ἀπὸ — α, γεγράφθω + α — α, ἢ — α + α, καὶ δὶ ἀναγωγῆς ἔσται 0.

34. ΣΧΟΛΙΟΝ. Μετὰ δὲ τὴν ἀφαίρεσιν, ἀναπτέον τὰς ὅρας ἐπὶ τὸ ὡς οἷόν τε ἁπλούστερον· ἐὰν οὖν ἀπὸ 2 αα — αβ + γγ ἀφαιρεθῇ αα + αβ — βγ, προκύψει 2 αα — αβ + γγ — αα — αβ + βγ, εἴτ' οὖν αα — 2 αβ + βγ + γγ: ἐὰν δὲ ἀπὸ 6 α — 3 β + 4 γ ἀφαιρεθῇ, 5 α — 5 β + 6 γ, προκύψει 6 α — 3 β + 4 γ — 5 α + 5 β — 6 γ, εἴτ' οὖν α + 2 β — 2 γ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Περὶ Πολλαπλασιασμοῦ τῶν συμβολικῶν ποσοτήτων.

35. Ὥσπερ ἐπὶ τῆς Ἀριθμητικῆς ἀριθμὸς ἁπλοῦς δὶ ἀριθμοῦ ἁπλοῦ πολλαπλασιάζεται, καὶ σύνθετος δὶ ἁπλοῦ, ἢ τοὐναντίον, καὶ σύνθετος τέλος δὶ ἀριθμοῦ συνθέτου οὕτω δυνατὸν πολλαπλασιάζειν ἤτοι μονώνυμον ἐπὶ μονώνυμον, ἢ πολυώνυμον ἐπὶ μονώνυμον, καὶ ἀντιστρόφως, ἢ πολυώνυμον ἐπὶ πολυώνυμον.

Περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν Μονωνύμων.

36. Μονώνυμον οὖν ἐπὶ μονώνυμον πολλαπλασιάζοντες, τηρεῖν ὀφείλομεν τοὺς κανόνας τῶν συμβόλων, τῶν συνεργῶν, τῶν γραμμάτων, καὶ τῶν δεικτῶν τῶν γραμμάτων, ἃ κοινῇ παρέπεται τῷτε πολλαπλασιαστέῳ, καὶ τῷ πολλαπλασιαστῇ.

37. Κανὼν Α΄. Τῶν ὅρων, ὁμοίων μὲν ὄντων, τίθει τῷ προκύπτοντι τὸ +, ἀνομοίων δὲ, τὸ —

38. Β΄. Πολλαπλασίασον τὸν ἕτερον συνεργὸν ἐπὶ τὸν ἕτερον.

39. Γ΄. Γράφε ἑξῆς ἐπὶ τοῦ προκύπτοντος πάντα τὰ ἔντε· τῷ πολλαπλασιαστέῳ καὶ τῷ πολλαπλασιαστῇ γράμματα μετὰ τῶν οἰκείων δεικτῶν.

40. Δ΄. Ὅταν γράμμα τι παρῇ κοινῇ τῷτε πολλαπλασιαστέῳ καὶ τῷ πολλαπλασιαστῇ, τοῦτο μὲν γράφε ἅπαξ, συνάπτων δὲ τὸν τοῦ πολλαπλασιαστέου δείκτην τῷ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ τούτων ἄθροισμα ἐπιχάρασσε ὡς δείκτην τῷ προκύπτοντι.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Κείσθω πολλαπλασιάσαι 2 $\alpha^3 \beta$ ἐπὶ 5 $\alpha\beta^2\gamma$· ἀ. ἐπεὶ οὖν κοινῇ ἐξυπακούεται τὸ +, προχάραξον, ἢ ἔα προεξυπακούεσθαι τοῦ προκύπτοντος τὸ +.

β΄. Πολλαπλασίασον 2 ἐπὶ 5, καὶ γράψον προκύπτοντα τὸν 10.

γ΄. Γράψον αβγ: τέλος δὲ: α, κοινῇ παρὸν τῷτε πολλαπλασιαστέῳ καὶ τῷ πολλαπλασιαστῇ, γράψον ἅπαξ· τὸν δὲ 3 δείκτην τοῦ πολλαπλασιαστέου συνάψας τῷ 1 δείκτῃ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὸ ἄθροισμα 4 τίθει δείκτην ἐπὶ τοῦ προκύπτοντος· β δὲ κοινῇ ἐνόντος τοῖς παράγουσι, προθεὶς τοὺς ἐπ' αὐτῶν δείκτας, τὸ 3 ἄθροισμα τίθει ἐπ' αὐτοῦ τοῦ προκύπτοντος δείκτην· προκύψει ἄρα ὁλικῶς τὸ 10 $\alpha^4\beta^3\gamma$.

41. Ἵνα δὲ φανῇ, ὡς καὶ ἐκ τοῦ συμβολικοῦ πολλαπλασιασμοῦ, αὐτὸ δὲ τοῦτο νοητέον καὶ ἐκ τῆς διαιρέσεως, ταὐτὸν ἕπεται, ὃ καὶ ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν, προσοικειώσομεν τοῖς γράμμασι μίαν τινὰ ἀριθμητικὴν δύναμιν ἐν ἑκατέρῳ πράξεως εἴδει· τεθείσθω οὖν ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω ὑποδείγματος

$\alpha = 10$, καὶ $\beta = 5$, καὶ $\gamma = 4$· γενήσεται ἄρα ὁ μὲν $2\alpha^3\beta$ πολλαπλασιασέος, 10000, ὁ δὲ $3\alpha\beta^2\gamma$ πολλαπλασιαστής, 3000· ἑκῶν τὸν ὑπ' αὐτῶν γινόμενον δεήσει εἶναι 50000000· ἡ ἄρα τοῦ $10\alpha^4\beta^3\gamma$ δύναμις εὑρεθήσεται ἴση 50000000.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἵνα πολλαπλασιασθῇ $\alpha^2\beta$ ἐ. $-3\beta\delta$, ἐπεὶ τὰ σύμβολα διαφέρουσι, θετέον — τῷ προκύπτοντι· ὁ δ' ἐν ἀριστερᾷ τοῦ πολλαπλασιασέος ἐξυπακούμενος συνεργὸς 1, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 3, δίδωσι 3· ἐκ δὲ τοῦ (39), ἔστιν $\alpha\beta\delta$· τέλος δὲ ἐκ τοῦ (40) δείκτης μόνῳ ἐπανήκει τῷ β· ὁ ὢν τοῦ πολλαπλασιασέος β δείκτης, συναφθεὶς τῷ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ β, ἀποτελεῖ 2, ὃν θετέον ἐπὶ τοῦ προκύπτοντος β· ἔσται ἄρα τὸ ζητούμενον $-3\alpha^2\beta^2\delta$.

Ἕτερα ὑποδείγματα· ὕτω ποιοῦσιν εὑρεθήσεται καὶ τὰ ἑξῆς ἀ. ὅτι τὸ γινόμενον ὑπὸ $-\alpha$ καὶ $+\beta$ ἔστι $-\alpha\beta$. β'. τὸ ὑπὸ $-\alpha$ καὶ $-\beta$ ἔστι $+\alpha\beta$. γ'. τὸ ὑπὸ $-\alpha$ καὶ $-\alpha$, ἢ ὑπὸ $+\alpha$ καὶ $+\alpha$, ἔστι $+\alpha^2$.

Περὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πολυωνύμων.

42. Ὥσπερ ἐπὶ τῆς Ἀριθμητικῆς πολλαπλασιάζοντες ἀριθμὸν σύνθετον ἀφ' ἁπλοῦν ἢ καὶ ἀντιστρόφως, πολλαπλασιάζομεν ἑξῆς πάντας τοὺς τοῦ συνθέτου ἀριθμοῦ χαρακτῆρας ἐπὶ τὸν ἁπλοῦν· ὕτω καὶ ἐπὶ τοῦ τῶν πολυωνύμων ἐπὶ μονώνυμον πολλαπλασιασμοῦ, πολλαπλασιάζονται πάντες οἱ τοῦ πολυωνύμου ὅροι ἐπὶ τὸ μονώνυμον κατὰ τοὺς ἄρτι ἀποδεδομένους ἐπὶ τοῦ τῶν μονωνύμων ἐπὶ μονώνυμον πολλαπλασιασμοῦ κανόνας.

43. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἰστέον δὲ, ὡς ἐπεὶ καθάπαξ χρε-

τικὴν ἃ κέκτηνται δύναμιν οἱ γραμματικοὶ ὅροι, ἀδεμίᾳ ἀρχομένοις τηρεῖται τάξις κατὰ τὰ δεξιὰ ἢ ἀριστερὰ ἐν τῷ τῶν πολυωνύμων πολλαπλασιασμῷ, ἢ καὶ τῇ τούτων διαιρέσει, ὥσπερ ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν πράξεων.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Α'.

Κείσθω πολλαπλασιάσαι $2\alpha\beta^2 + 4\alpha^2\beta\gamma - \alpha\gamma$ ἐπὶ $2\alpha\beta\gamma$.

$$\begin{array}{r} 2\alpha\beta^2 + 4\alpha^2\beta\gamma - \alpha\gamma \\ 2\alpha\beta\gamma \\ \hline 4\alpha^2\beta^4\gamma + 8\alpha^3\beta^2\gamma^2 - 2\alpha^2\beta\gamma^2 \end{array}$$

Πολλαπλασίασον οὖν κατὰ τοὺς δοθέντας κανόνας (36) $2\alpha\beta^2$ ἐπὶ $2\alpha\beta\gamma$· προκύπτων ἔσται $4\alpha^2\beta^4\gamma$· πολλαπλασίασον εἶτα $4\alpha^2\beta\gamma$ ἐπὶ $2\alpha\beta\gamma$· προκύπτων ἔσται $8\alpha^3\beta^2\gamma^2$· τέλος δὲ πολλαπλασίασον $-\alpha\gamma$ ἐπὶ $+2\alpha\beta\gamma$· προκύπτων ἔσται $-2\alpha^2\beta\gamma^2$· ὁ δ' ὁλικὸς προκύπτων ἔσεται $4\alpha^2\beta^4\gamma + 8\alpha^3\beta^2\gamma^2 - 2\alpha^2\beta\gamma^2$

44. Ὅταν δὲ ὅτε πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς τῶν πολυωνύμων ὦσι, πολλαπλασίασον πρῶτον πάντας τοὺς ὅρους τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πρῶτον τῶν τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὅρων, εἶθ' ἅπαντας ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ ἑξῆς ὕτως· ἐὰν δ' ἐπὶ τοῦ προκύπτοντος ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὅμοιοι ὑπάρχωσιν ὅροι (27), μέτιθι τούτους δι' ἀναγωγῆς (20).

Αὐτίκα οὖν, ἵνα πολλαπλασιασθῇ $\alpha+\beta+\gamma$ ἐπὶ $\delta+\zeta$, πολλαπλασιασθήτω πρῶτον $\alpha+\beta+\gamma$ διὰ δ,

$$\begin{array}{r} \alpha+\beta+\gamma \\ \delta+\zeta \\ \hline \alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta \\ \alpha\zeta+\beta\zeta+\gamma\zeta \\ \hline \alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta+\alpha\zeta+\beta\zeta+\gamma\zeta \end{array}$$

ὅθεν προκύψει $\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta$· εἶτα δὲ $\alpha+\beta+\gamma$ διὰ ζ, ὅθεν ἔσται $\alpha\zeta+\beta\zeta+\gamma\zeta$· τὸ δ' ὅλον, $\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta+\alpha\zeta+\beta\zeta+\gamma\zeta$.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Ἵνα πολλαπλασιαθῇ $2\alpha\beta - 3\beta\gamma$ ἐπὶ $3\alpha - \beta$, πολλαπλαθήτω πρῶτον $2\alpha\beta - 3\beta\gamma$ ἐπὶ 3α, ὅθεν ἔςαι $6\alpha^2\beta - 9\alpha\beta\gamma$· ἐξ ὑπαρχῆς δὲ πολλαπλασιαθήτω $2\alpha\beta - 3\beta\gamma$ ἐπὶ $-\beta$, ὅθεν ἕψεται $-2\alpha\beta^2 + 3\beta^2\gamma$· τὸ ἄρα ὁλικὸν προκύπτον ἔςιν $6\alpha^2\beta - 9\alpha\beta\gamma - 2\alpha\beta^2 + 3\beta^2\gamma$.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Γ΄. Ἵνα πολλαπλασιαθῇ $\alpha + \beta\zeta - \gamma$ ἐπὶ $\alpha - \beta\zeta + \gamma$ γραφήτωσαν ὑπάλληλοι οἱ δύω ποιηταὶ, πολλαπλασιαθήτω, α΄. ὁ πολλαπλασιαςέος ἐπὶ α, ὅθεν ἔςαι $\alpha^2 + \alpha\beta\zeta - \alpha\gamma$, εἶτα ἐπὶ $-\beta\zeta$, ὅθεν προκύψει $-\alpha\beta\zeta - \beta^2\zeta^2 - \beta\gamma\zeta$, ὃ γεγράφθω ὑπὸτὸ πρῶτον γινόμενον, ὡς τὰς ὁμοίας ὅρας τοῖς ὁμοίοις ἀντιςοιχεῖν· τέλος δὲ, ἐπὶ $+\gamma$, ὅθεν προκύψει $+\alpha\gamma + \beta\gamma\zeta - \gamma^2$ ὃ ἡ τῦτο γεγράφθω κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὑπὸ τὸ δεύτερον γενόμενον. Ταῦτα δὲ τὰ τρία γενόμενα, δι' ἀναγωγῆς συναφθέντα, ἀποτελῦσιν ὁλικὸν γινόμενον τὸ ἐνταῦθα ὁρώμενον.

45. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν γένει δὲ, γραμμῆς πλαγίας ἀχθείσης ἐπὶ πολλῶν συλλήβδην ποσοτήτων, σημαίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς τῆς σκεπομένης ὅλης ποσότητος δι' ἑτέρας ὡσαύτως σκεπομένης, μεσολαβῦντος τῦ $\times$· οἷον, ἵνα δηλωθῇ τὸ προκύπτον ἐκ τῆς $\alpha + \beta + \gamma$ ἡ $\delta + \zeta$, γράφεται $\overline{\alpha + \beta + \gamma} \times \overline{\delta + \zeta}$, ὃ ἐμφαίνει ὅτι ὅλη ἡ ποσότης $\alpha + \beta + \gamma$ πολλαπλασιάζεται ἠχ' ὅπως διὰ δ, ἀλλ' ἔτι καὶ διὰ ζ.

Εἰσὶ δ' οἱ ἀντὶ $\overline{\alpha + \beta} \times \overline{\zeta + \theta}$, γράφυσιν ὕτως $(\alpha + \beta) . (\zeta + \theta)$.

Υποδείγματα πολλαπλασιασμῦ πρὸς ἄσκησιν τῶν πρωτοπείρων.

$$\begin{array}{r}
\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\
\alpha + \beta \\
\hline
\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 \\
+ \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 \\
\hline
\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3.
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
2\alpha\beta - 3\alpha\gamma + \beta\gamma \\
\alpha\gamma - 2\beta\gamma \\
\hline
2\alpha\alpha\beta\gamma - 3\alpha^2\gamma\gamma + \alpha\beta\gamma\gamma \\
- 4\alpha\beta^2\gamma + 6\alpha\beta\gamma\gamma - 2\beta\beta\gamma\gamma \\
\hline
2\alpha\alpha\beta\gamma - 3\alpha\alpha\gamma\gamma + 7\alpha\beta\gamma\gamma - 4\alpha\beta\beta\gamma - 2\beta\beta\gamma\gamma
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\frac{2}{3}\alpha^3 - \frac{4}{5}\alpha^2\beta + \frac{2}{15}\beta^3 \\
\frac{3}{5}\alpha\beta - 2\beta^2 \\
\hline
\frac{2}{5}\alpha^4\beta - \frac{12}{25}\alpha^3\beta^2 + \frac{3}{10}\alpha\beta^4 \\
- \frac{4}{3}\alpha^3\beta^2 + \frac{8}{5}\alpha^2\beta^3 + \beta^5 \\
\hline
\frac{2}{5}\alpha^4\beta - \frac{136}{75}\alpha^3\beta^2 + \frac{8}{5}\alpha^2\beta^3 + \frac{9}{10}\alpha\beta^4
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
5\alpha^3 - 4\alpha^2\beta + 5\alpha\beta^2 - 3\beta^3 \\
4\alpha^2 - 5\alpha\beta + 2\beta^2 \\
\hline
20\alpha^5 - 16\alpha^4\beta + 20\alpha^3\beta - 12\alpha^2\beta^3 \\
- 25\alpha^4\beta + 20\alpha^3\beta^2 - 25\alpha^2\beta^3 - 15\alpha\beta^4 \\
+ 10\alpha^3\beta^2 - 8\alpha^2\beta^3 + 10\alpha\beta^4 - 6\beta^5 \\
\hline
20\alpha^5 - 41\alpha^4\beta + 50\alpha^3\beta^2 - 45\alpha^2\beta^3 + 25\alpha\beta^4 - 6\beta^5
\end{array}$$

Δεῖξις τῶν προεκτεθέντων κανόνων.

46. Α΄. Πολλαπλασιάζειν 2α ἐπὶ 3β, φέρ εἰπεῖν, λαμβάνειν ἐς 2α τοσάκις, ὅσα ἐς β ἐν τῷ 3β, θεωρούμενα δίκην μονάδος (72), ὅθεν ἔσται προδήλως 6α.

δεῖ ἄρα πολλαπλασιάζειν τὰς συνεργὰς διὰ θατέρου τὸν ἕτερον.

Β΄. Ὥρισαι κατὰ συνθήκην, ἵν' εἰς δήλωσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν γραμμάτων ἀδιαφόρως δυναίμεθα, ἢ διαστέλλειν ταῦτα τῷ ×, ἢ ἄνευ τούτου κατ' ἀλληλυχίαν ἐκτιθέναι, ἢ παρεντιθέναι αὐτοῖς τὸ στίγμα (.)

Γ΄. Ὁ δὲ τῶν δεικτῶν κανὼν οὐδὲν ἀλλ' ἢ ἁπλοῦν ἐστιν αἴτημα, ἤ, ᾧ εἰ τοῦτο βουλόμεθα, ἐπιτομήτις· πολλαπλασιάζοντας γὰρ βββ ἐπὶ ββ χρεὼν γράφειν κατὰ τὸν τῶν γραμμάτων κανόνα βββββ (18, 39)· ἀλλ' αἰτοῦμεν διὰ τὸ ἐπίτομον γράφειν β^5 ἀντὶ βββββ· μόνος δ' ἂν ὁ κανὼν τῶν σημείων πράγματα ἡμῖν παράσχοι· τούτῳ δὲ (37) ἀναπτύξεως δεῖ τεσσάρων τῶν ἐφεξῆς.

α΄. + × + = +. β΄. — × + = —. γ΄. + × — = —. δ΄. — × — = +.

47. Α΄. + × + = +· Ὁ ᾧ καθ' ἑαυτὸ ξυμφανὲς· εἴγε ποσότης ἅπασα ὑπαρκτικὴ ἑαυτῇ συναφθεῖσα τεσάκις, ὅσαι μονάδες ἔνεισιν ἑτέρᾳ ὑπαρκτικῇ, ὀφείλει ἀποδοῦναι ἄθροισμα ὑπαρκτικόν

48. Β΄. — × + = —· Ποσότης γὰρ ἅπασα λειπτικὴ, ταὐτὸν εἰπεῖν, ὀφειλὴ πᾶσα, συναφθεῖσα ἑαυτῇ ὁσάκις ἔνεσιν ἡμονὰς ἑτέρᾳ ποσότητι ὑπαρκτικῇ, ὀφείλει ἀποδοῦναι ποσότητα λειπτικήν· εἰ γὰρ ὀφείλω 4 χρήσαις ἑκάσῳ γρόσια 5000, σαφὲς ὅτι τὰ 5000 γρόσια, πολλαπλασιωθέντα ἐπὶ 4, ποιήσουσι γρόσια 20000 ὀφειλῆς, οὐ μὴν δὲ 20000 περιουσίας.

Λόγος ἕτερος· Ἔστω 5 — 2 πολλαπλασιαστέος ἐπὶ + 4, ὑφ' ὧν ὁ προκύπτων εὐθὺς καταφαίνεται ὢν 12. Πολλαπλασιάσαντες ἓν + 5 διὰ + 4 ἕξομεν 20 προκύπτοντα μείζω τοῦ δικαίου, τῇ ποσότητι 8, ἥτις ἐστὶ προ-

κύπτων ἐκ 2 (ὃς ἀφώρισται τοῦ 5 πρὸ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) καὶ τοῦ 4· πολλαπλασιάζοντες οὖν — 2 διὰ + 4 γράψομεν — 8, ἥτις ἀπομειοῖ τὸν προκύπτοντα 20 τῇ ποσότητι 8, καθ' ἣν τοῦ δικαίου ὑπερέβαινε· δι' οὗ ἀνταφαιρεῖν τὸ — πολλαπλασιάσαν τὸ + ἀποδώσει —.

49. Γ'. + × — = —. Πολλαπλασιάζοντες γὰρ + 5 ἐπὶ + 4, ληψόμεθα ὑπαρκτικῶς τετράκις τὸν 5, ὅθεν προκύψει 20· ἀλλὰ πολλαπλασιάζοντες + 5 ἐπὶ — 4, τὴν ἐναντίαν πάντως βαδιούμεθα, ὅ ἐστι ληψόμεθα τετράκις λειπτικῶς τὸν 5, εἶτ' οὖν τετράκις αὐτὸν ἀφαιρησόμεθα· ἀφαιροῦντες τοίνυν τετράκις τὸν 5 γράψομεν — 5 — 5 — 5 — 5 (32) ὅπερ ἐστὶν — 20· [illegible] + × — = —

Δειχθήσεται δὲ καὶ τοῦτο κατὰ τὸν ἀνωτέρω δεύτερον λόγον ἀπαραλλάκτως.

50. Δ'. Τελευταῖον δὲ — × — = +· πολλαπλασιάζοντες γὰρ — 4 ἐπὶ + 3, φέρ' εἰπεῖν, συνάπτομεν τρὶς τὸν — 4, ὡς εἰ καὶ γράφοιμεν — 4 — 4 — 4 τουτέστι — 12. Πολλαπλασιάζοντες τοίνυν — 4 διὰ — 3, ἐπ' ἐναντίας δήπου χωρήσομεν, τουτέστιν ἀφαιρήσομεν τρὶς τὸν — 4· ἐκ οὖν οὗ δυνηθείημεν ἀφελεῖν τρὶς τὸν — 4, εἰμὴ γράψαιμεν + 4 + 4 + 4, ὅπερ ἔσται + 12· Ἄλλως — × — = ἤτοι +, ἢ γοῦν —· ἀλλὰ μὴν — γενέσθαι οὐ δύναται· ἔστι γὰρ τὸ — γινόμενον ἐκ — × +, ἢ ἐκ + × — (48, 49)· ἀναγκαίως ἄρα ἔσται + *)

---

*) "Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν· "Λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν"· ὅτως ἐκφράζει τον

Ἕτερος λόγος· Ἔστω γὰρ πολλαπλασιάσαι 5 — 2 διὰ 9 — 3, ὧν τὸ γινόμενον πᾶς τις ξυνορᾷ ἐσόμενον 18· 5 — 2, πολλαπλασιαθὲν ἐπὶ 9, δίδωσι 45 — 18· πολλαπλασιαθέντος δ' ἐφεξῆς τοῦ 5 ἐπὶ — 3, προκύψει 15· ἀλλαμὴν — 3 οὐκ ὤφειλε πολλαπλασιάσαι ὅλον τὸν 5, ἀλλ' ἀπομεμειωμένον τῷ 2· ὁ ἄρα 2 τρὶς πλέον τοῦ δικαίου εἰσήχθη τῷ λειπτικῷ προκύπτοντι — 15· ᾗ δὴ τὸ 15 προκύπτον, ὡς λειπτικὸν θεωρούμενον, ἐστὶ μεῖζον τοῦ δικαίου τῇ ὅλῃ ποσότητι — 6. ἄρα πολλαπλασιάζοντες ἑπομένως — 2 ἐπὶ — 3 ὀφείλομεν γράψαι + 6, ἀναπληροῦντες ἀμέλει ἐν τῷ προκύπτοντι, ἣν δεῖ ἀφειλόμεθα ποσότητα 6· ἐντεῦθεν ἔξομεν προκύπτοντα ἀληθῆ τὸν 18, ὅνπερ χρεὼν εὑρεῖν, ὡ ἐν ἀρχῇ εἴδομεν· ἐπεὶ 45 — 18 — 15 + 6 = 18· Ὅτι δὲ ταῦτα κρατεῖ κἀπὶ τῶν ἐν γράμμασι ποσῶν, μὴ ᾗ περιττὸν ἡ δεικνύειν.

κανόνα τόν δε Διόφαντος, Βιβ. Α' Ὁρισμ. Δ'. Ὅθεν καὶ ἡμῖν αἱ ἐναντίαι ποσότητες, καὶ τῶν συμβόλων τοῖς ἐναντίοις +, — σημειούμεναι, ἐ καταφατικαὶ καὶ ἀποφατικαὶ, ὥσπερ ἄλλοις εἴθισται, ὑπαρκτικαὶ δὲ καὶ λειπτικαὶ ἐκλήθησαν (21)· καὶ γὰρ καὶ ἡ ἀρχαία χρῆσις οὕτω τηρεῖται καὶ τὸ πρᾶγμα ἄλις διερμηνεύεται· Δυοῖν γὰρ τινων, ὁ μὲν ἐχέτω ἀργύρια 20, ἕτερος δὲ ὀφειλέτω 20. δῆλον οὖν ὅτι τῷ μὲν ὑπάρχουσιν ἀργύρια 20, ἀπὸ δὲ τοῦ δευτέρου λείπουσιν ἀργύρια 20· διὰ ταῦτα τοῦ μὲν ἡ τῶν 20 περιουσία ἐστὶ ποσότης ὑπαρκτική· τοῦ δὲ ἡ τῶν 20 ὀφειλή, ποσότης λειπτική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΤΟΝ.

Περὶ Διαιρέσεως τῶν Συμβολικῶν Ποσοτήτων.

51. Ἡ διαίρεσις ἐναντίως ἔχουσα τῷ πολλαπλασιασμῷ, αἴτεῖ μέντοι κατ' ἐκεῖνον ἐν τῷ συμβολικῷ λογισμῷ τοὺς κανόνας τῶν συμβόλων, τῶν συνεργῶν, τῶν γραμμάτων, καὶ δὴ καὶ τῶν δεικτῶν.

52. Κανὼν Α΄. Ἐὰν μὲν ὅμοια σύμβολα παρῶσι τῷ τε διαιρετέῳ, καὶ τῷ διαιρέτῃ, τίθει πρὸ τοῦ πηλίκου τὸ +· ἐὰν δ' ἀνόμοια, τὸ —.

53. Β΄. Δίελε τὸν τοῦ διαιρετέου συνεργὸν διὰ τοῦ κατὰ τὸν διαιρέτην.

54. Γ΄. Γράφε πηλίκου τὰ ἐν τῷ διαιρετέῳ συνάμα τοῖς δείκταις γράμματα, ἃ μὴ ἔχει ὁ διαιρέτης.

55. Δ΄. Ὅταν ὅ,τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης τὸ αὐτὸ ἔχωσι γράμμα, ἄφελε τὸν δείκτην τὸν ἐν τῷ διαιρετέῳ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ διαιρέτῃ, καὶ γράψον πηλίκου αὐτὸ τὸ γράμμα μετὰ δείκτου, ὅς ἐστιν ἡ διαφορὰ τῶν προτέρων δεικτῶν· τῆς δὲ διαφορᾶς ο ὄσης, ὡς ὅταν ὁ αὐτὸς ἦ δείκτης τῷτε ἐπὶ τοῦ διαιρετέου, καὶ τῷ ἐπὶ τοῦ διαιρέτου γράμματι, μηδόλως γράφε τὸ γράμμα.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἔστω διελεῖν 6 a^2 β^3 γ διὰ 2a^2 β· τὰ ἐξυπακουόμενα σημεῖα + εἰσὶ ταυτὰ, γράφε ἓν πρὸ τοῦ πηλίκου, ἢ ἕα προεξυπακουόμενον τὸ +· δίελε εἶτα τὸν τοῦ διαιρετέου συνεργὸν 6, διὰ τοῦ κατὰ τὸν διαιρέτην συνεργοῦ 2, τὸν δὲ προϊόντα 3· ἔστὶ συνεργὸν τοῦ πηλί-

κυ· τὸ δὲ α, παρὸν κοινῇ τῷτε διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ μετὰ τοῦ αὐτοῦ δείκτου, μηδὲ γράψῃς ἐν τῷ πηλίκῳ ὅλως· τὸ δὲ β κοινῇ μὲν ἀπαντᾷ, ἀλλὰ μετὰ δείκτου, ἐν μὲν τῷ διαιρετέῳ μείζονος, ἐν δὲ τῷ διαιρέτῃ ἐλάσσονος· διὰ ταῦτ' ἓν ἄφελε τὸν δείκτην τοῦ διαιρέτου 1 ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτου 3, τὸ δὲ β γράμμα θὲς πηλίκου ἐπιθεὶς αὐτῷ δείκτην τὴν 2 διαφορὰν· τέλος δὲ τὸ γ παρὸν μὲν τῷ διαιρετέῳ, ἀπὸν δὲ τῷ διαιρέτῃ, γράφε πηλίκου, τὸ δ' ὅλον πηλίκου ἕξεις $3\beta^2\gamma$

Ἔστω $\alpha=4$, καὶ $\beta=10$, καὶ $\gamma=5$· ὁ τοίνυν διαιρετέος $6\alpha^2\beta^3\gamma$ ἔσται 480000, ὁ δὲ $2\alpha^2\beta$ διαιρέτης, 320· διαιρεθέντος οὖν τοῦ 480000 διὰ 320, πηλίκου πρόεισι 1500· εὑρεθήσεται δὲ ὅτι καὶ τὸ $3\beta^2\gamma$ συμβολικὸν πηλίκου δύναται ὡσαύτως 1500.

56. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἐν τῷ Συμβολικῷ λογισμῷ, ὡς καὶ τῇ ἀριθμητικῇ, γενικὴ βάσανος τῆς μὲν διαιρέσεώς ἐστιν ὁ πολλαπλασιασμὸς, τούτου δὲ ἡ διαίρεσις· ἱκανὸν εἰδέναι βουλόμενος ἐπὶ τοῦ προεκτεθέντος ὑποδείγματος, εἰ ἄρα ἀληθὲς πηλίκον ἔχομεν, πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἀπολήψόμεθα ἀναγκαίως τὸν διαιρετέον· τἀναντίον δὲ μετὰ τὸ πολλαπλασιάσαι $2\alpha^2\beta$ ἐπὶ $3\beta^2\gamma$, βασανίζοντες τὴν πρᾶξιν, τὸ προκύπτον $6\alpha^2\beta^3\gamma$ διαιρήσομεν διὰ τοῦ πολλαπλασιασθέντος $3\beta^2\gamma$· ἀπολήψόμεθα δὲ ἀναγκαίως εἰς πηλίκον τὸν $2\alpha^2\beta$ πολλαπλασιασέον.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Ἔστω διελεῖν — $\alpha\beta^2\gamma$ διὰ — $\beta^2\gamma$· ὁ οὖν τῶν σημείων κανὼν ἀφοσιοῖ τὸ + τῷ πηλίκῳ· περὶ δὲ τῶν συνεργῶν, 1 ἐξυπακουομένη πρὸ τοῦ διαιρετέου, διαιρεθεῖσα διὰ 1, προεξυπακουομένης τοῦ διαιρέτου, παρέχει 1, ἣν ἔα προεξακούεσθαι τοῦ πηλίκου· τὸ δὲ α παρὸν μὲν τῷ διαιρετέῳ, ἀπὸν δὲ τοῦ διαιρέτου γράφε ὡς πηλίκου· τοῦ

δὲ β ἀφελὼν τὸν ἐν τῷ διαιρέτῃ δείκτην 2 ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτου 3, γράφε πηλίκον τὸ β μετὰ δείκτου 1, ἢ καὶ παραλείπεται ἐννοουμένη· τὸ δὲ γ ὡς τῷτε διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ σὺν τῷ αὐτῷ δείκτῃ παρὸν, μὴ γράφε ὅλως· πηλίκον ἄρα ἔσται + αβ· ὡσαύτως δὲ 8 αβ: — 2 αβ = — 4· καὶ — 8 αβγ²: + αβγ = — 8 γ.

Δεῖξις τῶν προαποδοθέντων κανόνων.

Α΄ Πᾶς κανὼν διαιρέσεως ἀσφαλής ἔσται, ἐὰν παράγῃ πηλίκον, ὃ πολλαπλασιαθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀποδίδωσιν ἀκριβῶς τὸν διαιρετέον· ἐπεὶ δὲ τοῦτο ξυμβαίνει ἐκ τῶν ἄρτι προτεθειμένων κανόνων· ἄρα καὶ αὐτοί εἰσιν ἀσφαλεῖς.

Α΄. Ἐκ γὰρ τῶν συμβόλων ἀρξαμένοις, εἰ ἔστι τῷ τε διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ +, τὸ + τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιαθὲν ἐπὶ τὸ + τοῦ διαιρέτου ἐπιστρέψει τὸ τοῦ διαιρετέου +· εἰ δ' ἔστι — τῷ διαιρετέῳ τε καὶ τῷ διαιρέτῃ, τὸ + τοῦ πηλίκου πολλαπλασιαθὲν διὰ τοῦ — τοῦ διαιρέτου ἀποδώσει τὸ — τοῦ διαιρετέου· εἰ δ' ἔστι + μὲν τῷ διαιρετέῳ, — δὲ τῷ διαιρέτῃ, τὸ τοῦ πηλίκου —, πολλαπλασιαθὲν διὰ τοῦ — τοῦ διαιρέτου ἀποδώσει τὸ τοῦ διαιρετέου +· τέλος δὲ, εἰ ἔστι — μὲν τῷ διαιρετέῳ, + δὲ τῷ διαιρέτῃ, τὸ τοῦ πηλίκου — πολλαπλασιαθὲν διὰ τοῦ + τοῦ διαιρέτου ἀποδώσει τὸ τοῦ διαιρετέου —.

Β΄. Ὑπὲρ δὲ τῶν συνεργῶν, ἐπείπερ ὁ τοῦ συμβολικοῦ πηλίκου συνεργὸς ἀριθμητικὸν πηλίκον ὑπάρχει, προϊὸν ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον διὰ τοῦ κατὰ τὸν διαιρέτην συνεργοῦ, πολλαπλασιαθεὶς ἐπὶ τὸν τοῦ διαιρέτου συνεργὸν ἀποδώσει ἀναγκαίως τὸν τοῦ διαιρετέου.

Γ'. Περὶ δὲ τῶν γραμμάτων, πάντα τὰ τοῦ διαιρέτου, ἢ τὰ τοῦ πηλίκου (54, 55) ἢ καὶ ἀμφοῖν κοινῇ παρευρισκόμενα, εὑρεθήσονται ἀναγκαίως κἀν τῷ γινομένῳ ὑπὸ τοῦ πηλίκου, καὶ τοῦ διαιρέτου (39).

Δ'. Τὸ δ' ἐπὶ τοῖς δείκταις· ἅπαν γράμμα τοῦ διαιρετέου, ὃ μὴ πάρεστι τῷ διαιρέτῃ, παρέσται τῷ πηλίκῳ, καὶ δὴ καὶ τῷ προκύπτοντι, ἔχον τὸν αὐτοῦ δείκτην, ὃν εἶχεν ἐν τῷ διαιρετέῳ (39). Περὶ δὲ τῶν κοινῇ παρόντων τῷτε διαιρετέῳ, καὶ τῷ διαιρέτῃ, ἐὰν ἔχωσιν ἴσους δείκτας, παρόντα τῷ διαιρέτῃ παρέσονται καὶ τῷ προκύπτοντι· ἐὰν δὲ ὁ δείκτης, ὃν ἔχει τὸ αὐτὸ γράμμα ἐν τῷ διαιρετέῳ, μείζων ἢ τοῦ δείκτου, ὃν τὸ αὐτὸ γράμμα ἔχει ἐπὶ τοῦ διαιρέτου, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἐντῷ διαιρετέῳ, ἣ ὑπερέχει τὸν ἐν τῷ διαιρέτῃ, συναφθεῖσα αὐτῷ τῷ ἐν τῷ διαιρέτῃ, ἀναγκαίως ἀποδώσει τὸν ἐν τῷ διαιρετέῳ δείκτην (55).

57. ΣΧΟΛΙΟΝ Α'. α, Ὅταν ὁ τοῦ διαιρέτου συνεργὸς μείζων ἢ τοῦ κατὰ τὸν διαιρετέον, ἢ ὅταν λειψάνου ἄτερ οὐκ ἔχῃ γενέσθαι διαίρεσις· β'. ὅταν ὁ διαιρέτης γράμματα περιέχῃ, ἃ μὴ ἔχει ὁ διαιρετέος· γ'. ὅταν ὁ δείκτης κοινοῦ γράμματος τῷτε διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ μείζων ἢ ἐν τῷ διαιρέτῃ, ἢ ἐν τῷ διαιρετέῳ, ἡ συμβολικὴ διαίρεσις ὁλοσχερῶς οὐ γενήσεται· ἀποχρήσει οὖν τηνικαῦτα σημεῖον τὴν διαίρεσιν ἤτοι μεσολλαβοῦντος μεταξὺ τοῦ (:) σημείου· οἷον 7 αβγ : 3 αβγδ, ἢ ἐν εἴδει κλάσματος, ὃ ἀριθμητὴς μὲν ὁ διαιρετέος, παρονομαστὴς δὲ ὁ διαιρέτης οἷον $\frac{7\,\alpha\beta\gamma}{3\,\alpha\beta\gamma\delta}$.

58. ΣΧΟΛΙΟΝ Β'. Ἀλλὰ συχνάκις γὰρ ἡ οὕτω περίσαμένη διαίρεσις, ἢ τὸ συμβολικὸν κλάσμα, ἐφ' ἁπλουστέραν ἔκθεσιν ἀναχθῆναι δύναται· ἰδοὺ δὴ ἡ μέθοδος· α.

διέλε, εἰ ἐξείη, ἑκάτερον συνεργὸν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ἐν τῷ χώρῳ αὐτῶν τίθει τὰ προκύπτοντα πηλίκα· β΄. ὅταν ὦσι γράμματα κοινὰ τῷτε διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ, σὺν τῷ αὐτῷ δείκτῃ, ἀμφότερα ἀπάλειψον (55)· ὅταν δὲ ἐν διαφόροις δείκταις, ἔα κατὰ χώραν τὸ, ὃ εἶχε τὸν μείζω δείκτην, μετὰ δείκτου τῆς διαφορᾶς τῶν δύω προτέρων δεικτῶν.

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἵν' ἂν ἀναγάγῃς ἐφ' ἁπλουστέραν ἔκθεσιν τὴν σεσημειωμένην διαίρεσιν, ἢ τὸ συμβολικὸν κλάσμα $\frac{4\,\alpha\beta^3\gamma\delta}{12\,\alpha\beta\gamma^2}$ ἁ. διέλε τοὺς συνεργοὺς 4 καὶ 12 διὰ 4, ὅθεν προκύψει $\frac{1}{3}$· β΄. τὸ α, κοινὸν ὂν τῷτε διαιρετέῳ καὶ τῷ διαιρέτῃ, ἐξάλειψον· γ΄· τὸ β ἔχον ἐν μὲν τῷ διαιρετέῳ δείκτην 3, ἐν δὲ τῷ διαιρέτῃ δείκτην 1, ἔασον ἐπὶ τοῦ διαιρετέου μετὰ δείκτου τοῦ 2, ὃς ἔστιν ἡ διαφορὰ τοῦ 3 καὶ 1, οὗς εἶχον πρότερον δείκτας τὰ γράμματα· ἀπὸ δὲ τοῦ γ, 1 ἀφαιρεθεῖσα τοῦ 2, καταλείπει γ ἐν τῷ διαιρέτῃ· ἡ δὲ διαίρεσις, ἢ τὸ συμβολικὸν κλάσμα γενήσεται δι' ἀναγωγῆς $\frac{1\,\beta^2\delta}{3\gamma}$, ἢ $\frac{\beta^2\delta}{3\gamma}$.

Πᾶς ἄντις ῥᾷστα συνίδοι, ὅτι ταὐτὸν ποιοῦμεν ἐνταῦθα, ὃ καὶ εἰ διέλοιμεν τόντε ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος $\frac{4\,\alpha\beta^3\gamma\delta}{12\,\alpha\beta\gamma^2}$ διὰ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ $4\,\alpha\beta\gamma$, εἴγε $4\,\alpha$[illegible] διαιρεθὲν διὰ $4\,\alpha\beta\gamma$ ἀποδίδωσι $\beta^2\delta$, τὸ δὲ $12\,\alpha\beta\gamma^2$ διαιρεθὲν ὡσαύτως ἀποδίδωσι 3γ· ὕτω δὲ ἀμετακίνητος μένει ἡ δύναμις τοῦ κλάσματος (Ἀριθμ. 143).

Ἕτερον ὑπόδειγμα· ὕτω δὲ ποιοῦντες εὑρήσομεν καὶ τὸ $\frac{18\,\alpha\beta\zeta^3}{9\beta\gamma\zeta}$ γινόμενον δι' ἀναγωγῆς $\frac{2\alpha\zeta}{\gamma}$, καὶ

$\frac{9\alpha\gamma}{7\gamma}=\frac{9\alpha}{7}$, καὶ $\frac{\alpha\beta}{2\alpha\beta}=\frac{1}{2}$ ἐὰν δὲ ὅ,τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης πλείους ἑνὸς ὅρους ἔχωσιν, ἵν' ἀναχθῶσιν εἰς ἁπλούστερον σχῆμα, ἐπάναγκες εὑρεῖν τὸν μέγιστον κοινὸν ἀμφοῖν διαιρέτην, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς κεφαλαίῳ ὀψόμεθα.

59. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἔστω $\frac{\alpha}{\alpha}$, παρεπόμενοι τοίνυν τῷ γενικῷ τῶν δεικτῶν κανόνι (55) ὃς ἀφαιρεῖν παρεκελεύετο τὸν δείκτην, ὃν ἔχει τὸ αὐτὸ γράμμα ἐν τῷ διαιρέτῃ, τοῦ δείκτου ὃν ἔχει ἐν τῷ διαιρετέῳ, ληψόμεθα πηλίκον α^{1-1}, ἢ α^{0}, ἀλλὰ α διαιρεθὲν δι' α παρέχει πηλίκον 1· ἄρα, α^{0}, καὶ ἐν γένει ἅπαν γράμμα δείκτην ἔχον 0, ἴσον ἐστὶ 1· ὅταν ἄρα ἀναγαγεῖν βουλώμεθα ἐφ' ἁπλουστέραν ἔκθεσιν κλάσμα συμβολικὸν, ἔχον τὰ αὐτὰ γράμματα ἐπίτου τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ μετὰ τοῦ αὐτοῦ δείκτου, ταῦτα, ἐπεὶ ἰσοδυναμοῦσι μονάδι, ἥτις τὰ λοιπὰ γράμματα πολλαπλασιάζουσα οὐ μεταστρέπει, ἀπαλειπτέον.

Διαίρεσις τῶν πολυωνύμων.

60. Ὥσπερ ἐπὶ τῆς Ἀριθμητικῆς διαιρεῖν ἀδύνατον ἀριθμὸν ἁπλοῦν διὰ σύνθετου, οὕτω καὶ ἐπὶ τοῦ συμβολικοῦ λογισμοῦ ἀδύνατον διελεῖν διὰ πολυωνύμου μονωνύμον· ἀποχρήσει οὖν μόνον τὴν πρᾶξιν σημειῶσαι· οὕτως ἐπὶ διαιρέσει τοῦ $\alpha\gamma$ διὰ $\alpha+\beta$ γραπτέον $\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}$· ἢ γοῦν $\alpha\gamma:\overline{\alpha+\beta}$ ἢ καὶ $\alpha\gamma:(\alpha+\beta)$· Ἀλλ' ἐπὶ πολυωνύμου διὰ μονωνύμου διαίρεσιν, διαιροῦμεν ἑξῆς πάντας τοὺς τοῦ πολυωνύμου ὅρους διὰ τοῦ μονωνύμου.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Α΄. Ἔςω διελεῖν $6\alpha\beta^2 + 2\beta\gamma - 4\beta\delta$ διὰ 2β· $6\alpha\beta^2$ διαιρεθὲν διὰ 2β, δίδωσι $3\alpha\beta$· $2\beta\gamma$ διαιρεθὲν διὰ 2β, δίδωσι γ· καὶ $-4\beta\delta$ διαιρεθὲν διὰ 2β παρέχει -2δ· τὸ δ' ὅλον πηλίκον, $3\alpha\beta + \gamma - 2\delta$· πολλαπλασιασθὲν γὰρ ἐπὶ τὸν διαιρέτην 2β, προβάλλει τὸν διαιρετέον.

Ἔςω $\alpha = 10$, καὶ $\beta = 5$, καὶ $\gamma = 4$, καὶ $\delta = 3$· Ὅλος τοίνυν ὁ διαιρετέος $6\alpha\beta^2 + 2\beta\gamma - 4\beta\delta$ ἐκτιμηθεὶς ἐν ἀριθμοῖς, ἔςαι 1480· ὁ δὲ διαιρέτης ἔςαι 10· 1480 οὖν διαιρεθεὶς διὰ 10, δίδωσιν 148· καταφανὲς δὲ, ὅτι καὶ τὸ πηλίκον $3\alpha\beta + \gamma - 2\delta$ δύναται ὡσαύτως 148.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Β΄. Κείσθω διαλεῖν $-\alpha + \alpha\beta - 3\alpha\beta\gamma$ διὰ $-\alpha$. $-\alpha$ διαιρεθὲν διὰ $-\alpha$, δίδωσι $+1$· $\alpha\beta$ διαιρεθὲν διὰ $-\alpha$ δίδωσι $-\beta$· $-3\alpha\beta\gamma$ διαιρεθὲν διὰ $-\alpha$ δίδωσι $+3\beta\gamma$· τὸ δ' ὅλον πηλίκον, $+1 - \beta + 3\beta\gamma$.

61. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἀπαντήσαντος δὲ ἐν τῷ διαιρετέῳ ὅρου, ὃς μὴ εἴη διαιρέσιμος λειψάνου δίχα, ἀποχρήσει αὐτὸν σημειοῦν ὡς διῃρημένον· διαιροῦντες οὖν $3\alpha\beta - \beta\gamma$ διὰ $2\alpha\gamma$, γράψομεν μόνον $\frac{3\alpha\beta - \beta\gamma}{2\alpha\gamma}$, ἢ γοῦν $\overline{3\alpha\beta - \beta\gamma} : 2\alpha\gamma$ ἢ τέλος $(3\alpha\beta - \beta\gamma) : 2\alpha\gamma$

62. Ὁπηνίκ' ἂν ὅ, τε διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης τῶν πολυωνύμων ὑπάρχωσι· α΄. δίελε διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, ἕνα τινὰ ὅρον τοῦ διαιρετέου, ὃς ἂν ᾖ λειψάνου ἄνευ διαιρέσιμος· β΄. πολλαπλασίασον ὅλον τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ εὑρημένον πηλίκον· γ΄. ἄφελε ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ προκύπτον τόνδε τὸν τρόπον· μεταβαλὼν τὰ τῶν ὅρων τοῦ προκύπτοντος σύμβολα, τίθει ἕκαςον ὅρον ὑφ' ἕκα-

σον τῶν τοῦ διαιρετέου, οἱ σφίσιν ἂν εἶεν ὅμοιοι, καὶ ἀνάγαγε οὕτω ἑκάστην δυάδα ὅρων τοῦ προκύπτοντος καὶ τοῦ διαιρετέου· ἐπαναλάμβανε δὲ, ἕως ἂν ἐξῇ, τὰς αὐτὰς πράξεις, μέχρι τέλους τῆς διαιρέσεως.

63. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ῥᾷς' ἄντις ξυνίδοι, ὡς ἡ μέθοδος αὕτη τοῦ διαιρεῖν τὰ πολυώνυμα ἀκριβῶς ταυτίζεται τῇ μεθόδῳ τῆς ἀριθμοῦ συνθέτου διαιρέσεως· ὡς καὶ ἡ μέθοδος τοῦ πολυώνυμα διὰ μονωνύμων διαιρεῖν ἡ αὐτή ἐστι τῇ ἐκδεδομένῃ περὶ τῆς τοῦ συνθέτου δι' ἁπλοῦ ἀριθμοῦ διαιρέσεως· ἐν γένει ἄρα εἰπεῖν, παρεκτὸς τῶν προχεομένων ἐκ τῆς χρετικῆς τῶν ἀριθμῶν δυνάμεως ὅ, τε πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις τῶν συμβολικῶν πολυωνύμων τἄλλα πάντα ἀκριβῶς ταυτίζονται τῷ πολλαπλασιασμῷ τε καὶ τῇ διαιρέσει τῶν συνθέτων ἀριθμῶν.

ΠΡΟΔΕΙΜΑ Α'. Ἔστω διελεῖν $\alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \alpha\gamma - \beta\gamma$ διὰ $\alpha\beta + \gamma$· γραφέντων οὖν τοῦ τε διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου ὥσπερ ἐπὶ τῆς ἀριθμητικῆς διαιρέσεως, καθάπερ φαίνεται ἐνταῦθα,

$$\begin{array}{l|l} \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \alpha\gamma - \beta\gamma & \alpha\beta + \gamma \\ \hline -\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\gamma + \beta\gamma & \alpha - \beta \\ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

διέλε $\alpha^2\beta$ διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ $\alpha\beta$· τὸ δὲ α τίθει ἐν τῷ χώρῳ τῶν πηλίκων· Ὅλον δὲ τὸν $\alpha\beta + \gamma$ διαιρέτην πολλαπλασιάσας ἐπὶ τὸ πηλίκον α, γράψον τὸ $\alpha^2\beta + \alpha\gamma$ γινόμενον ὑφ' ὅρους τοῦ διαιρετέου ὁμοίους, ἀλλὰ μετὰ συμβόλων ἐναντίων εἰς ἀφαιρέσεως ἔνδειξιν (32)· ἀναγωγῆς δὲ γενομένης κοινῆς τῶν ὅρων τοῦ προκύπτοντος τοῖς ἀντιστοίχοις ὅροις τοῦ διαιρετέου, καταλείπεται 0· μένουσι δὲ ἔτι ἐν τῷ διαιρετέῳ οἱ ὅροι $-\alpha\beta^2 - \beta\gamma$· διέλε οὖν αὖθις $-\alpha\beta^2$ διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha\beta$ τῶν κατὰ τὸν διαιρέτην· τὸ δὲ

— β γράψον ἐν τοῖς πηλίκοις· Ὅλος δὲ ὁ διαιρέτης αβ + γ, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ — β, ποιεῖ — αβ² — βγ. τούτους δὲ γράψον ὑφ' ὅρους τοῦ διαιρετέου σφίσιν ὁμοίους, ἔχοντας ἀντὶ — τὸ + σύμβολον· ἀναγωγῆς δὲ αὖθις γενομένης, οὐδὲν λείπεται· Τὸ δ' ὁλικὸν πηλίκον ἐστὶν α — β, ὃ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην αβ + γ ἀποδίδωσι τὸν αὐτὸν διαιρετέον α²β — αβ² + αγ — βγ.

Ἔστω, ἐπὶ τοῦ προτεθέντος ὑποδείγματος, α = 10, καὶ β = 5, καὶ γ = 4· ὅλος ἄρα ὁ διαιρετέος ἔσται 270, ὁ δὲ διαιρέτης 54· 270 διαιρεθεὶς διὰ 54 δίδωσι 5· ἀλλ' ὡσαύτως καὶ τὸ συμβολικὸν πηλίκον α — β ἐστὶν = 5.

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Β'. Κείσθω διελεῖν χ³ — 11χ² + 38χ — 40 διὰ χ — 2· διηρήσθω οὖν ὁ τοῦ διαιρετέου ὅρος χ³ διὰ τοῦ πρώτου τῶν κατὰ τὸν διαιρέτην ὅρου χ· ὅθεν προκύψει πηλίκου χ²· ὅλου δὲ τοῦ διαιρέτου χ — 2, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τοῦτο τὸ πηλίκον, προκύψει χ³ — 2χ², ὃ γεγράφθω ὑπὸ τὸν διαιρετέον σὺν ἐναντίοις συμβόλοις· ἀναγωγῆς δὲ καταλείπεται ἐν τῷ διαιρετέῳ — 9χ², + 38χ — 40· διηρήσθω τοίνυν — 9χ², διὰ χ· πηλίκου ἔσται — 9χ· ὅλου δὲ τοῦ διαιρέτου πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ — 9χ, προκύπτει — 9χ² + 18χ· γεγράφθωσαν οὖν τῷ ὅρῳ τῷδε μετ' ἐναντίων συμβόλων ὑφ' ὁμοίω σφῶν ὅρῳ· ἀναγωγῆ δὲ λείπεται ἐν τῷ διαιρετέῳ 20χ — 40· διηρήσθω δὲ 20χ διὰ χ· πηλίκου οὖν ἔσται + 20· τὸ δὲ γινόμενον ὑπὸ τοῦδε τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ διαιρέτου, εἴτ' οὖν + 20χ — 40, γράψον μετ' ἐναντίων συμβόλων ὑπὸ δύω ὁμοίους ἀντιστοιχοῦντας ὅρους· ἀναγωγῆς δὲ γενομένης, καταλείπεται 0, ὅ, τε διαιρετέος φθίνει· Τὸ ἄρα ὁλικὸν πηλίκον ἔστι χ² — 9χ + 20, ὃ πολλαπλασιάσθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην χ — 2 ἀποδίδωσι τὸν διαιρετέον·

$$\begin{array}{l|l}
\chi^3 - 11\chi^2 + 38\chi - 40 & \chi - 2 \\
\hline
-\chi^3 + 2\chi^2 - 18\chi + 40 & \chi - 9\chi^2 + 20 \\
0 - 9\chi^2 + 20\chi \quad 0 & \\
+9\chi^2 - 20\chi & \\
0 \quad 0 &
\end{array}$$

ΠΡΟΔΕΙΓΜΑ Γ'. Ἔςω διελεῖν $\chi^3 - 117\chi - 324$ διὰ $\chi + 3$· διηρήσθω ὖν χ^3 διὰ χ· πηλίκον ἔςαι χ^2· ὁ δὲ $\chi + 3$ διαιρέτης, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ τὸ πηλίκον χ^2, ποιεῖ $\chi^3 + 3\chi^2$· γεγράφθω δὲ τὸ χ^3 μετὰ τοῦ — ὑπὸ τὸ χ^3 τοῦ διαιρετέου· ἀναγωγῇ δὲ λείπεται 0· περὶ δὲ τοῦ $+3\chi^2$ ὅρου βλέπων, ὅτι ὐκ ἔςιν αὐτῷ ὅμοιος ὅρος ἐν τῷ διαιρετέῳ, γράφε αὐτὸν ὑπὸ τὸν — χ^3 μεταβάλλων τὸ σύμβολον, ὑποτιθεὶς δὲ αὐτὸν ὡς ὅρον τοῦ διαιρετέου δίελε εὐθὺς διὰ τοῦ χ πρώτου τῶν τοῦ διαιρέτου ὅρων· πηλίκον ὖν ἔςαι -3χ· ὁ δὲ $\chi + 3$ διαιρέτης, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ -3χ, ποιεῖ $-3\chi^2 - 9\chi$· Τούτων δὲ τῶν δυοῖν ὅρων ὑπὸ τοὺς σφίσιν ὁμοίους γραφέντων, καὶ ἀφαιρεθέντων, λείπεται ἐπὶ τοῦ διαιρετέου $-108\chi - 324$· διαιρεθεὶς δὲ διὰ χ ὁ -108χ ὅρος παρέχει πηλίκον -108· πολλαπλασιασθεὶς δὲ ἐπὶ -108 ὁ $\chi + 3$· ποιεῖ $-108\chi - 324$, ὧν ἀφαιρεθέντων δι' ἀναγωγῆς, λείπεται ἓν μηδὲ ἕν· Ὁλικὸν ἄρα πηλίκον ἔςι $\chi^2 - 3\chi - 108$

$$\begin{array}{l|l}
\chi^3 - 117\chi - 324 & \chi + 3 \\
\hline
-\chi^3 + 9\chi + 324 & \chi^2 - 3\chi - 108 \\
0 - 108\chi \quad 0 & \\
-3\chi^2 + 108\chi & \\
+3\chi^2 \quad 0 & \\
0 &
\end{array}$$

64. ΣΧΟΛΙΟΝ. Ἡνίκα ἐπὶ τοῦ προκύπτοντος

ἐκ τοῦ $x+3$ διαιρέτου διὰ τοῦ x^2 πηλίκου ἀπήντησεν ὅρος ὁ $+3x^2$, ὃν εἴδομεν ὁμοίου κατὰ τὸν διαιρετέον ἀμοιρῆντα ὅρου, μεταλλαγῇ τοῦ συμβόλου ἐπεχαράξαμεν τὴν ἀφαίρεσιν, ἧς πράγματι μὴ ἐκτελουμένης χήτει ὅρου παραπλησίου, ἐτήρησαμεν αὐτὸν ὡς ἕνα τῶν τοῦ διαιρετέου, καὶ ἀμέσως διείλομεν διὰ τοῦ x πρώτου τῶν τοῦ διαιρέτου ὅρων, πρὸς εὕρεσιν τοῦ δευτέρου ὅρου — $3x$, ὃς γέγραπται ἐν τῷ πηλίκῳ ὡς εἷς τῶν παραγόντων τὸν διαιρετέον· ἐν γένει ἄρα ἐντεῦθεν δῆλον, ὡς ὅτε ἐπὶ τοῦ γινομένου ὑπὸ τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ διαιρέτου ἅπαντᾷ ὅρος ὁμοίου ἀμοιρῶν ἐν τῷ διαιρετέῳ, τοῦτον δεῖ αὐτίκα τροπῇ τοῦ συμβόλου διαιρεῖν διὰ τοῦ πρώτου τῶν τοῦ διαιρέτου ὅρων·

Ὑποδείγματα διαιρέσεως πρὸς ἄσκησιν τῶν προτοπείρων.

$$
\begin{array}{l|l}
\alpha^3 - \beta^3 & \alpha - \beta \\
\hline
-\alpha^3 + \alpha^2\beta & \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \\
\hline
\quad +\alpha^2\beta - \beta^3 & \\
\quad -\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 & \\
\hline
\qquad +\alpha\beta^2 - \beta^3 & \\
\qquad -\alpha\beta^2 + \beta^3 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
8\alpha^4 - 2\alpha^3\beta - 13\alpha^2\beta^2 - 3\alpha\beta^3 & 4\alpha^2 + 5\alpha\beta + \beta^2 \\
\cline{2-2}
-8\alpha^4 - 10\alpha^3\beta - 2\alpha^2\beta^2 & 2\alpha^2 - 3\alpha\beta \\
\hline
\quad -12\alpha^2\beta - 15\alpha^2\beta^2 - 3\alpha\beta^3 & \\
\quad +12\alpha^3\beta + 15\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta^3 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l|l}
\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \gamma^4 & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\
\cline{2-2}
-\alpha^4 - \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\gamma^2 & \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \\
\hline
+\alpha\alpha\beta\beta - \alpha^2\gamma^2 + \beta^4 - \gamma^4 & \\
-\alpha\alpha\beta\beta - \beta^4 - \beta\beta\gamma\gamma & \\
\hline
-\alpha^2\gamma^2 - \beta\beta\gamma\gamma + \gamma^4 & \\
+\alpha^2\gamma^2 + \beta\beta\gamma\gamma - \gamma^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
\frac{2}{7}\alpha^3 - \frac{8}{35}\alpha^2\beta + \frac{1}{4}\alpha^2\beta^2 - \frac{3}{20}\beta^3 & \frac{2}{5}\alpha^2 - \frac{3}{5}\beta^2 \\
\cline{2-2}
-\frac{2}{7}\alpha^3 + \frac{8}{35}\alpha^2\beta & \frac{2}{7}\alpha - \frac{1}{4}\beta \\
\hline
+\frac{1}{4}\alpha^2\beta^2 - \frac{3}{20}\beta^3 & \\
\hline
-\frac{1}{4}\alpha\beta^2 + \frac{3}{20}\beta^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

Περὶ συμβολικῶν κλασμάτων.

Τὰ συμβολικὰ κλάσματα οὐδὲν ἀλλ' ἢ διαιρέσεις εἰσὶ σεσημειωμέναι, ὡς εἴδομεν (59 κτ.)· ὑπόκειται δὲ καὶ ταῦτα ταῖς αὐταῖς, αἷς περ καὶ τὰ ἀριθμητικὰ, πράξεσι· δι' ὃ τὰ ῥηθησόμενα ἀνάκλησίς τις οἱονεὶ ἔσται τῶν ἐκεῖθι δεδειγμένων· ῥητέον ἓν πρῶτον ὅπως ἐφ' ἁπλουστέραν ἀνάγεται ἔκθεσιν γενικώτερον, ἢ ὡς διείληπται (60)· εἰς δὲ τοῦτο ἀνάγκη τὸν κοινὸν παρονομαστὴ καὶ ἀριθμητὴ καὶ δὴ καὶ μέγιστον διαιρέτην εὑρεῖν· προκείσθω τοίνυν λῆμμά τι εἰς τοῦτο τεῖνον.

65. ΛΗΜΜΑ. Ποσῶν δυοῖν τοῦ μὲν Α μείζονος, τοῦ δὲ Β ἐλάσσονος, ἀκριβῶς διαιρουμένων διὰ τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ π,