ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΙΝΑ

ΠΕΡΙ

ΠΟΛΥΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΝΤΑ

ΥΠΟ

ΙΩΑΝΝΟΥ ΚΑΡΑΝΔΙΝΟΥ

ΚΕΦΑΛΛΗΝΟΣ,

ΕΦΟΡΟΥ ΤΗΣ ΙΟΝΙΟΥ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ

ΚΑΙ ΠΡΟΦΕΣΣΟΡΟΣ ΤΗΣ ΥΨΗΛΟΤΕΡΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ.

Εν Κερκύρᾳ

1826 Ιουνίου θ Ε. Ν.

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΩΤΑΤΕ ΑΝΕΡ!

Η φήμη όμοῦ μὲ τὰ Συγγράμματά Σου μ' ἔκαμε νὰ γνωρίσω τὸ σεβαςὸν ὄνομά Σου. Εἰς τὴν Ιταλίαν διατριβων, ὅταν εἶδε τὸ φῶς τὸ περὶ Φυσιολογίας Βιβλίον Σου, ἐςάθην μάρτυς τῆς θαυμαςῆς ὑποδοχῆς καὶ εὐφημισμοῦ του ὑπὸ τῶν πολυμαθεςέρων προφεσσόρων τῆς Ιατρικῆς Επιςήμης. μετ' ὀλίγον ἐςάθην εὐτυχέςερος νὰ Σὲ γνωρίσω καὶ προσωπικῶς. Καὶ ἐὰν διὰ φήμης καὶ συγγραμμάτων ἕκαςος δύναται να λάβῃ σέβας πρὸς τὸν εὐφημιζόμενον, εἰς ποῖον μέγιςον βαθμὸν θελ' ὑψωθῆν ἄραγε τὸ σέβας τοῦτο, ὅταν καὶ προσωπικῶς τὸν γνωρίσῃ, καὶ ἐκτὸς τῆς πολυμαθείας του εὕρῃ προσέτι εἰς αὐτὸν καὶ τὸ σύμβολον τῆς Ηθικῆς; Τοιοῦτον εἶναι καὶ τὸ ὁποῖον ἐγὼ ἠσθάνθην σέβας πρὸς Σὲ, Ανδρῶν ἄριςε! τοιοῦτον δὲ καὶ σ' ἐγνώρισα, πολυμαθῆ λέγω, γενναίας ψυχῆς, πλήρη λαμπρῶν αἰσθημάτων, καὶ ἔκγονον ἄξιον τῆς σοφίας τῶν παλαιῶν ἐκείνων προπατόρων μας. Διὰ ταῦτα τολμῶ νὰ Σὲ παρακαλέσω νὰ δεχθῇς τὴν πρὸς Σὲ ἀφιέρωσιν τούτου τοῦ μικροῦ μαθήματος τῆς πολυγωνομετρίας, τὸ ὁποῖον ἐπάνω εἰς ἓν τμῆμα αὐτῆς ἔγραψα.

Εὰν τὸ μάθημα τοῦτο δὲν ἤθελε παρακινήσειν τοὺς ὀρεγομένους τῆς Μαθηματικῆς νὰ ῥίψωσιν ἐν βλέμμα εἰς αὐτὸ, ὡς πόνημα ὂν, ἀνθρώπου ἀγνώςου εἰς τὸν λαμπρὸν Ορίζοντα, ὅπου ἀγωνίζονται τόσα πολυμαθέςατα ὑποκείμενα, εἶμαι ὅμως βέβαιος, ὅτι βλέποντες εἰς αὐτὸ τὸ ὄνομά Σου, θέλουν παρακινηθῆν νὰ τ' ἀναγνώσωσι καὶ εὐμενῶς νὰ τὸ ὑποδεχθῶσι. καὶ ἤθελα νομισθῆν εὐτυχὴς, ἐὰν τὸ μικρόν μου τοῦτο πόνημα ἀρχίσῃ ἀπὸ Σοῦ νὰ λάβῃ ἄισιον ὑποδοχήν Εἰμὶ δὲ,

Κερκύρᾳ τῇ Δ.τῃ Απριλίου 1826. Ε. Ν.

Πρὸς Τὸν Επιςημονικώτατον Δόκτορα

Κύριον Γ. ΘΕΡΙΑΝΟΝ

Προφέσσορα τῆς Ιατρικῆς καὶ

τῆς Μαθηματικῆς Φυσικῆς

Τῆς Σοφολογιότητός της

Ταπεινὸς Δοῦλος

ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΑΡΑΝΔΗΝΟΣ.

ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΑΝΑΓΝΩΣΤΗΝ.

Τὸ αἴτιον, τὸ ὁποῖον μὲ παρεκίνησε νὰ γράψω τὸ ἀκόλουθον μάθημα εἶναι, ἐπειδὴ ἕως τοῦ νῦν δὲν εὕρηκα εἰς κανένα τῶν Συγγραφέων ὅσους ἀνέγνωσα, μίαν λύσιν, συναγομένην ἀπὸ γενικὸν τύπον. Ο Κύριος (Puissant) ὁμιλεῖ μὲν περὶ τούτου, ἀλλ' εἰς μερικὰς περιστάσεις, καὶ ὄχι εἰς ἰδιαίτερον κλάδον καὶ γενικὸν Θεώρημα. διὰ τοῦτο ἐγὼ θέλων νὰ ὠφελήσω τὸ κατὰ δύναμιν τοὺς μαθητάς μου, ἀπεφάσισα νὰ θέσω ὑπὸ γενικὸν τύπον τὴν καταμέτρησιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, καὶ ν' ἀποδείξω, ὅτι ὁ αὐτὸς Νόμος ἀκολουθεῖ, ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν ἦναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου.

Ἔῤῥωσο.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.τη.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α.ον

σχ. 1 Ἐὰν ἐκβληθῶσι δύο μὴ παράλληλοι πλευραὶ ἑνὸς πολυγώνου, ἡ σχηματιζομένη ἐξ αὐτῶν γωνία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δοθέντος Πολυγώνου, ἐκείνων, αἵτινες σχηματίζονται ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ Πολυγώνου τῶν μεταξὺ τῶν δύο ἐκβεβλημένων, μεῖον 2 ὀρθῶν τοσάκις ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου μεταξὺ τῶν δύο ἐκβεβλημένων πλευρῶν. ὥςε καλοῦντες Τ τὴν σχηματιζομένην γωνίαν ἐκ τῶν δύο ἐκβεβλημένων, καὶ Κ τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τῶν μεταξὺ τῶν δύο ἐκβεβλημένων, μὴ παραιτοῦντες εἰς τὴν ἀρίθμησιν καὶ τὰς δύο ἐκβεβλημένας, καὶ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τῶν μεταξὺ τῶν δύο ἐκβεβλημένων, θέλομεν ἔχειν

$$T = K \div 2\nu.$$

Τὸ σχηματιζόμενον πολύγωνον ἐκ τῶν δύο ἐκβεβλημένων πλευρῶν, καὶ ἐκ τῶν εἰς αὐτὰς περικλεισμένων εἶναι $\nu + 2$ πλευρῶν, καὶ διὰ τοῦτο, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐντὸς γωνιῶν του εἶναι ἴσον μὲ $(\nu + 2 - 2)$. 2 ὀρ. καὶ καλοῦντες ταύτην τὴν ποσότητα (ἀφ' οὗ ὅμως ἀφαιρέσωμεν τὴν γωνίαν Τ) Κ', ἔχομεν

$$K' = \nu\, 2\, ὀρ. - T \text{ καὶ } T = \nu\, 2\, ὀρ. - K'.$$

Πρέπει τώρα νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ἀφοῦ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου τὴν γωνίαν Τ, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο ἐκβεβλημέναι, τὸ ὑπόλοιπον Κ' ἄλλο δὲν εἶναι εἰμὴ αἱ εἰσερχόμεναι (rientranti) ἢ αἱ ἐξερχόμεναι (passienti) γωνίαι του, καὶ ἐπειδὴ αἱ ν πλευραὶ τοῦ δοθέντος πολυγώνου αἱ μεταξὺ τῶν δύο ἐκβεβλημένων, ἑνωμέναι ἀνὰ δύο σχηματίζουν ἀπὸ τὸ ἓν μέρος τὰς γωνίας τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου, καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο σχηματίζουν τὰς γωνίας τοῦ δοθέντος πολυγώνου, καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν αἵτινες σχηματίζονται ἐλόγυρα μιᾶς ςιγμῆς μὲ τὰς αὐτὰς δύο πλευρὰς, εἶναι ἴσον μὲ τέσσαρας ὀρθὰς, λοιπὸν ἑκάςη τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι ἴση μὲ τέσσαρας ὀρθὰς μεῖον τῆς ἀπέναντι κατὰ κορυφὴν ταύτης. καὶ διὰ τοῦτο μία τῶν γωνιῶν τούτων τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου εἶναι ἴση μὲ τέσσαρας ὀρθὰς μεῖον τῆς ἀναλόγου ταύτης τοῦ δοθέντος πολυγώνου, καὶ ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν δύο ἐκβεβλημένων πλευρῶν εὑρίσκονται ν πλευραὶ, τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα ἑνόνονται διαδοχικῶς τουτέςιν ἡ πρώτη μὲ τὴν δευτέραν, καὶ ἡ δευτέρα μὲ τὴν τρίτην, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, διὰ τοῦτο σχηματίζουν $\nu - 1$ ἀπὸ τὸ ἓν μέρος γωνίας τοῦ δοθέντος πολυγώνου, καὶ παρομοίως $\nu - 1$ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ σχηματιζομένου ἐκ τῶν δύο ἐκβεβλημένων πλευρῶν πολυγώνου, διὰ τοῦτο ὅλαι αἱ τοιαῦται $\nu - 1$ γωνίαι τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου, εἶναι ἴσαι μὲ $\nu - 1$ φοραῖς τέσσαρας ὀρθὰς μεῖον τῶν $\nu - 1$ ἀναλόγων γωνιῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου, καὶ καλοῦντες τὸ ἄθροισμα τούτων τῶν γωνιῶν τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου K'', καὶ τὰς ἀναλόγους τούτων K''', ἔχομεν

$$K'' = (\nu - 1).\, 4\,\varphi - K'''.$$

Μένει νὰ θεωρήσωμεν τὴν σχηματιζομένην γωνίαν τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου ἐκ τῆς μιᾶς τῶν δύο ἐκβεβλημένων καὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῶν περικλεισμένων μεταξὺ τῶν δύο ἐκβεβλημένων, ἐκείνης, ἥτις ἑνόνεται εἰς ἓν σημεῖον μὲ τὴν ἐκβεβλημένην, αὕτη ἡ γωνία εἶναι ἴση μὲ δύο ὀρθὰς μεῖον τῆς προσκειμένης εἰς αὐτὴν, ἥτις εἶναι καὶ γωνία τοῦ δοθέντος πολυγώνου. λοιπὸν καλοῦντες ταύτην τὴν γωνίαν τοῦ σχηματιζομένου $\varkappa$, καὶ τὴν ἀνάλογον ταύτης τοῦ δοθέντος πολυγώνου $\varkappa'$, ἔχομεν $\varkappa = 2\,\varphi - \varkappa'$, καὶ λέγοντες τὰ αὐτὰ καὶ διὰ τὴν ἄλλην γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἄλλη ἐκβεβλημένη, θέλομεν ἔχειν $\varkappa'' = 2\,\varphi - \varkappa'''$. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου ἐκτὸς τῆς γωνίας Γ, εἶναι ἴση μὲ $K'' + \varkappa + \varkappa''$, τουτέςιν ἴσον μὲ

$$(\nu - 1)\, 4\varphi + 2\varphi - \varkappa' + 2\varphi - \varkappa'' - K''' = \nu\,.\,4\varphi - (\varkappa' + \varkappa''') - K'''$$

ἢ ἴσον μὲ

$$400^{\circ}\,.\,\nu - (K''' + \varkappa' + \varkappa''')$$

Τουτέστι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν ἐκτὸς τῆς γωνίας Τ τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου ἐκ τῶν δύο ἐκβεβλημένων πλευρῶν, τουτέστι τὸ K' εἶναι ἴσον μὲ

$$\nu \,.\, 400^{\circ} - (K''' + x' + x'')$$

Καὶ ἐπειδὴ ἀνωτέρω ἐδείξαμεν

$$K' = \nu \,.\, 200^{\circ} - T.$$

Διὰ τοῦτο

$$200^{\circ} \cdot \nu - T = 400^{\circ} \,.\, \nu - (K''' + x' + x''')$$

Τουτέστι

$$T = 200^{\circ} \,.\, \nu - 400^{\circ} \,.\, \nu + (K''' + x' + x'')$$

ἢ

$$T = - 200^{\circ} \,.\, \nu + (K''' + x' + x''')$$

Τὸ δὲ $K''' + x' + x''$ παριστάνει ὡς ἀνωτέρω ἴδομεν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου ἐκείνων αἵτινες σχηματίζονται μὲ τὴν κατ' ἐξακολούθησιν ἕνωσιν τῶν ἐκβεβλημένων καὶ τῶν εἰς αὐτὰς περικλεισμένων πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἄθροισμα καλῶ Κ. λοιπὸν ἔχομεν

$$T = - 200^{\circ} \,.\, \nu + K = - (200^{\circ} \,\nu - K)$$

ἢ $T = K - 2^{\varphi} \,.\, \nu$. καὶ ἡμ $T = \pm$ ἡμ Κ.

Λαμβάνομεν το $+$, ὅταν ν ἦναι 0, 2, 4, 6 . . . τουτέστιν ἄρτιος ἀριθμὸς καὶ τὸ $-$ ὅταν τὸ ν ἦναι περιττὸς, διὰ τοῦτο, ἐὰν τὸ Κ ἦναι ἴσον μὲ $B + Γ + Δ + E + Z +$ κτ. ἔχομεν

$$ἡμ\ T = \pm ἡμ\ (B + Γ + Δ + E + Z + κτ.)$$

Παραδ: χ.: ἐὰν ἐκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ Η Ζ, καὶ Α Β, ἕως νὰ συναντηθῶσιν εἰς τὸ Τ, ἐπειδὴ τὸ σχηματιζόμενον πολύγωνον $B' Γ' Δ' E' Z'$ Τ ἔχει γωνίας, διὰ τοῦτο τὸ ἄθροισμα

$$B' + Γ' + Δ' + E' + Z' + T = (6 - 2) \,.\, 2^{\varphi} \text{ καὶ}$$

$$T = (6 - 2)\, 2^{\varphi} - Γ' - Δ' + E' - Z' - B'$$

καὶ ἐπειδὴ

$$B' = 2^{\varphi} - B, \text{ καὶ } Γ' = 4^{\varphi} - Γ, Δ' = 4^{\varphi} - Δ, E = 4^{\varphi} - E.$$

$$\text{καὶ } Z' = 200^{\circ} - Z,$$

ἔχομεν

$$B' + \Gamma' + \Delta' + E' + Z' = 16\varphi - (B + \Gamma + \Delta + E + Z) \text{ καὶ}$$

$$T = (6 - 2)\, 2\varphi - 16\varphi + (B + \Gamma + \Delta + E + Z)$$

ἢ

$$T = -4 . 2\varphi + (B + \Gamma + \Delta + E + Z)$$

ἢ

$$T = (B + \Gamma + \Delta + EZ) - 4 . 2\varphi \text{ καὶ}$$

$$\text{ημ } T = \text{ημ } (B + \Gamma + \Delta + E + Z)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Β.ον

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν του ἐκτὸς μιᾶς, ἑκάστου τῶν τοιούτων γινομένων, πολλαπλασιαζομένου διὰ τοῦ ἡμιτόνου τῆς ἐκ τῶν ἰδίων δύο πλευρῶν σχηματιζομένης γωνίας.

σχ. 2 Εϛω τὸ Α Τ Β τρίγωνον. λέγω ὅτι τὸ ἐμβαδόν του, τὸ ὁποῖον καλῶ Σ θέλ' εἶσθαι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου Α Τ διὰ Τ Β καὶ ἡμ Α Τ Β τῆς περιεχομένης γωνίας ἐκ τῶν δύο πλευρῶν Α Τ καὶ Τ Β, καλοῦντες τὴν πλευρὰν $AT = b$ καὶ τὴν $BT = \alpha'$, τὴν δὲ γωνίαν $ATB = (\alpha', b)$ ἔχομεν

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\, \alpha' b \text{ ημ } (\alpha', b)$$

ἐκ τῆς κορυφῆς Β ἀχθήτω ἡκάθετος Β Δ, ὅθεν ἔχομεν

$$\frac{B\Delta \times AT}{2} = \Sigma$$

καὶ ἐπειδὴ $1 : \text{ημ } T :: \alpha' : B\Delta$, συνάγομεν $B\Delta = \alpha' \text{ ημ } T$

καὶ $\Sigma = \tfrac{1}{2}\, \alpha' b \text{ ημ } T = \tfrac{1}{2}\, \alpha' b \text{ ημ } (\alpha', b)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Γον

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν τοῦ ἀνὰ δύο ἐκτὸς μιᾶς ἑκάστου τούτων τῶν γινομένων πολλαπλασιαζομένου διὰ τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο πλευραὶ, αἵτινες εὑρίσκονται εἰς τὰ μερικὰ γινόμενα

σχ. 3 Ἔσω τὸ τετράπλευρον Α Β Γ Δ, λέγω, ὅτι ἔχομεν

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\left(\acute{\alpha}\, b \text{ ἡμ } (\acute{\alpha}, b) + \acute{\alpha}\, c \text{ ἡμ } (\acute{\alpha}, c) + b\, c \text{ ἡμ } (b, c)\right)$$

Ἐπειδὴ ἐκβαλλομένων τῶν δύο πλευρῶν ά, καὶ c, ἔχομεν τὸ τρίγωνον Α Τ Δ σύνθετον ἐκ τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου, καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου Β Τ Γ, λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου, τὸ ὁποῖον καλῶ Σ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου Α Τ Δ μεῖον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου Β Τ Γ, τουτέςι

$$\Sigma = \text{ΑΤΔ} - \text{ΒΤΓ}.\ \text{ἀλλὰ ΑΤΔ} = \frac{(\acute{\alpha} + \alpha)(c + \beta)}{2} \text{ ἡμ Τ},$$

$$\text{καὶ ΒΤΓ} = \frac{\alpha\beta}{2} \text{ ἡμ Τ},$$

$$\Sigma = \frac{(\acute{\alpha} c + c\alpha + \beta\acute{\alpha} + \beta\alpha)}{2} \text{ ἡμ Τ} - \frac{\alpha\beta}{2} \text{ ἡμ Τ} =$$

$$\frac{(\acute{\alpha} c + c\alpha + \beta\acute{\alpha}) \text{ ἡμ Τ}.}{2}$$

Καὶ ἐπειδὴ εἰς τὸ τρίγωνον Β Τ Γ ἔχομεν $\alpha : b :: $ ἡμ Β Γ Τ : ἡμ Τ, ἤ $\alpha : b ::$ ἡμ $(200^{\circ} - \text{ΔΓΒ})$: ἡμ Τ, ἢ $\alpha : b ::$ ἡμ Γ : ἡμ Τ,

Παρομοίως $\beta ; b ::$ ημ Β : ἡμ Τ καὶ $\alpha = \dfrac{b \text{ ημ Γ}}{\text{ημ Τ}}$,

$$\beta = \frac{b \text{ ημ Β}}{\text{ημ Τ}}$$

Τουτέςι τὰ μέρη τῶν δύο ἐκβεβλημένων πλευρῶν ά καὶ c προσδιορίζονται διὰ μέσου τῆς περικλεισμένης πλευρᾶς b καὶ τοῦ ἡμιτόνου τῆς σχηματιζομένης γωνίας Τ ἐκ τῶν δύο ἐκβεβλημένων πλευρῶν ά καὶ c καὶ ἐκ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τῶν προσκειμένων τῶν ἐκβεβλημένων πλευρῶν, καὶ ἀντεισάγοντες ἀντὶ τῆς Γ γωνίας (b, c) καὶ ἀντὶ τῆς Β τὴν (ά, b), ἔχομεν

$$\alpha = \frac{b\ \eta\mu\ (b, c)}{\eta\mu\ (\alpha, c)} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \frac{b\ \eta\mu\ (\acute{a}, b)}{\eta\mu\ (\alpha, c)}$$

Καὶ ἀντεισάγοντες εἰς τὴν ἔκφρασιν τοῦ Σ ταύτας τας Τιμὰς, ἔχομεν

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\left(\acute{a}\, c + \frac{\acute{a}\, b\ \eta\mu\ (\acute{a}, b)}{\eta\mu\ (\acute{a}, c)} + \frac{c\ b\ \eta\mu\ (b, c)}{\eta\mu\ (\acute{a}, c)}\right) \times$$

$$\eta\mu\,(\acute{a}, c) = \tfrac{1}{2}\Big(\acute{a}\, c\ \eta\mu\ (\acute{a}, c) + \acute{a}\, b\ \eta\mu\ (\acute{a}, b) + c\ b\ \eta\mu\ (b, c)\Big) =$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\acute{a}\, b\ \eta\mu\ (\acute{a}, b) + \acute{a}\, c\ \eta\mu\ (\acute{a}, c) + b\, c\ \eta\mu\ (b, c)\right)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Δον

σχ. 4 Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς πενταγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάσθροισμα τοῦ γινομένου τῶν πλευρῶν του ἀνὰ δύο μεῖον μιᾶς, ἑκάστου τῶν μερικῶν γινομένων πολλαπλασιαζόμενου διὰ τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο πλευραὶ ἑκάστου γινομένου.

Εςω τὸ Α Β Γ Δ Ε πεντάγωνον, καὶ ἂς ἐκ βληθῶσιν αἱ δύο αὐτοῦ πλευραὶ Δ Γ, Α Β, αἵτινες ἑνόνουν τὰ δύο ἄκρα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου ὡς τῆς Β Γ, ὥςε τὸ πεντάγωνον Α Β Γ Δ Ε τρέπεται εἰς ἓν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου τό ἐμβαδὸν εἶναι σύνθετον ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πενταγώνου Α Β Γ Δ Ε καὶ ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου Β Τ Γ, καὶ καλοῦντες Σ τὸ ἐμβαδὸν πενταγώνου ἔχομεν

$$\Sigma = \mathrm{A\,T\Delta E} - \mathrm{B\,T\,\Gamma}.$$

Ἀλλὰ, ὡς δέδεικται, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τοῦ γινομένου τῶν πλευρῶν του ά + α, β + c, d, e ἐκτὸς τῆς e ἀνὰ δύο, ἑκάςου μερικοῦ γινομένου πολλαπλασιαζομένου διὰ τοῦ ἡμιτόνου τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν ἀνὰ δύο αἱ πλευραὶ σχηματίζουν, τουτέστι, $(\acute{a}, c)(\acute{a}, d), (c, d)$, ὥστε

$$ΑΤΔΕ = \frac{1}{2}\left((\acute{\alpha}+\alpha)(\beta+c)\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, c) + (\acute{\alpha}+\alpha)d\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, d) + cd\,\text{ημ}(c, d)\right)$$

Τὸ δὲ τριγώνον ΒΓΤ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{2}\,\alpha\beta\,\text{ημ}\,T$ τουτέστι, $\frac{1}{2}\,\alpha\beta\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, c)$. λοιπὸν

$$\Sigma = \frac{1}{2}\left((\acute{\alpha}+\alpha)(c+\beta)\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, c) + (\acute{\alpha}+\alpha)d\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, d) + cd\,\text{ημ}(c, d) - \alpha\beta\,\text{ημ}(\alpha, c)\right)$$

ἢ $\Sigma = \frac{1}{2}\left((\acute{\alpha}c + c\alpha + \acute{\alpha}\beta)\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, c) + (\acute{\alpha}d + \alpha d)\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, d) + cd\,\text{ημ}(c, d,)\right)$

Καὶ ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΤΓ, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω Θεώρημα συνάγομεν

$$\alpha : b :: \text{ημ}\,\Gamma : \text{ημ}\,T, \text{ καὶ } \beta : b :: \text{ημ}\,B : \text{ημ}\,T.$$

$$\text{ἢ } \alpha = \frac{b\,\text{ημ}\,\Gamma}{\text{ημ}\,T} \quad \text{καὶ } \beta = \frac{b\,\text{ημ}\,B}{\text{ημ}\,T}$$

Καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον $T =$ γωνίᾳ τῶν $(\acute{\alpha}, c)$ καὶ $T =$ γωνίᾳ (b, c), καὶ $B =$ γωνίᾳ τῶν $(\acute{\alpha}, b)$

Λοιπὸν $\Sigma = \frac{1}{2}\left((\acute{\alpha}c\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, c) + bc\,\text{ημ}(b, c) + \acute{\alpha}b\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, b) + \alpha d\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, d) + bd\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, d)\right)$, . . . ἢ

$$\Sigma = \frac{1}{2}\left((\acute{\alpha}b\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, b) + \acute{\alpha}c\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, c) + \alpha d\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, d) + bc\,\text{ημ}(b,c) + bd\,\text{ημ}(\acute{\alpha}, d)(+ cd\,\text{ημ}(c, d)\right)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Εον

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἑξαγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν του ἀνὰ δύο ἐκτὸς μιᾶς, ἑκάστου μερικοῦ γινομένου διὰ τοῦ ἡμιτόνου τῆς σχηματιζομένης γωνίας ἐκ τῶν πλευρῶν τούτων πολαπλασιαζομένου.

σχ. 5 Ἔστω τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, καὶ ἂς ἐκβληθῶσιν ὡς εἰς τὰ ἀνωτέρω Θεωρήματα αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ, ΔΓ, ἕως οὗ νὰ συμπέσωσιν εἰς τὸ σημεῖον Τ, οὕτω σχηματίζεται τὸ πεντάπλευρον

Α Τ Δ Ε Ζ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι αἱ $\alpha' + \alpha$, $c + \beta$, d, e, f. λοιπὸν κατὰ τὸ προλαβὸν Θεώρημα ἔχομεν

$$\mathrm{A T \Delta E Z} = \tfrac{1}{2}((c\alpha' + \alpha)(\beta + c)\,\eta\mu\,\mathrm{T} + (\alpha' + \alpha)d\,\eta\mu(\alpha' d) + (\alpha' + \alpha)e\,\eta\mu(\alpha', e) + (c + \beta)d\,\eta\mu(c,d) + (c + \beta)e\,\eta\mu(c,e) + de\,\eta\mu(d,e)) = \tfrac{1}{2}(\alpha c\,\eta\mu\,\mathrm{T} + (\alpha' c + \alpha'\beta)\,\eta\mu\,\mathrm{T} + \alpha\beta\,\eta\mu\,\mathrm{T} + \alpha' d\,\eta\mu(\alpha', d) + \alpha d\,\eta\mu(\alpha', d) + \alpha' e\,\eta\mu(\alpha', e) + \alpha e\,\eta\mu(\alpha', e) + cd\,\eta\mu(c,d) + \beta d\,\eta\mu(c,d) + ec\,\eta\mu(e,c) + e\beta\,\eta\mu(e,c) + de\,\eta\mu(d,e)).$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ σχηματιζόμενον πεντάπλευρον εἶναι ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ἑξάπλευρον πλέον τὸ τρίγωνον $\mathrm{B T \Gamma} = \frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\,\mathrm{T}$, διὰ τοῦτο καλοῦντες Σ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος ἑξαγώνου, ἔχομεν

$$\mathrm{A T \Gamma \Delta E Z} - \mathrm{B T \Gamma} = \Sigma = \tfrac{1}{2}(\alpha c\,\eta\mu\,\mathrm{T} + \alpha' c\,\eta\mu\,\mathrm{T} + \alpha'\beta\,\eta\mu\,\mathrm{T} + \alpha' d\,\eta\mu(\alpha', d) + \alpha d\,\eta\mu(\alpha', d) + \alpha' e\,\eta\mu(\alpha', e) + \alpha e\,\eta\mu(\alpha', e) + cd\,\eta\mu(c,d) + \beta d\,\eta\mu(c,d) + ec\,\eta\mu(e,c) + \beta e\,\eta\mu(c,e) + de\,\eta\mu(d,e)),$$

Καὶ ἀντεισάγοντες τὰς τιμὰς τῆς α καὶ β αἵτινες πάντοτε προσδιορίζονται ἐκ τοῦ τριγώνου Β Τ Γ (τοῦ σχηματιζομένου πάντοτε εἰς ὅλα τὰ δεδομένα πολύγωνα) ἐκ τῶν ἐκβεβλημένων μερῶν τῶν δύο πλευρῶν Α Β καὶ Δ Γ, καὶ ἐκ τῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου ἥτις εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν δύο ἐκβεβλημένων πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τουτέστιν ἐκ τοῦ τμήματος $\mathrm{BT} = \alpha$, $\Gamma\mathrm{T} = \beta$, καὶ ἐκ τῆς πλευρᾶς $\mathrm{B}\Gamma = b$, τουτέστιν

$$\alpha = \frac{b\,\eta\mu\,\Gamma}{\eta\mu\,\mathrm{T}}, \quad \text{καὶ } \beta = \frac{b\,\eta\mu\,\mathrm{B}}{\eta\mu\,\mathrm{T}}$$

Συνάγομεν

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}(\alpha' c\,\eta\mu\,\mathrm{T} + bc\,\eta\mu\,\Gamma + \alpha' b\,\eta\mu\,\mathrm{B} + \alpha' d\,\eta\mu(\alpha', d) + b\frac{d\,\eta\mu\,\Gamma}{\eta\mu\,\mathrm{T}}\eta\mu(\alpha', d) + \alpha' b\,\eta\mu(\alpha', e) + \frac{be\,\eta\mu\,\Gamma}{\eta\mu\,\mathrm{T}}\eta\mu(\alpha', e) + cd\,\eta\mu(c,d) + \frac{bd\,\eta\mu\,\mathrm{B}}{\eta\mu\,\mathrm{T}}\eta\mu(c,d) + ec\,\eta\mu(c,e)$$

$$+ \frac{b\,e\ \text{ημ}\ B\ \text{ημ}\,(c,e) + e\,d\ \text{ημ}\,(d,e)\,)}{\text{ημ}\ T}$$

Καὶ ἐπειδὴ

$$\frac{b\,d\,(\text{ημ}\ \Gamma\ \text{ημ}\,(\acute{a},d) + \text{ημ}\ B\ \text{ημ}\,(c,d)\,)}{\text{ημ}\ T}$$

Ἐξ αἰτίας τῆς γωνίας $(\acute{a}, d)$ καὶ τῆς γωνίας B λαμβάνει ἄλλην μορφήν, διότι ἡ γωνία τῶν $(\acute{a}, d)$ εἶναι ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο πλευραὶ $\acute{a}$ καὶ d ὅταν ἐκβληθῶσι, τὴν ὁποίαν καλῶ T', καὶ πάλιν ἐπειδὴ μεταξὺ τῆς πλευρᾶς $\acute{a}$ καὶ d εὑρίσκονται περικλεισμέναι δύο πλευραὶ τουτέςιν ἡ b καὶ c, διὰ τοῦτο κατὰ τὸ (1) Θεώρημα

$$T' = K - 200^{\circ} \,.\, \nu$$

Καὶ τὸ μὲν ν παριςάνει, ὡς εἴρηται, τὸν ἀριθμὸν τῶν περικλεισμένων πλευρῶν, ὅθεν $\nu = 2$, τὸ δὲ K ἐκφράζει τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου τῶν εὑρισκομένων μεταξὺ τῶν ἐκβεβλημένων πλευρῶν, διὰ τοῦτο

$$K = B + \Gamma + \Delta\,.$$

Λοιπὸν

$$T' = B + \Gamma + \Delta - 200^{\circ}\,.\,2 = \text{γωνίᾳ}\,(\acute{a}, d)$$

Διὰ τοῦτο

$$\text{ημ}\,(\acute{a},d) = \text{ημ}\,.\,(400^{\circ} - (B + \Gamma + \Delta = + \text{ημ}\,(B + \Gamma + \Delta$$

Καὶ γωνία τῶν $(c, d) = \Delta$, λοιπὸν $\text{ημ}\,(c, d) = \text{ημ}\ \Delta$, καὶ ἡ γωνία B I ἥτις εἶναι ἡ ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου B T Γ εἶναι ἴση μὲ τὴν $T + T\Gamma B$ ἢ $T + 200^{\circ} - \Delta\Gamma B = T + 200^{\circ} - \Gamma$ λοιπὸν

$$\text{ημ}\ B = \text{ημ}\,(200^{\circ} - (\Gamma - T) = \text{ημ}\,(\Gamma - T)$$

Διὰ τοῦτο ἔχομεν

$$\frac{b\,d\,(\,\text{ημ}\ \Gamma\ \text{ημ}\,(B + \Gamma + \Delta) + \text{ημ}\,(\Gamma - T)\ \text{ημ}\ \Delta)}{\text{ημ}\ T\,.}$$

Παρατηροῦντες παρομοίως ὅτι $T = K - 200^{\circ}$, καὶ ἐπειδὴ εἰς τὰς δύο ἐκβεβλημένας πλευρὰς a' καὶ c μία μόνη πλευρὰ περικλείεται τουτέστιν ἡ b, ἔχομεν $v = 1$ καὶ $K = B + \Gamma$ λοιπὸν $T = B + \Gamma - 200°$ καὶ $B + \Gamma = T + 200°$ καὶ

$B + \Gamma + \Delta = T + 200° + \Delta$ καὶ ἡμ $(B + \Gamma + \Delta) =$ ἡμ

$$(200° + \Delta + I) = -\text{ἡμ}\,(\Delta + T)$$

καὶ διὰ τοῦτο ἔχομεν

$b\,d\,(\text{ημ}\,\Delta\ \text{ἡμ}\,(\Gamma - T) - \text{ἡμ}\,\Gamma + \text{ημ}\,(\Delta + T) : \text{ημ}\,T$

$= b\,d\,(\text{ημ}\,\Delta\ \text{ημ}\,\Gamma\ \sigma T - \text{ἡμ}\,\Delta\ \sigma\Gamma\ \text{ἡμ}\,T - \text{ἡμ}\,\Gamma\ \text{ἡμ}\,\Delta\ \sigma T$

$- \text{ημ}\,\Gamma\ \sigma\Delta\ \text{ημ}\,T) : \text{ημ}\,T = -\,b\,d\,(\text{ἡμ}\,\Delta\ \sigma\Gamma + \text{ἡμ}\,\Gamma\ \sigma\Delta)$

$= -\,b\,d\ \text{ἡμ}\,(\Gamma + \Delta)$

καὶ ἐκβάλλοντες τὰς πλευρὰς b καὶ d, σχηματίζομεν τὴν γωνίαν T'' ἥτις εἶναι ἴση μὲ $K - 200° \cdot 1$ καὶ $K = \Gamma + \Delta$ διὰ τοῦτο T'' ἡ γωνία τῆς $(b, d) = \Gamma + \Delta - 200° = -200° + \Gamma + \Delta$ καὶ $(b, d) + 200° = \Gamma + \Delta$ καὶ ἡμ $(\Gamma + \Delta) = -$ ημ $(200° - (+\Delta)$

$= -$ ἡμ $(\Gamma + \Delta)$. λοιπὸν

$- b\,d\ \text{ημ}\,(\Gamma + \Delta) = + b\,d\ \text{ἡμ}\,(b, d)$;

Παρομοίως· οἱ ὅροι

$$\frac{b\ e\,(\text{ἡμ}\,\Gamma\ \text{ἡμ}\,(a', c) + \text{ἡμ}\,B\ \text{ἡμ}\,(c, e))}{\text{ἡμ}\,T.}$$

Ἐξ αἰτίας τῆς γωνίας (a', e) ἥτις σχηματίζεται ἐὰν ἐκβληθῶσιν αἱ δύο πλευραὶ a' καὶ e, τὴν ὁποίαν καλῶ T''' εἶναι ἴση μὲ $K - 200° \cdot v$, καὶ ἐπειδὴ μεταξὺ τῆς a' πλευρᾶς καὶ e εἶναι περικλεισμέναι τρεῖς πλευραί, διὰ τοῦτο

T''' ἡ γωνία τῶν $(a', e) = B + \Gamma + \Delta + E - 200° \cdot 3$

$= -(600° - (B + \Gamma + \Delta + E)$ καὶ ὡς ἀνωτέρω

$B = 200° - (\Gamma - T)$.

Λοιπὸν γων. $(a', e) = -(600 - (200° - \Gamma + T + \Gamma +$

$$\Delta + E = -(400^\circ - (T + \Delta + E)$$

καὶ

$$\text{ημ}(\acute{a}, e) = +\,\text{ημ}(T + \Delta + E).$$

καὶ γωνία τῶν (c, e) εἶναι ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο πλευραὶ c καὶ e, ἐὰν ἐκβληθῶσιν, αἵτινες περικλείουν μίαν πλευρὰν τὴν d, διὰ τοῦτο

γωνία $(c, e) = K - 200^\circ .\ 1 = \Delta + E - 200^\circ$

καὶ $\text{ημ}(c, e) = -\,\text{ημ}(\Delta + E)$. λοιπὸν ἔχομεν

$$be(\text{ημ}\,\Gamma\ \text{ημ}(T + \Delta + E) - \text{ημ}(\Gamma - T)\ \text{ημ}(\Delta + E)\,;\ \text{ημ}\,T$$

$$= be(\text{ημ}\,\Gamma\ \text{ημ}\,T\ \sigma(\Delta + E) + \text{ημ}\,\Gamma\ \sigma\,T\ \text{ημ}(\Delta + E) - \text{ημ}\,\Gamma\ \text{ημ}(\Delta + E)\ \sigma\ T + \text{ημ}\,T\ \sigma\,\Gamma\ \text{ημ}(\Delta + E) : \text{ημ}\,T$$

$$= -\,be\ \text{ημ}(\Gamma + \Delta + E).$$

Καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $\Gamma + \Delta + E$ εἶναι αἱ γωνίαι τοῦ δοθέντος πολυγώνου μεταξὺ τῶν δύο ἐκβληθεισῶν πλευρῶν b, καὶ e, ἔχομεν λοιπὸν

γωνία τῶν $(b, e) = K - 3.\ 200^\circ = \Gamma + \Delta + E - 600^\circ$ καὶ

$\text{ημ}(b, e) = \text{ημ} - (600^\circ - (\Gamma + \Delta + E)) = -\,\text{ημ}(\Gamma + \Delta + E)$ τώρα ἀντεισάγοντες εὑρίσκομεν

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}(\acute{a}\,b\ \text{ημ}(\acute{a}, b) + \acute{a}\,c\ \text{ημ}(\acute{a}, c) + \acute{a}\,d\ \text{ημ}(\acute{a}, d) + \acute{a}\,e\ \text{ημ}(\acute{a}, e) + b\,c\ \text{ημ}(b, c) + b\,d\ \text{ημ}(b, d) + b\,e\ \text{ημ}(b, e) + c\,d\ \text{ημ}(c, d) + c\,e\ \text{ημ}(c, e) + d\,e\ \text{ημ}(d, e))$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Παρατηροῦντες τὸ (β'), (γ') Θεώρημα, βλέπομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἐκφράσθη εἰς τὸ (β) ὡς ἐπροβάλαμεν, εἰς δὲ (γ'). (δ') καὶ (ε') ἐκβάλαμεν τὰς δύο πλευρὰς Α Β καὶ Α Γ, τουτέστιν ά καὶ c, ἢ ἐν γένει δύο πλευρὰς αἵτινες ἑνόνουν τὰ δύο ἄκρα μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ πολυγώνου, καὶ οὕτως μὲ αὐτὴν τὰ δύο ἐκβεβλημένα μέρη ἐσχημάτισαν ἐντρίγωνον τὸ ὁποῖ ον ἑνωμένον μὲ τὸ δοθὲν πολύγωνον ἐσχημάτισεν εὐθύγραμμον σχῆμα μιᾶς πλευρᾶς ὀλιγώτερον τοῦ δοθέντος σχήματος, καὶ ἀφαιρούμενον τὸ ἴδιον τρίγωνον ἐκ τοῦ σχηματιζομένου εὐθυγράμμου ἔδωκε πάντοτε τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δοθέντος πολυγώνου, προσέτι αἱ δύο κατ' ἐξακολούθησιν πλευραὶ τοῦ σχηματιζομένου εὐθυγράμμου εἶναι σύνθετοι πάντοτε ἐκ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου, καὶ ἐκ τῶν δύο ἐκβεβλημένων τμημάτων των, καὶ ἡ περιεχομένη ἐξ αὐτῶν γωνία εἰς τὸ σχηματιζόμενον σχῆμα εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ἐκ τῶν ἐκβεβλημένων τμημάτων καὶ ἐκ τῆς περικλεισμένης πλευρᾶς εἰς τὰς δύο ἐκβεβλημένας. λοιπὸν ὅταν ἡ πρώτη πλευρὰ τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου ἡ σύνθετος ἐκ τῆς πρώτης πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου, καὶ τῆς προεκβολῆς της, πολλαπλασιάζει τὴν δευτέραν σύνθετον ἐξ αὐτοῦ καὶ τοῦ ἡμιτόνου τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας, ἔχομεν διὰ μερικὰ γινόμενα, παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκβεβλημένων μερῶν διὰ τοῦ ἡμιτόνου τῆς σχηματιζομένης γωνίας σὺν τῷ γινομένῳ τῆς πρώτης πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου, καὶ διὰ τῆς προεκβολῆς τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου καὶ διὰ τοῦ ἡμιτόνου τὰς ἰδίας γωνίας σὺν τῷ γινομένῳ τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου, καὶ διὰ τοῦ ἡμιτόνου τῆς αὐτῆς γωνίας, καὶ τέλος πάντων τὸ γινόμενον τῆς πρώτης πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου διὰ τῆς τρίτης, καὶ διὰ τοῦ ἡμιτόνου τῆς σχηματιζομένης γωνίας ἐκ τῆς πρώτης καὶ τρίτης πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου. εἰς δὲ τὸ γινόμενον τῆς πρώτης συνθέτου πλευρᾶς τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου μὲ τὴν τρίτην τετάρτην, καὶ ἐφεξῆς πλευρὰν τοῦ αὐτοῦ πολυγώνου, ἐκτὸς ὅτι εὑρίσκεται τὸ γινόμενον τῆς πρώτης πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου, διὰ τὰς τετάρτης, πέμπτης, καὶ ἐφεξῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου, ὑπάρχει καὶ τὸ γινόμενον τῆς τετάρτης, πέμπτης καὶ ἐφεξῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου διὰ τῆς προεκβολῆς τῆς πρώτης. παρομοίως εἰς τὸ γινόμενον τῆς συνθέτου δευτέρας πλευρᾶς τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου διὰ τῆς τρίτης, τετάρτης καὶ ἐφεξῆς πλευρᾶς τοῦ δοθέντος πολυγώνου εὑρίσκονται καὶ τὰ γινόμενα τῶν ἰδίων πλευρῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου διὰ τῆς προεκβολῆς τῆς τρίτης αὐτοῦ πλευρᾶς, Ολα δὲ τ' ἄλλα γινόμενα εἶναι καθ' ὅλας τὰς περιστάσεις τὰ γινόμενα τῶν ἄλλων πλευρῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου ἀνὰ δύο. καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου διὰ νὰ εὕρωμεν ἐκείνην τοῦ δοθέντος πολυγώνου, διὰ τοῦτο, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος πολυγώνου ἐκφράζεται δι' ὅλων τῶν ἄνω εἰρημένων γινομένων ἐκτὸς τοῦ γινομένου τῶν δύο ἐκβεβλημένων τμημάτων διὰ τοῦ ἡμιτόνου τῆς σχηματιζομένης ἐξ αὐτῶν γωνίας, δηλαδὴ ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τῶν πλευρῶν του ἀνὰ δύο καὶ διὰ τῶν μερικῶν γινομένων τῶν πλευρῶν του ἐκτὸς πάντοτε μιᾶς διὰ τῶν προεκβολῶν. καὶ ἐπειδὴ ἔχομεν πάντοτε

$$\alpha = \frac{b\ \text{ἡμ}\ \Gamma}{\text{ἡμ}\ T} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \frac{b\ \text{ἡμ}\ B}{\text{ἡμ}\ T}$$

Αντεισάγοντες ταύτας τὰς ποσότητας, καὶ ἄγοντες τὸν γενικὸν τύπον εἰς τὸ ἁπλούστερον, ἔχομεν πάντοτε τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου πολυγώνου, καὶ ἐπειδὴ ὁ σχηματισμὸς τοῦ τύπου εἶναι ἀποδεδειγμένος εἰς τὸ ἑξάπλευρον, διὰ τοῦτο ὑπάρχει καὶ διὰ τὸ ἑπτάπλευρον, καὶ οὕτως ἐφεξῆς. ὅθεν καλοῦντες ά, b, c, d, e, f, g, h, i, l ἔχομεν ὄντος Σ τοῦ ἐμβαδοῦ,

$$\begin{aligned}
\Sigma = \tfrac{1}{2}\big((& \acute{a}\, b\ \text{ἡμ}(\acute{a}, b) + \acute{a}\, c\ \text{ἡμ}(\acute{a}, c) + \acute{a}\, d\ \text{ἡμ}(\acute{a}, d) \\
& + \acute{a}\, e\ \text{ημ}(\acute{a}, g) + \acute{a}\, h\ \text{ἡμ}(\acute{a}, h) + \acute{a}\, b\ \text{ἡμ}(\acute{a}, \iota) + \\
& b\, c\ \text{ἡμ}(b, c) + b\, d\ \text{ἡμ}(b, d) + b\, e\ \text{ἡμ}(b, e) + b\, f\ \text{ἡμ}(b, f) \\
& + b\, g\ \text{ἡμ}(b, g) + b\, h\ \text{ἡμ}(b, h) + b\, \imath\ \text{ἡμ}(b, \imath) + c\, d\ \text{ἡμ}(c, d) \\
& + c\, e\ \text{ἡμ}(c, e) + c\, f\ \text{ἡμ}(c, f) + c\, g\ \text{ἡμ}(c, g) + c\, h\ \text{ἡμ}(c, h) \\
& + c\, \imath\ \text{ημ}(c, \imath) + d\, e\ \text{ἡμ}(d, e) + d\, f\ \text{ἡμ}(d, f) + \\
& d\, g\ \text{ἡμ}(d, g) + d\, h\ \text{ἡμ}(d, h) + d . \imath .\ \text{ἡμ}(d, \imath) + e\, f\ \text{ἡμ}(e, f) \\
& + e\, g\ \text{ἡμ}(e, g) + e\, h\ \text{ἡμ}(e, h) + e . \imath\ \text{ἡμ}(e . \imath) + f\, g\ \text{ἡμ}(f, g) \\
& + f\, h\ \text{ἡμ}(f, h) + f\, \imath\ \text{ἡμ}(f, \imath) + g\, h\ \text{ἡμ}(g, h) + g\, \imath\ \text{ἡμ}(g, \imath) \\
& + h . \imath\ \text{ἡμ}(h, \imath)\big)
\end{aligned}$$

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Δυνάμεθα ἀντὶ τῶν γωνιῶν (á, b), (α, c) καὶ ἐφεξῆς νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰς γωνίας τοῦ δοθέντος πολυγώνου, καὶ τοῦτο ἐκτελοῦμεν ἐκ τοῦ τύπου Τ = Κ 200° . ν, ὅςτις κατὰ τὸ πρῶτον Θεώρημα ἐκφράζει τὴν σχέσιν μεταξὺ τῆς σχηματιζομένης γωνίας ἐκ δύο ἐκβεβλημένων πλευρῶν μὲ τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου τὰς σχηματιζομένας ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τουτέςι τὰς δύο ἐκβεβλημένας, καὶ ἐκ τῶν εἰς αὐτὰς περικλεισμένων, καὶ τὸ μὲν Τ παριςάνει τὴν σχηματιζομένην γωνίαν ἐκ τῶν δύο πλευρῶν, τὸ δὲ Κ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄνω εἰρημένων γωνιῶν, καὶ τὸ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν περικλεισμένων πλευρῶν μεταξὺ τῶν δύο ἐκβεβλημένων πλευρῶν τοῦ δοθέντος πολυγώνου. λοιπὸν

(á, b) = Β, διότι ν = ο. τῆς δὲ (á, c) = Β + Γ - 200° . 1
καὶ ἡμ (á, c) = − ἡμ (Β + Γ, καὶ τῆς
(á, d) = Β + Γ + Δ − 200° . 2 ἤ ἡμ (á, c) = ἡμ (Β + Γ
+ Δ) καὶ (á, e) = Β + Γ + Δ + Ε − 200° . 3 καὶ
ἡμ (á, e) = − ἡμ (Β + Γ + Δ + Ε) καὶ τῆς (á, f)
= Β + Γ + Δ + _ + z − 200° . 4 καὶ ἡμ (á, f)
= ημ (Β + Γ + Δ + Ε + Ζ), καὶ τῆς
(á, g) = Β + Γ + Δ + Ε + Ζ + Η − 200° . 5, καὶ
ημ (á, g) = - ἡμ (Β + Γ + Δ + Ε + Ζ + Η) καὶ τῆς
(á, h) = (Β + Γ + Δ + Ε + Ζ + Η + Θ - 200° . 6)
= ἡμ (Β + Γ + Δ + Ε + Ζ + Η + Θ) καὶ τῆς (α, ι)
= (Β + Γ + Δ + Ε + Ζ + Η + Θ + Ι - 200° . 7
καὶ ἡμ (á, ι) = - ἡμ (Β + Γ + Δ + Ε + Ζ + Η + Θ + Ι)
καί τῆς (b, c) = Γ καὶ ἡμ (b, c) = ἡμ Γ. ἐπειδὴ ν = ο
εἰς ταύτην τὴν περίςασιν, καὶ τῆς (b, d) = Γ + Δ - 200° . 1
καὶ ἡμ (b, d) = - ἡμ (Γ + Δ) καὶ τῆς
(b, e) = Γ + Δ + Ε - 200° . 2 καὶ

ἡμ $(b, e) =$ ημ $(\Gamma + \Delta + E)$, καὶ τῆς $(b, f) = \Gamma + \Delta + E + Z - 200^{\circ}$. 3 καὶ ἡμ $(b, f) =$ - ἡμ $(\Gamma + \Delta + E + Z)$ καὶ τῆς $(b, g) = \Gamma + \Delta + E + Z + H - 200^{\circ}$. 4. καὶ ἡμ $(b, g) =$ ημ $(\Gamma + \Delta + E + Z + H)$, καὶ τῆς $(b, h) = \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta - 200^{\circ}$. 5, καὶ ἡμ $(b, h) =$ - ἡμ $(\Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta)$ καὶ τῆς $(b, \iota) =$

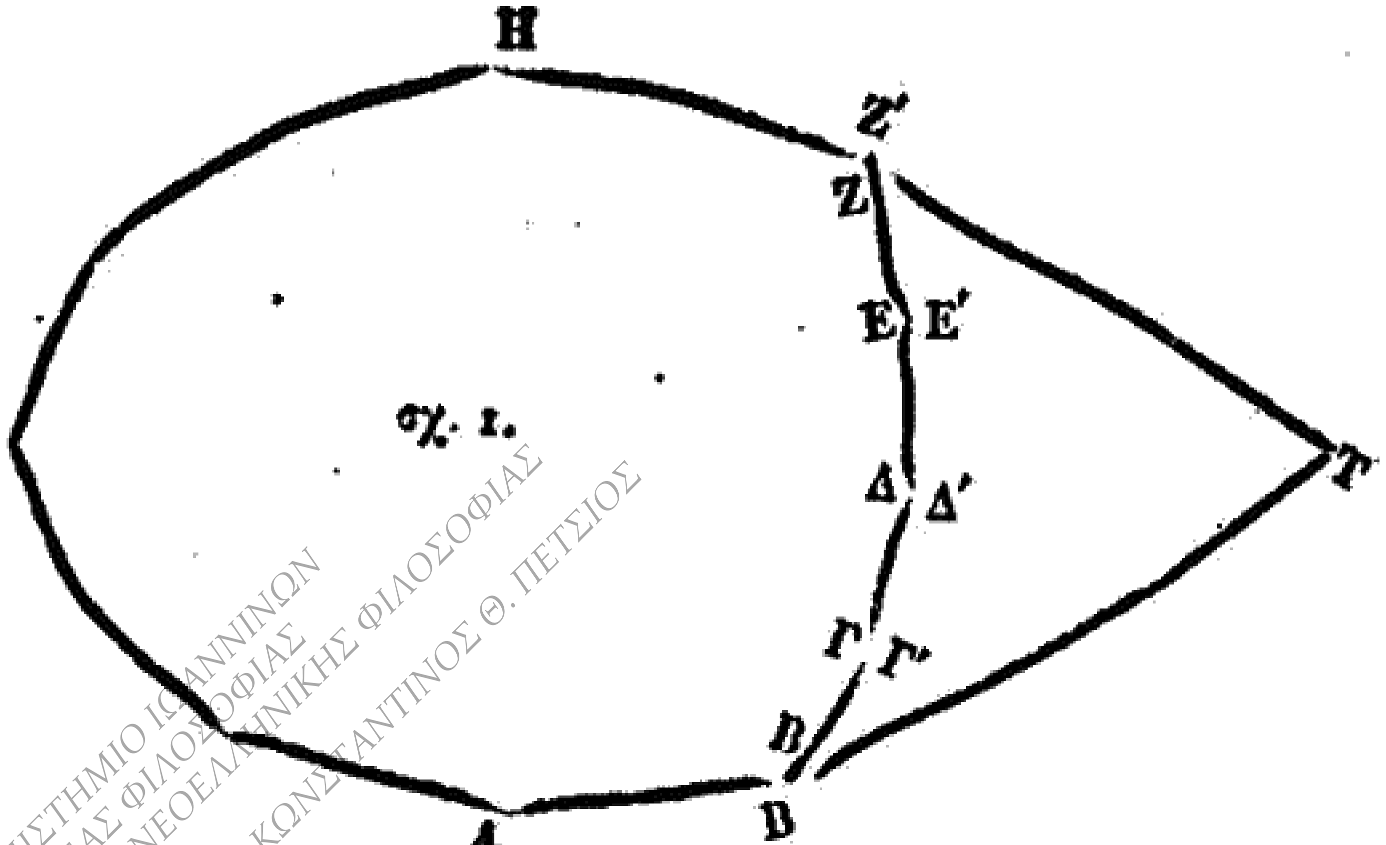
$\Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + I - 200^{\circ}$ 6. καὶ

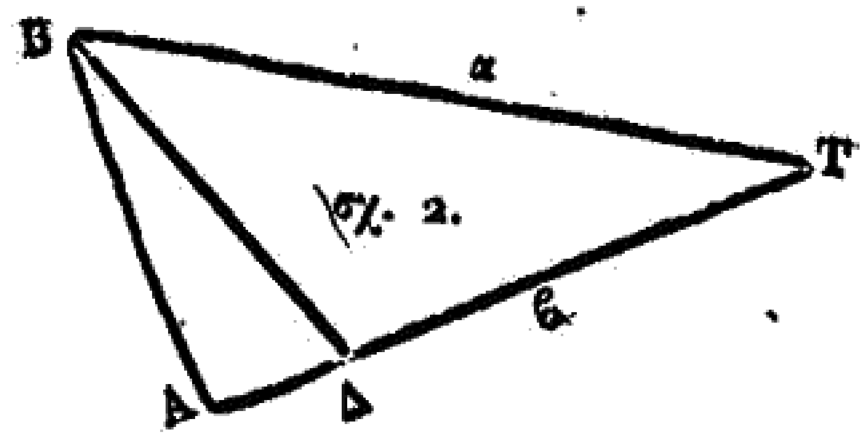
ημ $(b, \iota) =$ ημ $(\Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + I)$

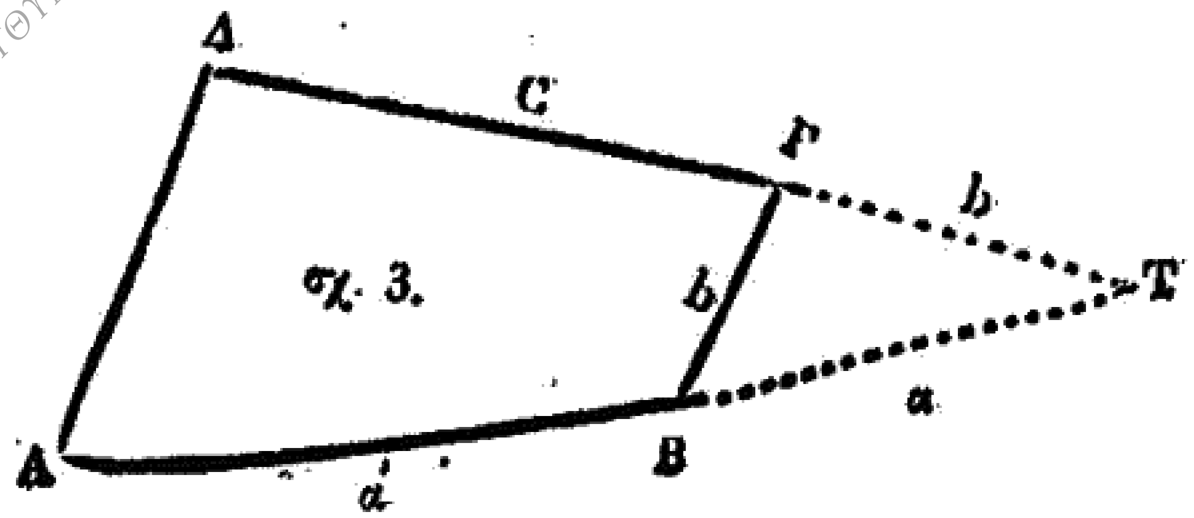
καὶ τῆς $(c, d) = \Delta$, καὶ ἡμ $(c, d) =$ ἡμ Δ, καὶ τῆς $(c, e) = \Delta + E - 200^{\circ}$. 1 ἡμ $(c, e) = -$ ἡμ $(\Delta + E)$ καὶ τῆς $(c, f) = \Delta + E + Z - 200^{\circ}$. 2 καὶ ἡμ $(c, f) =$ ἡμ $(\Delta + E + Z)$ καὶ τῆς $(c, g) = \Delta + E + Z + H - 200^{\circ}$. 3 καὶ ἡμ $(c, g) = -$ ἡμ $(\Delta + E + Z + H)$, καὶ τῆς $(c, h) = (\Delta + E + Z + H + \Theta - 200^{\circ}$. 4) καὶ ἡμ $(c, h) =$ ἡμ $(\Delta + E + Z + H + \Theta)$ καὶ τῆς $(c, \iota) = \Delta + E + Z + H + \Theta + I - 200^{\circ}$. 5 καὶ ἡμ $(c, \iota) = -$ ἡμ $(\Delta + E + Z + H + \Theta + I)$, καὶ τῆς $(d, e) = E$ καὶ ἡμ $(d, e) =$ ημ E. καὶ τῆς $(d, f) = E + Z - 200^{\circ}$. 1 καὶ ἡμ $(d, e) =$ ημ E. καὶ τῆς $(d, f) = E + Z - 200^{\circ}$. 1 καὶ ἡμ $(d, f) = -$ ημ $(E + Z)$ καὶ τῆς $(d, g) = E + Z + H - 200^{\circ}$. 2 καὶ ἡμ $(d, g) =$ ἡμ $(E + Z + H)$, καὶ τῆς $(d, h) = E + Z + H + \Theta - 200^{\circ}$. 3. καὶ ἡμ $(d, h) = -$ ἡμ $(E + Z + H + \Theta)$ καὶ τῆς $(d, \iota) = (E + Z + H + \Theta + I - 200^{\circ}$. 4) καὶ ἡμ $(d, \iota) =$ ημ $(E + Z + H + \Theta + I)$ καὶ τῆς $(e, f) = Z$ καὶ ἡμ $(e, f) =$ ἡμ Z. καὶ τῆς $(e, g) = Z + H - 200^{\circ}$ καὶ ἡμ $(e, g) = -$ ἡμ $(Z + H)$ καὶ τῆς $(e, h) = Z + H + \Theta - 200^{\circ}$. 2 καὶ ἡμ $(e, h) =$ ἡμ (Z

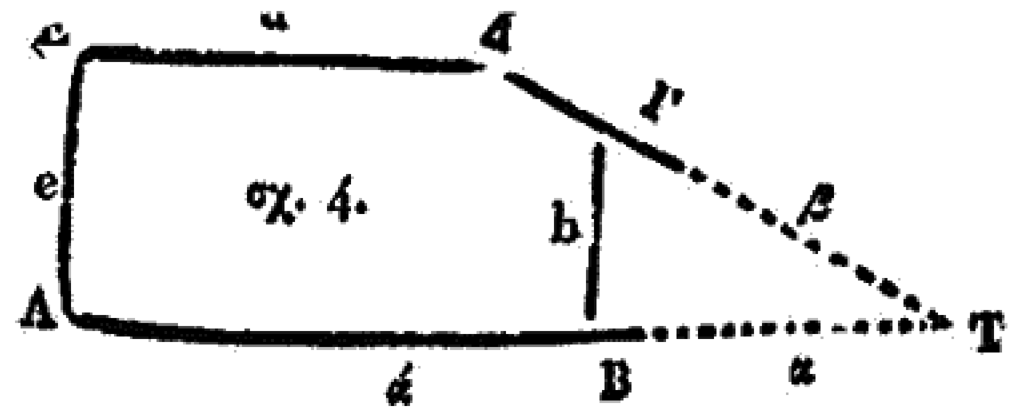
$+ H + \Theta)$ καὶ τῆς $(e, i) = Z + H + \Theta + I - 200^\circ \cdot 3)$ καὶ ἡμ $(e, i) = -$ ἡμ $(Z + H + \Theta + I)$ καὶ τῆς $(f, g) = H$ καὶ ἡμ $(f, g) =$ ἡμ H, καὶ τῆς $(f, h) = H + \Theta - 200^\circ \cdot 1$ καὶ ἡμ $(f, h) = -$ ἡμ $(H + \Theta)$, καὶ τῆς $(f, i) = (H + \Theta + I - 200^\circ \cdot 2$, καὶ ἡμ $(f, i) =$ ἡμ $(H + \Theta + I)$ καὶ τῆς $(g, h) = \Theta$, καὶ ημ $(g, h) =$ ἡμ Θ, καὶ τῆς $(g, i) = (\Theta + I - 200^\circ \cdot 1$. καὶ ἡμ $(g, i) = -$ ἡμ $(\Theta + I)$ καὶ τῆς $(h, i) = I$ καὶ ἡμ $(h, i) =$ ἡμ I, καὶ ἀντεισάγοντες ἔχομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου σχήματος διὰ μέσου τῶν πλευρῶν του μεῖον μιᾶς καὶ τῶν γωνιῶν του μεῖον δύο.

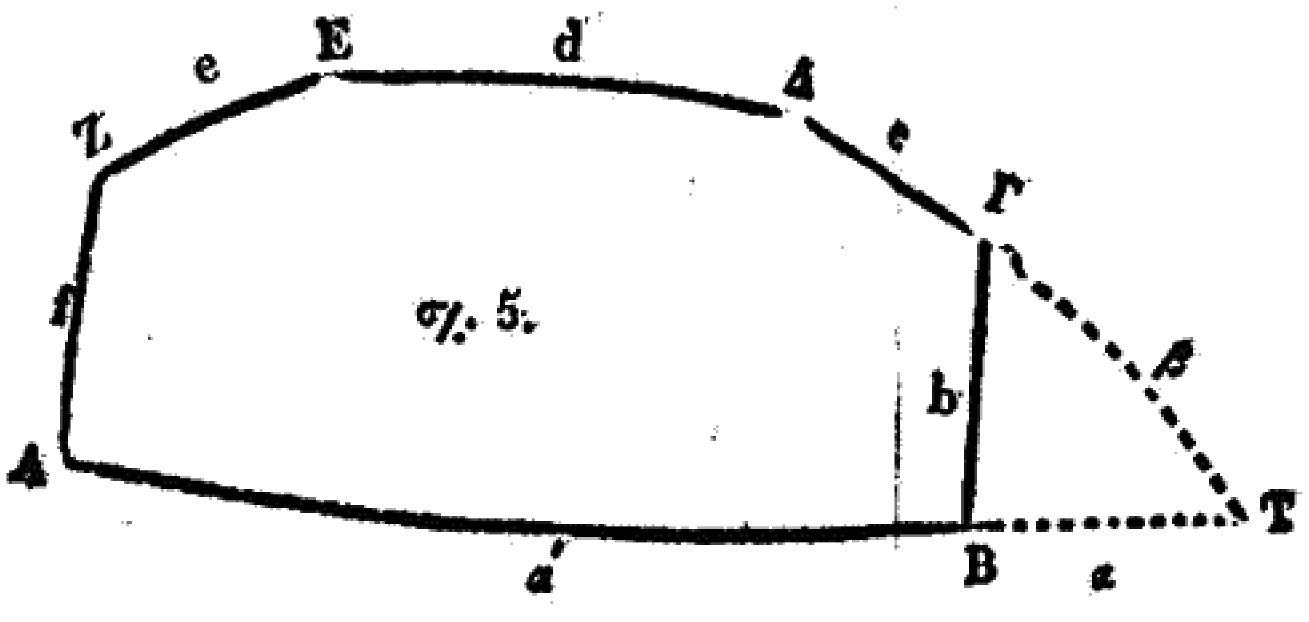
ΤΕΛΟΣ


H
Z'
Z
E E'
Δ Δ'
Γ Γ'
B
B
A
T
σχ. 1.


B
α
T
σχ. 2.
β
A
Δ


Δ
C
Γ
b
T
σχ. 3.
b
A
a'
B
α


e
a
Δ
Γ'
e
σχ. 4.
b
β
A
a'
B
α
T


e
E
d
Δ
Z
e
Γ
f
σχ. 5.
β
b
A
T
a'
B
α