$$\begin{array}{l|l}
\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \gamma^4 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\
\cline{2-2}
-\alpha^4 - \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\gamma^2 & \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \\
\hline
+\alpha\alpha\beta\beta - \alpha^2\gamma^2 + \beta^4 - \gamma^4 & \\
-\alpha\alpha\beta\beta - \beta^4 - \beta\beta\gamma\gamma & \\
\hline
-\alpha^2\gamma^2 - \beta\beta\gamma\gamma + \gamma^4 & \\
+\alpha^2\gamma^2 + \beta\beta\gamma\gamma - \gamma^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{2}{7}\alpha^3 - \frac{8}{35}\alpha^2\beta + \frac{1}{4}\alpha^2\beta^2 - \frac{3}{20}\beta^3 & \frac{2}{5}\alpha^2 - \frac{3}{5}\beta^2 \\
\cline{2-2}
-\frac{2}{7}\alpha^3 + \frac{8}{35}\alpha^2\beta & \frac{2}{7}\alpha - \frac{1}{4}\beta \\
\hline
+\frac{1}{4}\alpha^2\beta^2 - \frac{3}{20}\beta^3 & \\
\hline
-\frac{1}{4}\alpha\beta^2 + \frac{3}{20}\beta^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ συμβολικῶν κλασμάτων.

Τὰ συμβολικὰ κλάσματα οὐδὲν ἀλλ' ἢ διαιρέσεις εἰσὶ σεσημειωμέναι, ὡς εἴδομεν (59 κτ.)· ὑπόκειται δὲ καὶ ταῦτα ταῖς αὐταῖς, αἷς περ καὶ τὰ ἀριθμητικὰ, πράξεσι· δι' ὃ τὰ ῥηθησόμενα ἀνάκλησίς τις οἱονεὶ ἔσται τῶν ἐκεῖθι δεδειγμένων· ῥητέον ἓν πρῶτον ὅπως ἐφ' ἁπλουστέραν ἀνάγεται ἔκθεσιν γενικώτερον, ἢ ὡς διείληπται (60)· εἰς δὲ τοῦτο ἀνάγκη τὸν κοινὸν παρονομαστὴ καὶ ἀριθμητὴ καὶ δὴ καὶ μέγιστον διαιρέτην εὑρεῖν· προκείσθω τοίνυν λῆμμά τι εἰς τοῦτο τεῖνον.

65. ΛΗΜΜΑ. Ποσῶν δυοῖν τοῦ μὲν Α μείζονος, τοῦ δὲ Β ἐλάσσονος, ἀκριβῶς διαιρουμένων διὰ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ π,

ἐὰν διαιρεθέντος τοῦ Α διὰ Β καταλειφθῇ λείψανον τὸ γ, καὶ τοῦτο ἀκριβῶς διὰ τοῦ π διαιρεθήσεται.

ΔΕΙΞΙΣ. Τοῦ Α διὰ Β διαιρεθέντος ἔστω πηλίκον τὸ μ. ἄρα Α=μ×Β+γ (Ἀριθμ. 107) · ἐπεὶ οὖν τὸ Α ἀκριβῶς διαιρεῖται διὰ π, διαιρεθήσεται ἀκριβῶς διὰ τοῦ αὐτοῦ π καὶ τὸ μΒ+γ· ἀλλὰ Β διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ π, ἄρα καὶ τὸ τοῦ Β πολλαπλοῦν μΒ *) ἀκριβῶς διὰ τοῦ π διαιρεθήσεται· διαιρεθήσεται ἄρα διὰ τοῦ π καὶ τὸ γ· Ο. Ε. Δ.

66. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπεὶ Β καὶ γ ἀκριβῶς διὰ π διαιροῦνται, ἐὰν τοῦ Β διὰ γ διαιρεθέντος καταλειφθῇ λείψανον τὸ δ, καὶ τοῦτο, ὡς ἕπεται ἐκ τοῦ λήμματος, ἀκριβῶς διὰ π διαιρεθήσεται· ὡσαύτως διαιρεθῆναι ἔχει διὰ π καὶ τὸ κατάλοιπον ε, ὃ ἂν εὑρεθείη διαιρεθέντος τοῦ ε διὰ δ, καὶ ἐφεξῆς ὁμοίως, ἕως ἂν καταλειφθῇ μηδέν.

67. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δυεῖν καθολικῶν ποσοτήτων τὸν κοινὸν καὶ μέγιστον διαιρέτην εὑρεῖν.

ΛΥΣΙΣ. α΄. Τεθείσθωσαν οὕτως ὑπάλληλοι αἱ ποσότητες, ὡς ἀντιστοιχεῖν, εἰ οἷόν τε, τὰ κοινὰ ἀμφοῖν γράμματα· β΄. διηρήσθω ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ὑπερθεν διὰ τοῦ πρώτου τῆς ὑποκειμένης, ἕως ἂν ὁ δείκτης τοῦ διαιρετέου ὅρου ἐλάττων γένηται τοῦ κατὰ τὸν διαιρέτην, ἢ γοῦν ἰσωθῇ·

---

*) Εὐξύνετον πάνυ οὐδὲ δείξεως ἐστι χρῆζον μηδεμιᾶς τοῦτο· τοῖς οὖν πρωτοπείροις ληπτέον ἀριθμητικὰ ὑποδείγματα πλεῖστα εἰς κατάληψιν τῆς καθολικῆς ἀληθείας· εἰ γὰρ τὸν 6 ὁ 3 διαιρεῖ, δῆλον ὅτι καὶ τὸν τοῦ 6 πολλαπλοῦν 18, καὶ τὸν 24, καὶ τὸν 30. κτ.

γ΄. διηρήσθω ὁ διαιρέτης διὰ τοῦ ἐκ ταύτης τῆς διαιρέσεως καταλοίπου, καὶ τοῦτο, εἰ τύχοι, διὰ τοῦ δευτέρου λειψάνου, καὶ οὕτως ἑξῆς, μέχρις ἂν γένηται ἀκριβής τις διαίρεσις, ἧς ὁ διαιρέτης ἔσται ὁ ζητούμενος μέγιστος καὶ κοινὸς διαιρέτης.

68. ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὶν ἢ δὲ τῆς πράξεως ἐφάψασθαι παρατηρητέον ταῦθ' ἅπερ οὐκ ἔστιν εἰπεῖν ὅσον ἐξευμαρίζει τὸ ἔργον· α΄. Ὅταν ποσότης καθολικὴ πολυώνυμος ἅπασι τοῖς ἑαυτῆς ὅροις γράμμα τι ἔχῃ ἐγκείμενον, δῆλον ὅτι γίνεται ὑπ' ἐκείνου τοῦ γράμματος καὶ τῶν ἄλλων αὐτῆς ὅρων· οὕτως $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta=\alpha\times(\beta+\gamma+\delta)$ ὡς καθ' ἑαυτὸ καταφανές· β΄. Ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν δυεῖν ποσοτήτων ἤτοι πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διὰ ποσότητος τὴν ἑτέραν μὴ διαιρούσης, μηδὲ κοινὸν αὐτῇ διαιρέτην ἐχούσης, ὁ μέγιστος καὶ κοινὸς αὐτῶν διαιρέτης οὐ τρέπεται· $\alpha\beta$ φέρε καὶ $\alpha\gamma$ κοινὸν ἔχουσι διαιρέτην α· ἐὰν οὖν $\alpha\beta$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ δ, τὸ γινόμενον $\alpha\beta\delta$ καὶ $\alpha\gamma$ τὸν αὐτὸν κοινὸν ἕξουσι διαιρέτην α· ἐὰν μέντοι $\alpha\beta$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ποσότητα, ἣ διαιρεῖ τὴν $\alpha\gamma$, ἐπὶ γ φέρε, τὸ γινόμενον $\alpha\beta\gamma$, καὶ $\alpha\gamma$ ἕξουσι τηνικαῦτα κοινὸν διαιρέτην αὐτὸ τὸ $\alpha\gamma$· ὡσαύτως ἐὰν $\alpha\beta$ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ποσότητα ἔχουσαν κοινὸν τῇ $\alpha\gamma$ ποιητὴν ἕνα, εἶτ' οὖν ἐπὶ $\gamma\delta$, καὶ οὕτω τρέψεται ὁ κοινὸς διαιρέτης· τῆς γὰρ ποσότητος $\alpha\beta\gamma\delta$ καὶ $\alpha\gamma$ ἔσται πάλιν κοινὸς διαιρέτης $\alpha\gamma$.

69. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐντεῦθεν δῆλον, α΄. ὡς εἰ ζητουμένοις τὸν μέγιστον κοινὸν δυεῖν ποσοτήτων διαιρέτην ἐν ταῖς ἐπαναλαμβανομέναις διαιρέσεσιν ἀπαντήσει διαιρετέος, ἢ διαιρέτης, ἔχων ποιητὴν, ἢ διαιρέτην, ὃν οὐκ ἔχει ὁ ἕτερος, ἀδεῶς τοῦτον τὸν ποιητὴν ἀποβαλεῖν δυνάμεθα· β΄. δυνάμεθα πολλαπλασιάσαι τὴν ἑτέραν τῶν

ποσοτήτων ἐφ' ἡντιναῦν ποσότητα, ἥτις ὑ διαιρεῖ τὴν ἑτέραν, ὅτε κοινὸν αὐτῇ ἔχει διαιρέτην· κατὰ ταῦτα τοίνυν κείσθω εὑρεῖν τὸν μέγιςον ϗ κοινὸν διαιρέτην τῆς αα — 3αβ + 2ββ ϗ αα — αβ — 2ββ.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ. Α'.

ά. διαιρετέος	ά. διαιρέτης
αα — 3αβ + 2ββ	αα — αβ — 2ββ
— αα + αβ + 2ββ	1 ά. πηλίκ.
ά. λείψ. — 2αβ + 4ββ	

δεῖ τοίνυν διελεῖν αα — αβ — 2ββ διὰ — 2αβ + 4ββ· ἐπεὶ μέντοι ὁ διαιρέτης ἔχει ποιητὴν τὸν 2β, ὃς ὑκ ἔςι ϗ πάντων τῶν τῦ διαιρετέυ ὅρων, ἀπερρίφθω μὲν ὁ 2β ἐκ τῦ διαιρέτυ, διηρήθω δὲ αα — αβ — 2ββ διὰ — α + 2β

β'. διαιρετέος	β'. διαιρέτης
αα — αβ — 2ββ	— α + 2β
— αα + 2αβ	— α — β. β'. πηλ.
+ αβ — 2ββ	
— αβ + 2ββ	
λείψ. . . . 0	

κοινὸς ἄρα ϗ μέγιςος διαιρέτης ἔςαι — α + 2β

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Β'.

$5\alpha^3 - 18\alpha^2\beta + 11\alpha\beta^2 - 6\beta^3 \mid 7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$

ἐπείπερ ὁ 5 ὑκ ἔςι δι' 7 διαιρέσιμος, ὅ,τε 7 ὑκ ἔςι ποιητὴς πάντων τῶν τῦ διαιρέτυ ὅρων, πολλαπλασιαςέον τὴν διαιρετέαν ποσότητα ἐπὶ 7 ϗ δὴ ἔςαι

ά. διαιρετέος	ά. διαιρέτης
$35\alpha^3 - 126\alpha^2\beta + 77\alpha\beta^2 - 42\beta^3$	$7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$
$-35\alpha^3 + 115\alpha^2\beta - 30\alpha\beta^2$	5α. ά. πηλ.
ά. λείψ. $-11\alpha^2\beta + 47\alpha\beta^2 - 42\beta^2$	

δυνάμεθα ἔτι τὸ λείψανον διελεῖν διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου, πολλαπλασιάσαντες αὐτὸ ἐπὶ 7, καὶ ἐκκρούσαντες αὐτοῦ τὸν ποιητὴν β

β'. διαιρετέος	β'. διαιρέτης
$-77\alpha^2 + 329\alpha\beta - 294\beta^2$	$7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$
$+77\alpha^2 - 253\alpha\beta + 66\beta^2$	-11. β'. πηλ.
β'. λείψ. $\ldots + 76\alpha\beta - 228\beta^2$	

δεῖ τοίνυν διελεῖν $7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$ διὰ $76\alpha\beta - 228\beta^2$, μᾶλλον δὲ διὰ $\alpha - 3\beta$, ἐκκρουσθέντος τοῦ ποιητοῦ 76β· τοιγαροῦν

γ'. διαιρετέος	γ'. διαιρέτης
$7\alpha^2 - 23\alpha\beta + 6\beta^2$	$\alpha - 3\beta$
$-7\alpha^2 + 21\alpha\beta$	$7\alpha - 2\beta$. γ'. πηλίκον
$-2\alpha\beta + 6\beta^2$	
$+2\alpha\beta - 6\beta^2$	
λείψ. 0	

ἄρα ὁ κοινὸς διαιρέτης τῶν δυοῖν προτεθέντων ποσῶν ἐστιν $\alpha - 3\beta$. ὅτι δὲ οἱ οὕτως εὑρισκόμενοι διαιρέται κοινοί εἰσι καὶ μέγιστοι, δῆλον· διαιροῦσι γὰρ ἀκριβῶς, ὡς ἐκ τῆς πράξεως καταφαίνεται, πάντα τὰ ἀλληλοδιάδοχα κατάλοιπα (65)· τοῦτον οὖν τὸν τρόπον εὑρισκομένων τῶν κοινῶν διαιρετῶν δυοῖν ποσοτήτων, πᾶν κλάσμα ἐς τ' ἂν ἐξῇ ἐφ' ἁπλούστερον σχῆμα μετενεχθήσεται, διαιρουμένων ἀμέλει ἑκατέρου τῶν κατ' αὐτὸ ὅρων διὰ τοῦ κοινοῦ καὶ μεγίστου διαιρέτου τοῦτε παρονομαστοῦ καὶ τοῦ ἀριθμητοῦ· ἐὰν δὲ

τῶν διαιρέσεων ἐπαναλαμβανομένων, ὅροι ἐφεξῆς προέρχωνται πέρατος ἄνευ, πρόδηλον, ὅτι κοινῇ διαιρέτῃ ἀμοιρῶσι τὰ προτεθέντα ποσά.

70. Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ μεταμορφωθῆναι δύναται, ἄνευ τινὸς μεταβολῆς τῆς κατ' αὐτὸ δυνάμεως, εἰς $\frac{\alpha\alpha}{\beta\alpha}$, ἢ $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}$, ἢ $\frac{\alpha\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta+\beta\beta}$, καὶ οὕτως ἑξῆς. Τὰ γὰρ ἔσχατα οὐδέν εἰσιν ἀλλ' ἢ τὸ πρῶτον, ἃ ἐπολλαπλασιάσθησαν οἱ ὅροι, ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἐπὶ α, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ ἐπὶ γ, ἐν δὲ τῇ τρίτῃ ἐπὶ $\alpha+\beta$, ὃ ἥκισα μεταλλοιοῖ τὴν ἀξίαν τοῦ κλάσματος.

71. Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}$ ἐστὶ τὸ αὐτὸ τῷ $\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ τὸ $\frac{6\alpha^3+3\alpha^2\beta}{12\alpha^3+9\alpha^2\gamma}$ τὸ αὐτὸ ὃ καὶ $\frac{2\alpha+\beta}{4\alpha+3\gamma}$.

72. Ἵν' εἰς ἓν μόνον κλάσμα ἀναχθῇ ποσότης σύνθετος ἐξ ὁλοχεροῦς καὶ κλάσματος, πολλαπλασιαστέον, καθὰ δὴ καὶ ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, τὴν ὁλοχερῆ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, καὶ τὸ γινόμενον συναπτέον τῷ ἐν αὐτῷ ἀριθμητῇ, μένοντος τοῦ αὐτοῦ παρονομαστοῦ· οὕτως ὂν $\alpha+\frac{\beta\delta}{\gamma}$ τραπείη εἰς $\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma}$, καὶ $\alpha+\frac{\gamma\delta-\alpha\beta}{\beta-\delta}$, εἰς $\frac{\alpha\beta-\alpha\delta+\gamma\delta-\alpha\beta}{\beta-\delta}$ $=\frac{-\alpha\delta+\gamma\delta}{\beta-\delta}$

73. Ἵνα δὲ εἰς ὁλοχερῆ ἀναχθῇ, ὅπη παρείκοι, κλάσμα συμβολικὸν, διηρήσθω διὰ τοῦ παρονομαστοῦ ὁ ἀριθμητὴς, ὡς κἂν τῇ Ἀριθμητικῇ (146)· οὕτως ἡ μὲν πο-

σότης $\frac{3\alpha\beta + \alpha\gamma + \gamma\delta}{\alpha}$ ἀναχθήσεται εἰς, $3\beta + \gamma + \frac{\gamma\delta}{\alpha}$, ἡ δὲ $\frac{\alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta\beta + \gamma\gamma}{\alpha + 2\beta}$ εἰς $\alpha + 2\beta + \frac{\gamma\gamma}{\alpha + 2\beta}$.

74. Ἵνα κλάσματα δεδομένα συμβολικὰ ἀναχθῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, ὁ κανὼν ἔσται ὁ αὐτὸς, ὃς κἂν τῇ Ἀριθμητικῇ (181)· ἔστω τὰ $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ κλάσματα ἀνάγεται εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν, πολλαπλασιαζομένων τῶν δυοῖν τοῦ πρώτου ὅρων ἐπὶ δζ, καὶ τῶν τοῦ δευτέρου ἐπὶ βζ, καὶ τῶν τοῦ τρίτου ἐπὶ βδ, ἀποκαθιστάμενα $\frac{\alpha\delta\zeta}{\beta\delta\zeta}$, $\frac{\gamma\beta\zeta}{\beta\delta\zeta}$, $\frac{\varepsilon\beta\delta}{\beta\delta\zeta}$, τὰ δὲ $\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta}$, $\frac{\alpha - 2\gamma}{\alpha - \beta}$, ἀναγόμενα ἐπὶ κοινὸν ὄνομα, γίνεται τὸ μὲν $\frac{\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\beta - \beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta}$, τὸ δὲ $\frac{\alpha\alpha - 2\alpha\gamma + \alpha\beta - 2\beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta}$, πολλαπλασιαθέντων ἑκατέρου μὲν τῶν ὅρων τοῦ πρώτου ἐπὶ $\alpha - \beta$, ἑκατέρου δὲ τῶν τοῦ δευτέρου, ἐπὶ $\alpha + \beta$

75. Οὕτως ὧν παρωνυμίων γενομένων τῶν κλασμάτων, ῥᾷστα γίνεται ἥτε πρόσθεσις αὐτῶν καὶ δὴ καὶ ἡ ἀπ' ἀλλήλων ἀφαίρεσις, τῶν ἀριθμητῶν ἀμέλει τυτὶ μόνον ὑφισαμένων· ἔστω τῶν δυοῖν κλασμάτων $\frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta}$, $\frac{\alpha - 2\gamma}{\alpha - \beta}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἀναγωγῇ γινομένων . . $\frac{\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\beta - \beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta}$, $\frac{\alpha\alpha - 2\alpha\gamma + \alpha\beta - 2\beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta}$, τὸ μὲν αὐτῶν ἄθροισμα ἔσται . . . . . .

$$\frac{\alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\beta - \beta\gamma + \alpha\alpha - 2\alpha\gamma + \alpha\beta - 2\beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta} =$$

$$\frac{2\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\beta - 3\beta\gamma + \alpha\alpha}{\alpha\alpha - \beta\beta}.$$ ἡ δ' αὐτῶν διαφορὰ

$$\frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\beta - \beta\gamma - \alpha\alpha + 2\alpha\gamma - \alpha\beta + 2\beta\gamma}{\alpha\alpha - \beta\beta} =$$

$$\frac{3\alpha\gamma - \beta\beta + \beta\gamma - \alpha\alpha}{\alpha\alpha - \beta\beta}$$

76. Ἵνα κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ κλάσμα τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$ πολλαπλασιασθῇ, πολλαπλασιασθήτω ἀριθμητὴς ἐπ ἀριθμητὴν, καὶ παρονομαστὴς ἐπὶ παρονομαστὴν, καθὰ δὴ καὶ ἐν τῇ Α' ριθμητικῇ, καὶ δὴ ἔσται $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$. ὡσαύτως $\frac{1}{2}\alpha \times \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{4}\alpha\beta$.

77. Ἵνα δὲ διαιρεθῇ $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ $\frac{\gamma}{\delta}$ γενέσθω πολλαπλασιασμὸς $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$ ὡσαύτως $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} : \frac{\gamma+\delta}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta} \times \frac{\alpha-\beta}{\gamma+\delta} = \frac{(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)}{(\gamma+\delta).(\gamma+\delta)} = \frac{\alpha\alpha-\beta\beta}{\gamma\gamma+2\gamma\delta+\delta\delta}$. δείξεις δὲ τῶνδε τῶν πράξεων αἱ αὐταί εἰσι ταῖς ἐν τῇ ἀριθμητικῇ (195. 204).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

Περὶ γενέσεως τῶν βαθμῶν.

78. Ὁπόταν ποσότης ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλα-

σιαωθῇ, τὸ γινόμενον βαθμὸς τῆς ποσότητος ἐκείνης προσαγορεύεται· αὐτὴ δὲ ἡ ποσότης ῥίζα ἢ πλευρὰ τοῦ βαθμοῦ· οὕτως ἓν 25 μέν ἐστι βαθμὸς τοῦ 5, εἴγε 5 πεντάκις ἴσοῦται τῷ 25· 5 δὲ καλεῖται ῥίζα τοῦ 25, καλεῖται δὲ ὁ 5 καὶ βαθμὸς πρῶτος· πᾶσα ἄρα ποσότης ὑπάρχει καὶ ῥίζα, καὶ βαθμὸς πρῶτος πρός γε τοὺς ἀπ' αὐτῆς προελθεῖν δυναμένους βαθμούς· καὶ τὸ μὲν προκύπτον ἐκ πάσης ποσότητος, ἐφ' ἑαυτὴν πολαπλασιαωθείσης, καλεῖται τετράγωνον, ἡ βαθμὸς δεύτερος, τῆς ποσότητος ἐκείνης· τὸ δὲ προκύπτον ἐκ τούτου τοῦ προκύπτοντος, εἴτ' ἓν τοῦ τετραγώνου, καὶ τῆς ῥίζης, ὀνομάζεται κύβος, ἡ τρίτος βαθμὸς, τῆς ποσότητος ἐκείνης· τὸ δὲ ἐκ τοῦ κύβου καὶ τῆς ῥίζης, τετραγωνοτετράγωνον, ἡ βαθμὸς τέταρτος, καὶ ἐφεξῆς οὕτως· ὁ κῦν ὁ ἀπὸ 3 τετράγωνος ἀριθμὸς ἔστιν 9, εἴγε 3 × 3 = 9· ὁ δ' ἀπὸ 3 κῦβος ἔστιν 27· ἐπεὶ 9 × 3 = 27· ὁ δ' ἀπὸ 3 τέταρτος βαθμὸς ἔστιν 81· καὶ γὰρ 27 × 3 = 81 κτ. *)

---

*) Τοῖς μὲν παλαιοῖς ποσότης πᾶσα τετράγωνος καὶ δύναμις ἤκουσεν, ὡς ἔστιν ἰδεῖν παράτε Διοφάντῳ (Βιβ. Α'. Ὁρισμ. Ε'.) καὶ τοῖς ἄλλοις Γεωμέτραις, οἳ καὶ ἐν γραμμαῖς δύναθαι ἔλεγον τὴν, ἀφ' ἧς τὸ τετράγωνον σημαίνειν ἐβέλοντο. Τοῖς δὲ νεωτέροις καθολικώτερον τοῦνομα εἴληπται εἰς τὸ σημαίνειν βαθμὸν πάντα, προσιθεμένων τῶν τακτικῶν ὀνομάτων εἰς δήλωσιν τῆς προκειμένης δυνάμεως, οἷον δύναμις δευτέρα, δύναμις τρίτη κτ. ἐπεὶ δ' ἡμῖν τὸ Δύναμις δι' ὅλης τῆς ἐν χερσὶ πραγματείας τέτακται εἰς τὸ σημαίνειν τὴν τιμὴν τῶν πραγμάτων, ἣν Λατῖνοι διὰ τοῦ valor ἐμφαίνουσιν, ὅθεν παρῆκται τὸ γαλλικὸν valeur, ἵνα μὴ σύγχυσις τῶν πραγμάτων ἐκ τῶν ὀνομάτων συμβαίνοι, ἐξέσω καλέσαι βαθμὸν τὴν παρ' ἄλλοις δύναμιν.

79. Ὁ ἀπὸ 1 τετράγωνος, καὶ ὁ ἀπὸ 1 κῦβος, καὶ ἐν γένει ὅστις ἂν ἀπὸ 1 βάθμὸς, ἀείποτε ἔστι 1· εἴγε 1 πολλαπλασιαωθεῖσα ἐπὶ 1, ἢ λιφθεῖσα ἅπαξ, ποιεῖ 1· ἰδὲ δὴ ὁ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνος, ὅς περ ἐπιπολλαπλασιαωθεὶς ἐπὶ 1 ποιεῖ αὖθις 1· ἰδὲ δὴ καὶ ὁ κύβος αὐτῆς κτ.

80. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἀριθμὸς ὁ ὅτινός ἐστι βαθμῶ ἡ ποσότης ἐκδηλῶν, καλεῖται δείκτης τῶ βαθμῶ ἐκείνω· ὅτως ἂν 1 ἔστι δείκτης τῶ πρώτω βαθμῶ, 2 ὁ τῶ τετραγώνω, 3 ὁ τῶ κύβω, 4 ὁ τῶ τετάρτω βαθμῶ κτ.

81. ΣΧΟΛΙΟΝ· Ἵν' ὑψωθῇ ποσότης πᾶσα εἰς βαθμὸν ζητούμενον, πεπολλαπλασιάωθω ἐφ' ἑαυτὴν τοσάκις, ὡς ἤδη καταδέδεικται, ὅσων πλὴν μιᾶς μονάδων περιεκτικός ἐστιν ὁ δείκτης· τὸ δὲ ἔσχατον προκύπτον ἔσται, ὅς τις ἐζητεῖτο, βαθμὸς· οἷον ἵν' ἀρθῇ ὁ 6 ἐπὶ τετράγωνον, ἐπείπερ τετραγώνω δείκτης ἐστὶν ὁ 2, ζητείωθω μόνον ὁ γινόμενος ὑπὸ 6 καὶ 6, ὃς ἔσται 36, ὁ ζητούμενος τετράγωνος, ἵνα δὲ ὁ αὐτὸς 6 ἐπὶ κύβον ἀρθῇ, ἐπειδὴ κύβω δείκτης ἐστὶν ὁ 3, ζητείωθωσαν δύω γινόμενοι ὑπὸ 6 καὶ 6, ὧν ὁ μὲν πρῶτος ἔσται 6×6=36· ὁ δὲ δεύτερος, 36×6=216· ἵνα δὲ ὁ 6 ἐπὶ πέμπτον ἀναχθῇ βαθμὸν, τῶ κατ' αὐτὸν δείκτω ὄντος 5, τέσσαρες ἑξῆς θηρευθήτωσαν γινόμενοι ὑπὸ τῶ 6· ὁ δὲ τέταρτος 7776 ἔσται ὁ ἀπὸ 6 πέμπτος βαθμός.

82. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἐπὶ δὲ ποσοτήτων συμβολικῶν μονώνυμος ποσότης ἐπὶ βαθμὸν προτεθέντα ἀρθήσεται ἐπιτομώτερον, ὑψωμένω μὲν τῶ κατὰ τὴν μονώνυμον σωνεργῶ ἐπὶ τὸν βαθμὸν, πολλαπλασιαζομένω δὲ τῶ ἐφ' ἕκαστον γράμμα δείκτω ἐπὶ τὸν δείκτην τῶ προτεθέντος βαθμῶ.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἐπὶ τὸ ὑψῶσαι ὃν $2\alpha^3\beta^2$ ἐ. πὶ βαθμὸν τέταρτον, ά. ὑψώσω ὁ 2 συνεργὸς ἐπὶ τὸν τέ. ταρτον βαθμὸν, ὅς τις ἐςὶ 16· β΄. πολλαπλασιαζέσθω ἐπὶ 4 δείκτην τοῦ δ΄. βαθμοῦ ὁ ἐπὶ τοῦ α δείκτης 3, ὅθεν ἔςαι 12, καὶ ὁ ἐπὶ τοῦ β 2, ὅθεν προκύψει 8· οὕτως ἄρα ὁ ἀ. πὸ $2\alpha^3\beta^2$ τέταρτος βαθμὸς ἔςι $16\alpha^{12}\beta^8$. τῷ ὄντι δὲ κατὰ τὸν γενικὸν κανόνα (81) τριῶν ἑξῆς γινομένων, ὁ μὲν ἐςὶ $2\alpha^3\beta^2 \times 2\alpha^3\beta^2 = 4\alpha^6\beta^4$, ὁ δὲ $4\alpha^6\beta^4 \times 2\alpha^3\beta^2 = 8\alpha^9\beta^6$. Ὁ δὲ τρίτος, ὅς ἐςιν ὁ ζητούμενος τέταρτος βαθμὸς, ἔςι $16\alpha^{12}\beta^8$, ἡ αὐτὴ ποσότης, ἣ καὶ διὰ τοῦ ἐ. πιτομωτέρου κανόνος εὕρηται· καὶ ἐν γένει ἵνα α^ν ἐπὶ τὸν μ ὑψωθῇ βαθμὸν (τῶν μ καὶ ν δείκτας σημαινόντων ἀορίςους) ἔςαι $\alpha^\nu \times \mu = \alpha^{\nu\mu}$.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἵν' εὕρωμεν τὸν ἀπὸ αβ κύβον, ἐπεὶ ὁ τοῦ ἐπινοουμένου συνεργοῦ 1 κύβος ἐςι 1 (79), ἐπι. νοηθήτω αὖθις ὁ αὐτός· ἀρκεσθησόμεθα δὲ μόνον πολ. λαπλασιάσαι τὸν ἑκάςου γράμματος δείκτην 1 ἐπὶ 3 δείκτην τοῦ κύβου· ὅθεν ἔςαι $\alpha^1 \times 3\ \beta^1 \times 3 = \alpha^3\beta^3$· ἐξ ὧν κατάδηλον, ὡς ὅτε ὁ τοῦ γράμματος δείκτης ἔςι 1, δυνάμεθα ἐπιθεῖναι αὐτῷ δίχα τοῦ ἑτέρου τὸν τοῦ ζητουμένου βαθμοῦ δείκτην.

83. ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἔςω α ποσότης ἡτιοῦν· οἱ τοί. νυν ἀπ' αὐτῆς κατὰ τάξιν βαθμοὶ ἔσονται ά, α^2, α^3, α^4, α^5, α^6 κτ (81). σημειώσειεν ὅν ἄν τις ἐπὶ τοῦ δε τοῦ τύ. που τὰ ἑφεξῆς: ὁ ἀφ ἁπάσης ποσότητος τέταρτος βαθμὸς εὑρεθήσεται, πολλαπλασιασθέντος τοῦ ἀπ' αὐτῆς τετραγώ. νου ἐφ' ἑαυτόν· $\alpha^2 \times \alpha^2 = \alpha^4$· τὸ γινόμενον ὑπὸ τοῦ τε. τραγώνου καὶ τοῦ κύβου ποιήσει τὸν πέμπτον βαθμόν· $\alpha^2 \times \alpha^3 = \alpha^5$. τὸ δ' ὑπὸ τοῦ κύβου ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασ. θέντος, τὸν ἕκτον, $\alpha^3 \times \alpha^3 = \alpha^6$· καὶ ἐν γένει καθυπέρ.

τερος βαθμὸς ἀπὸ ποσότητός τινος εὑρίσκεται, εἰ πολλαπλασιασθείεν δύω ἀπὸ τῆς αὐτῆς ποσότητος ἥττυς βαθμοὶ, ὧν τὸ τῶν δεικτῶν ἄθροισμα δίδωσι τὸν δείκτην τοῦ καθυπερτέρυ· ἐντεῦθεν ἄρα ἀποφέρεται μέθοδος ἐπίτομος τοῦ εὑρίσκειν βαθμὸν μέγαν ἀπὸ παντὸς ἀριθμοῦ· εὑρήσθω, φέρε, ὁ εἰκοσὸς πέμπτος ἀπὸ 10 βαθμὸς· ἀντὶ ὧν τοῦ εὑρεῖν τέσσαρα καὶ εἴκοσι γινόμενα ἑξῆς κατὰ τὴν γενικὴν μέθοδον, εὑρεῖν ἑξέσαι λαβόντας καὶ πλεῖν ἢ πέντε γινόμενα οὕτως· $10 \times 10 = 100$, τετράγωνος ἀπὸ 10· $100 \times 100 = 10000$, τέταρτος βαθμὸς· $10000 \times 10000 = 100000000$, ὄγδοος, ὅστις ἐφ' ἑαυτὸν πολλαπλασιασθεὶς ποιήσει τὸν δέκατον ἕκτον· τέλος δ' οὗτος ἐπὶ τὸν ὄγδοον πολλαπλασιασθεὶς, εἶτ' ὧν $1000000000000000 \times 100000000$ ποιήσει τὸν ζητούμενον εἰκοσὸν πέμπτον.

84. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀφ' ἁπάσης λειπτικῆς ποσότητος τὸ μὲν τετράγωνον ἕξει σημεῖον $+$, ὁ δὲ κύβος $-$, ὁ δὲ τέταρτος βαθμὸς $+$, καὶ ἐφεξῆς ὡσαύτως, ὅ ἐστιν ἐν γένει ,,οἱ ἀπὸ ποσότητος λειπτικῆς βαθμοὶ δείκτυ μὲν ,,εὐμοιρῦντες ἀριθμοῦ ἀρτίυ, τὸ $+$, περισσοῦ δὲ, τὸ $-$, πρὸ ,,ἑαυτῶν κεχαραγμένον ἕξυσι". οὕτως οὖν οἱ κατὰ σειρὰν βαθμοὶ ἀπὸ $-\alpha$, ἔσονται $-\alpha$, $+\alpha^2$, $-\alpha^3$, $+\alpha^4$, $-\alpha^5$, $+\alpha^6$, κτ· Ἔστι δὲ τοῦτο, ὅτι $+ \times - = -$, καὶ $- \times - = +$ (49, 50)

85. ΠΟΡΙΣΜΑ. βαθμὸς ἅπας, οὗ ὁ μὲν δείκτης ἐστὶν ἀριθμὸς ἄρτιος, τὸ δὲ σύμβολον ὑπάρχει $+$, ἀείποτε δύω ῥίζων ἐστὶ περιεκτικὸς τῆς μὲν ὑπαρχούσης, λειπούσης δὲ τῆς ἑτέρας· $+\alpha^2$ οὐχ ἥττόν ἐστι τετράγωνον ἀπὸ $+\alpha$, ἢ ἀπὸ $-\alpha$· $+\alpha^4$ οὐδὲν μᾶλλόν ἐστι τετράγωνον ἀπὸ $+\alpha^2$, ἢ ἀπὸ $-\alpha^2$ κτ, ἀλλὰ βαθμὸς λειπτικὸς, οὗ ὁ

δείκτης ἀριθμός ἐστι περιττὸς, οἷον — α^3, μίαν μόνην ῥίζον ἔχει λειπτικὴν τὴν — α· ὐδεμία γὰρ ἄλλη ποσότης, ἢ — α κυβιζομένη ἀποδίδωσι — α^3.

86. Ἵνα κλάσμα ἐπὶ βαθμὸν τινα ὑψωθῇ, ὑψωθήτω ἐπὶ τοῦτον ὁ ἀριθμητής, εἶθ ὕτως ὁ κατ' αὐτὸ παρονομαστής· ἵν ὖν τετραγωνισθῇ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ α τετράγωνον ἐστιν α^2, τὸ δ' ἀπὸ β, β^2 γεγράφω $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. ἐπειδὴ γὰρ τὸ ἀπὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τετράγωνον ἐστιν $\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$· ἵνα δὲ κυβισθῇ τὸ $\frac{3}{4}$, ἐπεὶ ὁ ἀπὸ 3 μὲν κύβος ἐστὶν 27, ἀπὸ δὲ 4, 64, γεγράφθω $\frac{27}{64}$.

87. ΣΧΟΛΙΟΝ. Σαφές ἐστιν, ὡς ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐλάττων ᾖ τῆς μονάδος, τὸ γινόμενον ἔσται ἔλαττον τοῦ πολλαπλασιαστέου· ἡνίκα ἄρα ὑψοῦται κλάσμα μονάδος ἔλαττον εἰς βαθμὸν ὑπέρτερον, πολλαπλασιάζεται ἀεὶ ὁ κατώτερος βαθμὸς διὰ τούτου τοῦ κλάσματος τοῦ μονάδος ἐλαττουμένου· τὸ ἄρα γινόμενον, ὃ παρίσησι τὸν ἀνώτερον βαθμὸν, ἀνάγκη γίνεσθαι ἀεὶ ἔλαττον τοῦ κατωτέρου βαθμοῦ· ἰσέον ὖν ὡς ἡ δύναμις κλάσματος ἐλάττονος ἢ μονάδος, ὅσῳ ἐπὶ καθυπερτέρους βαθμοὺς αἴρεται, τοσούτῳ ἐλάττων γίνεται· οἷον τὸ ἀπὸ $\frac{1}{10}$ τετράγωνον ἐστιν $\frac{1}{100}$, ὅ ἐστι δεκάκις ἔλαττον τοῦ $\frac{1}{10}$· ὁ δὲ ἀπὸ $\frac{1}{10}$ κύβος ἐστὶ $\frac{1}{1000}$, ὅ ἐστιν ἑκατοντάκις ἔλαττον τοῦ 10 καὶ ἑξῆς ὕτως.

Γένεσις τῶν ἀπὸ πολυωνύμου ποσότητος βαθμῶν.

88. Ἵνα πολυώνυμος ποσότης ἐπὶ βαθμὸν ἀρθῇ,

ζητηθήτω τὸ γινόμενον, ὃ ἀπαιτεῖ ὁ βαθμὸς (81) ἐκ τῆς ἐκτεθείσης περὶ τοῦ τῶν πολυωνύμων πολλαπλασιασμοῦ θεωρίας.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἵνα τετραγωνισθῇ τὸ δυώνυμον $\alpha+\beta$, πεπολλαπλασιάσθω ἐφ' ἑαυτὸ οὕτως: ά. $\alpha+\beta \times \alpha = \alpha\alpha+\alpha\beta$· β΄. $\alpha+\beta\times\beta=\alpha\beta+\beta\beta$· γ΄. γενέσθω ἀναγωγὴ τῶν δυοῖν ὁμοίων ὅρων $\alpha\beta+\alpha\beta$ ἐπὶ τοῦ ὁλικοῦ προκύπτοντος $\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta\beta$· ἐξ οὗ τὸ ἀπὸ $\alpha+\beta$ τετράγωνον ἔσται $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. Τὸ δ' ἀπὸ $-\alpha-\beta$ τετράγωνον ἔσται ὡσαύτως $+\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, ὅπερ γίνεται, ὅτι $-\times-=+$

Ἀλλὰ γὰρ τὸ ἀπὸ $-\alpha+\beta$, ἢ $+\alpha-\beta$, ἕξει ἀεὶ λειπτικὸν τὸν δεύτερον ὅρον, (ὃ ἐξ τοῦτο παρέπεται ἐκ τοῦ περὶ τοῦ τῶν συμβόλων πολλαπλασιασμοῦ κανόνος (37)) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἵνα δὲ τετραγωνισθῇ $\alpha+\beta+\gamma$· ά. $\overline{\alpha+\beta+\gamma}\times\alpha=\alpha\alpha+\alpha\beta+\alpha\gamma$· β΄. $\overline{\alpha+\beta+\gamma}\times\beta=\alpha\beta+\beta\beta+\beta\gamma$· γ΄. $\overline{\alpha+\beta+\gamma}\times\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma\gamma$· ἐπὶ οὗ τοῦ ὁλικοῦ τετραγώνου $\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta^2+\beta\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2$ ἀναγωγῆς γενομένης τῶν ὁμοίων ὅρων $\alpha\beta+\alpha\beta$, καὶ $\alpha\gamma+\alpha\gamma$, ἐξ $\beta\gamma+\beta\gamma$, ἔσται $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2$

89. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Τῶν δυεῖν ποσοτήτων τῶν συντιθεισῶν δυώνυμόν τι, ἡ μὲν πρώτη ἀεὶ δύναται παρίσασθαι διὰ τοῦ α, ἡ δὲ διὰ β· ἅπαν ἄρα δυώνυμον παρασταθήσεται διὰ $\alpha+\beta$ παρεκτὸς τῶν $-$ ἢ $+$ συμβόλων. Τὸ ἄρα ἀπὸ $\alpha+\beta$ τετράγωνον $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta\beta$, ὃ κληθήτω Α, παρασήσει ἀεὶ τὸ ἀπὸ παντὸς δυωνύμου τετράγωνον· οἷον ἐπὶ τοῦ Α τύπου παρατηρητέον τὰ ἑ-

ξῆς ,,Τὸ ἀπὸ δυωνύμου ποσότητος τετράγωνον περιέχει ,,ά. τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου τετράγωνον (α^2)· β΄. τὸ δι- ,,πλοῦν γινόμενον ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου ὅρου ($2\alpha\beta$)· ,,γ΄. τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὅρου τετράγωνον ($\beta\beta$)· ὡσαύ- τως ἐπὶ τοῦ τετραγώνου $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2$, τοῦ ἀπὸ τοῦ τριωνύμου $\alpha + \beta + \gamma$, ὃ κληθήτω Β΄. παρατηρητέον, ὅτι περιέχει ,,ά. τὸ ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου ,,τετράγωνον (α^2)· β΄. τὸ διπλοῦν γινόμενον ὑπὸ τοῦ ,,πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου ($2\alpha\beta$)· γ΄. τὸ ἀπὸ τοῦ δευτέρου ,,τετράγωνον (β^2)· δ΄. τὸ διπλοῦν γινόμενον ὑπὸ τοῦ πρώ- ,,του καὶ τοῦ τρίτου ($2\alpha\gamma$)· ε΄. τὸ διπλοῦν γινόμενον ὑπὸ ,,τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου ($2\beta\gamma$)· ς΄. τὸ ἀπὸ τοῦ τρίτου τετράγωνον (γ^2)."

90. **ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄.** Προσθεῖναι ἔτι δυνάμεθα, ὅτι τῶν τετραγώνων Α καὶ Β, ὁ μὲν πρῶτος ὅρος (α) τοῦ ῥιζικοῦ πολυωνύμου εἰσάγει ἐν τῷ ὁλικῷ τετραγώνῳ τὸ ἀφ' ἑαυτοῦ τετράγωνον (α^2)· ὁ δὲ δεύτερος (β), τὸ διπλοῦν γινόμενον ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου σὺν τῷ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνῳ ($2\alpha\beta + \beta^2$)· ὁ δὲ τρίτος (γ), τὸ διπλοῦν γινόμενον ὑπὸ τῶν δυοῖν προτέρων καὶ τοῦ τρίτου σὺν τῷ ἀπὸ τοῦ τρίτου τετραγώνῳ ($2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2$) καὶ ἑξῆς ὅτως, εἰ πλείους τῶν τριῶν τύχοι ἔχον τὸ πολυώνυμον ὅρους.

91. **ΣΧΟΛΙΟΝ Α΄.** Ἃ ἤδη δέδεικται ἐπὶ τῶν γραμματικῶν ποσῶν, κρατεῖ ὡσαύτως καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς· θῶμεν γὰρ τὸν ἀπὸ 235 τετράγωνον, ὅς ἐστι $235 \times 235 = 55225$, Δ· ποιήσωμεν δὲ ἐκ τοῦ 235 τόδε τὸ τριώνυμον $200 + 30 + 5$· ἐὰν οὖν λάβωμεν τὸν ἀπὸ 200 τε-

τράγωνον 40000, σὺν τῷ δὶς γινομένῳ ὑπὸ 200 καὶ 30, εἶτ' ὖν 12000, σὺν τῷ ἀπὸ 30 τετραγώνῳ 900, σὺν τῷ δὶς γινομένῳ ὑπὸ τῶν δύω προτέρων ὅρων καὶ τοῦ τρίτου, εἶτ' ὖν 2300, σὺν τῷ ἀπὸ 5 τετραγώνῳ 25, καὶ ταῦτα πάντα συνάψωμεν, εὑρήσομεν ἀκριβῶς 55225 τὸν ἀπὸ 235 τετράγωνον.

40000
12000
900
2300
25
55225

92. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Βραχὺ τὸν νῦν προχόντες τῷ, καθ' ὃν τετραγωνίζεται τὸ δυώνυμον, τρόπῳ, γνωσόμεθα δι' ὅ,τι τὸ ἀπὸ πολυωνύμου τετράγωνον τὰ εἰρημένα περιέχει μέρη· αὐτὰ δὲ ταῦτα κρατοῦντα νοήσομεν κἀπὶ τῶν πύβων, περὶ ὧν ἐφεξῆς ἐροῦμεν· τετραγωνίζοντες γὰρ α+β+γ· ά. πολλαπλασιάζομεν α ἐπὶ α, ὅθεν προκύπτει $α^2$· β'. β ἐπὶ α, καὶ α ἐπὶ β, ὅθεν προκύπτει 2αβ· γ'. β ἐπὶ β, ὅθεν προκύπτει $β^2$· δ'. γ ἐπὶ α, καὶ α ἐπὶ γ, ὅθεν προκύπτει 2αγ· έ. γ ἐπὶ β καὶ β ἐπὶ γ=2βγ· ς'. γ ἐπὶ γ, ὅθεν $γ^2$.

93. ΠΟΡΙΣΜΑ. Οὐδόλως ὖν χρηστέον πολλαπλασιασμῷ πρὸς ὑτινοσοῦν πολυωνύμου τετραγωνισμόν· ἀρκέσει γὰρ λαβεῖν τετραγωνίζουσι φέρε τὸ δ+γ+ζ τοὺς εἰρημένους ὅρους· ά. τὸ ἀπὸ δ τετράγωνον $δ^2$· β'. τὸ δὶς γινόμενον ὑπὸ δ καὶ γ, εἶτ' ὖν 2γδ· γ'. τὸ ἀπὸ γ τετράγωνον $γ^2$· δ'. τὸ δὶς ὑπὸ δ καὶ ζ γινόμενον 2δζ. έ. τὸ δὶς ὑπὸ γ καὶ ζ γινόμενον 2γζ· ς'. τὸ ἀπὸ ζ τετράγωνον $ζ^2$. Ὡσαύτως δὲ εὑρεθείη ἂν καὶ ἀπὸ παντὸς ἀριθμοῦ ὁ τετράγωνος· εὑρέθη γὰρ ἀνωτέρω ὁ ἀπὸ 235 τετράγωνος λαμβανομένου τοῦ ἀπὸ 200 τετραγώνου κτ. ἀλλ' ἔστι γὰρ ἐπεικῶς ἐν ἀριθμοῖς τὸ ὕτω τετραγωνίζειν μακρῷ ἐργωδέστερον, ἢ τὸ τὸν ἀριθμὸν δι' αὐτοῦ τούτου πολλαπλασιάζειν· ξυντελεῖ μέντοι ἄριστα ἀτέρα τῶν μεθόδων θατέρᾳ εἰς βασανισμόν.

94. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡ γενικὴ βάσανος τοῦ τετραγωνισμοῦ ἐν τῷ διαιρεῖν κεῖται τὸ εὑρεθὲν τετράγωνον διὰ τῆς ῥίζης· ἀνάγκη γὰρ τὸ πηλίκον αὐτὴν ταύτην ὑπάρχειν τὴν ποσότητα· διαιρεθὲν ἓν $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ διὰ $\alpha+\beta$ ἀποδώσει πάντως πηλίκον $\alpha+\beta$· ὁ δὲ 55225 τετράγωνος ἀριθμὸς διαιρεθεὶς διὰ 235 ἀποδώσει πάντως τὴν ῥίζαν 235.

95. Ἵνα δὲ κυβίσωμεν τὸ διώνυμον $\alpha+\beta$, λαμβάνομεν πρῶτον τὸ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνον $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, ὃ πολλαπλασιάζομεν εἶτα ἐπὶ $\alpha+\beta$ (81), ἐξ οὗ πρόεισιν $\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+\beta^3$· ἀναγωγῇ δὲ τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$, Μ.

96. ΠΟΡΙΣΜΑ Α'. $\alpha+\beta$ ἐμφαίνειν δυναμένου ἅπαν διώνυμον, ἐκτὸς τῆς τῶν συμβόλων ἐνδεχομένης διαφορᾶς, ὁ ἀπ' αὐτοῦ ἄρτι εὑρημένος κύβος Μ, τύπος ἔσται καθολικὸς, πάντα ἀπὸ δυωνύμου παρισὰς κύβον· ἐν γένει ἄρα ,,ἅπας δυωνύμου κύβος περιέχει, α'. τὸν ἀπὸ τοῦ πρώ,,του ὅρου κύβον (α^3)· β'. τὸ τρὶς τετράγωνον τὸ ἀπὸ τοῦ ,,πρώτου ὅρου ($3\alpha^2$) πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅ,,ρον (β)· γ'. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ τοῦ ,,ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου ($3\alpha\beta^2$)· δ'. τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου κύβον (β^3).

97. Ταυτὸν δὲ κρατεῖ καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν· κυβίσωμεν γὰρ, φέρ' εἰπεῖν, τὸν 25, ταὐτὸν εἰπεῖν, πολλαπλασιάσωμεν 25 ἐπὶ 25 εἰς εὕρεσιν τοῦ ἀπ' αὐτοῦ τετραγώνου, εἶτα δὲ τὸν 625 τετράγωνον ἐπὶ 25· προκύψει ὅτω κύβος ἀπὸ 25 ὁ 15625· διέλωμεν ἓν νῦν δίχα τὸν 25 κατὰ τὰ δυώνυμα ὅτως 20 + 5· φημὶ δὴ, ὡς εἰ λάβωμεν α'. τὸν ἀπὸ 20 κύβον, εἴτ' ἓν 8000· β'. τὸν τρὶς γι-

8000
6000
1500
125
15625

νόμενον ὑπὸ τοῦ ἀπὸ 20 τετραγώνου, καὶ τοῦ δευτέρου ὅρου 5, εἶτ' ἦν 6000· γ'. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τοῦ ἀπὸ 5 τετραγώνου καὶ τοῦ πρώτου ὅρου 20, εἶτ' ἦν 1500· δ'. τὸν ἀπὸ 5 κύβον, εἶτ' ἦν 125, προσθέσει πασῶν τῶν δε τῶν ποσοτήτων ἀπολήψόμεθα ἀκριβῶς τὸν προευρημένον κύβον 15625.

98. Κυβισμοῦ βάσανος. Ὁ εὑρεθεὶς κύβος διηρήσθω διὰ τῆς ποσότητος, ᾗ ἐκυβίσθη, ὅθεν ἀνάγκη προελθεῖν τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον· τυτὶ δὲ ἐπιδιηρήσθω ἔτι διὰ τῆς αὐτῆς ποσότητος, ὅθεν ἀνάγκη προελθεῖν αὐτὴν τὴν διαιροῦσαν ποσότητα· οὕτως ἦν 15625, διαιρεθεὶς διὰ 25, δίδωσι τὸν ἀπ' αὐτοῦ τοῦ 25 τετράγωνον 625, ὃς διαιρεθεὶς ἔτι δὶ 25 ἀποδίδωσιν αὐτὸν τὸν διαιρέτην 25.

99. ΠΟΡΙΣΜΑ. Γνωστοῦ τοίνυν ὄντος διὰ τοῦ γενικοῦ τύπου Μ, ὅς τινας ὅρους παράγει πᾶν κυβιζόμενον διώνυμον, ἀφεξόμεθα τοῦ ζητεῖν δύω ἑξῆς γινόμενα· ἵνα γὰρ ἰδιάιτερον τὸ π + κ δυώνυμον ἐπὶ κύβον ἄρωμεν, ληψόμεθα μόνον, ὃς δέδεικται ἐπάναγκες περιέχειν ὅρους, ἀμέλειτοι, α'. τὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου π κύβον π^3· β'. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τοῦ ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου π τετράγωνον π^2, καὶ τοῦ δευτέρου κ, εἶτ' ἦν $3\pi^2\kappa$· γ'. τὸ τρὶς ὑπὸ τοῦ πρώτου, καὶ ὑπὸ τοῦ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τετραγώνου γινόμενον $3\pi\kappa^2$· δ'. τὸν ἀπὸ τοῦ δευτέρου κύβον κ^3.

100. Ἵνα δὲ κυβιωθῇ τὸ τριώνυμον α + β + γ, ληφθὲν τὸ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνον $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2$, πεπολλαπλασιάσθω ἐπὶ α + β + γ· ἀναγωγῇ δὲ τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρεθήσεται $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 + 3\alpha^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma + 3\beta^2\gamma + 3\alpha\gamma^2 + 3\beta\gamma^2 + \gamma^3$, Ρ, κύβος ὁ ἀπὸ τοῦ α + β + γ τριωνύμου· ἐκεῖν ἐν τῷ Ρ κυ-

ϐω τῷ ἀπὸ παντὸς τριωνύμου $\alpha+\beta+\gamma$ παρὰ τὰς ἐν τῷ δυωνύμῳ $\alpha+\beta$ ἀπαιτουμένους ὅρους, περὶ ὧν ἤδη εἴρηται, ἐνυπάρχουσιν ἔτι ά. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τοῦ ἀπὸ τοῦ $\alpha+\beta$ διωνύμου τετραγώνου $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, καὶ τοῦ τρίτου ὅρου γ, εἶτ' οὖν $3\alpha^2\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\beta^2\gamma$· β΄. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ $\alpha+\beta$ καὶ τοῦ ἀπὸ γ τετραγωνου, εἶτ' οὖν $3\alpha\gamma^2+3\beta\gamma^2$· γ΄. ὁ ἀπὸ γ κύβος γ^3.

101. ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐκ τοῦ τύπου Ρ συνάγεται, ,,ὅτι ἐν τῷ κυβισμῷ πολυωνύμου παντὸς $\alpha+\beta+\gamma+\delta$,,κτ. ὁ μὲν πρῶτος ὅρος α συνεισάξει τὸν ἀφ' ἑαυτοῦ κύβον ,,α^3, ἐν γένει δὲ ἕκαστος ἑπόμενος συνεισάξει τὸ ἀπὸ πάν- ,,των ἅμα τῶν ἡγησαμένων ὅρων τριπλοῦν τετράγωνον πολ- ,,λαπλασιασθὲν ἐπὶ αὐτὸν. τοῦτον τὸν ἑπόμενον σὺν τῷ ,,τρὶς γινομένῳ ὑπὸ τῶν δε τῶν ἡγησαμένων ὅρων καὶ ,,τοῦ ἀπὸ τοῦ ἑπομένου τετραγώνου, σὺν τῷ ἀπὸ τοῦδε τοῦ ἑ- ,,πομένου κύβῳ."

102. ΠΟΡΙΣΜΑ Β΄. Ἵνα ἄρα ἐπὶ κύβον ὑψώσωμεν ἅπαν πολυώνυμον, λαμβάνωμεν τοὺς ὅρους, οὓς ἕκαστος τῶν τοῦ πολυωνύμου ὅρων συνεισενεγκεῖν ὀφείλει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἵν' εὕρωμεν τὸν ἀπὸ $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ κύβον, ὁ μὲν πρῶτος ὅρος α συνεισενέγκαι ὀφείλει α^3· ὁ δὲ β, $3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$· ὁ δὲ γ, ά. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τοῦ $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ τετραγώνου, τοῦ ἀπὸ τοῦ $\alpha+\beta$ διωνύμου, καὶ αὐτοῦ τοῦ τρίτου γ· ὅ ἐστι, $3\alpha^2\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\beta\gamma^2$· β΄. τὸ τρὶς ὑπὸ $\alpha+\beta$ καὶ γ^2 γινόμενον $3\alpha\gamma^2+3\beta\gamma^2$· γ΄. τὸν ἀπὸ γ κύβον γ^3· ὁ δὲ τέταρτος δ, ά. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τοῦ τριωνύμου $\alpha+\beta+\gamma$, καὶ τοῦ δ, εἶτ' οὖν $3\alpha^2\delta+6\alpha\beta\delta+3\beta^2\delta+6\alpha\gamma\delta+6\beta\gamma\delta+3\gamma^2\delta$· β΄. τὸ τρὶς γινόμενον ὑπὸ $\alpha+\beta+\gamma$ καὶ δ, εἶτ' οὖν $3\alpha\delta^2+3\beta\delta^2+3$

γδ². γ'. τὸν ἀπὸ δ κύβον δ³, ᾗ ὕτως ἑξῆς, εἰ πλείους, ἢ τέσσαρας, τύχοι ἔχον ὅρους τὸ πολυώνυμον.

103. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν γένει δὲ βυλομένοις πολυώνυμόντι ἐπὶ βαθμὸν τὸν τυχόντα ἐπᾶραι τῷ λαβεῖν δίχα πολλαπλασιασμῶν τὺς ἀπαιτυμένυς ὅρυς, γνωσόμεθα, ὅ,τι σύμβολον ἀπονεμῶμεν ἑκάςῳ τῶν τῦ βαθμῦ ὅρων ἐκ τῶνδε ,,ἐὰν μὲν πάντες οἱ τῆς ῥίζης ὅροι ὦσιν ὑπαρκτικοὶ ᾗ πάντες ἔτι οἱ τῦ βαθμῦ ὅροι ὑπαρκτικοὶ ἔσονται, ,,εἴγε + × + = +· ἐὰν πάντες ἔχωσι τὸ —, οἱ τῦ βαθμῦ ,,ὅροι ἀρτιαριθμυ μὲν ἐυμοιρῦντος δείκτυ, ὑπαρκτικοὶ ἔ,,σονται πάντες, περισσαριθμυ δὲ, λειπτικοὶ· ὕτως ἔν οἱ ἀπὸ τῦ — α — β δυωνύμυ βαθμοὶ ἔσονται ά. — α¹ — β¹ β'. α² + 2αβ + β²· γ — α³ — 3α²β — 3αβ² — β³· δ'. α⁴ + 4α³β + 6α²β² + 4αβ³ + β⁴ κτ. ῥᾷςα δὲ κατανοεῖται, ὅτι τοδὶ παρέπεται ἐκ τῦ γίνεσθαι — × — = +, ᾗ — × + = —.

104. Ἀλλὰ γὰρ εἰ ἡ ῥίζα εὐμοιροίη ἀναμίξ ὑπαρκτικῶν τε ᾗ λειπτικῶν ὅρων, ἅπαντες οἱ τῦ βαθμῦ ὅροι, οἷς ἐνυπάρχει ὁ λειπτικὸς μετ' ἀρτίυ δείκτυ, ἔσονται ὑπαρκτικοὶ· λειπτικοὶ δὲ, εἰ ὁ δείκτης περισσεύει· καταφαίνεται δὲ τῦτο ἐκ τῶν ἑξῆς ἀπὸ α — β βαθμῶν· ά· α¹ + — β¹ · β'. + α² — 2αβ¹ + β². γ'. + α³ — 3α²β¹ + 3αβ² — β³, κτ. Ἐξαιρεῖται μέντοι ἐντεῦθεν ὁ ὅρος βαθμῦ, ᾧ ἐναπαντῶνται δύω ῥιζικοὶ λειπτικοὶ ὅροι μετὰ περισσῦ ἑκάτερος δείκτυ· ἑκατέρυ γὰρ λειπτικῦ ὄντος τὸ ὑπ' αὐτῶν γινόμενον ἀναγκαίως ὑπαρκτικὸν ἔςαι· τῦ γὰρ ἀπὸ α — β — γ τετραγώνυ α² — 2αβ + β² — 2αγ + 2βγ + γ², ὁ πέμπτος ὅρος, γινόμενος ὑπὸ — 2β ᾗ — γ ἔςιν ὑπαρκτικὸς + 2βγ.

105. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. Σαφὲς δὲ, ὡς ἵνα πολυώ-

νυμόντι ἐπὶ τέταρτον ἀρθῇ βαθμόν, ζητητέον τὸν ἀπ' αὐτοῦ κύβον, ὃν πολλαπλασιαστέον ἐπὶ τὴν αὐτὴν ῥιζικὴν ποσότητα· ἢ γοῦν ἐπιτομώτερον, τὸ ἀπ' αὐτῆς τετραγωνιστέον τετράγωνον (83)· ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν καθυπερτέρων βαθμῶν.

ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἐν γένει δὲ σημαίνεται ἡ πάσης ποσότητος ἐπὶ τὸν τυχόντα βαθμὸν ἔξαρσις, γραφομένης ἐπ' αὐτῆς εὐθείας, ἧς πρὸς δεξιὰν ἐπιχαράσσεται ὁ τοῦ βαθμοῦ δείκτης· οὕτως οὖν $\overline{\alpha+\beta}^{2}$ τὸ τετράγωνον ἐμφαίνει τὸ ἀπὸ $\alpha+\beta$· εἰώθασι δὲ καὶ οὕτως αὐτὸ σημειοῦν $(\alpha+\beta)^{2}$· ἡ δ' ἔκθεσις $\overline{25}^{3}=15625$, δηλοῖ, ὅτι ὁ ἀπὸ 25 κύβος ἰσοῦται τῷ 15625.

Μέθοδος γενικὴ τοῦ εὑρίσκειν ἅπαντας τοὺς βαθμοὺς τοὺς ἀπὸ παντὸς πολυωνύμου.

106. Ἔσωσαν οἱ ἀπὸ $\alpha+\beta$ εὑρεθέντες κατὰ τὴν ἤδη γενομένην θεωρίαν βαθμοὶ

A' $1\alpha^{1}+1\beta^{1}$

B' $1\alpha^{2}+2\alpha^{1}\beta^{1}+1\beta^{2}$

Γ' $1\alpha^{3}+3\alpha^{2}\beta^{1}+3\alpha^{1}\beta^{2}+\beta^{3}$

Δ' $1\alpha^{4}+4\alpha^{3}\beta^{1}+6\alpha^{2}\beta^{2}+4\alpha^{1}\beta^{3}+\beta^{4}$

ἐξέσται οὖν παραθέσει τῶν διαφερόντων τῶν δε βαθμῶν σημειῶσαι τὰ ἑξῆς.

107. α'. Βαθμὸς ἅπας δυωνύμου ποσοῦ περιέχει τόσους ὅρους σὺν ἑνί, ὅσας περιέχει ὁ τούτου δείκτης μονάδας· Ὁ μὲν γὰρ πρῶτος ἀπὸ $\alpha+\beta$ περιέχει ὅρους δύω, ὁ δὲ δεύτερος τρεῖς, ὁ δὲ τρίτος τέσσαρας κτ.

108. β'. Ὁ πρῶτος ὅρος α τῆς δυωνύμου ῥίζης μονά-