

γυμόντι ἐπὶ τέταρτον ἀρθῆ βαθμὸν, γιγνητέον τὸν ἀπὸ αὐτοῦ κύβου, ὃν πολλαπλασιασέον ἐπὶ τὴν αὐτὴν φύσιν. πασότητα· οὐ γάρ εἰκιτομώτερον, τὸ ἀπὸ αὐτῆς τετραγωνικόν τετράγωνον. (83)<sup>1</sup>; ὥσπερ τῶς. δὲ καὶ ἐπὶ τῶν καθετέρων βαθμῶν.

**ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.** Εἴ γένει δὲ σημαίνεται οὐ πάντας ποσότητος ἐπὶ τὸν τυχόντα βαθμὸν ἔξαρσις, γράφομένης ἐπὶ αὐτῆς εὐθείας, οἵτις πρὸς δεξιὰν ἐπιχαράσσεται τῷ ὅτῳ βαθμῷ δείκτης· ὅτως δὲ  $\alpha + \beta$ <sup>2</sup> τὸ τετράγωνον ἐμφανεῖ τὸ ἀπὸ  $\alpha + \beta$ . εἰώθαστι δὲ καὶ ὅτως αὐτὸς σημειώνεται  $(\alpha + \beta)^2$ . οὐ δὲ ἔκθεσις  $25^2 = 15625$ , δηλοῦται, οἵτις ἡ αὐτὸς 25 κύβος ἰσχεται τῷ 15625.

**Μέθοδος γενική τῆς εὑρίσκειν ἀπανταχεῖς τὰς βασιμὰς τὰς ἀπὸ παντὸς πολυωνύμων.**

106. Εὑρώσαντες οἱ ἀπὸ  $\alpha + \beta$  εὐρεθέντες κατὰ τὴν ἄδιη γενομένην θεωρίαν βαθμὸν:

$$A' \ 1\alpha^0 + 1\beta^0$$

$$B' \ 1\alpha^1 + 2\alpha^0\beta^1 + 1\beta^1$$

$$Γ' \ 1\alpha^2 + 3\alpha^1\beta^1 + 3\alpha^0\beta^2 + 1\beta^2$$

$$Δ' \ 1\alpha^3 + 4\alpha^2\beta^1 + 6\alpha^1\beta^2 + 4\alpha^0\beta^3 + 1\beta^4$$

ἔξεσαι δὲ παραθέσει τῶν διαφερόντων τῶν δε βαθμῶν σημειῶσαι τὰ ἔξητα.

107. α'. Βαθμὸς ἄπας δυωνύμων ποσῷ περιέχει τὸ συζυγὸν σὺν ἑνὶ, ὅσας περιέχει ὁ τάττος δείκτης μονάδας. Οὐ μὲν γὰρ πρῶτος ἀπὸ  $\alpha + \beta$  περιέχει ὄρος δύω, οὐ δὲ δεύτερος τρεῖς, οὐ δὲ τρίτος τέσσαρας κτ.

108. β'. Οὐ πρῶτος ὄρος α τῆς δυωνύμων φύσις μονάδα.

ζει ἐν τῇ ἀρχῇ τῶν τῆς βαθμῖς ὅρων· ὁ δὲ δεύτερος β μονάζει ἐν τέλει· πάντες δὲ οἱ μεσολαβεῖντες ὅροι εἰσὶ γινόμεναι ὑπὸ α τῷ β.

109. γ'. Οἱ κατὰ διαδοχὴν δείκται τῇ α τῷ β χωρᾶσι κατὰ γόμον ἀμετάτρεπτον· οἵτε συνεργοὶ ὥσπερ τῶν, πλὴν ὅτι ὁ τύτων διαφέρει τῇ τῶν δείκτῶν γόμῳ.

110. Οἱ μὲν δείκται τῇ α χωρᾶσι κατὰ τόνδε τὸν γόμον „,οἱ πρῶτοι δείκτης τῇ α ταυτίζεται τῷ τῆς βαθμῖς, πάντες δὲ οἱ λοιποὶ μέχρι τῇ ἔχοντες, ὃς εἰς 1, ἐλαττεῖν ταις φένται μονάδι· οἱ δὲ τῇ β χωρᾶσι τὴν ἐγαυτίαν· ὁ μὲν „,χάρ πρῶτος τῇ β δείκτης εἴσι 1, οἱ δὲ λοιποὶ πάντες „,φένται μονάδι ἐπαύξουται εἴς γε τὸν ἔχοντα, ὃς εἴσιν ὁ αὐτὸς τῷ τῇ βαθμῖς δείκτη.

111. δ'. Περὶ δὲ τῇ τῶν συνεργῶν γόμῳ, ὅ, τε „,πρῶτος τῇ ἔχοντας εἰσὶ 1· ὁ δὲ δεύτερος ὁ δείκτης εἴσι „,τῇ βαθμῖς· ὁ δέ γε τρίτος τὸ πηλίκον εἴσι, τὸ προϊόν „,ἐκ τῆς διαιρέσεως τῇ γινομένῃ ὑπὸ τῶν δύο πρώτων „,δείκτῶν α διὰ τῇ γινομένῃ ὑπὸ τῶν δύο πρώτων δεικτοῦ τῶν τῇ β· ὁ τέταρτος δὲ, τὸ πηλίκον εἴσι τῆς διαιρέσεως τῇ ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων δείκτων τῇ α γινομένη „,διὰ τῇ ὑπὸ τῶν πρώτων τριῶν τῇ β, τῇ ἐφεξῆς ὁμοίως· Τοιγαρῶν τύτων ἄπαξ ἐγνωσμένων τῶν δυοῖν γόμων, εὑρετῶς πάνυ εὑρεθῆσεται οἵσισται βαθμὸς ἀπὸ ποσότητος διωγύμα· κείσθω γὰρ εὑρετιν τὸν πέμπτον ἀπὸ α + β βαθμὸν· ἐκεν ἔτος περιέξει ἀναγκαῖως ὅρος ἔξ (107), οἰτινες, τηρημένη πρώτου τῇ κατὰ τὰς δείκτας γόμῳ (110), ἔσονται  $\alpha^5 + \alpha^4\beta^1 + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha^1\beta^4 + \beta^5$ · ἔξῆς ἐκτῇ περὶ τῶν συνεργῶν γόμων, ὁ μὲν πρῶτος τῇ ἔχοντας ἔσονται 1 (111), ὁ δὲ τῇ δευτέρᾳ ὅρᾳ ἔσαι 5· ὁ δὲ τῇ τρίτῃ ἔσαι τὸ γινόμενον  $5 \times 4$  ὑπὸ τῶν δύο πρώτων

των τε α δεικτῶν, διηρημένου διὰ τῆς ξ2 γιγομένης ὑπὸ τῶν δύο πρώτων δεικτῶν τῆς β, ὁ ἐσι, συνεργὸς τῆς τρίτης ὅρς ἔσαι ὁ 10. ὁ δὲ τῆς τετάρτης, ἔσαι τὸ γιγόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων δεικτῶν τῆς α, διαιρεθὲν διὰ τῆς γιγο-

μένης ὑπὸ τῶν τριῶν πρώτων τῆς β, εἰτ ὡν  $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3}$ , ὁς

ἔσαι ὥσαύτως 10. ὁ δὲ τῆς πέμπτης ἔσαι  $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5$ .

ὁ δὲ τῆς ἕκτης  $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 1$  ὁ ἄρα πέμπτος ἀπὸ α

$+ \beta$  βαθμὸς ἔσαι  $\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5$ .

112. Εἴ τῶν δε μέντοι τῶν παρατηρήσεων ὁ Νεύτων εὔρετο ἔκθεσιν, ἢ τύπον ἐν γένει συμβολικὸν, ἐν τῷ πάνυ ἀπόγως ἀναγνοῦτις ἀν πάντας ἔξης τῆς ὅρς παντὸς ἀπὸ διωγύματος ποσῆς βαθμοῦ, ἐκ τούτης εἶποι ὅσον τῷ τὴν ἔξαγωγὴν τῶν ξιζῶν, τετραγωνείων, κυβικῆς, τετάρτης κτ συμβολικῶν τε τῷ ἀριθμητικῶν, ἔξευπαριζούται· καλεῖται δὲ ὃτος ὁ τύπος διώγυμα τῆς Νεύτωνος.

113. Εἴσω μι δείκτης γενικὸς παντὸς ἀπὸ διωγύματος ποσῆς βαθμοῦ· ἔξι ὡν ὃν ἀρτίως εἶπομεν πάντας ἔξης τῆς ὅρς τῆς βαθμοῦ ἐμφανινετ ὁ τύπος ὃτος αμ + μαμ-1 β<sup>1</sup>

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1}{1 \times 2} \alpha \mu - 2 \beta^2 + \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2}{1 \times 2 \times 3} \alpha \mu - 3 \beta^3$$

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3 \times \mu - 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \alpha \mu - 4 \beta^4$$

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3 \times \mu - 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \alpha \mu - 5 \beta^5$$

$$+ \frac{\mu \times \mu - 1 \times \mu - 2 \times \mu - 3 \times \mu - 4 \times \mu - 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \alpha^4 \beta^6 \text{ κτ.}$$

Επεικῶς γὰρ ἐν τῷ τετραγωνισμῷ τῷ α + β αντικαταστάτος ἀντὶ μ τῷ 2 δείκτη τῷ δευτέρῳ βαθμῷ, ὁ

$$\begin{aligned} & \text{γενικὸς τύπος παρέχεται } \alpha^2 + 2\alpha^2 - \beta^2 + \frac{2 \times 2 - 1}{1 \times 2} \alpha^2 \\ & - 2\beta^2 + \text{όπου } \text{επει } \text{ἐν τῷ } \text{ἔχατω } \text{ὅρῳ } \alpha^2 - \beta^2 \text{ σὺν } \alpha^0 = \\ & = 1 \quad (59), \text{ καὶ } \frac{2 \times 2 - 1}{1 \times 2} = 1, \text{ ὥλος, ὁ } \text{ἔχατος } \text{ὅρος } \text{ εἶναι} \end{aligned}$$

$1 \times 1 \times \beta^2 = \beta^2$ . οἱ δὲ τρεῖς ὅτοι ὅροι, οἱ διὰ τῷ γενικῷ εὑρημένοι τύποι, εἰσὶ τὸ ἀπὸ α + β τετραγωνοῦ α<sup>2</sup> + 2αβ + β<sup>2</sup>, ταῦτον ὅπερ ἦν πρότερον ἄλλως εὗρηται.

Σητιθήτω δὲ διὰ τῷ γενικῷ τύπῳ ὃ ὁ τέταρτος ἀπὸ α + β βαθμός. εἰσαχθέντος ἦν 4 ἀντὶ μ τραπήσεται ὁ τύπος εἰς τόνδε α<sup>4</sup> + α<sup>4</sup> - β<sup>2</sup> +  $\frac{4 \times 4 - 1}{1 \times 2} \alpha^4 - \beta^2$ .

$$+ \frac{4 \times 4 - 1 \times 4 - 2}{1 \times 2 \times 3} \alpha^4 - 3 + \frac{4 \times 4 - 1 \times 4 - 2 \times 4 - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

α<sup>4</sup> - 4β<sup>4</sup>, ὃς διὰ γενικῆς γίνεται α<sup>4</sup> + 4α<sup>3</sup>β + 6α<sup>2</sup>β<sup>2</sup> + 4αβ<sup>3</sup> + β<sup>4</sup>. Εἳναν δὲ ἐπὶ τῷ ἔκτῳ ὅρᾳ τῷ γενικῷ τύπῳ εἴθη μ = 4, φανήσεται ἄπας ὁ ἀριθμητὸς ὁ καταλήγων εἰς - 4 τῷ ιλάσματος, ὁ πολλαπλασιάζει τὸ ακ-β<sup>5</sup>, γινόμενος 0, καὶ δὴ ἢ ακ-5β<sup>5</sup> εξευγενένη. ἀρα τῷ τετάρτῳ βαθμῷ ὁ ἔκτος ὅρος εἰς μηδέν, ὁ εἶναι ὁ ἀπὸ α + β τέταρτος βαθμὸς καταλήγει εἰς τὸν πέμπτον τῷ τύπῳ ὁροῦ, ἔνθα τὸ β ἔχει δείκτην τὸν 4.

114. Εὐγένει δὲ ἄπαντα βαθμὸν ἀπὸ α + β καταλήγει δεῖ, ἔνθα τὸ β εὑρίσκεται ἔχον τὸν δείκτην τῷ βαθμῷ. ἔπειται δὲ ταῦτι ἢ εἴδει ὡν ἔφθημεν εἰπόντες, ὅτι

τὸ μὲν ἀπὸ δυωνύμων τετράγωνου ὃει ἔχει ὅρος τρεῖς, ὁ δὲ κύβος τέσσαρας κτ.

**115. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.** Καίπερ ὁ ἐκτεθεὶς ἀγωτέρῳ γενικὸς τύπος ἐσ τὸν ἕκτον ἀφίκεται μόνου βαθμὸν, ἀ πονητὶ ὅγει προαγαγεῖν αὐτὸν δυνάμεθα μέχρις ἀπόντος βαθμῶν.

**116. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.** Ήνίκα δὲ διαφοραῖ συμβό.

λῶν εἰμι φιλοχωρῶσι τῷ ὀιζικῷ πολυωνύμῳ, τιθέναι ἔχοντεν τὰ ἀνήκοντα ἐκάτιῳ ὅρῳ σύμβολα, ἐξ ὧν παρετηρήσαμεν (103).

**117. ΣΧΟΛΙΟΝ Γ'.** Εἴςω τετραώνυμου τὸ  $\alpha + \xi + \pi + \rho$  δυνατὸν ὅγει τὰς μὲν τρεῖς ὅρος  $\alpha + \xi + \pi$  ἀντὶ  $\alpha$  ἐκλαβεῖν, τὸν δὲ τέταρτον  $\rho$  ἀντὶ  $\beta$ . Εἴμφαντι ἄριτις ὅτις ἐν γένει ἀπαν πολυωνύμου τὸ δυώνυμον  $\alpha + \beta$ . Καὶ δὴ ἡ ἄρτι ἐκδεδομένη μέθοδος, καὶ μὴν καὶ ὁ τῆς Νεύτωνος τύπος ἐφαρμοσθῆναι δύναται παντὶ εἰδει πολυωνύμων πρότυτος· κείσθω γὰρ εὑρεῖν τὸ ἀπὸ τῆς τεθέντος τετραώνυμων τετράγωνου ὥκεῖν τῶν  $\xi + \pi + \rho$  ὅρων ἀνθ' ἐνὶς λιγθέντων ἔσαι πρῶτου  $\alpha^2 + 2\alpha(\xi + \pi + \rho) + (\xi + \pi + \rho)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\xi + 2\alpha\pi + 2\alpha\rho + (\xi + \pi + \rho)^2 \cdot \beta'$  (τῆς τριώνυμων διαιρεθέντος εἰς  $\xi$  καὶ  $\pi + \rho$ )  $\alpha^2 + 2\alpha\xi + 2\alpha\pi + 2\alpha\rho + \xi^2 + 2\xi(\pi + \rho) + (\pi + \rho)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\xi + 2\alpha\pi + 2\alpha\rho + \xi^2 + 2\xi\pi + 2\xi\rho + (\pi + \rho)^2 \cdot \gamma'$ . (τῆς δυωνύμων εἰς τὰς δύο αὐτῆς ὅρως  $\pi$ ,  $\rho$  διαιρεθέντος)  $\alpha^2 + 2\alpha\xi + 2\alpha\pi + 2\alpha\rho + \xi^2 + 2\xi\pi + 2\xi\rho + \pi^2 + 2\pi\rho + \rho^2 \cdot$  ὅπερ ἀν προκύψαι καὶ τῆς τετραωνύμων ἐφ' ἐπιτὸ πολλαπλασιασθέντος· τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον εὑρεθεῖ ἀν καὶ ὁ κύβος καὶ ἀπαν ἄλλος βαθμός ἀπὸ παντὸς πολυωνύμου.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

## Περὶ ῥίζων ἐξαγωγῆς.

118. Ποσότης, ἀφ' ἣς ὁ βαθμὸς γίνεται, ὅτις ἡκα-  
τε τῇ βαθμῷ ἔκεινος (78)· ὅτις μὲν τετραγωνικὴ, ἐὰν  
ὁ βαθμὸς ἡ τετράγωνος· κυβικὴ δὲ, ἢν ἡ πύθος, οὐ ἐξῆς  
ὕτως· ὁ γὰρ 3 ἔστι ῥίζα μὲν τετραγωνικὴ τῇ 9, κυβικὴ-  
δὲ τῇ 27, τετάρτη δὲ τῇ 81· ὀπαύτως τὸ αὐτὸν ῥίζας  
τετραγωνικὴ μὲν τῇ αὐτῇ, κυβικὴ δὲ τῇ αὐτῇ κτλ. ἐξαγω-  
γὴ τοινυν ῥίζης ὑδενὶ ἄλλῃ ἢ εὑρεσίς ἔστι ποσότητος, ἢτις  
ὑψώθεται εἰς βαθμὸν ὁμοίων μονον τῇ γιγταμένῃ ῥίζῃ ἀπέδωκε  
τὴν ποσότητα, ἀφ' ἣς ἐξαγεῖται τὴν ῥίζαν πρόκειται· ὕτως  
ἐξαγαγεῖται ἀπὸ 16τῇ τετράγωνος ῥίζαν εὑρεται ἔστι τὸν 4  
ἀριθμὸν, ὃς ὑψώθεται εἰς τετράγωνον ἐξήγεγκε τὸν 16.

119. Η̄ πάσης ῥίζης ἐξαγωγὴ συμβαίνεται τῷ  
✓, ὃ παρὰ τότε ῥίζικὸν σύμβολον ἡκείσει, ἐφ' οὐ-  
γράφεται ἀριθμὸς, τὸν βαθμὸν τῆς ῥίζης ἐμφαίνων, ὃς  
καλεῖται ἐπίσημον \*)· ἐπίσημον γάρ τῆς τετραγωνείς  
ῥίζης ἔστι 2, τῆς δὲ κυβικῆς 3, οὐ γάρ τῶς ἐξῆς· ὕτως ✓<sup>3</sup> 64

\*) Οὗτοι καλέσαιμοι ἔδοξε τὸν ἐπὶ τῷ ῥίζικῷ συμβό-  
λῳ τιθέμενον ἀριθμὸν, ἀντιδιασέλλοντι αὐτὸν τῷ ἐπὶ  
τῶν βαθμῶν, ὃς δείκτης ἡμῖν ὀνόμασαι· ὃσον δὲ τετρά-  
γεις μαρίσει τὰς παντοίας τῶν συμβολικῶν ποσοτή-  
των ἐκφράσεις, προιτέσσι δῆλον γενήσεται.

τὴν κυβικὴν ἐμφαίνει ῥίζαν τῆς 64·. μηδενὸς δὲ ἔποχτος τῷ ῥίζικῷ συμβόλῳ ἐπισήμα, ἐξαγωγὴ ἐννοεῖται ταῖς τῆς τετραγωνεύτῃς ῥίζῃς.

$\sqrt[2]{25}$  ἢ  $\sqrt{25}$ ,  $\sqrt{25}$  εὐ γένει δηλῶσι τὰς γ, μ. ῥίζας τῆς α ποσότητος.

120. Βαθμὸς τέλειος μὲν ὀνομάζεται η ποσότης, ἣτις παράγεται ἀκριβῶς ἀπὸ ποσότητος ἄτερης ὑψώθεσης ἐπ’ αὐτὸν τὸν βαθμὸν· 25 φέρει ἕπειν ὑπάρχει τετραγωνος τέλειος· ἀλλ’ ὁ ἀντὸς 25 ὑπάρχει κύριος ἀτελῆς, εἴγε ύδεις ὑπάρχει ἀριθμὸς ὅτε ὀλοχερῆς, γάτε, ὡς εὐ τοῖς ἐξῆς φανήσεται, κλασματίας, ὃς ἂν κυριεῖται διηγηθείη παραγαγεῖν τὸν 25.

121. Εὐτυχόντες ἦν βαθμῷ αὐτελεῖ, ἢ τὴν ῥίζαν θηρώμεθα, ἀρκεσθησόμεθα μόνον συμμένοντας τὴν ἐξαγωγὴν ὅτω, φέρε,  $\sqrt[3]{25}$ . Η γάτη ἐξαγαγόντες ἀντόθευ, διὰ τῆς αὐτίκαιας ἀποδώσομεν μεθόδῳ, ῥίζαν ὅσου ἀντὶς βέλοιτο ἐγγιζεσσαν τῇ ἴαληθεῖ, εἰς ὑπολογισμὸν ἀκριβειαν.

122. Επειδὴ δὲ ὑψημένα παυτὸς μονωγύματα εἰς βαθμὸν, πρῶτου μὲν ἐπ’ αὐτὴν αἱρεται ὁ συνεργὸς, εἶτα ὁ ἐφ’ ἑκάστῳ γράμματος δείκτης πολλαπλασιάζεται· ἐπὶ τὸν δείκτην τῷ βαθμῷ (82)· ἐπαγάγκες τὸν αὐτὸν ἐξαγαγεῖν μὲν τὴν συνεργήν ῥίζαν, διελεῖν δὲ τὸν παυτὸς γράμματος δείκτην διὰ τῆς ῥίζης ἐπισήμα τὴν μονωγύματα θηρώμενοις ῥίζαν.

ΤΠΟΔΒΙΓΜΑ. Ι<sup>η</sup>ν ἐξαγάγωμεν ἦν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῆς  $9\alpha^4\beta^2$ , πρῶτου λαμβάνομεν τὴν τῆς 9 τετραγωνικὴν ῥίζαν, ἣτις ἐσὶ 3, εἶτα διαιρεῖμεν διὰ 2

δπισήρε τετραγωνικῆς 4, 2 δείκτας, ὅθεν ἔξισι πηλίκα 2, 1 εύρισκομεν ὃν ὅτῳ 3α<sup>2</sup>β ρίζαν τετραγωνικὴν τῇ 9α<sup>4</sup>β<sup>2</sup>.

**123. ΣΧΟΛΙΟΝ.** Ήτε γένεσις τῶν βαθμῶν, οὐδὲν ἔξαγωγὴ τῶν ρίζῶν, δύο δοαι αὐτικείμεναι πράξεις, ἐκατέραις εἰς βασανισμὸν ξυντελεῖ τῇ ἐτέρᾳ ἐπίτε συμβολικῶν τῷ ἀριθμητικῷ ποσοτήτῳ· εὑρεθείσης γάρ ἀνωτέρω ρίζης τετραγωνικῆς 3α<sup>2</sup>β τῇ τετραγώνῳ 9α<sup>4</sup>β<sup>2</sup>, τετραγωνίσαυτες αὖθις τὴν αὐτὴν ρίζαν, οὐδὲν δύοντες τὸ αὐτὸ τετραγωνον 9α<sup>4</sup>β<sup>2</sup>, ἀσφαλῶς ἔξιχθαι τὴν ρίζαν συνάγομεν· ἢ γάρ τετραγωνίσαυτες τὴν 3α<sup>2</sup>β τῷ δύοντες γα<sup>4</sup>β<sup>2</sup>, ἔξαγοντες ἀπὸ αὐτῆς ρίζαν τῷ ἀπολαμβάνοντες αὖθις 3α<sup>2</sup>β, γινώσκομεν ως ἀσφαλῶς ἐτετραγωνίση.

Ἐτερα ὑπόδειχματα. Εἰς ἔξαγωγὴν τῆς τῇ α<sup>2</sup> τετραγωνικῆς ρίζης, ἐπειδὴ ρίζα τῆς ἐπισημένης εἰς συνεργὸν 1 ἔστι 1 (79) διαιρετέον τὸν 2 δείκτην τῇ α διὰ τῆς 2 ἐπισήμας, ὅθεν προκύπτει 2· ὅτως οὐδὲν τῇ α<sup>2</sup> τετραγωνικὴ ρίζα ἔστιν α<sup>1</sup> οὐδὲ α.

Εἰς ἔξαγωγὴν τῆς τῇ 3α<sup>2</sup>β<sup>2</sup> κυβικῆς ρίζης α'. ἔξακτέον τὴν ρίζαν τῷ συνεργῷ, ἥτις ἔστι 2. β'. διαιρετέον τὸς δείκτας<sup>2</sup>, οἱ διὰ τῆς ἐπισήμας 3· ἔσαι τὸν οὐδὲν τοιούτην κυβικὴν ρίζαν 2α<sup>2</sup>β<sup>3</sup>.

**124. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'.** Ήγίκειον δείκτης μὴ οὐδὲ τῇ ἐπισήμα διαιρέσιμος, συμανθίσεται μόνον οὐδὲ διαιρεσίς οὐδὲ τοιούτην τετραγωνικὴ τῇ α<sup>3</sup>. ρίζα ἔσαι α<sup>3</sup>. οὐδὲ τῇ α κυβικὴ  $\frac{1}{3}$ .

**125. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'.** Ήγίκειον μὴ οὐδὲ τῇ α<sup>3</sup>. οὐδὲ τῇ συνεργῷ οὐδὲ τῇ ποιογραφίσεται πᾶσα οὐδὲ ποσότης τῷ ρίζικῷ συμβόλῳ.

Εἶπειδὴ, ἐπὶ βαθμὸς ὑψηντες τὰ κλάσματα οὐ-

ρομεν τόγε αριθμητήν καὶ τὸν παρονοματήν (86), τοῦ  
υαγτίου ἄρα, ἵν' ὑπεξαγάγωμεν κλάσματος τὴν τυχέσσην  
ρίζαν, λαμβάνομεν τέτε αριθμητῆς καὶ παρονοματῆς τὰς ρί-  
ζας· ὅτως ἵν' εὔρωμεν τὴν τετράγωνην ρίζαν, τοῦ  
 $\alpha^2$   
 $\beta^2$ , εξάγομεν τὴν τὸ  $\alpha^2$  ρίζαν ἥτις ἔστιν  $\alpha$ , εἶτα τὴν

τὸ  $\beta^2$ , ἥτις ἔστι  $\beta$ , καὶ γράφομεν  $\frac{\alpha}{\beta}$  ρίζαν τὴν ζυτα-  
μένην· οὐδὲ δὲ λάβωμεν τὴν τὸ  $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$  κυβικὴν ρίζαν, θυ-  
ρώμεθα πρῶτον τὴν τὸ 8, ἥτις ἔστι 2, εἶτα τὴν τὸ 27  
ἥτις ἔστι 3, καὶ ὅτως ἀπολαμβάνομεν  $\frac{1}{3}$  κυβικὴν ρίζαν  
τὸ  $\frac{1}{27}$ .

### Περὶ εξαγωγῆς τῆς ἐν συμβολικοῖς πο- λυωνύμοις τετραγωνικῆς ρίζης.

126. Εἴσω  $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2$ ,  
Α, ἢ προτίθεται τὴν ρίζαν εξαγαγεῖν· ἐπεὶ ὅτι τὸ αὐτὸ-  
μονωνύμιο τετράγωνον ἔστι καὶ αὐτὸ μονώνυμον (82), οὐ τε-  
τραγωνικὴ ρίζα, οὐ πολλαπλασιαζεῖται ἐφ' ἑαυτῇ πα-  
ράγει τὸ Α, εὖλος ἔσαι πολυώνυμος· ἀλλὰ τῆς  
πολυωνύμιο ταύτης ρίζης τετραγωνισθεῖσης, ὁ πρῶτος ὅ-  
ρος εἰσήγεγκεν ἀκριβεῖς τὸ αὐτὸ τετράγωνον (90).  
Οὐ ἄρα τετραγωνικὴ τὸ  $\alpha^2$  ρίζα α ἔσαι ὁ πρῶτος ὅρος  
τῆς ρίζης· ὁ δὲ δεύτερος εἰσήγεγκε τῷ τετραγώνῳ τὸ  
δὶς γιγόμενον ὑπὸ τὸ πρώτης ὅρος α καὶ τὸ δευτέρης σὺν τῷ  
αὐτὸ τὸ δευτέρης τετραγώνῳ· ἐνορῶντες ἄρα τῷ Α πο-  
λυωνύμῳ,  $2\alpha\beta + \beta^2$ , συνάγομεν ὅτι  $\beta$  ἔστιν ὁ δεύτερος  
ρίζικὸς ὅρος· ὁ δέ γε τρίτος εἰσήγεγκε τὸ δὶς γιγόμενον

ὑπὸ τῶν δύο πρώτων καὶ τῆς τρίτης σὺν τῷ ἀπὸ τῆς τρίτης τετραγώνῳ· ἐπεὶ δὲ ἐν τῷ Α ἔσι γαγ + 2βγ + γ<sup>2</sup>, συμπεραίνομεν ὅτι γ ἔσιν ὁ τρίτος ὄρος· ἀλλὰ αὐτόν τετραγωνικέσσα ἀποδίδωσι τὸ πολυώνυμον Α, ἀληθῶς ἄρα ἔσιν αὕτη, ἵτις ἐξητεῖτο, οὐδὲν.

127. Περὶ δὲ τῶν προτακτέων μηνώνυμα, οὐ πολυωνύμα φίλια, συμβολαγ, ἔξεσαι ἐκ τῶν προειρημένων ἐπενεγκεῖν τὰ φίληα· ἂπας μονώνυμος, οὐ πολυώνυμος βαθμός, ἀρτικρίμα εύμοιρῶν δείκτες, ἀναγκαῖος περιέχει φίλας δύω· α<sup>2</sup> ἔχει φίλας τετραγωνικάς + α, καὶ — α (85). ὡς δ' αὕτως τετραγωνικὴ φίλα τῇ α<sup>2</sup> + 2αβ + β<sup>2</sup> ἀδὲν ἥττου ἔσιν α + β, οὐ — α — β· τῇ δὲ α<sup>2</sup> — 2αβ + β<sup>2</sup> ἕτε + α — β καὶ — α + β· ταῦτον ἔστι φίλτερον καὶ περὶ τῆς ἀπὸ δυωνύμων τετάρτης, ἕκτης ιτ. βαθμοῦ· ἀλλὰ γὰρ ἐπὶ τῶν περισσαρίθμων δείκτες βαθμῶν ταυτὸν ἐκριχτεῖ· κυβικὴ γάρ, φέρε, φίλα τῇ α<sup>3</sup> ἔστι μόνη οὐ + α, ὧκέτι δὲ καὶ οὐ — α

128. Εὐ γένει ἄρα φίληα φίληας ἀρτικρίμων ἐμφαίνομεν, φίλης ἐπιτήμων, πάντες οἱ ὄροι ἀδιαφόρων ἔσονται εἴτε φίληας ὑπαρκτικοί, εἴτε λείποντες· βαθμός δὲ ἀπὸ δυωνύμων παραγομένα φίληα, τὰ ὑπαρκτικὰ τοῖς λειπτικοῖς ἀγαμμάτιξ ἔχοντας σύμβολα, πρὸς τὸ δοκεῖν ὁ μὲν τῶν ὄρων, τεθῆσεται ὑπαρκτικὸς, ὁ δὲ λειπτικὸς.

129. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σαφέσι ἄρα, ὅτι ἐξαγαγεῖν ἀληθῆ φίλαν ἐκ ἔνεσι, τῇ βαθμῷ ἀτελῶς ἔχοντος, (120) ὅπερ γυναικήσεται παρατηρηθέντων τῶν πολλαπλασιαζόντων, οὐ πολλαπλασιαζομένων ποσῶν, εἰ ἄρα δύναιτο φίληικοι ὄροι ὑποτεθῆναι, καὶ τῇ πολυωνύμᾳ ἀγερευνωμένῃ, εἰ ἄρα περιέχοις ἀληθῶς πάντα τὰ γινόμενα, οὐ δεῖ ἀποδεῖναι πάντας τὰς φίληικας ὄρους. Εὐ γένει δὲ τῇ πολυω-

γύμις ἀτελῆς ὑπάρχοντος βαθμοῦ, ἄλις ἔσαι, ὡς εἴδεισαι,  
ἀπισημαίνει τὴν τῆς ρίζης ἐξαγωγὴν (117).

### Ἐξαγωγὴ ρίζης τετραγώνων ἀριθμητικῆς.

**130. Γράφουτες ὑπαλήλως πάντα τὰ κατὰ τάξιν  
προκύπτοντα, ἢ περιέχει ὁ ἀπὸ 235 τετράγωνος, ἢ ὁ  
ἀπὸ 200 + 30 + 5 (91) οὐ συάπτοντες αὐτὰ, εύρισκο.  
μεν τὸν 55225 τετράγωνον**

Νῦν δὲ, καταχωρισθέντων δεξιόθεν ἐ-	4,00,00
πὶ τὰ λαιὰ εἰς κατατομὰς ἀνὰ δύω, τῶν τε	1,20,00
κατὰ τὰ γινόμενα χαρακτήρων, οὐ αὐτῇ	9,00
τῇ Δ τετραγώνῳ, ὡς ἔνταῦθ' ὀρᾶται, τὸν	23,00
υἷν προσθόντες τῇ γενομένῃ συνάψει, συγ- γαγεῖν ἔξομεν τὰ ἐφεξῆς	,25
	<u>5,52,25.Δ</u>

ά. 4 ὁ ἀπὸ τῆς 2 πρώτης ὅρης τετράγωνος περιέχεται ἐν τῇ πρώτῃ πρὸς ἀριθμοὺς κατατομῆς τῇ Δ τετραγώνῳ κατὰ τὸν μονάζοντα ἀριθμὸν 5

β'. Τὸ λειψανον 1 τῆς πρώτης τῇ Δ κατατομῆς σὺν τῇ δευτέρᾳ 52, ἢ 152, περιέχεσι τὸ δὶς γινόμενον ὑπὸ τῆς πρώτης ρίζης ὅρης 2, οὐ τῇ δευτέρᾳ ρίζης ὅρης 3, εἴτ' ὅγει 12, σὺν τῷ ἀπὸ τῆς δευτέρης ὅρης τετραγώνῳ 9, εἴτ' ὅγει 129.

γ'. Αὐτοιρεθέντων ἀπὸ τῶν πρώτων δίω κατατομῶν, τῇ ἀπὸ τῆς πρώτης ρίζης ὅρης τετραγώνῳ σὺν τῷ δὶς ὑπὸ τῆς πρώτης οὐ τῇ δευτέρῃ γινόμενῳ, οὐ τῷ ἀπὸ τῆς δευτέρης τετραγώνῳ, εἴτ' ὅγει αὐτοιρεθέντος τῇ 529 ἀριθμῷ, τὸ 23 λειψανον συγάμα τῷ ἐν τῇ τρίτῃ κατατομῇ 25 περιέχει τὸ δὶς γινόμενον ὑπὸ τῶν δυοῖν πρώτων

ρίζικῶν ὅρων καὶ τῆς τρίτης 5 σὺν τῷ ἀπὸ τῆς τρίτης τῷδε τετραγώνῳ.

131. Εὐ γένει δὲ „ἐπὶ παυτὸς ἀριθμητικῆς τετραγώνας τὸ κατάλοιπον τῶν προτέρων κατογομῶν, ἀφοῦ ἔντοι εὑρισκόμενα, τὰ χρετικῶς ἔχοντα πρὸς τὰς ἄρτι εὑρισκέντας ρίζικές ὅρους, εἰ δήτι καὶ κατελειπται, συνάμα τῇ καταγομένῃ κατομῇ, περιέχει φέτος τὸ διὸ γινόμενον ὑπὸ τῶν εὑρεθέντων πρὸ μικρῷ ρίζικῶν ὅρων, καὶ τὴν ρίζικήν ὥρα, τὴν ἀντισοιχεῖτος τῷδε τῇ γεωνί καταχθεῖ. „Γιαν κατομῇ σὺν τῷ ἀπὸ τῷδε τῇ ὥρᾳ τετραγώνῳ.“ Εὐτεῦθεν ἄρα ἐκπιγάζει ή ἐφεξῆς μέθοδος.

132. Εἶπος ἐξαγωγῆς τετραγωνείας ἀριθμητικῆς ρίζης, αἱ διελε τὰς χαρακτῆρας τῆς ἀριθμῆς εἰς κόμματα ἀνὰ δύω, δεξιόθεν ἐπὶ τὰς ἀριστερὰ προσώπου.

β'. Εξάγαγε τὴν ρίζαν τῆς μεγίστης τετραγώνας περιεχομένης ἐν τῷ πρώτῳ κατὰ τὰ λαϊκά κόμματα, γράψας ὑπὸ αὐτὸς τὸ κατάλοιπον, εἴπερ εἴη.

γ'. Κατάγαγε τὰς τῆς δευτέρου κόμματος χαρακτῆρας, καὶ διὰ τῆς διπλᾶς τῆς ἄρτι εὑρισκέντης ρίζης διελε τὸ κατάλοιπον, συγχυμένον τῷ κατηγορεῖντος κόμματι· διὰ δὲ τῆς εὑρεθέντος πυλίκα πολλαπλασίασον τὸ διπλᾶν τῆς πρὸ μικρῷ ληφθείσης ρίζης, καὶ τῷ γινομένῳ σύναψον τὸ ἀπὸ τῆς εὑρεθέντος τῷδε πυλίκα τετράγωνον· καὶ μὲν τὸ ἀθροισμα τῷδε τῇ γινομένῃ καὶ τῷδε τῇ τετραγώνῳ μὴ ὑπερέχῃ τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, γράψου εἰς ρίζαν τὸ εὑρεθὲν πυλίκον· ἀντὶ δὲ ὑπερέχη, ἐλάττα φέτος τὸ πυλίκον μονάδι, εἴς τὸν τὸ ἀθροισμα μὴ ὑπερκένται τέτων· ἀφελών εἴτα τῇ καταλοίπῃ καὶ τῷδε καταχθέντος κόμματος τὸ μὴ ὑπερέχον τόδε ἀθροισμα, ὑπόγραψου τὸ κατιγόν λειψανον.

δ'. Καταγαγε τὸ τρίτου κόμμα, καὶ διπλασιάσας τὸ ἀθροισμα τῶν δυετῶν εὐρημένων ῥίζῶν, πράττε ὡς καὶ ἐπὶ τᾶς δευτέρας, καὶ ἔξῆς ὠσαύτως.

**133. ΣΧΟΛΙΟΝ.** Ο<sup>κ</sup> πρῶτος πρὸς ἀριστερὰν χαρα. κτὺρ ἀριθμέτινος, οὐκοτιθεται ῥίζα ἄλλα, παραβαλ. λόμενος πρὸς τὸν δευτέρον, ἐμφαίνει δεκάδας, οἱ δὲ δύω πρῶται, παραβαλόμενοι πρὸς τὸν τρίτον κτ. Εὔτεῦθεν ἄρα εὐεξαγωγῇ ἀπάσης ῥίζης χρώμενοι γυνομένωτιν ὑπὸ τῆς πρὸ μικρῷ εὐρεθείσης ῥίζης πρὸς εὔρεσιν τῆς ἐφεξῆς ῥίζικῆς χαρακτῆρος, ἀπογεμμευ αὐτῇ τὴν δεκάδων δύναμιν, ὑποτιθέντες κατὰ δεξιὰν τὸ ο

**ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Α'**. Κείωθω εξαγαγεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῆς 55225· α. ἐν ἐκ δεξιῶν ἐπὶ τὰ λαικά χωρῶν δίελε αὐτὸν εἰς κόμματα ἀνὰ χαρακτῆρας δύω ἔκαστον ὡς ἔνταῦθα καταφαίνεται.

β'. Ο<sup>κ</sup> μέγιστος τετράγωνος περιεχόμενος ἐν τῷ πρώτῳ πρὸς ἀριστερὰν κόμματι, τῷ 5, ἔσιν ὁ 4, ἐτετραγωνικὴ ῥίζα ἔσι 2· γράψου ἐν τὸν 2 ἐπὶ τῆς ῥίζης, τὸν δ' ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον 4 ἀφελε τῆς 5· τὸ δὲ κατάλοιπον 1 ὑπόγραψου τῷ 4

	5,52,25
4	235
152	
129	
2325	
2325	
0	

γ'. Καταγαγὼν τὸ δευτέρον κόμμα γράψου πρὸς δεξιὰν τῆς καταλοίπει 1· γενήσεται ἐν 152· διπλασιάς δὲ τὴν ἄρτι εὐρημένην ῥίζαν 2 (ἰπομηθεὶς πρῶτον, ὅτι 2 ἐμφαίνει 20 (133), ἐν τὸ διπλεύεσι 40) δίελε διά 40 τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ κατηγορεύοντι κόμματι, εἴτ' ἐν 152· τὸ δὲ 3 πηλίκον, πρὸν ἦ προσθῆς ὡς δευτέρον μέρος τῆς ῥίζης, βασάνισον ὅτω: πολλαπλασιάσον τὸ διπλεύ τῆς ἄρτι εὐρημένης ῥίζης, εἴτ' ἐν 40 ἐπὶ 3· οὕτω

προκύψει 120, ὃ πρόσθετος τὸν ἀπὸ τητράγωνου 9° ἐπειπερ τὸ 129 ἄθροισμα ἔχει ὑπερβαίνει τὸ τῆς καταλογίας καταχθέντος κόμματος ἄθροισμα 152, τὸν μὲν τοῦτο ὡς δεύτερον ὅρον τῆς ῥίζης, τὸν δὲ 129 ἀφαιρεῖ τὴν 152, ὥστε λειφθῆσθαι 23.

3. Πρὸς δεξιῶν τῶν καταλογίων 23 γράψας τὸν τρίτον ὅρον, εἴπεις 2325° διπλασιάσας, δὲ τὴν αὐρυμένην ῥίζαν 23, εἰπεῖν 230 (133) διὰ 460 διελε τὸ κατάλογον σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, εἴτε ἐν τὸν 2325° τὸ δέ 5 πηλίκου βασάνισον αὗθις ὅτῳ πολλαπλασιάσαν 460 ἐπὶ 5, ὥστε προκύψει 2300, ὃ σύναψον τὸν ἀπὸ 5 τητράγωνου 25° ἐπειδή δὲ τὸ ἄθροισμα 2325 ἴσηται ἀκριβῶς τῷ καταλογῷ σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, τίθεις τὸν τρίτον τῆς ῥίζης ὅρον τὸν 5° ἐπειδή δὲ ἀφαιρέσει τοῦ 2325 ἀπὸ 2325 μηδὲν καταλείπεται, εἴσιν ἄρα ὁ 235 ῥίζα τητράγωνικὴ ἐντελής τῇ 55225.

134. Βάσανας τῆς πράξεως. Τητραγωνικεῖς γὰρ ὁ 235 ἀποδίδωσιν αὗθις τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 55225.

135. Δετῆς τῆς μεθόδου ἐπειδήπερ ἐν γένεσι τὸ κατάλογον τῶν προτέρων κομμάτων, εἴτι καταλειφθεῖ τύχοι, σὺν τῷ προσεχεῖ κόμματι, ἐπάναγκες ἐφ' ἐκάστης πράξεως περιέχειν τὸ διε γιγόμενον ὑπὸ τῶν δύο προτέρων ῥίζικῶν ὅρων καὶ τῇ 230 γιγαντεύει τὸν τῷ αὐτὸν διπλεῖ τῷ διπλεῖ τῷ κόμματος καὶ τῷ καταλογῷ, εἴτι εἴη, διὰ τῷ διπλεῖ τῷ προευρυμένων ῥίζῶν, ἀπολαμβεῖν προσήκει πηλίκου, ὁ μήτε πλεονεκτοίη, μήτε ἐλαχτοῖτο τῇ 230 γιγαντεύει τῷ διπλεῖ τῷ κόμματος (Ἄριθ. 108). Ἑκατοντάριχτον τῶν κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν μέθοδον γιγαντούμενων ῥίζικῶν ὅρων γάρ τοι ἐλάχτων 2

χτε, μείζων λαμβάνεται, ἢ ὅσον ἀπόχρη· ἀλλως γὰρ,  
ἐπείπερ οἱ ἄλλοι δίζικοι ὄροι ἐκ εἰσὶν ἐλάχττις, ὁ μείζων  
ἢ ὅσον ἔδει υποτεθεὶς ποιῆσει τὸν ὅλην δίζαν τῇ δικαίᾳ  
μείζουσε· ἀδύνατον ἄρα χτες ἀφελεῖν τῇ ἀριθμῷ, ὃ τὴν  
δίζαν θηρώμεθα, πάντα τὰ κατὰ τάξιν γινόμενα, ἢ συ-  
τιθέασι τὸν ἀπ' αὐτῆς τῆς δίζην τετράγωνον, τῷθ' ὅπερ  
ἀπκρατήτως βύλεται ἢ προεκτεθεῖσα μέθοδος· ὅλη ἄρα  
ἢ τετραγωνειοσ δίζα, ἢ τῇ εἰρημένῃ μεθόδῳ ἀπολαμβανο-  
μένη, χτε μείζων, χτε ἐλάσσων ἔσεται, ἢ ὅσον ἀπαιτεῖ.

**ΤΣΙ Ο. Ε. Δ.**

**ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'.** Βύλεται τις περιφράξασθαι κῆ-  
πον, ὃς ἀν περιέχει ὄργικὰς τετραγωνικὰς 5184· πόσας  
ἄρα δει ὄργικὰς θεῖναι εἰς πλευρὰν τῆς κήπου; ἢ ἡ γιγταμένη  
πλευρὰ ἔσαι ἢ τετραγωνικὴ δίζα τῇ 5184.

(Αριθ. 153)· ἐπ' ἔξαγωγῇ τοίνυν 51, 34 |  
ταύτης, α'. διηρήσθω ἀνὰ δύω χαρακτή- 49 | 73  
ρως ὁ 5184· β'. ὁ μέγιστος τετράγωνος 284  
τῶν περιεχομένων ἐν τῷ πρώτῳ κόμματι 254  
πρὸς ἀριστερὰν 51, ἔσιν ὁ 49, ὃς ἡ ἔσιν  
ζα 7 γεγράφθω ἰδίᾳ· ὁ δὲ ἀπὸ 7 τε-  
τράγωνος 49 ἀφηρήσθω τῇ 51, ὅθεν ἔσαι κατάλοιπον

2· γ'. κατὰ δεξιὰν τῆς καταλοίπου γεγράφθω τὸ δεύτε-  
ρου κόμμα 84· διπλασιασθέντος δὲ τῇ 7, εἴτ' ὡς τῇ 70·  
(133) διηρήσθω διὰ 104 ὁ 284· τὸ δὲ 2 πυλίκου βε-  
βασικούσθω· πολλαπλασιασθεῖσα ὡς ἡ διπλῆ προηγηματένη  
δίζα 140 ἐπὶ τὸ πυλίκου 2, δίδωσι 280, ὡς προεθέντος τῇ

ἀπὸ 2 τετραγώνων 4, ἐπεὶ τὸ ἀθραισμα 284 ἔξισται ἀκρι-  
βῶς τῷ καταλοίπῳ μετὰ τῆς καταχθέντος κόμματος, εἴτ' ὡς  
284, γεγράφθω δεύτερος ὄρος τῆς δίζην 2· εὑριται ἄρα ἔσ-  
ιζα τελεία τετραγωνικὴ τῇ 5184 ὁ 72, ὃς ἔσιν ἐπὶ οὐκ-

ματισμῷ ήτηκε, 5184 τετραγωνικὰς ὁργυάς περιέχοντος, ἐκάση πλευρᾶς μῆκος ἀποδάναι χρὴ ὁργυάς 72· καὶ γὰρ πολλαπλασιασθεῖσῶν ὁργυῶν 72 μῆκος ἐπὶ 72 πλάτους τῶν τῆς ζητευμένης χωρίς, εὑρεθήσονται περιεχόμεναι 5184 ὁργυάς τετραγωνοί.

**136. ΣΧΟΔΙΟΝ.** Οὕτω τὸ διπλῶν τῆς προευρημένης ὁργῆς μετίζου ἡ τῆς καταλοίπε, εἰ εἴη, σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, τιθέσθω οἱ ὁρίζα τῆς καταχθέντος αὐτάκινος κόμματος· εἰ γὰρ μὴ εἴη οἱ ζητάμενος ὁρίζικὸς ὄρος, ἔνω ἄλλος τις, φέρετεν, 1· δετ ἄρα τὸ κατάλοιπον μετὰ τῆς καταχθέντος κόμματος περιέχειν τὸ δὶς γιγόμενον ὑπὸ τῆς προτέρας ὁργῆς ἢ τῆς 1 σὺν τῷ ἀπὸ 1 τετραγώνῳ (131)· ἔστιν ἄρα τὸ κατάλοιπον μετὰ τῆς καταχθέντος κόμματος μετίζου, ἡ τὸ διπλῶν τῆς προευρημένης ὁργῆς, ὅπερ κατὰ τῆς ὑποθέσεως· διὰ τὸν αὐτὸν δὲ λόγον, α. θετέον τῇ ὁρίζῃ τοσαῦτα οἱ, ὅσαι ὑπάρχει κόμματα τῆς μονάδος ἐλάττω· β'. εἰ τὸ ἔχοντον τῆς καταχθέντος ἀριθμὸς κόμματος μὴ ἐξικανοίη, δείκνυσιν ὅτι ὁ ἔχοντος ὁρίζικὸς ὄρος ἔσαι ο.

**ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ.** Κείσθω γὰρ λαβεῖν τὴν τετραγωνικὴν ὁργὴν τῆς 118810000· ἡ ἦν ὁρίζα τῆς μετίζους τῶν· ἐν τῷ πρώτῳ κόμματι περιεχομένων τετραγωνῶν σεσυμειώσθω ἵδια· ἐπεὶ δὲ τὸ διπλῶν τῆς ὁργῆς 1, ἡ 10 (133), εἰτ' ἦν 20, ἐκ ἐμπεριέχεται τῷ 18, γράψας ὁργὴν 0, κα-  
τάγαγε τὸν 81· διὰ 
$$\begin{array}{r} 1,18,81,00,00 \\ \hline 1 & | \\ 01881 & | \\ 1881 & \\ 00000 & \end{array}$$
  
δὲ τῆς ἀρτί εὑρημένης ὁργῆς 10, ἡ 100, δι-  
πλασιασθεῖσης, καὶ γε.  
νομένης 200, διελε τὸν 1881· ἐπεὶ δὲ τὸ πυλίκου 9 βα-

αγιωθὲν εὑρίσκεται καλῶς ἔχον, ἀφαιρέσει δὲ καταλεῖ.  
πεται ο, κατάγαγε ἐξῆς τὸ κόμμα οο, ὅπερ ἐπεὶ μήδ  
ἄκαξ περιέχει τὴν εὐρεθῆσαν ρίζαν, γράψω προσεχῆ  
ρίζαν ο, ὡσαύτως δὲ ψευτερού ο περὶ τὴν ἑφεξῆς κόμμα.  
τος οο· ἢ ἄρα ὀλικὴ ρίζα τῇ 118810000 ἔστι 10900.

### Περὶ τῆς ἐν συμβολικοῖς πολυωνύμοις ἐ- ξαγωγῆς τῆς κυβικῆς ρίζης.

**137.** Αὐτακαλεσμένοις τὰ ἀλληλεχῆ γινόμενα, ἂν  
περιέχει ἄπας ὕρος κυβιζομένα πολυωνύμα, εὐχερεῖς ἔσαι  
κατανοῆσατε καὶ εἰς τριῶν αἴγαγετην τὴν ἑφεξῆς θε-  
ωρίαν.

Ἐστιν γὰρ  $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 + 3\alpha^2\gamma +$   
 $6\alpha\beta\gamma + 3\beta^2\gamma + 3\alpha\gamma^2 + 3\beta\gamma^2 + \gamma^3$ , Ρ, ἐπερόκειται  
τὴν κυβικὴν ρίζαν λαβεῖν. ὀρῶντες ἐν ἀρχῇ αὐτὸν ἀπὸ  
α κύβου, ὑπολέωται δυνάμεθα ὅτι α ἔστιν ὁ πρῶτος ρίζικὸς  
ὅρος.

Ο δεύτερος ὕρος παρέχει τὸ ὑπὸ  $3\alpha^2$  ψευτέον τῷ δευτέρῳ.  
εἰς ὕρος γινόμενον (100). ὀρῶντες τοίνυν  $3\alpha^2\beta$ , ἐκ τέτοιας  
συνάγομεν ὅτι β δύναται εἶναι ὁ δεύτερος ρίζικὸς ὕρος ὁς.  
τις παρέχει ὀλικῶς  $3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$  (ἀντ.). εἰς εὔρε-  
σιν δὲ τῇ τρίτῃ ρίζικῇ ὕρος συεπτέον ἔτως: ὁ τρίτος ὕρος  
παρέχει τὸ ὑπὸ  $3\alpha^2$  ψευτέον τῷ τρίτῳ αὐτῷ γινόμενον. ἐκ πρώ-  
της ἀριθμητικῆς τῇ  $3\alpha^2\gamma$  συνάγεται ὅτι γ ἔστιν ὁ τρί-  
τος ὕρος. ἀλλὰ γὰρ παρέξει ὅτος α' τὸ τρίτος τετραγω-  
νον τὸ ὑπὸ τῷ προλαβόντας δυωνύμα α+β, ἐπαγχθὲν ἐπὶ  
τὸν τρίτου ὕρον, ἢ  $3\alpha^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma + 3\beta^2\gamma$ . β'. τὸ τρίτος  
γινόμενον ὑπὸ τῶν δύο προτέρων ὕρων, ψευτέον τῷ ὑπὸ τῇ  
τρίτῃ τετραγωνῷ, εἴτ' ἐν  $3\alpha\gamma^2 + 3\beta\gamma^2$ . γ'. τελει-

ταῖς τὸν ἀπὸ τῆς τρίτης κύβου γ<sup>3</sup>. ὅτας ἄρει κυβικὴ ὁμοία  
τῇ προτεθέντος πολυωνύμᾳ Ρ ἔστι αὐθεντική· κυβιθέντος  
γὰρ τότε, εὑρεθήσεται αὐτὸς ὁ Ρ κύβος

### Ἐ Υ Αριθμοῖς.

138. Οὐκ ἀξιούτελὲς ἔσαι ἔχειν ἃ εἰ πρὸ ὁ φθαλμῶν τὸν  
ἔξις πύγακο, περιέχοντα τὺς ἀπὸ τῶν ἀπλῶν ἀριθμῶν κύβους

φίλατι	1	2	3	4	5	6	7	8	9
κύβοι	1	8	27	64,	125,	216,	343,	5 <sup>12</sup> ,	7 <sup>29</sup>

Διαιρεθέντων ὅνεις κόμματα ἀνὰ τρεῖς χαρακτήρας  
περιέχοντα δεξιόθεν ἐπ' ἀριστερὰ τῶν ἀληθεχῶν γινομέ-  
υσι, ἀ τεριέχειν ἀνάγκη τὸν ἀπὸ 725, ἢ 700 + 20  
+ 5 κύβου, ἀσαύτως δὲ καὶ αὐτῆς τῆς κύβου Γ, καθ' ὃν  
ἐνταῦθα ὀρᾶται τρόπου,

139. Εἴδεται ἐπικαρατυρεῖν	343,000,000
τῷδε τῷ ἀριθμῷ, ὡς καὶ ἐπὶ παντὶ παντὶ	29,400,000
ἕτερῳ, ὅτι ὁ ἀπὸ τῆς πρώτης φίλικῆς	840,000
ὅρα κύβος περιέχεται ἐν τῷ πρὸς ἀ- ριστερὰν πρώτῳ κόμματι τῆς Γ κύβου.	8,000
καὶ ἐν γένει, εἴτι: λειφθεῖ μετὰ τῆς	7,776,000
ἀφαιρεσιν ἀπὸ τῶν προτέρων κομμά- των, τῶν πρὸς αὐτὰ ἀπογεμομένων	54,000
προκυπτόντων, τετὶ τὸ κατάλοιπον μετὰ τῆς γεωσὶ κατα- γομένης κόμματος, περιέχει, ἀ. τὸ τρίς γινόμενον ἐκ τῆς	125
τετραγώνης, τῇ ἀφ' ὅλης τῆς προευρημένης φίλικης, καὶ τῇ ἐφε- ξῆς ὅρᾳ. β'. τὸ τρίς γινόμενον ὑφ' ὅλης τῆς προευρημέ- νης φίλικης, καὶ τῇ τετραγώνῃ τῇ ἀπὸ τῆς ἐφεξῆς φίλικῆς ὅ- ρᾳ. γ'. τὸν ἀπὸ τῆς ἐφεξῆς φίλικῆς ὅρᾳ κύβον. ἐντεῦθεν ἄριτ ἀποισόμενος τὴν ἔξις μέθοδον.	381,078,125 Γ

140. Τὸν ἔξαχθη ἀριθμὸν οὐκέτι κυβικὴν ὁίζει, ἀλλὰ διηρήσθω ὁ ἀριθμὸς ἐκδεξιῶν ἐπὶ τὰ ἀριστερὰ προϊόστην εἰς κόμματα, τρεῖς ἕκαστου περιέχοντα χαρακτῆρας. β'. ἔξαχθω ἡ κυβικὴ ὁίζει τὸ μείζονος τῶν ἐν τῷ πρώτῳ πρὸς ἀριστερὰν κόμματι περιέχομενων κύβων, τῷ ἀφηρήθω τῷδε τῷ κόμματος ὅτι τῆς ὁίζης τῷδε κύβος. γ'. ἐν γένει δὲ, τῷ καταλοίπει, εἴπερ εἴη τι, συνάμα τῷ καταγομένῳ, διαιρεθέντος διὰ τῷ τριπλῷ τετραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς προευρηκέντης ὁίζης, εἰλήφθω τὸ τρίς ὑπὸ τῷ δε τῷ τετραγώνῳ, τῷ τε ἐκ τῆς διαιρέσεως προκύψαντος πηλίκης γυνόμενου, φέρεται συνήφθω τὸ τρίς ὑφ' ὅλης τῆς προευρηκέντης ὁίζης, τῷ τοῦτο τῷ πηλίκης τετραγώνῳ γυνόμενον σὺν τῷ ἀπὸ τῆς πηλίκης κύβῳ. τῷ εἰ μὲν τὸ ἄθροισμα τό δε μὴ ὑπερέχῃ τῷ καταλοίπει σὺν τῷ κατηγμένῳ κόμματι, γεγράφθω ὁίζει τὸ πηλίκου· ὑπερέχοντος δὲ, ηλαττώθω τὸ πηλίκου μονάδι, εἰστ' αὐτῷ μὴ ἡ μείζου τῷ δικαίῳ τὸ ἄθροισμα.

**ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ** Κείσθω εὑρετικὸν τὸν κυβικὸν ὁίζαν τῷ ἀριθμῷ 381078125 ἀλλά. Ἐν διελε τὸν ἀριθμὸν, ὡς ἐν ταῦθ' ὁρᾶται. β'. ἐπειδὴ ὁ μείζων τῶν τῷ πρὸς ἀριστερὰν πρώτῳ ἐμπεριέχομενων κόμματι κύβων ἐκ τῷ προεκτεθέντος τῶν κυβικῶν ἀριθμῶν πίνακος ἔστι 343, γράψον ἕδιστη τὴν ὁίζαν αὐτῷ 7, τὸν δὲ 343 κύβον ἀφελῶν τῷ 381, ὑπόγραψον αὐτῷ τὸ κατάλοιπον

381.γ'. πρὸς δεξιὰν τῷ καταλοι-	<u>381,078,125  </u>
περιγράψας τὸ δεύτερον κόμ-	343   725
μη 078, διὰ τῷ τριπλῷ τε-	38078
τραγώνῳ τῷ ἀπὸ τῆς πρευρη-	30248
μέντης ὁίζης 7, εἴτ' ἐν 70, ὥστε	7830125
διὰ 14700 διελε τὸ κατά-	7830125
λοιπον σὺν τῷ κατηγμένῳ κόμ-	0

ματι, εἰτ' ὧν 38078· τὸ δὲ ἐγτεῦθεν πηλίκου, εἰ ἀλιθὸς εἰνὶ ρίζα, βασάνιστον τοιῷδε λόγῳ· αἱ πολλαπλασίαι σου ἐπὶ αἱ πηλίκου τὸν τριπλῶν τετράγωνον τὸν ἀπὸ τῆς πρὸ μικρῆς εὐρυμένης ρίζης, εἰτ' ὧν τὸν 14700, ὅθεν προκύψει 29400· β'. τῷδε τῷ γενομένῳ πρόσθετο τὸ τρίς γιγόμενον ὑπὸ τῆς ρίζης 7, εἰτ' ὧν 70, καὶ τῷ ἀπὸ 2 τετραγώνῳ 4 σὺν τῷ ἀπὸ 2 κύβῳ 8· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα 30248 ἔχει ἡ περέρχεται τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι, 2 ἐσιγήνῃ ἀλιθὸς ρίζα, ἢν γράψου ἐν τῷ ὀικείῳ αὐτῆς χώρῳ.

Τῷ τρίτῳ καταχθέντος κόμματος πρὸς δεξιὰν τῷ καταλοίπῳ 7830, λαβὲ τὸν ἀπὸ τῆς προευρυμένης ρίζης, εἰτ' ὧν 720, τετράγωνον, ὃς ἐσι 518400, δι᾽ ὧν τριπλασιαθέντος καὶ γενομένῳ 1555200 διελεῖ τὸ κατάλοιπον σὺν τῷ καταχθέντι κόμματι, εἰτ' ὧν τὸν 7830125, τὸ δὲ πηλίκου 5 βασάνιστον ὥστεύτως· πολλαπλασίαι τὸν τρίς συγενῶτα αὐτὸν ὅλης τῆς προευρυμένης ρίζης τετράγωνον, εἰτ' ὧν 1555200 ἐπὶ 5· τῷ δὲ ἐγτεῦθεν προκύπτοντι 7776000 πρόσθετο τὸ τρίς γιγόμενον. ὦφελης τῆς προευρυμένης ρίζης καὶ τῷ ἀπὸ 5 τετραγώνῳ 25, εἰτ' ὧν 54000 σὺν τῷ ἀπὸ 5 κύβῳ 125· καὶ ἐπειδὴ τὸ ἀποτελέμενον ἄθροισμα 7830125 ἴσχεται ἀκριβῶς τῷ καταλοίπῳ μετὰ τῷ καταχθέντος κόμματος, ἐσιγήνῃ ἀριθμὸς μὲν τελευταίας ρίζα 5· ἐσι 525· δὲ ἀκριβῶς 725· ὥλη κυνικὴ ρίζα τῷ 381078125.

141. Δεῖξε τῆς μεθόδου. Εργάζεται γὰρ καὶ αὕτη τῷ αὐτῷ λόγῳ, φέρε καὶ ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης (135) ὅτι ἕκαστος ρίζικὸς χαρακτὴρ, γέτε μείζων, γέτε ἐλάσσων, ἢ ὅσον ἀπόχρη διὰ τῆς δε τῆς μεθόδου λαχμβάνεται.

Βάσανος τῆς πράξεως· Κυβιώθεις γὰρ ὁ 725  
ἀποδεγματικός ὀφείλει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 381078125, ἐν τῷ  
κυβικῷ ἔθηραστάμεθα ρίζαν.

**142. ΣΧΟΛΙΟΝ.** Ήγίκ’ ἀν τὸ κατάλοιπον, εἴτι  
εἶη, σὺν τῷ κατηχμένῳ κόμματι ἔλαττον ἢ τῷ τριπλῷ  
τετραγώνῳ, τῷ ἀπὸ τῆς ἀρτι εὐρημένης ρίζης, τιθέωθα  
ρίζα, ὡσαύτως καὶ ὑπὲρ ἐκάστη μὴ ἀποχρῶντος κόμ.  
ματος.

**ΤΠΟΔΕΙΓΜΑ.** Εἰπὲ τὸ ἔξαγωγεῖν τῷ 3377000.  
125 τὴν κυβικήν ρίζαν· αἱ ὁ μείζων τῶν ἐν τῷ πρώτῳ  
κόμματι 3 περιεχομένων κύβων ἔστι 1, ἐν τῇ κυβικῇ ρί.  
ζαν γράψων ίδια (30)· ἀφαιρέσει τῷ κύβῳ 1 ἀπὸ 3 κα.  
ταλείπεται 2· β’. τὸ προσεχὲς κόμμα, συναφθὲν τὸ 2 κα.  
κταλοίπω, ἀποτελεῖ 2377, ὃν δίελε διὰ τῷ ἀπὸ 1 ἢ  
10 τριπλῷ τετραγώνῳ 300, τὸ δὲ 7 πηλίκον βασάνισσα  
ὡς πρότερον· πολλαπλασιασον γὰρ 300 ἐπὶ 7· τῷ δὲ  
προκύπτουτι 2100 σύναψω τὸ τρίτης γνόμενον ὑπὸ τῆς  
προευρημένης ρίζης 10, καὶ τῷ ἀπὸ 7 τετραγώνῳ 49,  
εἴτ’ ἐν τὸν 1470 σὺν τῷ  
ἀπὸ 7 κύβῳ, καὶ ἐπεὶ τὸ ἀ.  
ποτελέμενον ἄθροισμα ὑπερ-  
έχει τῷ 2377, 7 ἐστὶ ρίζα  
μείζων τῷ δικαίῳ· βασανίσας  
δὲ τὸν 6 ἔυρήσεις καὶ αὐτὸν  
ὡσαύτως τῷ δικαίῳ μείζωνα· βασάνισον ἔξης τὸν 5· 300  
ὅ ἀπὸ τῆς προευρημένης ρίζης τριπλῆς τετράγωνος πολ.  
λαπλασιασθεὶς ἐπὶ 5, παρέχεται 1500· 30 δὲ τὸ τρι.  
πλῆν ταύτης τῆς ρίζης πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἀπὸ  
5 τετράγωνον 25, ἀποδιδώσιν 750· συγχρέντος δὲ τοῖς  
δυντὶ τοῖς δε ἀριθμοῖς τῷ ἀπὸ 5 κύβῳ 125, τὸ μὲν ἀποτε-

	<u>3,377,000,125  </u>
1	1500
2377	
2377	
	2000125

δε τὸν 6 ἔυρήσεις καὶ αὐτὸν

ὡσαύτως τῷ δικαίῳ μείζωνα· βασάνισον ἔξης τὸν 5· 300  
ὅ ἀπὸ τῆς προευρημένης ρίζης τριπλῆς τετράγωνος πολ.  
λαπλασιασθεὶς ἐπὶ 5, παρέχεται 1500· 30 δὲ τὸ τρι.  
πλῆν ταύτης τῆς ρίζης πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν ἀπὸ  
5 τετράγωνον 25, ἀποδιδώσιν 750· συγχρέντος δὲ τοῖς  
δυντὶ τοῖς δε ἀριθμοῖς τῷ ἀπὸ 5 κύβῳ 125, τὸ μὲν ἀποτε-