ἀναλογίας ὅρων α:β::γ:δ συμπληρῶσαι τὴν προκειμένην δεῖξιν, ποιοῦμεν ἐπὶ τῶν δε τῶν τεσσάρων ὅρων ἐκ τῶν διαφόρων ἐναλλαγῶν, μηδόλως τῆς ἀναλογίας ἐξισαμένων (244 κτ.) τῶν ὅρων, τὴν δυνατῶς ἔχουσαν ἀγαγεῖν ἡμᾶς ἐπὶ τὸ σκοπούμενον τέλος.

257. ΘΕΩΡΗΜΑ ϛ΄. Πολλαπλασιαζομένου λόγου τινὸς, ἢ πηλίκου σεσημειωμένου, ἢ κλάσματος, οἷον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐπὶ ὁλοχερὲς ποσὸν τὸ π, πολλαπλασιασθήσεται τὸ ὑπὲρ τῆς γραμμῆς ποσὸν α ἐπὶ τὸ ὁλοχερὲς π, τὸ δὲ ζητούμενον προκύπτον ἔσαι $\frac{\alpha\pi}{\beta}$

ΔΕΙΞΙΣ. Ἅπας πολλαπλασιασμός ἐστιν ἀσφαλής, ἐὰν τὸ παραγόμενον ᾖ πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον, ὡς ὁ πολλαπλασιαστὴς πρὸς τὴν μονάδα· ἀλλαμὴν τὸ παραγόμενον $\frac{\alpha\pi}{\beta}$ ἐστὶ πρὸς τὸν πολλαπλασιαστέον $\frac{\alpha}{\beta}$ ὡς ὁ π πολλαπλασιαστὴς πρὸς τὴν 1, εἴγε $\frac{\alpha\pi}{\beta}:\frac{\alpha}{\beta}::\pi:1$ οὐδέν ἐστιν ἀλλ᾽ ἢ απ:α::π:1 (240), ἔνθα διήρηνται οἱ δύω

ὅροι απ : α διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος β, μηδεμιᾶς γινομένης ἀλλοιώσεως (233)· ἄρα κτ. Ο. Ε. Δ.

Ἐν ἀριθμοῖς. Κείσθω πολλαπλασιάσαι τὸ $\frac{3}{4}$, ὅπερ ἐπίσης ἐςὶ ϗ λόγος, ϗ πηλίκον σεσημειωμένον, ϗ κλάσμα, ἐπὶ τὸν ὁλοχερῆ 5· ἐὰν ὖν πολλαπλασιασθῇ τὸ ὑπὲρ τῆς γραμμῆς 3 ἐπὶ τὸ ὁλοχερὲς 5, ϗ γραφῇ $\frac{3\times5}{4}$, ἢ $\frac{15}{4}$, πορισθήσεται προκύπτον ἀκριβές· ἔςι γὰρ ἐν τούτοις ἡ ἑξῆς ἀναλογία: τὸ προκύπτον $\frac{15}{4}$ ἔςι πρὸς τὸν πολλαπλασιαςέον $\frac{3}{4}$ ὡς ὁ πολλαπλασιαςὴς 5 πρὸς τὴν 1, εἴγε $\frac{15}{4}:\frac{3}{4}::5:1$ ὐδέν ἐςιν ὅτι μὴ ἡ ἀναλογία 15 : 3 :: 5 : 1 διῃρημένη τὸν πρῶτον λόγον διὰ 4, ὅπερ ἤκιςα λυμαίνεται τὴν ἀναλογίαν (240).

258. ΘΕΩΡΗΜΑ Ζ'. Δύω σεσημειωμένα πηλίκα τὰ $\frac{\alpha\varpi}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}$, ὧν διαιρέτης μὲν κοινὸς ὁ β, διαιρετέοι δὲ διάφοροι οἱ απ, α, πρὸς ἄλληλα τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσιν, ὃν οἱ αὐτῶν διαιρετέοι απ, α

ΔΕΙΞΙΣ. Πορισθήσεται γὰρ ἐπιεικῶς ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha\varpi}{\beta}:\frac{\alpha}{\beta}::\alpha\varpi:\alpha$ (240, 257) Ο. Ε. Δ.

Ἐπὶ τῶν $\frac{20}{4}$, $\frac{5}{4}$, ἔςι $\frac{20}{4}:\frac{5}{4}::20:5$ (αὐτόθ.).

ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐὰν ἄρα διαιρέσεις δύω, ἔχουσαι τὸν αὐτὸν διαιρέτην, κοινοῦ πλυτῶσι ϗ τοῦ διαιρετέου, τὰ πηλίκα ἰσάλληλα ἔσονται.

259. ΘΕΩΡΗΜΑ Η'. Τοὐναντίον δὲ ἐὰν δύω πηλίκα, τὸν αὐτὸν ἔχοντα διαιρετέον, μὴ ἔχωσι ϗ διαιρέτην τὸν αὐτὸν, οἷα τα $\frac{\beta}{\alpha\varpi}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, ἐν λόγῳ ἀντιθέ-

τῳ ἔσονται τῶν διαιρετῶν· προκύψει γὰρ ἐντεῦθεν ἡ ἀναλογία $\frac{\beta}{\alpha\pi} : \frac{\beta}{\alpha} :: \alpha : \alpha\pi$ (240,) ἐν ᾗ ὁ διαιρέτης τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha\pi$ τέταρτος ἐγένετο ὅρος, ὁ δὲ τοῦ δευτέρου ὅρου διαιρέτης $\alpha$ ἐγένετο τρίτος, ὅπερ δίδωσι τάξιν ἀντίθετον. Ο.Ε.Δ.

Ἐπὶ $\frac{5}{20}, \frac{5}{4}$ ἔσται ἡ ἀναλογία $\frac{5}{20} : \frac{5}{4} :: 4 : 20$ (240).

260. ΘΕΩΡΗΜΑ Θ'. Συμβαίνει δὲ ἐπὶ δύω διαιρέσεων τοὺς διαιρετέους εἶναι ἀντιπεπονθότως, ὥσπερ οἱ διαιρέται, τὰ πηλίκα εἰσὶ πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαιρετέων τετράγωνα, ἢ ἀντιστρόφως ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαιρετῶν.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπὶ τῶν $\frac{\alpha}{\beta\pi}, \frac{\beta}{\alpha\pi}$, ἔνθα οἱ διαιρετέοι $\alpha, \beta$ ἀντιστρόφως εἰσὶν, ἢ ὡς οἱ διαιρέται $\beta\varpi, \alpha\varpi$, εἴγε ἔστιν ἀληθῶς $\alpha : \beta :: \alpha\varpi : \beta\varpi$, τὰ δύω πηλίκα $\frac{\alpha}{\varpi\beta}, \frac{\beta}{\alpha\varpi}$ παρέχουσι τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta\varpi} : \frac{\beta}{\alpha\varpi} :: \alpha^2 : \beta^2$, εἴγε τὸ ὑπὸ τῶν μέσων γινόμενον $\frac{\alpha^2\beta}{\varpi\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\varpi}$ ἴσεται τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων $\frac{\alpha\beta^2}{\beta\varpi} = \frac{\alpha\beta}{\varpi}$· οἱ αὐτοὶ δὲ διδόασι καὶ τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta\pi} : \frac{\beta}{\alpha\varpi} :: \alpha^2\varpi^2 : \beta^2\varpi^2$ (240)· ἀλλαμὴν ἡ μὲν πρώτη δείκνυσιν, ὅτι τὰ πηλίκα $\frac{\alpha}{\beta\varpi}, \frac{\beta}{\alpha\varpi}$ εἰσὶ πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαιρετέων τετράγωνα $\alpha^2, \beta^2$, ἡ δὲ,

ὡς εἰσὶν ἀντιστρόφως ἢ ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαιρετῶν τετράγωνα $\beta^2 \varpi^2$, $\alpha^2 \varpi^2$ · (189) · ἐν γένει ἄρα κτ. Ο.Ε.Δ.

Ἐν ἀριθμοῖς. Ἐπὶ τῶν δύω πηλίκων $\frac{2}{12}$, $\frac{6}{4}$, ἐν οἷς οἱ διαιρετέοι εἰσὶν ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ τῶν διαιρετῶν εἴτ' ὖν 2 : 6 :: 4 : 12 (240) ἔστιν ἡ ἀναλογία $\frac{2}{12}$ : $\frac{6}{4}$ :: 4 : 36, ἐφ' ἧς τὸ πρῶτον πηλίκον λόγον ἔχει πρὸς τὸ δεύτερον, ὃν τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου διαιρετέου τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου (240).

Ἐπὶ τῶν αὐτῶν δὲ $\frac{2}{12}$ : $\frac{6}{4}$ :: 16 : 144 (240), ἐφ' ἧς ἀναγινώσκομεν, τὸ πρῶτον πηλίκον πρὸς τὸ δεύτερον λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τοῦ διαιρέτου τοῦ δευτέρου τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου.

261. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπεὶ δύω κλάσματα δύω πηλίκα ὑπάρχει σεσημειωμένα, ὧν διαιρετέα μέν εἰσιν οἱ ἀριθμηταὶ, διαιρέται δὲ οἱ παρονομασαί· δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν προεκτεθέντων τριῶν θεωρημάτων τὰ ἑξῆς ἐπαγαγεῖν.

α΄. Δύω κλάσματα, τὸν αὐτὸν ἔχοντα παρονομαστὴν, ἔσονται πρὸς ἄλληλα, ὡς περ οἱ αὐτῶν ἀριθμηταί. β΄. τὸν αὐτὸν δὲ ἔχοντα ἀριθμητὴν, ἔσονται ἀντιστρόφως ὡς οἱ παρονομασαί· γ΄. ἐὰν δὲ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν δύω κλασμάτων ἀντιπεπονθότως ὦσιν, ὡς οἱ παρονομασαὶ, τὰ κλάσματα ταῦτα ἔσονται, ἤτοι ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἀριθμητῶν τετράγωνα, ἢ ἀντιστρόφως ὥσπερ τὰ ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν.

262. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι΄. Ἐὰν πλειόνων ἀναλογιῶν πολλαπλασιασθῶσιν, ἢ διαιρεθῶσιν, ὁ πρῶτος ὅρος διὰ τοῦ πρώτου, ὁ δὲ δεύτερος διὰ τοῦ δευτέρου, καὶ ἑξῆς ἑξῆς, τὰ προκύπτοντα, ἢ τὰ πηλίκα, καὶ ταῦτα ἀνάλογον ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Δυεῖν ὁποιωνοῦν ἀναλογιῶν ἡ μὲν ἂν πα-

ραςαίη διὰ α : απ :: δ : δπ, ἡ δὲ διὰ ε : εκ :: η : ηκ (236)· ά. ἐὰν πολλαπλασιαωθῶσιν α ἐπὶ ε, απ ἐπὶ εκ κτ., τὰ παραγόμενα αε, απεκ, κτ. ἀνάλογον ϗ αὐτὰ ἔσονται· ἐπείπερ ἐν αε : απεκ :: δη : δπηκ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἔσται τῷ ὑπὸ τῶν μέσων γινομένῳ· β΄. ἐὰν διαιρεθῶσιν α διὰ ε ϗ απ διὰ εκ κτ., τὰ πηλίκα $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\frac{\alpha\pi}{\varepsilon\kappa}$ κτ. ἔσονται ϗ ταῦτα ἀνάλογον· ἐπὶ γὰρ $\frac{\alpha}{\varepsilon} : \frac{\alpha\pi}{\varepsilon\kappa} :: \frac{\delta}{\eta} : \frac{\delta\pi}{\eta\kappa}$ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων.

Ἐν ἀριθμοῖς· Ἐὰν πολλαπλασιαωθῶσι, καθ' ἣν σεσημείωνται τάξιν, αἱ δύω ἀναλογίαι 4 : 20 :: 2 : 10, ϗ 2 : 10 :: 1 : 5, τὰ παραγόμενα 8, 200, 2, 50 παρέξεσι τὴν ἀναλογίαν 8 : 200 :: 2 : 50 (240)· ἐὰν δὲ διαιρεθῶσι, τὰ πηλίκα 2, 2, 2, 2 σηςήσεσι τὴν ἀναλογίαν 2 : 2 :: 2 : 2 (αὐτόθι).

263. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΑ. Ἐὰν τέσσαρα ποσὰ ἀνάλογον ὦσι, ϗ οἱ ἀπ' αὐτῶν ὅμοιοι βαθμοὶ, ἢ αἱ αὐτῶν ῥίζαι ἀνάλογον ἔσονται.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔςω ἀνάλογον τέσσαρά τινα ποσὰ τὰ α : απ :: δ : δπ, φημὶ δὴ ά. ὡς ϗ οἱ ἀπ' αὐτῶν ὅμοιοι βαθμοὶ, οἱ κύβοι, φέρε, ἀνάλογον ἔσονται· ἔςι ϗ γὰρ $\alpha^3 : \alpha^3\pi^3 :: \delta^3 : \delta^3\pi^3$ (240, 82)· β΄. καὶ αἱ ὁποιαιδηποτοῦν αὐτῶν ὅμοιαι ῥίζαι, αἱ τέταρται φέρ' εἰπεῖν, ἀνάλογον ἔσονται· εἴγε $\alpha^{\frac{1}{4}} : \alpha^{\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{4}} :: \delta^{\frac{1}{4}} : \delta^{\frac{1}{4}}\pi^{\frac{1}{4}}$ (124, 240) Ο.Ε.Δ.

Ἐν ἀριθμοῖς. Ἐὰν τῆς 1 : 2 :: 4 : 8 ἀναλογίας ἕκαςος ὅρος κυβιωθῇ, ϗ οἱ κύβοι ἔσονται ἀνάλογον, 1 : 8 :: 64 : 512 (240)· ἐὰν δὲ ἑκάςου ὅρου τῆς ἀναλογίας 4 :

36 : : 9 : 81 ἡ τετραγωνικὴ ἐξαχθῇ ῥίζα, ἔσαι ἡ ἀναλογία 2 : 6 : : 3 : 9.

264. ΣΧΟΛΙΟΝ. Αἱ ῥίζαι ὐκ εἰσὶν ἀνάλογον τοῖς ἀπ' ἀυτῶν βαθμοῖς, ὡς μᾶλλον ἐν τοῖς ἐφεξῆς φανήσεται· ὐ γὰρ δυνατὸν εἰπεῖν ὡς α πρὸς β λόγον ἔχει ὃν $α^2$ πρὸς $β^2$· ἐπὶ γὰρ τῶν α, β, $α^2$, $β^2$ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον $αβ^2$ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων $βα^2$ προφανῶς ἔσιν ἄνισον· ὐ δὲ μὴν, φέρε, 1 πρὸς 2 λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ 1 τετράγωνον, ὃ ὐ αὐτό ἐσιν 1, πρὸς τὸ ἀπὸ 2 τετράγωνον 4.

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

### Περὶ προόδυ γεωμετρικῆς.

265. Πᾶσα ἀριθμητικὴ πρόοδος, οἵα ἡ ÷ 2.4.6.8 δύναται προδήλως κἀκτῦ 0 ἄρξασθαι, ὕτως ÷ 0.2.4.6.8. ἀυτίκα γὰρ δῆλον, ὅτι 2 ὑπερέχει τῦ 0, ὅσῳ ὁ 4 τῦ 2· ἡγέμην γεωμετρικὴ ὐ δύναται ἔχειν 0 κυρίως εἰλημμένον ὡς ἕνα τῶν ἑαυτῆς ὅρων· ἄυτη γὰρ ςίχος ἐςὶν ὅρων, ὧν ἄτερος τὸν ἕτερον ὁλοχερῶς, ἢ ἐν μέρει, περιέχει· ἀλλαμὴν 0 κυρίως εἰλημμένον ὐδέν ἀλλ' ἔλλειψις τῦ ὄντος ὑπάρχον, ὐ δύναται περιέχειν ὄν, ἄρα ὐδὲ ὅρος προόδυ γεωμετρικῆς ὑπάρχειν δύναται.

266. Πᾶσα γεωμετρικὴ πρόοδος ἤτοι αὔξει ἐπ' ἄπειρον, οἵα ἡ ÷ 1 : 5 : 25 : 125 κτ. ἢ γῦν ἐπ ἄπειρον μειῦται, οἵα ἡ ÷ 8 : 2 : $\frac{1}{2}$ : $\frac{1}{8}$ : $\frac{1}{32}$ κτ.

267. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἁπάσης γεωμετρικῆς προόδυ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον ἐςὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν ὅρων, οἳ τῶν ἄκρων ἴσον ἀπέχυσιν, ἢ γῦν τῷ ἀ-

πὸ τοῦ μέσου ὅρου τετραγώνῳ, ἐὰν ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ᾖ περιττός· ἐπὶ γὰρ τῆς προεκτεθείσης προόδου ∺ α : απ : απ² : απ³ : απ⁴ : απ⁵ : απ⁶ κτ. φανερὸν ὅτι τὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων $\alpha \times \alpha\pi^6 = \alpha^2\pi^6$, καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ παραλήγοντος $\alpha\pi \times \alpha\pi^5 = \alpha^2\pi^6$, καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ τρίτου καὶ τοῦ προπαραλήγοντος $\alpha\pi^2 \times \alpha\pi^4 = \alpha^2\pi^6$, καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μέσου $\alpha\pi^3$ τετράγωνον $\alpha^2\pi^6$ πάντα ἰσάλληλά εἰσιν **Ο. Ε. Δ.**

**268. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄.** Πᾶσα γεωμετρικὴ πρόοδος, καὶ αὔξουσα καὶ μειουμένη, παρασταθῆναι ἂν ἔχοι διὰ τοῦ τύπου ∺ α : απ : $\alpha\pi^2$ : $\alpha\pi^3$ $\alpha\pi^4$ κτ.

**ΔΕΙΞΙΣ.** Πᾶσα γὰρ γεωμετρικὴ πρόοδος οὐδέν ἐστιν ἀλλ' ἢ ἀναλογία συνεχὴς ἐκ πλειόνων, ἢ τριῶν, συγκεκροτημένη ὅρων (192)· πᾶσα δὲ γεωμετρικὴ ἀναλογία συνεχὴς παρίσταται διὰ τοῦ τύπου ∺ α : απ : $\alpha\pi^2$ (237)· δῆλον ἄρα τὸ ζητούμενον.

**269· ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.** Ἀπάσης γεωμετρικῆς προόδου ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ πρώτου ὅρου καὶ τοῦ πηλίκου, ὑψωθέντος εἰς βαθμὸν ἐκδηλούμενον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡγουμένων ὅρων· ἐπὶ γὰρ τοῦ γενικοῦ τύπου ∺ α : απ : $\alpha\pi^2$ : $\alpha\pi^3$ : $\alpha\pi^4$ κτ. ὁ πέμπτος ὅρος $\alpha\pi^4$, φέρε, ἐξισοῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ πρώτου ὅρου α καὶ τοῦ $\pi^4$, εἴτ' ἐν τοῦ πηλίκου, ὑψωθέντος εἰς βαθμὸν τέταρτον, εἴγε τέσσαρες ὅροι τοῦ πέμπτου ἡγοῦνται· ὁ δὲ γενικὸς τοιοῦτος τύπος δηλωθείη ἂν οὕτω $\mu = \alpha\pi^{\nu-1}$, ἐν ᾧ τὸ μὲν μ τὸν ζητούμενον ἐμφαίνει ὅρον· τὸ δὲ ν τὸν χῶρον, ἐν ᾧ κεῖται.

Ἐπὶ ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 ὁ πέμπτος ὅρος 32 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ πρώτου 2 καὶ τοῦ πηλίκου 2, τοῦ ἐντεῦθεν τῇ προόδῳ κρατοῦντος, ὑψωθέντος εἰς βαθμὸν τέταρτον, εἴτ' ἐν τοῦ 16. καὶ γὰρ $16 \times 2 = 32$.

270. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'. Ἐν ἁπάσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν τρίτον λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου· ὁ δ' αὐτὸς πρῶτος πρὸς τὸν τέταρτον, ὃν ὁ ἀπὸ τοῦ πρώτου κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου· καὶ γὰρ ἐπὶ τοῦ τύπου ∺ $\alpha : \alpha\pi : \alpha\varpi^2 : \alpha\varpi^3 : \alpha\varpi^4$, ὁ πρῶτος ὅρος $\alpha$ πρὸς τὸν τρίτον $\alpha\varpi^2$ ὡς τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου τετράγωνον $\alpha^2$ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου $\alpha^2\varpi^2$, εἴγε ἔστιν $\alpha : \alpha\varpi^2 :: \alpha^2 : \alpha^2\varpi^2$ (240)· ὁ δ' αὐτὸς πρῶτος $\alpha$ πρὸς τὸν τέταρτον $\alpha\varpi^3$, ὡς ὁ τοῦ πρώτου κύβος $\alpha^3$ πρὸς τὸν τοῦ δευτέρου $\alpha^3\varpi^3$, ἐπεὶ $\alpha : \alpha\varpi^3 :: \alpha^3 : \alpha^3\pi^3$ (αὐτόθ.): καὶ ἐν γένει „ἐν ἁπάσῃ γεωμετρικῇ „προόδῳ ὁ πρῶτος ὅρος λόγον ἔχει πρὸς ἕτερόν τινα ὅ„ρον εἰλημμένον κατὰ τὸ δοκοῦν, ὃν ἔχει ὁ αὐτὸς πρῶτος „ὅρος ὑψωθεὶς εἰς βαθμόν, ἐμφαινόμενον τῷ ἀριθμῷ τῶν ὅρων, „τῶν ἡγουμένων τοῦ προκειμένου ὅρου, πρὸς τὸν δεύτερον ὅ„ρον, ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἡρμένον βαθμόν".

271. ΠΟΡΙΣΜΑ Γ. Ἐν ἁπάσῃ γεωμετικῇ προόδῳ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων λόγον ἔχει, ὃν εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς τῶν ἑαυτῷ ἑπόμενον· καὶ γὰρ ἐφ' ἁπάσης προόδου πάντες οἱ ὅροι πλὴν τοῦ ἐσχάτου εἰσὶν ἡγούμενοι, καὶ πάντες παρὰ τὸν πρῶτον εἰσὶν ἑπόμενοι· τούτου τεθέντος φημί, ὡς ἐπὶ τοῦ τύπου ∺ $\alpha : \alpha\varpi : \alpha\varpi^2 : \alpha\varpi^3 : \alpha\varpi^4$, τὸ πάντων τῶν ἡγουμένων ἄθροισμα $\alpha + \alpha\varpi + \alpha\varpi^2 + \alpha\varpi^3$ πρὸς τὸ πάντων τῶν ἑπομένων ἄθροισμα $\alpha\varpi + \alpha\varpi^2 + \alpha\varpi^3 + \alpha\varpi^4$ λόγον ἔχει, ὃν εἷς ἡγούμενος, ὁ $\alpha$ φέρε, πρὸς τὸν ἑαυτῷ ἑπόμενον $\alpha\varpi$, εἴτ' ἦν $\alpha + \alpha\varpi + \alpha\varpi^2 + \alpha\varpi^3 : \alpha\varpi + \alpha\varpi^2 + \alpha\varpi^3 + \alpha\varpi^4 :: \alpha : \alpha\varpi$· ἔστι γὰρ, ὡς δῆλον, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν μέσων.

272. Ἐπὶ ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 τὸ τῶν ἡγουμένων ἄθροι-

σμα $2+4+8+16$, εἴτ' ὢν 30 πρὸς τὸ τῶν ἑπομένων $4+8+16+32$, εἴτ ὢν 60, ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων ὁ 2 πρὸς τὸν ἑαυτῷ ἑπόμενον 4· ἐν γὰρ 30 : 60 :: 2 : 4 (240).

273. ΠΟΡΙΣΜΑ Δ'. Ἀπάσης γεωμετρικῆς προόδου ὁ δεύτερος ὅρος πλὴν τοῦ πρώτου λόγον ἔχει πρὸς τὸν πρῶτον, ὃν ἔχει ὁ ἕκατος πλὴν τοῦ πρώτου πρὸς τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἡγουμένων τοῦ ἑκάτου· ἐπὶ γὰρ τοῦ τύπου $\dot{\div}\, \alpha : \alpha\varpi : \alpha\varpi^2 : \alpha\varpi^3 : \alpha\varpi^4$ φημὶ ὅτι $\alpha\varpi - \alpha$ πρὸς $\alpha$ λόγον ἔχει, ὃν ὁ $\alpha\varpi^4 - \alpha$ πρὸς τὸ πάντων τῶν τοῦ ἑκάτου ἡγουμένων ὅρων ἄθροισμα $\alpha + \alpha\varpi + \alpha\varpi^2 + \alpha\varpi^3$, τουτέστιν $\alpha\varpi - \alpha : \alpha :: \alpha\varpi^4 - \alpha : \alpha + \alpha\varpi + \alpha\varpi^2 + \alpha\varpi^3$ (P), ἐν γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινόμενον $\alpha^2\varpi + \alpha^2\varpi^2 + \alpha^2\varpi^3 + \alpha^2\varpi^4 - \alpha^2 - \alpha^2\varpi - \alpha^2\varpi^2 - \alpha^2\varpi^3 = - \alpha^2 + \alpha^2\varpi^4$ ἴσον ἐστὶ τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν μέσων $\alpha$, $\alpha\varpi^4 - \alpha$.

274. ΠΟΡΙΣΜΑ Ε'. Προόδου γεωμετρικῆς ἀπάσης ἐν αἱ διαφοραὶ τῶν ἀλληλοδιαδόχων ὅρων πρόοδον συγκροτοῦσι γεωμετρικήν· ἐὰν γὰρ ᾖ $\dot{\div}\, \alpha : \alpha\varpi : \alpha\varpi^2 : \alpha\pi^3 : \alpha\varpi^4$ κτ. ἔσται ἐν $\dot{\div}\, \alpha\varpi - \alpha : \alpha\varpi^2 - \alpha\varpi : \alpha\varpi^3 - \alpha\varpi^2 : \alpha\varpi^4 - \alpha\varpi^3$· τὸ γὰρ γινόμενον ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσοῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ τῶν μέσων (269).

275. ΠΟΡΙΣΜΑ. ς'. Ἐν ἀπάσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ τὸ ὑπὸ τῶν δύω ἄκρων γινόμενον ἴσοῦται τῷ γινομένῳ ὑπὸ δύω ὅρων, οἵτινες ἐπίσης τῶν ἄκρων ἀπέχουσιν· ἐπὶ γὰρ τοῦ γενικοῦ τύπου $\dot{\div}\, \alpha : \alpha\varpi : \alpha\varpi^2 : \alpha\varpi^3 : \alpha\varpi^4$ τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ δευτέρου ὅρου $\alpha\varpi$, ἐν τοῦ τετάρτου $\alpha\varpi^3$ ἴσοῦται τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων $\alpha$, $\alpha\varpi^4$ γινομένῳ $\alpha^2\varpi^4$· εἰδ', ἐν ἐνταῦθα, ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς εἴη περιττὸς, τὸ ἀπὸ τοῦ μέσου $\alpha\varpi^2$ τετράγωνον $\alpha^2\pi^4$ ἴσοῦται τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων γινομένῳ.

Ἐπὶ ∺ 2:4:8:16:32 ἐςὶν 4×16=2×32, καὶ 8×8=2×32.

276. ΘΕΩΡΗΜΑ Β΄. Στίχος ἅπας ὅρων, διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος ἐκτεθειμένων, ὧν οἱ δεῖκται συνιςᾶσι πρόοδον ἀριθμητικὴν, πρόοδον παριςᾷ γεωμετρικήν.

ΔΕΙΞΙΣ. Φημὶ δὴ, ὡς οἱ ὅροι τοῦ ςίχου $\alpha^1$, $\alpha^2$, $\alpha^3$, $\alpha^4$ κτ. διὰ τοῦ αὐτοῦ α γράμματος ἐκτιθέμενοι, καὶ δείκτας ἔχοντες ἀριθμητικὴν σχηματίζοντας πρόοδον τὴν ∺ 1.2.3.4 (192) συνιςῶσι γεωμετρικὴν πρόοδον τὴν ∺ $\alpha^1$ : $\alpha^2$ : $\alpha^3$ : $\alpha^4$· ἕκαςος γὰρ ὅρος (192), διὰ τοῦ πρὸ αὐτοῦ διαιρεθεὶς, δίδωσιν ἀεὶ πηλίκον τὸ α.

277. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οἱ κατὰ συνέχειαν βαθμοὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ἡ ἀεὶ πληθείη ἂν α, εἴτ' ἓν $\alpha^1$, $\alpha^2$, $\alpha^3$, $\alpha^4$ κτ. γεωμετρικὴν παριςῶσι πρόοδον· πᾶσαι γὰρ αὗται (276) διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος ἐκτιθέμεναι δείκτας ἔχουσιν ἀριθμητικὴν συγκροτοῦντας πρόοδον.

Οὕτως οἱ κατὰ τὸ συνεχὲς βαθμοὶ τοῦ 3 συνιςῶσι πρόοδον γεωμετρικὴν τὴν ∺ 3:9:27:81:243 κτ.

278. ΘΕΩΡΗΜΑ Γ΄. Ἐὰν ςίχος ποσότητος τῆς α πολλαπλασιασιαωθῇ τὸν μὲν πρῶτον ὅρον ἅπαξ διὰ ϖ, τὸν δὲ δεύτερον δὶς διὰ τοῦ αὐτοῦ ϖ, καὶ ἑξῆς ἑτῶ, τὰ παραγόμενα κατὰ διαδοχὴν $\alpha\varpi^1$, $\alpha\varpi^2$, $\alpha\varpi^3$, $\alpha\varpi^4$ κτ. συςήσουσι γεωμετρικὴν πρόοδον.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἕκαςος γὰρ ὅρος, διὰ τοῦ πρὸ αὐτοῦ διαιρεθεὶς, παρέχεται ἀεὶ τὴν αὐτὴν ποσότητα ϖ.

## Προβλήματα τινὰ ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν προόδων.

### Πρόβλημα Δ.

279. Δοθέντων τῦτε πρώτυ ὅρυ ϗ τῦ πηλίκυ τῆς προόδυ ὁντινοῦν ὅρον εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ὁ τύπος ἐςὶ $\mu = \alpha\pi^{\nu-1}$ (269)· ὑκῦν ἐ. ἀν ζητῆται ὁ ἑνδέκατος ὅρος προόδυ, ἧς ὁ μὲν πρῶτος ὅρος ἐςὶ 1, τὸ δὲ πηλίκον 4· ἔςαι $\alpha = 1$, ϗ $\varpi = 4$, ϗ $\nu = 11$· καὶ δὴ φανερὸν ὅτι $\mu = 1 \times 4^{10} = 4^{10} = 1048576$.

### Πρόβλημα Ε

280. Δοθέντων τῦ πρώτυ ὅρυ $\alpha$, ϗ τῦ ἐσχάτυ $\omega$, ϗ τῦ πηλίκυ $\varpi$, προόδυ γεωμετρικῆς, εὑρεῖν τὸ κεφάλαιον $\kappa$.

ΛΥΣΙΣ. Ἁπάσης προόδυ γεωμετρικῆς πάντες μὲν οἱ ὅροι πλὴν τῦ ἐσχάτυ εἰσὶν ἡγυμένοι, πάντες δὲ παρὰ τὸν πρῶτον εἰσὶν ἑπόμενοι· ὑκῦν τὸ κεφάλαιον πάντων τῶν ἡγυμένων ἐςὶν $= \kappa - \omega$· τὸ δὲ κεφάλαιον πάντων τῶν ἑπομένων ἐςίν $= \kappa - \alpha$· ἔςι δὲ $\kappa - \omega : \kappa - \alpha :: \alpha : \alpha\varpi$ (271)· ἄρα $\alpha\varpi\kappa - \alpha\pi\omega = \alpha\kappa - \alpha\alpha$ (240), ταυτὸν εἰπεῖν (διαιρέσει τῶν ἴσων διὰ τῦ αὐτῦ $\alpha$ (219)) $\varpi\kappa - \varpi\omega = \kappa - \alpha$· προσθέσει δὲ ἑκατέρωθι τῦ αὐτῦ ποσῦ $\varpi\omega$, $\varpi\kappa - \varpi\omega + \varpi\omega = \kappa - \alpha + \varpi\omega$, εἶτ' ὖν $\varpi\kappa = \kappa - \alpha + \varpi\omega$· ἀφαιρέσει δὲ ἑκατέρωθεν τῦ αὐτῦ ποσῦ $\kappa$, $\varpi\kappa - \kappa = \kappa - \kappa + \varpi\omega - \alpha$, εἶτ' ὖν $\pi\kappa - \kappa = \varpi\omega - \alpha$. διαιρέσει δὲ ἑκατέρυ μέρυς διὰ $\varpi - 1$ (ἐπεὶ $\varpi\kappa - \kappa = \overline{\varpi - 1} \times \kappa$) ἔςαι $\kappa = \dfrac{\varpi\omega - \alpha}{\varpi - 1}$, τύπος ὁ ζητύμενος.

## Πρόβλημα Γ.

281. Δοθέντων τοῦ πρώτου ὅρου α, καὶ τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ ν, καὶ τοῦ πηλίκου π εὑρεῖν τὸ κεφάλαιον κ.

Λέγω δὴ ὅτι ἔσται τύπος $\kappa = \frac{\alpha\varpi^{\nu} - \alpha}{\varpi - 1}$, ἢ $\kappa = \frac{\varpi^{\nu} - 1}{\varpi - 1}\alpha$. Δεῖξις· ὁ ἔσχατος τῆς προόδου ὅρος ἐστὶν $\alpha\varpi^{\nu-1}$ (269)· ἔστιν οὖν (280, 271) $\kappa - \alpha\varpi^{\nu-1} : \kappa - \alpha :: \alpha : \alpha\varpi$ οὐκοῦν $\kappa\alpha\pi - \alpha\alpha\pi^{\nu} = \kappa\alpha - \alpha\alpha$· διαιρέσει δὲ ἑκατέρου τῶν ἴσων διὰ α, $\kappa\pi - \alpha\pi^{\nu} = \kappa - \alpha$· προσθέσει ἑκατέρῳ τῶν ἴσων τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ $\alpha\varpi^{\nu}$, $\kappa\varpi - \alpha\varpi^{\nu} + \alpha\varpi^{\nu} = \kappa - \alpha + \alpha\varpi^{\nu}$, εἶτ' οὖν $\kappa\varpi = \kappa - \alpha + \alpha\varpi^{\nu}$, ἀφαιρέσει δὲ ἑκατέρωθεν τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ κ, $\kappa\pi - \kappa = \alpha\varpi^{\nu} - \alpha$ διαιρέσει δέ διὰ $\varpi - 1$ (ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος) $\kappa = \frac{\alpha\varpi^{\nu} - \alpha}{\varpi - 1}$ ὁ ζητούμενος τύπος.

Ἔστω $\alpha = 2$, καὶ $\nu = 3$, καὶ $\pi = 4$, ἔσται οὖν $\kappa = \frac{2 \times 4^3 - 2}{4 - 1} = \frac{126}{3} = 42$· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει οὕτω ∺ 2 : 8 : 32· ἔνθα πάντως $2 + 8 + 32 = 42$.

## Πρόβλημα Δ.

282. Δοθέντων τοῦ πηλίκου π, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὅρων καὶ τοῦ κεφαλαίου κ, ἕνα ἕκαστον ὅρον τῆς προόδου εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. Ἐν τῇ δείξει τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἔστι $\kappa\varpi - \alpha\varpi^{\nu} = \kappa - \alpha$· προσθέσει ἑκατέρωσε τοῦ αὐτοῦ $\alpha\varpi^{\nu}$, $\kappa\varpi = \kappa - \alpha + \alpha\varpi^{\nu}$· ἀφαιρέσει δὲ τοῦ αὐτοῦ κ, $\kappa\varpi - \kappa = \kappa - \kappa + \alpha\varpi^{\nu} - \alpha$, εἶτ' οὖν $\kappa\pi - \kappa = \alpha\varpi^{\nu} - \alpha$, τοῦτ' ἔστιν $\alpha\varpi^{\nu} - \alpha = \kappa\varpi - \kappa$· διαιρέσει δὲ τέως διὰ $\varpi^{\nu} - 1$

προκύψει ὁ τύπος $\alpha = \frac{\varkappa\varpi - \varkappa}{\varpi\nu - 1}$, τὸν πρῶτον ἐκδηλῶν τῆς προόδου ὅρον· τούτου ὄν γνωσθέντος ἅπαξ, ἐπεὶ γνωστόν ἐστι καὶ τὸ τῆς προόδου πηλίκον, πάντες ἑξῆς οἱ ὅροι γνωσθήσονται (227).

## Πρόβλημα Ε'.

283. Τοῦ τῶν ὅρων ἀριθμοῦ $\nu$, καὶ τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha$, καὶ τοῦ ἐσχάτου $\omega$, δοθέντων, εὑρεῖν τῆς προόδου τὸ πηλίκον $\pi$.

ΛΥΣΙΣ· $\omega = \alpha\varpi^{\nu-1}$ (269)· διαιρέσει δὲ ἑκατέρου τῶν ἴσων διὰ $\alpha$, $\frac{\omega}{\alpha} = \varpi^{\nu-1}$· ἐξαγωγῇ τέως ἑκατέρωθεν τῆς $\nu-1$ ῥίζης, ἔσται $\sqrt[\nu-1]{\frac{\omega}{\alpha}} = \varpi$, ἢ $\varpi = \sqrt[\nu-1]{\frac{\omega}{\alpha}}$· ἔστω $\nu = 3$, καὶ $\alpha = 2$, καὶ $\omega = 3^2$, ἔσται $\varpi = \sqrt[3-1]{\frac{3^2}{2}}$ $= \sqrt[2]{16} = 4$.

284. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ϛ'. Δοθέντων προόδου τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha$, καὶ τοῦ ἐσχάτου $\omega$, καὶ τοῦ πηλίκου $\varpi$, εὑρεῖν τὸν τῶν ὅρων ἀριθμὸν $\nu$

ΛΥΣΙΣ. Ὁ ἐν τῷ ἀνωτέρῳ προβλήματι τύπος $\frac{\omega}{\alpha} = \varpi^{\nu-1}$, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ $\varpi$, γίνεται $\frac{\omega\varpi}{\alpha} = \varpi^{\nu}$· ἐξ οὗ δῆλον, ὅτι τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ ἐσχάτου ὅρου $\omega$ καὶ τοῦ πηλίκου $\pi$, διαιρούμενον διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha$, ἐξισοῦται τῷ πηλίκῳ $\pi$ ὑψωθέντι εἰς βαθμόν, οὗ δείκτης ἐστὶν ὁ τῶν ὅρων ἀριθμὸς ὁ ζητούμενος· ἔστω ὄν $\alpha = 5$, καὶ $\varpi = 3$, καὶ $\omega =$

3645· ἐκεῖν $\frac{\omega\varpi}{\alpha} = \frac{3645 \times 3}{5} = 2187$· ἐξαρθήτω δὴ τὸ τῆς πρόοδε πηλίκον 3 ἐφεξῆς εἰς τρίτον, τέταρτον, κτ. βαθμὸν, ἔς τ' ἂν γένηται = 2187· εἰσὶ δὲ οἱ ἀπ' αὐτῦ κατὰ τὸ συνεχὲς βαθμοὶ, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187· καὶ ἐπεὶ 2187 βαθμὸς ἕβδομός ἐςι τῦ 3, ὁ ζητύμενος τῶν ὅρων ἀριθμὸς ἔςαι 7· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει ἕτω ∺ 5:15:45:135:405:1215:3645.

## Πρόβλημα Ζ'.

285. Δύω μεταξὺ δοθέντων ὅρων ὅσυς δήποτε μέσυς ἀναλόγυς εὑρεῖν κατὰ πρόοδον.

ΛΥΣΙΣ. α'. Μεταξὺ τῦ α καὶ β κείσθω εὑρεῖν μέσον ἀνάλογον ἕνα· ἐκεῖν ἔςαι ∺ α:γ:β, καὶ αβ = γγ (248). καὶ δὴ γ = $\sqrt{\alpha\beta}$. β'. μεταξὺ τῶν α, β κείσθω εὑρεῖν δύω μέσυς ἀναλόγυς· ἐκεῖν ἔςαι ∺ α:γ:χ:β· καὶ ἐπεὶ α:β :: $\alpha^3 : \gamma^3$ (270)· ἄρα $\alpha\gamma^3 = \alpha^3\beta$· διαιρέσει ἑκατέρυ τῶν ἴσων διὰ α, $\gamma^3 = \alpha^2\beta$, καὶ ἑκατέρωθεν ἐξαγωγῇ τῆς κυβικῆς ῥίζης $\gamma = \sqrt[3]{\alpha^2\beta}$· γνωςῶν ὖν ὄντων τῦ πρώτυ, καὶ τῦ δευτέρυ, ὁ τρίτος ἐυχερῶς εὑρεθήσεται· ἐπεὶ γὰρ α : $\sqrt[3]{\alpha\alpha\beta}$ :: χ : β· κυβιωθέντων ἁπάντων τῶν ὅρων, ἔςαι $\alpha^3 : \alpha\alpha\beta :: \chi^3 : \beta^3$· ἐκεῖν $\chi^3 = \frac{\alpha^3\beta^3}{\alpha\alpha\beta} = \alpha\beta^2$· ἐξαγωγῇ ἑκατέρωθεν τῆς κυβικῆς ῥίζης,

$$\chi = \sqrt[3]{\alpha\beta\beta}$$

γ'. Ἐν γένει ὧν προκέηται μεταξὺ τῶν α, β ὅσυς δήποτε μέσυς ἀναλόγυς εὑρεῖν, ἀορίςως φέρε ν ὅρυς, ἔςαι ὁ χῶρος, καθ' ὃν τὸ β τῦ α ἀπέχει ν + 1· ἐκεῖν ἔςαι

(270) $\alpha : \beta :: \alpha^{\nu+1} : \psi^{\nu+1}$ διὸ $\psi^{\nu+1} = \frac{\alpha^{\nu+1}\beta}{\alpha}$ (ἤτοι $\alpha^{\nu}\beta$)· ἐξαγωγῇ δὲ τῆς $\nu+1$ ῥίζης $\psi = \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu}\beta}$, πρῶτος ὅρος τῶν ζητουμένων μέσων· ὁ δὲ δεύτερος εὑρεθήσεται ὡσαύτως· ἔστι γὰρ $\alpha : \beta :: \psi^{\nu+1} : \chi^{\nu+1}$ (270)· εἰ λήφθω ἐν ἀντὶ τοῦ τρίτου ὅρου $\psi^{\nu+1}$ ὁ εὑρεθεὶς τύπος $\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu}\beta}$, ὑψωμένος εἰς τὸν $\nu+1$ βαθμόν, εἴτ' ἓν $\alpha^{\nu}\beta$· καὶ δὴ ἔσται $\alpha : \beta : \alpha^{\nu}\beta : \chi^{\nu+1}$· ἄρα $\chi^{\nu+1}\alpha = \alpha^{\nu}\beta^2$, καὶ $\chi^{\nu+1} = \frac{\alpha^{\nu}\beta^2}{\alpha}$· ἐπεὶ δὲ $\frac{\alpha^{\nu}\beta^2}{\alpha} = \alpha^{\nu-1}\beta^2$ (52) ἄρα $\chi^{\nu+1} = \alpha^{\nu-1}\beta^2$· καὶ ἐξαχθείσης τῆς $\nu+1$ ῥίζης ἑκατέρωθεν, ἔσται $\chi = \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-1}\beta^2}$· ὁ δὲ τρίτος ὡσαύτως εὑρεθήσεται $\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-2}\beta^3}$, ὁ δὲ τέταρτος $\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-3}\beta^4}$ κτ. μέχρις ἂν ὁ τῆς $\beta$ δείκτης γένηται $= \nu+1$, ὁπότε καὶ ὁ δείκτης τοῦ $\alpha$ γίνεται $= 0$, καὶ ὁ ὅρος $\sqrt[\nu+1]{\alpha^{0}\beta^{\nu+1}} = \beta$. Ἐὰν τοίνυν μεταξὺ τῶν $\alpha$, $\beta$ τρεῖς μέσοι ἀνάλογοι ζητῶνται κατὰ συνεχῆ ἀναλογίαν, ἔσονται ∺ $\alpha : \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu}\beta} : \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-1}\beta^2} : \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-2}\beta^3} : \beta$· εἴτ' ἓν οἱ μεταξὺ τρεῖς ὅροι τύποι ἔσονται τῶν ζητουμένων τριῶν ὅρων· ῥηθήτωσαν γὰρ ἤτοι $\lambda$, $\upsilon$, $\chi$· ἐπεὶ ἓν οἱ ὅροι $\alpha$, $\lambda$, $\upsilon$, $\chi$, $\beta$ ἐν προόδῳ γεωμετρικῇ ὑποτίθενται, τουτέστιν ∺ $\alpha : \lambda : \upsilon : \chi : \beta$, ἔστιν $\alpha : \beta :: \alpha^4 : \lambda^4$ (270)· ἄρα $\alpha\lambda^4 = \alpha^4\beta$· διαιρουμένου δὲ ἑκάστου ἴσου διὰ $\alpha$, ἔσται $\lambda^4 = \frac{\alpha^4\beta}{\alpha} = \alpha^3\beta$· ἐξαχθεί-

σης δ' ἑκατέρωθεν τῆς τετάρτης ῥίζης, $\lambda = \sqrt[4]{\alpha^3\beta}$· ἔ-
ςι δὲ $\nu + 1 = 4$ ἐπὶ τοῦ παρόντος, καὶ $\nu = 3$· ἄρα $\lambda =$
$\sqrt[\nu+1]{\alpha^\nu\beta}$.

Ἐν ἓν τῇ ἐκτεθείσῃ προόδῳ ἀντὶ λ τεθείσης τῆς δυ-
νάμεως αὐτῆς, ἔσαι ∺ $\alpha : \sqrt[4]{\alpha^3\beta} : \upsilon$· ἄρα ∺ $\alpha^4 : \alpha^3\beta :$
$\upsilon^4$· ἄρα $\alpha^4\upsilon^4 = \alpha^6\beta^2$· ἄρα $\upsilon^4 = \frac{\alpha^6\beta^2}{4^4} = \alpha^2\beta^2$·
ἄρα $\upsilon = \sqrt[4]{\alpha^2\beta^2}$· ἄρα $\upsilon = \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-1}\beta^2}$, τὴν αὐτὴν ἀ-
μέλει χωρεῖσιν ἕφορον τοῦ συλλογίζεσθαι, ἣν καὶ ἀνωτέρω.

Ἐὰν ἐν τῇ προτεθείσῃ προόδῳ ∺ $\alpha : \lambda : \upsilon : \chi$, ἀν-
τὶ λ, υ τεθῶσιν αἱ αὐτῶν εὑρεθεῖσαι δυνάμεις, ἔσαι ∺
$\alpha : \sqrt[4]{\alpha^3\beta} : \sqrt[4]{\alpha^2\beta^2} : \chi$· ἄρα ∺ $\alpha^4 : \alpha^3\beta : \alpha^2\beta^2 :$
$\chi^4$ ἄρα $\alpha^4\chi^4 = \alpha^5\beta^3$· ἄρα $\chi^4 = \frac{\alpha^5\beta^3}{\alpha^4} = \alpha^1$
$\beta^3$· ἄρα $\chi = \sqrt[4]{\alpha\beta^3}$· ἄρα $\chi = \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-2}\beta^3}$· ἄρα οἱ
τρεῖς τύποι $\sqrt[\nu+1]{\alpha^\nu\beta}$, $\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-1}\beta^2}$, $\sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-2}\beta^3}$ ἐν γένει ἐκ-
δηλοῦσι τοὺς τρεῖς ζητουμένους μέσους ἀναλόγους ὅρους.

Ἔςω δὴ $\alpha = 2$, καὶ $\beta = 32$· ἐκεῖν ἔσαι $\lambda =$
$\sqrt[4]{8 . 32} = \sqrt[4]{256} = 4$, καὶ $\upsilon = \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-1}\beta^2} = \sqrt[4]{4 . 1024}$
$\sqrt[4]{4096} = 8$, καὶ $\chi = \sqrt[\nu+1]{\alpha^{\nu-2}\beta^3} = \sqrt[4]{2 . 32768} =$
$\sqrt[4]{65536} = 16$· ἡ δὲ πρόοδος χωρήσει οὕτω ∺ $2 : 4 :$
$8 : 16 : 32$· αἱ δὲ τέταρται ῥίζαι ἐξαχθήσονται, λαμ-
βανομένων πρῶτον τῶν κατὰ τοὺς ὑποκειμένους ἀριθμοὺς τε-

τραγωνικῶν ῥιζῶν, καὶ τούτων ἐξαγομένων αὖθις τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν. ἢ γὰρ $\sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha^{\frac{4}{4}} = \alpha$· ἀλλὰ δὴ ἐὰν πρῶτον γένηται $\alpha^{\frac{4}{2}} = \alpha^2$, ἢ αὖθις $\alpha^{\frac{2}{2}} = \alpha^1$, τὸ αὐτὸ ὡς δῆλον γενήσεται (122).

## Πρόβλημα Η'.

**286.** Μεταξὺ δύω ὡντινωνοῦν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, ἐμπαραβύσαι μέσους ἀναλόγους, ὅσους ὁ μ ἀριθμὸς ἐμφαίνει.

**ΛΥΣΙΣ.** Ἔςω γεωμετρικὴ πρόοδος ἡ $:: \alpha\pi^0 : \alpha\pi^1 : \alpha\pi^2 : \alpha\pi^3$ κ.

ά. Οὖν ζητηθήτωσαν μ ὅροι, ἀριθμητικῶς ἀνάλογοι, μεταξὺ δύω τινῶν δεικτῶν τῆς προόδου· οἵτινες ἔσονται δεῖκται τῶν μέσων γεωμετρικῶς ἀναλόγων ὅρων, οἱ μεταξὺ ἐμπαραβυσθήσονται τῶν εἰρημένων ὅρων (276)· ἔςω ἓν ἐμπαραβύσαι τρεῖς ὅρους μεταξὺ $\alpha\pi^0$, $\alpha\pi^1$· ἢ δὴ εὑρεθήτωσαν μεταξὺ 0, ἢ 1 τρεῖς ὅροι ἀριθμητικῶς ἀνάλογοι· ἐπεὶ ἓν ἡ μεταξὺ 0 ἢ 1 διαφορά ἐςιν $= 1$· ἄυτη διαιρεθεῖσα διὰ $\mu + 1 = 3 + 1 = 4$ (214) παρέξει τὸν πρῶτον τῶν ζητουμένων ὅρων· ὑκεῦν $\frac{1}{4}$ ὁ πρῶτος, ἢ δὴ $\frac{2}{4}$ ὁ δεύτερος, $\frac{3}{4}$ ὁ τρίτος· ἔςω δὲ ἐμπαραβύσαι τρεῖς ἄλλους μεταξὺ $\alpha\pi^1$ ἢ $\alpha\pi^2$· ὑκεῦν δείκτης τοῦ πρώτου τῶν ζητουμένων ἔςαι $1\frac{1}{4}$, τοῦ δὲ δευτέρου $1\frac{2}{4}$, τοῦ δὲ τρίτου $1\frac{3}{4}$· ὑκεῦν ἡ πρόοδος $\frac{::}{::}$ $\alpha\pi^0 : \alpha\pi^1 : \alpha\pi^2$ ἐμπαραβυσθεῖσα τοῦτον τὸν τρόπον, γενήσεται $\frac{::}{::}$ $\alpha\pi^0 : \alpha\pi^{\frac{1}{4}} : \alpha\pi^{\frac{1}{2}} : \alpha\pi^{\frac{3}{4}}$ $\alpha\pi^1 : \alpha\pi^{1\frac{1}{4}} : \alpha\pi^{1\frac{1}{2}} : \alpha\pi^{1\frac{3}{4}} : \alpha\pi^2$ κτ.