ἦν τὸ πηλίκον τοῦ $\sqrt[\nu]{\beta}$ διαιρεθέντος διὰ τοῦ ὁλοκληροῦς μ, ἔσται $= \frac{1}{\mu}\sqrt[\nu]{\beta}$· τὸ δὲ πηλίκον τοῦ $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$ διαιρεθέντος διὰ $\mu\sqrt[\nu]{\delta}$, ἔσται $= \frac{\alpha}{\mu}\sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\delta}}$.

174. Ἵνα πᾶν ῥιζικὸν τὸ $\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\pi}}$ ἐπὶ πάντα βαθμὸν τὸν μ ὑψώσωμεν, πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὸν τοῦ βαθμοῦ δείκτην μ τὸν τοῦ κατὰ τὸν ῥιζικὸν συνεργοῦ α δείκτην, καὶ τὸν τῆς ὑπορρίζου ποσότητος, οὕτως, $\alpha^{1\times\mu}\sqrt[\nu]{\beta^{\pi\mu}} = \alpha^{\mu}\sqrt[\nu]{\beta^{\pi\mu}}$. ἔυδηλον γὰρ, ὅτι, φέρε, ὁ τοῦ $\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\pi}}$ κύβος ἐστὶν $= \alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\pi}} \times \alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\pi}} \times \alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\pi}} = \alpha^{3}\sqrt[\nu]{\beta^{3\pi}}$ (172)· τοὐναντίον ἄρα πρὸς ἐξαγωγὴν ἁπάσης ῥίζης τῆς ν ἀπὸ ῥιζικοῦ τοῦ $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$ διαιρετέον διὰ ν τόν τε τοῦ α συνεργοῦ καὶ τὸν τοῦ β, ὑπορρίζου ποσοῦ, τοὺς δείκτας, οὕτως, $\alpha^{\frac{1}{\nu}}\sqrt[\nu]{\beta^{\frac{1}{\nu}}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΩΔΕΚΑΤΟΝ.

Περὶ ποσῶν ἐπιπλάσων, ἢ κατ' ἐπίνοιαν.

175. Ἔστω $\sqrt{-\alpha^{2}}$· αὕτη ἦν ἡ ῥίζα προφανῶς οὐκ ἔστιν οὔτε $+\alpha$, οὔτε $-\alpha$· καὶ γὰρ $\alpha\times\alpha=\alpha^{2}$, καὶ $-\alpha$

$x - a = a$. ἄρα $\sqrt{-a^2}$ ἔστι ῥίζα κατ' ἐπίνοιαν, ἢ ποσὸν ἐπίπλαστον· ἐν γένει δὲ ἡ παντὸς λειπτικοῦ ποσοῦ ῥίζα, ἀρτιαρίθμου εὐμοιροῦσα ἐπισήμου, ἔστι ποσὸν ἐπίπλαστον (84)· νοητέον δὲ ταὐτὸν καὶ ἐπὶ πάσης ῥίζης, ἧς τὸ μὲν ἐπίσημον ἔστιν ἄρτιον, ἡ δὲ ποσότης λειπτική, ὁ δ' ἐπ' αὐτῆς δείκτης ὁστισοῦν· ἔτω $\sqrt{-a}$, ἢ $\sqrt[4]{-a}$ κτ. εἰσὶ ποσότητες κατ' ἐπίνοιαν· πολλήτις οὖν καὶ εὐαίσθητος ἡ διαφορὰ τῆς λειπτικῆς ποσότητος, τῆς τε ἀνυπάρκτου καὶ τῆς ἀῤῥήτου, περὶ ἧς ὕστερον· ἡ μὲν γὰρ λειπτικὴ ποσότης $-a^2$ προδήλως ἐστὶν ἔχουσα δυνατῶς· ἔστω γὰρ $a = 2$, $-a^2$ ἔσται $= -4$, κατάστασις ἀληθὴς τοῦ πρὸς τῷ μηδὲν ἔχειν καὶ 4 ὀφείλοντος· τῆς δ' ἀῤῥήτου ποσότητος ἐπ' ἄπειρον τῇ δυνάμει προσπελάζειν δυνάμεθα, ἐξευρίσκοντες τῇ τοῦ λογισμοῦ ἀκριβείᾳ ἱκανώτατα αὐτῆς μέρη (144)· τὰ γάρτοι ἐπίπλαστα ποσά, οἷον τὸ $\sqrt{-a^4}$, ἀδύνατά εἰσι πάντῃ, καὶ γέλωτ' ἄντις ὀφλήσειεν, εἰ διὰ προσεγγίσεως τὴν τοιοῦδε ποσοῦ δύναμιν ἀποπειρῶτο ἐκτιμῆσαι· ἐκ τῶν τοιῶνδε μέντοι ἀνυπαρκτόντων ποσῶν διὰ τῶν τοῦ λογισμοῦ πράξεων πραγματικὰ ποσά, τοῦτο δὴ τὸ θαυμάσιον, ἀναφύονται, ὡς ἐν τοῖς ἑφεξῆς ὀψόμεθα.

176. Ἀιεὶ τοίνυν δυνάμεθα ζητεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν δύω ποσοτήτων $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-\beta}$, καὶ τὴν μεταξὺ αὐτῶν διαφορὰν, καὶ ἔτι τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον, καὶ μὴν καὶ τὸ διαιρέσει δὶ ἀλλήλων προϊὸν πηλίκον· ἴδωμεν οὖν καὶ ἐπ' αὐτῶν τὰς τελεμένας τέσσαρας ταύτας πράξεις.

177. Ἔστω ἓν συνάψαι τὰς $\sqrt{-\alpha}$, $\sqrt{-\beta}$, $\sqrt{-\gamma}$, $-\sqrt{-\delta}$· ἐκεῖν τῶν συμβόλων αὐτοῖς τῶν τῆς συνάψεως προταττομένων οὐδενὶ σὺν ἔργῳ συνάπτονται·

καὶ δὴ τὸ τῶν προτεθεισῶν ἄθροισμα ἔσται $\sqrt{-\alpha} + \sqrt{-\beta}$, $+\sqrt{-\gamma} - \sqrt{-\delta}$· ὡσαύτως τὸ ἄθροισμα τῶν $-\sqrt{-\zeta}$, $3\sqrt{-\beta^2}$, $\gamma\sqrt{-\pi^4}$, ἔσται $\gamma\sqrt{-\pi^4} + 3\sqrt{-\beta^2} - \sqrt{-\zeta}$· ἡ δέ γε μεταξὺ δυεῖν ἐπιπλάσεων ποσοτήτων διαφορά, φέρε τῆς $\sqrt{-\alpha}$, καὶ $\sqrt{-\gamma}$· ἔσται $\sqrt{-\alpha} - \sqrt{-\gamma}$ κτ. (31, 32).

178. Εἰς τὸν αὐτῶν πολλαπλασιασμὸν, ἐπεὶ $\sqrt{\alpha} \times \sqrt{\alpha} = \alpha$ (172), δῆλον ὅτι, ῥιζικὸν ποσὸν ἐπὶ ῥιζικὸν ὁμοβάθμιον πολλαπλασιάζοντες, τὴν ὑπόῤῥιζον ἀποφερόμεθα ποσότητα μεθ' ἣ εἶχε συμβόλου ὑποκειμένη τῷ ῥιζικῷ· οἷον καὶ $\sqrt{-\alpha} \times \sqrt{-\alpha} = -\alpha$· ἐπεὶ δὲ καὶ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ τίθεται σύμβολον τὸ $+$, ἢ τὸ $-$, ταύτηται ἔσται ποσότης ἡ μὲν $-\sqrt{-\alpha}$ ἄλλη δὲ τυχὸν $+\sqrt{-\alpha}$· ἐπεὶ δὲ πρὸ τοῦ ῥιζικοῦ συνεργὸς προτίθεται, ὡς $\alpha\sqrt{-\gamma}$, ἀπόντος τούτου νοητέον ἐστὶ τὴν μονάδα. Ταῦτ' ἄρα $\sqrt{-\alpha} = 1\sqrt{-\alpha}$, καὶ $-\sqrt{-\alpha} = -1\sqrt{-\alpha}$· ἐὰν οὖν προκέηται πολλαπλασιάσαι $+1\sqrt{-\alpha}$ ἐπὶ $+1\sqrt{-\alpha}$, ἔσται κατὰ τοὺς ἀποδοθέντας κανόνας $+1\sqrt{-\alpha} \times +1\sqrt{-\alpha} = +1 \times -\alpha = -\alpha$ (37), καὶ $-\sqrt{-\alpha} \times -\sqrt{-\alpha} = -1\sqrt{-\alpha} \times -1\sqrt{-\alpha} = +1 \times -\alpha = -\alpha$· καὶ $-\sqrt{-\alpha} \times +\sqrt{-\alpha} = -1\sqrt{-\alpha} \times +1\sqrt{-\alpha} = -1 \times -\alpha = \alpha$· δῆλον ἄρα ὡς ἐξ ἐπιπλάσεων ποσοτήτων πολλαπλασιασμῷ παραχθείη ἂν ποσότης λογικὴ καὶ πραγματική.

179. Ἐὰν δὲ ποσοτήτων ἐπιπλάσεων αἱ ὑπόῤῥιζοι μὴ ταυτίζωνται ὡς $\sqrt{-\alpha}$, καὶ $\sqrt{-\beta}$, τὰ γινόμενα πορισθήσονται κατὰ τὰ ἑξῆς ὑποδείγματα· ἔστω πολλαπλασιάσαι

$$\begin{array}{ll} \alpha\sqrt{-\alpha} & \text{ἐπὶ} \\ -\sqrt{-\beta} & \\ \hline -\alpha.\sqrt{-\alpha} \times \sqrt{-\beta} & \end{array}$$

ἐκεῖν γενήσεται

ἐκ δὲ $\sqrt{-\beta} \times \sqrt{\beta}$ ἔσται $\sqrt{-\beta\beta}$· ἐπεὶ γὰρ $\sqrt{\beta} = \beta^{\frac{1}{2}}$ (124) ἄρα $\sqrt{-\beta} \times \sqrt{\beta} = \sqrt{-\beta} \times \beta^{\frac{1}{2}} = \beta^{\frac{1}{2}}\sqrt{-\beta}$, καὶ τοῦ συνεργοῦ τετραγωνιωθέντος ($\beta^{\frac{1}{2}} \times \beta^{\frac{1}{2}} = \beta^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \beta^{\frac{2}{2}} = \beta$), καὶ πολλαπλασιαωθέντος ἐπὶ τὴν ὑπόῤῥιζον (167) ἔσται $\sqrt{-\beta\beta}$

Τ᾽ποδείγματα πολλαπλασιασμοῦ

ἔσω πολλαπλασιάσαι τὴν δυώνυμον ποσότητα $\sqrt{-3} + \sqrt{-2}$ ἐπὶ τὴν μονώνυμον $+\sqrt{-3}$

$$\begin{array}{r} \sqrt{-3} + \sqrt{-2} \\ +\sqrt{-3} \\ \hline \text{γινόμενον } -3 - \sqrt{-2} \end{array}$$

ὅτι δὲ $\sqrt{-3} \times \sqrt{-2} = -\sqrt{6}$ δείκνυται ῥᾴστα· ἔστι γὰρ $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1}$ (ὡς δῆλον ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὑποδείγματος, ἔνθα ἐγένετο $\sqrt{-\beta} \times \sqrt{\beta} = \sqrt{-\beta\beta}$) καὶ $\sqrt{-2} = \sqrt{2} \times \sqrt{-1}$· ἐκεῖν $\sqrt{-3} \times \sqrt{-2} = \sqrt{3} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{6} \times -1 = -1\sqrt{6} = -\sqrt{6}$

Ἕτερον Τ᾽πόδειγμα $3\sqrt{-5} + 2\sqrt{-3}$

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{-5} - 2\sqrt{-2} \\ \hline -45 - 6\sqrt{15} \\ +6\sqrt{10} + 4\sqrt{6} \\ \hline -45 - 6\sqrt{15} + 6\sqrt{10} + 4\sqrt{6} \end{array}$$

ἔστι γὰρ $3\sqrt{-5} \times 3\sqrt{-5} = 9 \times -5 = -45$, καὶ $3\sqrt{-5} \times 2\sqrt{-3} = 3\sqrt{5} \times \sqrt{-1} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{-1} = 3 \times 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = 6\sqrt{15} \times -1 = -6\sqrt{15}$· καὶ $-2\sqrt{-2} \times 3\sqrt{-5} = -2.\sqrt{2}.\sqrt{-1} \times 3\sqrt{5}.\sqrt{-1} = -2.$

$3.\sqrt{2}.\sqrt{5}\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-6\sqrt{10}\times-1$ $=+6\sqrt{10}$. ὡσαύτως δὲ καὶ $-2\sqrt{-2}\times+2\sqrt{-3}=4\sqrt{6}$.

ἕτερον $\sqrt{\alpha}-2\sqrt{-\beta}$
$\sqrt{\gamma}+3\sqrt{-\beta}$

$$\sqrt{\alpha\gamma}-2\sqrt{-\beta}.\sqrt{\gamma}$$
$$+3\sqrt{\alpha}.\sqrt{-\beta}+6\beta$$

$$\sqrt{\alpha\gamma}-2\sqrt{-\beta}.\sqrt{\gamma}+3\sqrt{\alpha}.\sqrt{-\beta}+6\beta$$

ἄλλο $2+\sqrt{-5}$.
$3-\sqrt{-2}$

$$6+3\sqrt{-5}$$
$$-2\sqrt{-2}+\sqrt{10}$$

$$6+3\sqrt{-5}-5-\sqrt{-2}+\sqrt{10}$$

180. Ἡ δὲ τῶν ἐπιπλάσεων ποσῶν διαίρεσις ὅτως ἐκτελεῖται· ἐὰν φέρε προκέηται διαιρεῖν $\sqrt{-\alpha}$ διὰ $\sqrt{-\beta}$, πηλίκον ἔσαι $\frac{\sqrt{-\alpha}}{\sqrt{-\beta}}$· ἐὰν δὲ τὴν λογικὴν γ διὰ τῆς ἐπιπλάσεω $\sqrt{-\beta}$, ἔσαι $\frac{\gamma}{\sqrt{-\beta}}$· ἐκ δὲ τῆς διαιρέσεως $(\alpha\sqrt{-\delta}):(\beta\sqrt{-\delta})$ ἀπαιτόμεθα $\frac{\alpha\sqrt{-\delta}}{\beta\sqrt{-\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}$ ἐκ δὲ $(-\beta):(\sqrt{-\beta})$ ἔσαι $\frac{-\beta}{\sqrt{-\beta}}=\sqrt{-\beta}$· ἡ γὰρ $-\beta$ ἔσι τετράγωνον, ὃ ῥίζαι $\sqrt{-\beta}$, $\sqrt{-\beta}$, εἴγε $\sqrt{-\beta}\times\sqrt{-\beta}=-\beta$· ὁκῶν $\frac{-\beta}{\sqrt{-\beta}}=\frac{\sqrt{-\beta}.\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\beta}}$

$= \sqrt{-\beta}$· ὡσαύτως $(\sqrt{-\beta}) : -\beta = \frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\beta} \cdot \sqrt{-\beta}} =$

$\frac{1}{\sqrt{-\beta}}$· καὶ $(\alpha\sqrt{-\beta\beta}) : (-\beta\beta) = \frac{\alpha\sqrt{-\beta\beta}}{-\beta\beta} =$

$\frac{\alpha\sqrt{-\beta\beta}}{\sqrt{-\beta\beta} \cdot \sqrt{-\beta\beta}} = \frac{\alpha}{\sqrt{-\beta\beta}}$· καὶ ἔτι $+\sqrt{-3} : -$

$\sqrt{-3} = \frac{+\sqrt{-3}}{-\sqrt{-3}} = \frac{+1\sqrt{-3}}{-1\sqrt{-3}} = \frac{+1}{-1} = -1$ ἀλλ'

ἔτι ἔστιν $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{4} = 2$· καὶ $\frac{-\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}}$

$= \frac{-\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{4} = -2$, καὶ $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-4}} =$

$\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}$· δῆλον ὅν, ὡς χρήσιμον πάνυ τοῖς πρωτοπείροις τὸ ὕτως ἀναλύειν τὰ ποσά· εὐκατάληπτα γὰρ ὕτω καθίστανται τὰ ἄλλως παράδοξα δοκοῦντα γινόμενά τε καὶ πηλίκα ἔντε τῷ πολλαπλασιασμῷ, καὶ τῇ διαιρέσει.

ΣΥΜΒΟΛΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Περὶ Λόγων καὶ Ἀναλογιῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

Ὁ ρ ι σ μ ο ί.

181. Λόγος, ἢ σχέσις, ἔστι τρόπος ποιὸς, καθ' ὃν ποσότης πρὸς ποσότητα θεωρεῖται· εἰ μὲν ἓν δυοῖν ποσῶν παραβαλλομένων θάτερον ὡς μεῖζον ἢ ἔλασσον θατέρου θεωρηθείη, ὁ λόγος ἀκούει Ἀριθμητικός· εἰ δὲ θάτερον ὡς ἅπαξ ἢ πλεονάκις περιεκτικὸν θατέρου ὁλοχερῶς ἢ ἐν μέρει ἐκληφθῇ, ὁ λόγος Γεωμετρικὸς ὀνομάζεται.

182. Λόγος μὲν ἓν ἀριθμητικός ἐστιν ἡ ὑπεροχὴ, ἢ ἡ διαφορὰ, ἥ ποσὸν ποσοῦ διαφέρει, πρὸς αὐτὸ παραβαλλόμενον· ἀφαιρέσει ἄρα γινώσκεται.

183. Γεωμετρικὸς δέ ἐστι τὸ πηλίκον, ὃ ἐμφαίνει ὁσάκις θάτερον θατέρῳ ποσῷ ἐμπεριέχεται· διαιρέσει ἄρα γινώσκεται.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ὁ τοῦ 10 πρὸς 2 ἀριθμητικὸς λόγος ἔστιν 8, εἴγε 10 — 2 = 8· ὁ δὲ τοῦ 10 πρὸς 2 γεω-

μετρικός ἔςι 5, ἐκληφθέντος ὡς διαιρετέε τοῦ 10, εἴγε $\frac{10}{2}=5$· ἀλλ' ὁ τοῦ 2 πρὸς 10, ἐκλαμβανομένε ἤδη τοῦ 2 διαιρετέε, ἐςὶ $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

184. Παντὶ ἄρα λόγῳ δυεῖν ποσοτήτων δεῖ, αἱ καλείσθων ὅροι τοῦ λόγε· καὶ ὁ μὲν πρῶτος καλεῖται ἡγούμενος, ὁ δὲ δεύτερος ἑπόμενος· ἐν ᾧ τῷ τοῦ 10 πρὸς 2 λόγῳ, 10 μέν ἐςιν ἡγούμενος, 2 δὲ ὁ ἑπομένος.

Ἅπας ἀριθμητικὸς λόγος, οἷος ὁ τοῦ 10 πρὸς 2, οὕτως ἐκτίθεσθαι ἐκράτησε: 10 · 2 · ὁ δὲ γεωμετρικὸς, 10 : 2. ἐφ ἑκατέρε δὲ ἀπαγγέλλεται: 10 πρὸς 2.

185. Ὅταν τέσσαρα ποσὰ οὕτως ἐκκέωνται, ὥςε τὸν τοῦ πρώτε πρὸς τὸ δεύτερον λόγον τὸν αὐτὸν εἶναι τῷ τοῦ τρίτε πρὸς τὸ τέταρτον, ταῦτα τὰ τέσσαρα ποσὰ ἐν ἀναλογίᾳ εἶναι λέγεται.

186. Ἀναλογία ἄρα ἐςὶν ἡ δυοῖν λόγων ἰσότης.

187. Ὥσπερ ἄρα δύω εἴδη λόγων εἰσὶν, οὕτω καὶ δύω εἴδη ἀναλογιῶν, ἀμέλειτοι Ἀριθμητικὴ ἀναλογία καὶ Γεωμετρική.

ΠΟΔΕΙΓΜΑ. Οἱ τέσσαρες ἓν ἀριθμοὶ 2, 5, 4, 7 παρισῶσιν ἀναλογίαν ἀριθμητικὴν, εἴγε ἥτις διαφορὰ, εἴτ' ἓν λόγος ἀριθμητικὸς, ἐςὶ τῶν δύω προτέρων, ἡ αὐτή ἐςι καὶ τῶν δύω ὑςέρων· καὶ γὰρ 5 — 2 = 3, καὶ 7 — 4 = 3· ἀλλὰ γὰρ 2, 6, 5, 15 ἐμφαίνεσιν ἀναλογίαν γεωμετρικὴν, εἴγε τὸ πηλίκον, ἢ ὁ γεωμετρικὸς λόγος, ὁ ἐν τοῖς δυσὶ προτέροις, ὁ αὐτός ἐςι καὶ τοῖς δυσὶν ὑςέροις· 6 γὰρ διαιρεθεὶς διὰ 2 δίδωσι 3, 15 δὲ διαιρεθεὶς διὰ 5 ὡσαύτως παρέχει 3.

Γράφεσι δὲ τὴν μὲν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν οὕτως 2 . 5 : 4 . 7, ἐφ' ἧς ἀναγινώσκεται: 2 πρὸς 5 ἐςὶν

ὡς 4 πρὸς 7· τὴν δὲ γεωμετρικὴν, οἵα ἐςὶν ἡ 2, 6, 5, 15, ὅτω, 2 : 6 : : 5 : 15, ἣν ἀναγινώσκομεν ὡσάυτως: 2 πρὸς 6 ὡς 5 πρὸς 15.

188. Πᾶσα ἄρα ἀναλογία τέσσαρας ποσότητας, εἴτ' ὖν ὅρυς περιέχει· ᾗ ὁ μὲν πρῶτος ᾗ ἔσχατος τῆς ἀναλογίας ὀνομάζονται ἄκροι, ὁ δὲ δεύτερος ᾗ τρίτος, μέσοι· ἐν ὖν τῇ 2 : 6 : : 5 : 15 ἀναλογίᾳ 2 ᾗ 15 εἰσὶν ἄκροι, 6 δὲ ᾗ 5 μέσοι.

189. Ἡ ἀναλογία καλεῖται μὲν ὀρθὴ, ὅταν, ὃν λόγον ἔχει ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον ὅρον, τὸν αὐτὸν ἔχῃ ᾗ ὁ τρίτος πρὸς τὸν τέταρτον· Ἀντίθετος δὲ, ἢ Ἀντίςροφος, ἢ ἐν Ἀντιπεπονθότι λόγῳ εἶναι τέσσαρα ποσὰ λέγονται, ὅταν, ὃν λόγον ἔχει ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον, τὸν αὐτὸν ἔχῃ ὁ τέταρτος πρὸς τὸν τρίτον· 2 : 6 : : 5 : 15 εἰσὶν ἐν ὀρθῇ ἀναλογίᾳ· τὸ γὰρ διαιρέσει τοῦ δευτέρυ διὰ τοῦ πρώτυ προϊὸν πηλίκον τάυτόν ἐςι τῷ διαιρέσει τοῦ τετάρτυ διὰ τοῦ τρίτυ· ἀλλὰ 2 : 6 : : 15 : 5 εἰσὶν ἐν ἀναλογίᾳ ἀντιθέτῳ· εἴγε, τοῦ δευτέρυ διὰ τοῦ πρώτυ διαιρεθέντος, ἀνάγκη τὸ αὐτὸ θηρωμένοις πηλίκον διελεῖν ὑ τὸν τέταρτον διὰ τοῦ τρίτυ, ἀλλὰ τὸν τρίτον διὰ τοῦ τετάρτυ· μεταποιηθήσεται ἄρα ἡ ἀναλογία εἰς ὀρθὴν, ἢ εἰς ἀντίςροφον, ἑνὸς μόνον μέσυ τὸν ἑνὸς ἄκρυ ἐπιχόντος χῶρον.

190. Ὅταν τέσσαρα ποσὰ παριςῶσιν ἀναλογίαν ὀρθὴν, οἱ δύω πρότεροι ὅροι ὀρθὸν λόγον ἔχειν πρὸς τὰς δύω ὑςέρυς λέγονται· ὅταν δὲ ἀντίςροφον, οἱ πρότεροι δύω πρὸς τὰς ὑςέρυς ἀντίςροφον λόγον, ἢ ἀντιπεπονθότα ἔχειν λέγονται.

191. Ὅταν ἐπίτινος ἀναλογίας ὁ ἑπόμενος τοῦ πρώτυ λόγυ γίνηται τοῦ δευτέρυ ἡγούμενος, ὥσπερ ἐν τῇδε τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, 2 : 6 : 6 : 18, ἡ ἀναλογία

ἐκεῖ συνεχής. ὁ δ' ἐπανειλημμένος ὅρος, ὡς ὁ 6, μέσος ἀνάλογος, ὃν ἅπαξ εἰώθασι γράφειν ὅτω ∺ 2 : 6 : 12· τὴν δὲ συνεχῆ ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν οἷον 2 . 4 : 4 . 6, ὅτω ÷ 2 . 4 . 6.

192. Στίχος τις ὅρων ἐν συνεχεῖ ὄντων ἀναλογίᾳ ὀνομάζεται Πρόοδος· ὅτως ἓν ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 κτ ἔστι πρόοδος ἀριθμητική, εἴγε πάντες οἱ ὅροι τοῦδε τοῦ στίχου τὴν αὐτὴν ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους διαφορὰν, εἴτ' ὖν 2, ἐπαναλαμβάνεσθαι δύνανται παρὰ τὸν πρῶτον καὶ ὕστατον· ἀναγνώσκεται δὲ ἡ ἔκθεσις ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 κτ. ὅτως· 1 πρὸς 3, ὡς 3 πρὸς 5, ὡς 5 πρὸς 7, ὡς 7 πρὸς 9 κτ. ὁ δὲ στίχος ∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 κτ. ἔστι πρόοδος γεωμετρική· ἕκαστος γὰρ τῶνδε τῶν ὅρων διαιρούμενος διὰ τοῦ προτέρου, καὶ τὸ αὐτὸ προάγων πηλίκον, ἐπαναλαμβάνεσθαι δύναται παρὰ τὸν πρῶτον καὶ ἔσχατον· ἀναγινώσκεται δὲ καὶ αὕτη ὡσαύτως: 1 πρὸς 3, ὡς 3 πρὸς 9, ὡς 9 πρὸς 27, ὡς 27 πρὸς 81 κτ.

193. Ὅταν πρόοδοι οἱ ὅροι προϊόντες μεγεθύνωνται, ἡ πρόοδος καλεῖται αὔξουσα· ὅταν δ' ἐλαττῶνται, μειουμένη· πρόοδος ὖν αὔξουσα ἐστὶν ἡ ∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 κτ, μειουμένη δὲ ∺ 81 : 27 : 9 : 3 : 1 κτ.

Πᾶσα ἄρα αὔξουσα πρόοδος ἀποκαθίσταται μειουμένη καὶ ἐξ ἐναντίας τῆς τῶν ὅρων τάξεως ἀντιστραφείσης.

194. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Ἐπείπερ ἡ γεωμετρικὴ ἀναλογία ἐν πλείονι χρήσει γίνεται τοῖς Μαθηματικοῖς· διὰ ταῦτα, ὅταν ἁπλῶς λέγηται λόγος, ἀναλογία, λόγον τε καὶ ἀναλογίαν τὰ γεωμετρικὰ ἐννοοῦμεν· ἀναλογίαν δὲ ἁπλῶς λέγοντες τὴν ὀρθὴν ἀεὶ ἐκλαμβάνομεν.

195. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἡ τῶν ἀναλογιῶν πραγματεία τῶν, ὧν προβάλλονται οἱ Μαθηματικοὶ, τὸ λυσιτελέ-

σατον ὑπάρχει· καὶ γὰρ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων μερῶν τῆς ἐπιστήμης ταύτης μεταφέρεται, καὶ μάλιστα ἐπὶ τῶν φυσικῶν ἐπεκτείνεται γνώσεων· καὶ πάντα δὲ τὰ ὄντα ἐκ τῆς ἀναλογίας τό, τε καλὸν καὶ τὸ τέλειον ἐπλέκησαν. ἐπάναγκες ἄρα ἰδιαιτέραν τινὰ καταβαλέσθαι σπουδὴν εἰς τὴν ταύτης ἔκθεσιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Περὶ Λόγων καὶ Ἀναλογιῶν ἀριθμητικῶν.

196. **ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄.** Παντὸς ἀριθμητικοῦ λόγου ὁ ἑπόμενος ὅρος ἴσος ἐστὶ τῷ ἡγουμένῳ σὺν, ᾗ πλὴν τῆς διαφορᾶς.

ΔΕΙΞΙΣ. Ἔστι γὰρ ἤτοι μείζων ἢ ἐλάσσων τοῦ ἡγουμένου· καὶ εἰ μὲν ἐκεῖνο, συναφθέντος τῷ ἡγουμένῳ τοῦ, ᾧ διεκρίνετο αὐτοῦ ὁ ἑπόμενος, γενήσονται οἱ ὅροι ἰσάλληλοι· ἔστιν ἄρα ὁ ἑπόμενος ἴσος τῷ ἡγουμένῳ σὺν τῇ διαφορᾷ· εἰ δὲ τοῦτο, ἀποχωρισθέντος ἐκ τοῦ ἡγουμένου τοῦ, ᾧ ὑπερεῖχε τοῦ ἑπομένου, ἔσονται αὖθις οἱ ὅροι ἰσάλληλοι· ἴσται ἄρα ὁ ἑπόμενος τῷ ἡγουμένῳ πλὴν τῆς διαφορᾶς· ἄρα κτ. Ο.Ε.Δ.

Ῥᾷστα δὲ τοῦτο καταφαίνεται ἐν ἀριθμοῖς· τοῦ μὲν γὰρ ἀριθμητικοῦ λόγου 2 . 5, ὁ ἑπόμενος 5 ἐστὶν ἴσος τῷ ἡγουμένῳ 2 σὺν τῇ διαφορᾷ 3· τοῦ δὲ 5· 2 ὁ ἑπόμενος 2 ἐστὶν ἴσος τῷ 5 πλὴν τῆς διαφορᾶς 3.

197. **ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄.** Τῶν ἀριθμητικὸν ὁντινοῦν λόγον συμπληρουσῶν δύω ποσοτήτων, ἡ πρώτη ἀεὶ διὰ τοῦ α γράμματος παρίστασθαι δύναται· ἡ δ' αὐτῶν διαφο-

ρὰ διὰ τοῦ δ· εἰ μὲν οὖν ὁ δεύτερος ὅρος μείζων εἴη τοῦ πρώτου, ἐπειδὴ ἴσοται τῷ πρώτῳ α σὺν τῇ διαφορᾷ δ, ἀεὶ παρασαθῆναι δυνήσεται διὰ α+δ· εἰδ' ἐλάττων, ἐπειδὴ τηνικαῦτα ἰσοδυναμεῖ τῷ πρώτῳ α πλὴν τῆς διαφορᾶς δ, παρασαθήσεται ἀεὶ διὰ α—δ.

Ἐντεῦθεν ἄρα ἅπας λόγος ἀριθμητικὸς, ἄυξων μὲν δηλωθήσεται διὰ α.α+δ· μειούμενος δὲ, διὰ α.α—δ· κοινῇ δὲ ἐκείνοτε ὡ ὅτος σημανθήσεται διὰ α·α±δ, ὃν ἀναγνωστέον: α σὺν ἢ πλὴν δ.

Ἐπὶ γὰρ φέρε τοῦ 2.5 ἀριθμητικοῦ λόγου, κληθέντος τοῦ ἡγουμένου α=2, τῆς δὲ διαφορᾶς δ=3, ὁ ἑπόμενος 5 ἐμφανθήσεται διὰ 2+3=α+δ, ὁ δὲ σύμπας λόγος 2·5 διὰ α·α+δ. ἐπὶ δὲ τοῦ μειουμένου 5·2, κληθέντος τοῦ α ἡγουμένου 5, τῆς δὲ δ διαφορᾶς 3, ὁ ἑπόμενος 2 ἔσται 5—3, α—δ, ὁ πᾶς λόγος α·α—δ.

198. ΠΟΡΙΣΜΑ Β'· Ὅταν παραβάλλωνται δύω ἀριθμητικοὶ ὅροι, σημανθέντος τοῦ πρώτου διὰ α·±δ, εἴπερ εἶεν ἴσοι οἱ λόγοι, κληθήσεται καὶ ἡ δευτέρα διαφορὰ δ (8)· κληθέντος ἄρα πρὸς τὸ δοκοῦν τοῦ κατὰ τὸν δεύτερον λόγον ἡγουμένου γ, διατυπωθήσεται ὁ δεύτερος οὕτω γ.γ±δ· εἰ δ ἄνισοι εἶεν οἱ παραβαλλόμενοι λόγοι, ἡ διαφορὰ ἐκτεθήσεται δι' ἄλλου γράμματος φέρ' εἰπεῖν τοῦ ζ· ἡ δ' ἅπασα ἔκθεσις τοῦ δευτέρου λόγου ἔσται γ.γ±ζ.

199. ΘΕΩΡΗΜΑ Β'. Πᾶσα ἀναλογία ἀριθμητικὴ παρασαθῆναι δύναται διὰ τοῦ τύπου α.α±δ : γ·γ±δ, ὃς ἀναγνωσθήσεται: α πρὸς α σὺν ἢ πλὴν δ, ὡς γ πρὸς γ σὺν ἢ πλὴν δ.

ΔΕΙΞΙΣ. Πᾶσα γὰρ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἐκδύω

συγκροτεῖται ἀριθμητικῶν ἴσων λόγων (187), ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἀεὶ παρίσαθαι δύναται διὰ α·α±δ ο ὁ δὲ δεύτερος διὰ γ·γ±δ (198) Ο.Ε.Δ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ. Ἔσω ἀριθμητικὴ ἀναλογία 2·6: 5.9· ὁ μὲν ὖν πρῶτος λόγος 2·6 δυνήσεται ἀεὶ παρασαθῆναι διὰ α·α+δ· ὁ δὲ δεύτερος 5·9 διὰ γ·γ+δ· τῆς δὲ 6.2 : 9.5. ὁ μὲν πρῶτος, διὰ α.α—δ, ὁ δὲ, διὰ γ·γ—δ (198).

200. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐφ' ἁπάσης ἀριθμητικῆς ἀναλογίας τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα ἴσον ἐσὶ τῷ τῶν μέσων· καὶ γὰρ πᾶσα ἀριθμητικὴ ἀναλογία παρίσαθαι ἔχει διὰ τοῦ τύπου α·α±δ:γ·γ±δ (199), ἧς πρῶτον μὲν ἄκρον ἐσὶν α, ἔσχατον δὲ γ±δ, καὶ πρῶτον μὲν μέσον α±δ, δεύτερον δὲ γ· ἀλλὰ τὸ α±γ+δ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ἐσὶν ἴσον τῷ α±δ+γ ἀθροίσματι τῶν μέσων· ἑκάτερον γὰρ (51) σύγκειται ἐκ τῶν αὐτῶν ὑπαρκτικῶν τε καὶ λειπτικῶν ποσοτήτων (21)· ἐν γένει ἄρα ἐφ' ἁπάσης ἀριθμητικῆς ἀναλογίας τὸ τῶν ἄκρων ἴσοται τῷ τῶν μέσων ἀθροίσματι. Ο.Ε.Δ.

Καὶ ἐν ἀριθμοῖς. Ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς ἀναλογίας 3·5 : 10 : 12 τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα 3+12 =15, ἴσον ἐσὶ τῷ τῶν μέσων 5+10=15.

201. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐὰν, ὡς ποιεῖν εἰώθαμεν, μετὰ τὴν διὰ συμβολικοῦ λογισμοῦ γενικὴν δεῖξιν, ἐμπεδῶμεν τὸ θεώρημα διὰ μερικωτέρων ἀριθμῶν, ἥκισα παρὰ τοῦτο τὴν τῆς δείξεως ἰσχὺν ἐπικρατύνομεν· ἐπαιωθητοτέραν μὲν ὖν τοῖς τῶν πρωτοπείρων ὀφθαλμοῖς παρισῶμεν

τὴν γενικὴν ἀλήθειαν, μερικωτέραις ἐφαρμοζομένην περιπτώσεσι.

202. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἐπὶ πάσης ἀριθμητικῆς συνεχοῦς ἀναλογίας τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ μέσῳ δὶς εἰλημμένῳ· ἐπειδὴ γὰρ ὁ μέσος ἀνάλογος, τὸν χῶρον πληροῦν τῶν δύω μέσων, ἅπαξ γράφεται (191)· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ διπλῷ τοῦ μέσου.

Ἐπὶ τῆς ἐν ἀριθμοῖς συνεχοῦς ἀναλογίας ∴ 5. 10. 15 τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων 5+15 ἐστὶ διπλοῦν τοῦ μέσου ἀναλόγου 10.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Περὶ τῆς Ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν Μεθόδου.

203. Μέθοδος τῶν τριῶν ἐν γένει καλεῖται ὁ τρόπος τοῦ, τριῶν ἀναλογίας ὅρων δοθέντων, εὑρεῖν τὸν τέταρτον (188)· ἐντεῦθεν ἄρα, ὥσπερ ἀναλογιῶν εἴδη πεφύκασι δύω, οὕτω καὶ ἡ τῶν τριῶν μέθοδος διστή τις ὑπάρχει, ἡ μὲν ἀριθμητικὴ, γεωμετρικὴ δὲ ἡ ἑτέρα.

204. Μέθοδος οὖν τῶν τριῶν ἀριθμητικὴ μέν ἐστιν ὁ τρόπος, καθ' ὃν, τριῶν ποσοτήτων δεδομένων, τετάρτη ἐξ αὐτῶν εὑρίσκεται, τοσούτῳ τῆς τρίτης διαφέρουσα, ὅσῳ ἡ δευτέρα τῆς πρώτης (182, 186)· γεωμετρικὴ δέ ἐστιν ὁ τρόπος, δι' οὗ, τριῶν δοθεισῶν ποσοτήτων, τετάρτη ἐξ αὐτῶν εὑρίσκεται, περιέχουσα τοσάκις τὴν τρίτην, ὁσάκις τὴν δευτέραν ἡ πρώτη (245).

205. Οὐκοῦν τῆς τῶν τριῶν Γεωμετρικῆς Μεθόδου πλείονα χρῆσιν παρεχομένης τῷ κοινωνικῷ βίῳ, δεῖν ἡγησάμην περὶ ταύτης καὶ πρὸ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ διαλα-

σεῖν (245, καὶ ἐν τοῖς ἐφεξῆς), ὡς ἂν καὶ οἱ τούτου ἄπειροι, μήτε μὴν πειραθῆναι αὐτοῦ ἐφιέμενοι (εἰσὶ γὰρ συχνοὶ, οἱ εἴτε τῷ χρήματι ἐπαηδιάζοντες εἴτε ὑπ' ἄλλων τούτου ἀπειργόμενοι) τὴν τούτης χρῆσιν εἰδέναι ἔχοιεν.

206. Τ'περὶ ὧν τῆς ἀριθμητικῆς τῶν τριῶν Μεθόδου· α'. ἐκτίθει διὰ χ (5) τὸν τέταρτον ζητούμενον ὅρον, διατάξας αὐτὸν μετὰ τῶν τριῶν δοθέντων ἐν ἀναλογίας σχήματι.

207. β'. Ἐὰν μέν τις τῶν ἄκρων ζητῆται, συνάψας τοὺς μέσους, ἀφαίρει ἀπὸ τοῦ αὐτῶν ἀθροίσματος τὸν δεδομένον τῶν ἄκρων· ἐὰν δέ τις μέσος, ἀπὸ τοῦ τῶν ἄκρων ἀθροίσματος ἀφαίρει τὸν γνωστὸν μέσον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'. Δοθέντων τριῶν ἀριθμῶν τῶν 3, 7, 11, ἵν' εὑρεθῇ τέταρτος ὅρος, διεγνωσχὼς τοῦ 11, ὅσῳ τοῦ 3 ὁ 7· α'. γεγράφθω 3. 7 : 11. χ· β'. συναφθέντων τῶν μέσων 7 καὶ 11, ἀπὸ τοῦ αὐτῶν ἀθροίσματος 18 ἀφηρήσθω ὁ γνωστὸς ἄκρος 3· τὸ δὲ κατάλοιπον 15 ἔσται τῶν ὅρων ὁ ζητούμενος τέταρτος· εἰσαχθέντος δὲ 15 ἀντὶ χ, ἀπολυφθήσεται ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία 3. 7 : 11. 15 (187).

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἵνα δὲ εὑρεθῇ ὅρος, ὃς ἂν εἴη μέσος τῶν δοθέντων ὅρων 4, 20, 46· α'. γεγράφθω 4. 20 : χ. 46· β'. συναφθέντων τῶν ἄκρων 4 καὶ 46, ἀπὸ τοῦ αὐτῶν ἀθροίσματος 50 ἄφελε τὸν γνωστὸν μέσον 20· τὸ δὲ 30 κατάλοιπον ἔσται ὁ ζητούμενος μέσος· ἡ δὲ ἀριθμητικὴ ἀναλογία ἔσται 4. 20 : 30. 46 (187).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐφ' ἁπάσης γὰρ ἀριθμητικῆς ἀναλογίας τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα ἐξισοῦται τῷ τῶν μέσων· ἐὰν ὖν τοῦδε τοῦ ἀθροίσματος ἕτερος τῶν ἄκρων ἀφαιρεθῇ,

λειφθήσεται πάντως ὁ ἕτερος· εἰ δέτις μέσος, λειφθήσεται ἄτερος τῶν μέσων.

208. Εἰ δὲ πρόκειται συνεχῆ χηματίσαι ἀναλογίαν (191) τῶν δύω δοθέντων ἄκρων, συνάψας ταῦτα, τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος ἕξεις μέσον ἀνάλογον· θατέρου δέ τῶν ἄκρων καὶ τοῦ μέσου ἀναλόγου δοθέντων, ἀπὸ τοῦ μέσου διπλασιαθέντος ἀφελὼν τὸν δεδομένον ἄκρον, ἀπολήψῃ τὸν ζητούμενον ὅρον.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Δοθέντων ÷ 3 . 6 . 9, συνάψαντι 3 καὶ 9, τὸ τοῦ ἀθροίσματος 12 ἥμισυ, εἴτ' ἓν 6, ἔσται ὁ μέσος ἀνάλογος· ἐκεῖν ∴ 3 . 6 . 9.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἐπὶ ÷ 5 . 20 . 6· διπλασιαθέντος τοῦ 20, καὶ ἀπὸ 40 ἀφαιρεθέντος τοῦ 5, τὸ κατάλοιπον 35 ἔσται ὁ ζητούμενος ἄκρος ὅρος τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας ÷ 5 . 20 . 35 (191).

ΔΕΙΞΙΣ. Ἐπιχειρίζεται ἡ μέθοδος τοῖς προαποδεδειγμένοις, ὅτι πάσης συνεχοῦς ἀναλογίας ἀριθμητικῆς τὸ τῶν ἄκρων ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ διπλῷ μέσῳ (202).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Προόδου Ἀριθμητικῆς.

209. Πᾶσα ἀριθμητικὴ πρόοδος, εἴτε αὔξουσά ἐστιν (193), ἥτις προάγεσθαι ἐπ' ἄπειρον ἔχει, οἵα ἐστὶν ἥδε ἡ φυσικὴ τῶν ἀριθμῶν σειρὰ ÷ 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . κτ. ἢ γοῦν ∴ 2 . 5 . 8 . 11 . 14 κτ. εἴτε μειουμένη, ἥτις ἐν μὲν ὑπαρκτικοῖς ποσοῖς καταλήγει εἰς 0, ἐν δὲ λείψεσιν ἐπεκτείνεται ἐς ἄπειρον, οἵα ἐστὶν ἡ ÷ 5 . 4 . 3 . 2 . 1 . 0.