

Καὶ τινόντι συνδυάζοντες ἀνά δύο τὰς τέσσαρας ρίζας χ' , χ'' , χ''' , χ^{IV} , εὐρίσκομεν διὰ τὸ X' ἕξ συνδυασμοὺς τοῦτέστι τὸ X' εἶναι δεκτικὸν ἕξ τιμῶν καὶ λαμβάνοντες μίαν ἕξ αὐτῶν τῶν ἕξ τιμῶν διὰ νὰ παρήψιάσωμεν τὸ X' , τοῦτέστι λαμβάνοντες δύο ἀπὸ τὰς τέσσαρας ρίζας χ' , χ'' , χ''' , χ^{IV} , τὰς δὲ ἐπιλοιπούς συνδυάζοντες τὰς ἀνά δύο σχηματίζομεν τὰς τιμὰς τοῦ X'' , καὶ ἐπειδὴ διὰ μόνης μιᾶς τιμῆς τοῦ X ἔχομεν τόσας τιμὰς διὰ τὸ X'' , ἵσους συνδυασμοὺς ἀποτελοῦν αἱ τέσσαρες μεῖον δύο ρίζαι τῆς δοθείσης ἕξισώσεως διὰ τοῦτο θέλομεν ἔχειν διὰ τὰς ἕξ τιμὰς τοῦ X' , τόσας τιμὰς διὰ τὸ X'' ὅσας ἐκφράζει τὸ γινόμενον τοῦ δ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν συνδυασμῶν ἀνά δύο τῶν τεσσάρων μεῖον δύο ριζῶν τῆς δοθείσης ἕξισώσεως, καὶ ἐπειδὴ τέσσαρες μεῖον δύο ρίζαι, ἀνά δύο συνδυαζόμεναι δίδουν ἕνα συνδυασμὸν, διὰ τοῦτο $\delta X'$ δίδει δ

Αἱ δύο λοιπὸν ποσότητες χ' καὶ χ'' εἶναι δεκτικαὶ ἕξ τιμῶν, ἐκάστη τῶν ὑποίων συνίσταται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα δύο ριζῶν τῆς δοθείσης ἕξισώσεως. ὑποθέτοντες τῶρα ὅτι X' καὶ X'' εἶναι αἱ ρίζαι μιᾶς ἕξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἣτις ἔχει διὰ ἄγνωστον τὸ X , οἱ συντελεσταὶ ταύτης τῆς ἕξισώσεως θέλουν εἶσθαι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ριζῶν τῆς, τοῦτέστιν ὁ συντελεστής τοῦ δευτέρου ὄρου ἐλεει εἶσθαι $X' + X''$, καὶ ὁ τοῦ γοῦ, $X' X''$ ἀλλὰ X' καὶ X'' εἶναι δεκτικὸν ἕξ τιμῶν, διὰ τοῦτο κατὰ πρῶτον ἔπρεπε καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν νὰ ἦναι δεκτικοὶ ἕξ τιμῶν. ἀλλ' ἐπειδὴ ἀντιστάγομεν εἰς τὰς λειτουργίας $X' + X''$ καὶ $X' X''$ τὰς τιμὰς τοῦ X' καὶ X'' , μερικαὶ τούτων ἄλλο δὲν κάμνουν εἰ μὴ ἀλλάττουν τὸ X' εἰς τὸ X'' , καὶ τὸ X'' εἰς τὸ X' διὰ τοῦτο θέλομεν ἐπαντήσῃν τοσάκις τὴν αὐτὴν τιμὴν διὰ τὴν λειτουργίαν $X' + X''$ ἢ $X' X''$, ὅσάκις δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν τὸ X' εἰς τὸ X'' , καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ἄλλαι τόσαι μεταθέσεις γίνονται εἰς δύο ποσότητας, ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς 1.2. Λοιπὸν διὰ νὰ εὑρωμεν τὰς διαφορετικὰς

τιμές τῶν λειτουργιῶν $X' + X''$ καὶ $X' X''$

Πρέπει νὰ διακρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν τὸν παρασαίοντα τὰς τιμὰς τοῦ X', X'' διὰ τοῦ a , τουτέστι τὸ θ διὰ τοῦ a ἦγουν θ . διὰ τοῦτο οἱ συντελεσθεὶς τῆς ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ εἰς X , εἶναι δεκτικοὶ τριῶν διαφόρων τιμῶν, τουτέστι ἐξήρτηνται ἀπὸ ἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ.

Παρομοίως ἐπειδὴ τὸ a εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, ἡ ἐξίσωσις εἰς X λύεται κατὰ πρῶτον μὲ τοὺς ἰδίους συλλογισμοὺς ὡς καὶ ἡ ἐξίσωσις βαθμοῦ μ , ὅταν τὸ μ ἦναι ἀριθμὸς πρῶτος, δηλαδὴ σχηματίζομεν ἐξίσωσιν ἐν' πρώτοις εἰς θ . ἧτις εἶναι βαθμοῦ $(\nu - 1)(\nu - 2) \dots \cdot 2 \cdot 1$, τουτέστι βαθμοῦ πρώτου ὡς ἡ πρώτη εἰς θ , δηλαδὴ εἶναι ἡ ἴδια. οἱ δὲ συντελεσθεὶς ταύτης τῆς ἐξίσωσιν εἶναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσιν βαθμοῦ ν διὰ τοῦτο ἐρροάζονται διὰ τῶν συντελεσθῶν τῆς ἰδίας, οἵτινες ὡς ἀπεδείξαμεν ἐξήρτηνται ἀπὸ ἐξίσωσιν τρίτου βαθμοῦ. ἔθεν καὶ οἱ συντελεσθεὶς τῆς ἐξίσωσιν εἰς θ , ἐξάγονται ἀπὸ ἐξίσωσιν τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ. ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐξίσωσις εἰς θ εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἔχει ἓνα μόνον συντελεσθῆν ὃ ὅ ποῖος εἶναι λοιπὸν δεκτικὸς τιμῶν τριῶν.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὰς ἄνω εἰρημέναις ἐξίσωσιν, ἐξεύρομεν ὅτι

$$\theta = \zeta^2 = (X' + a X''), \text{ καὶ } \theta' = \xi + \xi^2 a$$

$$\text{δηλ. ὅτι } \xi + \xi^2 a = X'^2 + X''^2 + 2 X' X'' a,$$

$$\text{ἤτοι } \xi = \chi'^2 + \chi''^2 \text{ καὶ } \xi^2 = 2 \chi' \chi''$$

Παρομοίως $\theta' = (X' + X'')^2 = A^2$, καὶ εἰς τὴν παρεούσαν, περίπτωσιν $A^2 = 0$. λοιπὸν $\sum \theta = \mu \xi - A \mu^2$.

καλοῦντες $\nu = 1$ καὶ $\mu = 2$, θέλομεν ἔχειν $\sum \theta = 2 \xi$

$$\text{τουτέστι } \Sigma, \theta = 2(X' + X''),$$

και επειδη το αθροισμα των πρώτων δυνάμεων των ριζών της εξίσωσης εις θ με εναντίον σημειών είναι ο συντελεστής του δευτέρου όρου, δια τουτο η εξίσωσις εις θ παρήρσιάζεται ούτως

$$\theta - 2(X' + X'') = 0, \text{ ή } \theta - 2(X' + X'')^2 - 2X'X'' = 0$$

και επειδη $X' + X'' = 0$, δια τουτο $\theta + 4X'X'' = 0$.

Οντος δε του συντελεστού του δευτέρου όρου της εις θ εξίσωσης επιδεκτικού τριών τιμών ως ανωτέρω απεδείχθη, πρέπει να προσδιορίσωμεν ταύτας τας τρεις τιμας δια των τριών τιμών του X' και X'' , τουτέστι να λύσωμεν την εξίσωσιν του δευτέρου βαθμού εις X , οι συντελεσται της οποίας είναι δεκτικοί τριών τιμών, ήτοι εξαρτώνται από μίαν εξίσωσιν τρίτου βαθμού, και δια τουτο πρέπει να σχηματίσωμεν τριτοβάθμιον εξίσωσιν, αι ρίζαι της οποίας να ηναι αι τιμαί του συντελεστού του δευτέρου όρου της εξίσωσης του δευτέρου βαθμού εις X , και πάλιν άλλην τινά του τρίτου βαθμού, αι ρίζαι της οποίας να ηναι αι τιμαί του συντελεστού της ίδιας εξίσωσης του δευτέρου βαθμού εις χ . δια να σχηματίσωμεν τους συντελεστας της εξίσωσης του τρίτου βαθμού, αι ρίζαι της οποίας θέλουν εισθαι εις των συντελεστών της εξίσωσης του δευτέρου βαθμού, πράττομεν ως ακολουθει, κατὰ τον συντελεστήν τον οποίον θέλομεν να προσδιορίσωμεν.

Παραδείγματος χάριν, δια να εύρωμεν την εξίσωσιν του τρίτου βαθμού, της οποίας αι ρίζαι να παρήρσιάζωσι τας τρεις τιμας των οποίων είναι δεκτικὸς ο συντελεστής της εξίσωσης εις χ , συλλογισόμεθα ούτως. Ο συντελεστής του δευτέρου όρου ταύτης της εξίσωσης είναι ἴσος, με εναντίον σημειών, τῷ αθροίσματι των ριζών της ίδιας εξίσωσης, τουτέστι $-(X' + X'')$, και αντιστάγοντες μίαν από τας εἰς τιμας του X' , X'' , ήτοι $\chi' + \chi'' + \chi''' + \chi^{IV}$,

$$\text{θέλομεν ἔχειν } -(X' + X'') = -(\chi' + \chi'' + \chi''' + \chi^{IV}) = 0$$

Τὸ αὐτὸ θέλει προκύψειν καὶ εἰς πᾶσαν ἄλλην τῶν ἐξ τιμῶν τοῦ χ' , χ'' . Λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαιμοῦ εἰς χ εἶναι ἑλλειπῆς δευτέρου ὄρου. Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὰς τρεῖς τιμὰς τοῦ συντελεστοῦ τοῦ τρίτου ὄρου τῆς ἰδίας ἐξισώσεως, τουτέστι τὸ $X' X''$, ἀντεισάγοντες ὡς ἀνωτέρω ἀντὶ τοῦ X' , X'' , μίαν τῶν ἐξ τιμῶν,

$$\begin{aligned} \text{θέλομεν ἔχειν } X' X'' = \omega &= (\chi' + \chi'')(\chi''' + \chi^{IV}) \\ &= \chi' \chi''' + \chi' \chi^{IV} + \chi'' \chi''' + \chi'' \chi^{IV}. \\ \text{ἢ } X' X'' = \omega &= (\chi' + \chi''')(\chi'' + \chi^{IV}) \\ &= \chi' \chi'' + \chi' \chi^{IV} + \chi'' \chi''' + \chi''' \chi^{IV} \\ \text{καὶ } X' X'' = \omega &= (\chi' + \chi^{IV})(\chi'' \chi''') \\ &= \chi' \chi'' + \chi' \chi''' + \chi'' \chi^{IV} + \chi''' \chi^{IV} \end{aligned}$$

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ X' , X'' ἀντεισάξωμεν τὴν τετάρτην ἢ τὴν πέμπτην, ἢ τὴν ἕκτην τιμὴν, θέλομεν εὑρεῖν τὰς ἰδίας ποσότητας. Λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις τοῦ τρίτου βαθμοῦ σχηματίζεται ἐκ τοῦ γινομένου τῶν τριῶν παραγόντων

$$\begin{aligned} &(\omega - (\chi' \chi'' + \chi' \chi^{IV} + \chi'' \chi''' + \chi'' \chi^{IV})) \\ &(\omega - (\chi' \chi'' + \chi' \chi^{IV} + \chi'' \chi''' + \chi''' \chi^{IV})) \\ &(\omega - (\chi' \chi'' + \chi' \chi''' + \chi'' \chi^{IV} + \chi''' \chi^{IV})) \end{aligned}$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ

$$\chi' \chi'' + \chi' \chi''' + \chi' \chi^{IV} + \chi'' \chi''' + \chi'' \chi^{IV} + \chi''' \chi^{IV} = \pi,$$

ἔχομεν διὰ τοῦτο

$$\chi' \chi''' + \chi' \chi^{IV} + \chi'' \chi''' + \chi'' \chi^{IV} = \pi - \chi' \chi'' - \chi''' \chi^{IV}.$$

$$\text{παρομοίως } \chi' \chi'' + \chi' \chi^{IV} + \chi'' \chi''' + \chi''' \chi^{IV} = \pi - \chi' \chi''' -$$

$\chi'' \chi^{19}$, και $\chi' \chi'' + \chi'' \chi''' + \chi'' \chi^{19} + \chi''' \chi^{19} = \pi - \chi' \chi^{19} - \chi'' \chi'''$. Διπλόν έχομεν

$$(\omega - \pi + (\chi' \chi'' + \chi''' \chi^{19})) (\omega - \pi + (\chi' \chi'' + \chi'' \chi^{19})) (\omega - \pi + (\chi' \chi^{19} + \chi'' \chi'''))$$

Και καλοῦντες $\omega - \pi = \varphi$, έχομεν $(\varphi + (\chi' \chi'' + \chi''' \chi^{19})) (\varphi + (\chi' \chi'' + \chi'' \chi^{19})) (\varphi + (\chi' \chi^{19} + \chi'' \chi''')) = 0, \sigma, = ((\chi' \chi'' + \chi''' \chi^{19}) + (\chi' \chi'' + \chi'' \chi^{19}) + (\chi' \chi^{19} + \chi'' \chi''')) = -\pi. \sigma, = \chi'^2 \chi''^2 + \chi'''^2 \chi^{19^2} + 2\chi' \chi'' \chi''' \chi^{19} + \chi'^2 \chi'''^2 + \chi''^2 \chi^{19^2} + 2\chi' \chi'' \chi''' \chi^{19} + \chi'^2 \chi^{19^2} + \chi''^2 \chi'''^2 + 2\chi' \chi'' \chi''' \chi^{19}$

$$= \frac{(\Sigma_2^2 - \Sigma_4)}{2} + 6\rho = \frac{4\pi^2 - 2\pi^2 + 4\rho + 6\rho}{2} \pi^2 + 8\rho$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{l} \chi'^2 \chi''^2 + 3\chi' \chi'' \chi''' \chi^{19} + 3\chi' \chi'' \chi''' \chi^{19} + \chi'''^2 \chi^{19^2} \\ \chi'^2 \chi''^2 + 3\chi' \chi'' \chi''' \chi^{19} + 3\chi' \chi'' \chi''' \chi^{19} + \chi'''^2 \chi^{19^2} \\ \chi'^2 \chi''^2 + 3\chi' \chi'' \chi''' \chi^{19} + 3\chi' \chi'' \chi''' \chi^{19} + \chi'''^2 \chi^{19^2} \end{array} \right\}}{2} = \frac{1}{2}(\Sigma_2^2 - \Sigma_4) +$$

$+ 3\chi' \chi''$	$\chi' \chi'' \chi''' \chi^{19}$
$+ 3\chi' \chi''$	
$+ 3\chi' \chi''$	
$+ 3\chi'' \chi''$	
$+ 3\chi'' \chi''$	
$+ 3\chi'' \chi''$	
$+ 3\chi'' \chi''$	

$$-\frac{2}{3} (9x^2 - 6\theta r + 2r^2 - 3x^2 + 3\pi r) - (3x^2 + \pi^2) \quad 39$$

ώστεντες λοιπόν την εξίσωσιν εις φ υπό την μορφήν

$$\varphi^3 + A\varphi^2 + B\varphi + \Gamma = 0$$

δ,ομαν (ώς εις τον αριθμόν 9: Συμπλήρ. Δακρ:) $A = -\sigma - \pi - r$

$$\text{και } B = \frac{A\sigma - \sigma_2}{2} = \frac{\pi^2 - \pi^2 - 8r}{2} = -4r$$

$$r = \frac{-B\sigma_1 - A\sigma_2 - \sigma_3}{3} = \frac{-4\pi r - \pi^3 - 8\pi r + 3x^2 + \pi^3}{3} = -4\pi r + x$$

Και διά τουτο $\varphi^3 + \pi\varphi^2 - 4r\varphi - 4\pi r + x^2$, και άντεισάγοντες άντι του φ το $\omega - \pi$, θέλομεν έχειν

$$\omega^3 - 2\pi\omega^2 + (\pi^2 - 4r)\omega + x^2 = 0$$

καλουμένου δε $\omega = -\psi$, έχομεν $-\psi^3 - 2\pi\psi^2 - (\pi^2 - 4r)\psi + x^2 = 0$

$$\text{η } \psi^3 + 2\pi\psi^2 + (\pi^2 - 4r)\psi - x^2 = 0$$

Καλουόντες ψ', ψ'', ψ''' τας ρίζας ταύτης της εξισώσεως έχομεν

$$\psi' \psi'' = +\psi''', \psi' \psi''' = +\psi'', \text{ και } \psi' \psi'' = \psi'.$$

τας δε τιμας του ω, Z', Z'', Z''' , έχομεν

$$\psi' = -Z', \psi'' = -Z'', \psi''' = -Z'''$$

$$\text{και } \theta - 4Z' = 0, \theta - 4Z'' = 0, \theta - 4Z''' = 0, \theta - 4Z'' = 0$$

$$\text{και } \sqrt{\theta} = \pm 2\sqrt{Z'}, \sqrt{\theta} = \pm 2\sqrt{Z''}, \sqrt{\theta} = \pm 2\sqrt{Z'''}$$

και επειδη $\theta = r^2 = (X' + X''\alpha)^2$, δια τουτο $X' + X''\alpha = \pm 2\sqrt{Z'}$, $X' + X''\alpha = \pm 2\sqrt{Z''}$, $X' + X''\alpha = \pm 2\sqrt{Z'''}$, και $X' + X'' = 0$.

40

ακ τῶν ἑποίων συνάγομεν $X' = \pm \sqrt{Z'}$, ἢ $X' = \pm \sqrt{Z''}$
καὶ $X' = \pm \sqrt{Z'''}$, καὶ $X'' = \pm a \sqrt{Z'}$ ἢ

$$X'' = \pm a \sqrt{Z''}, X'' = \pm a \sqrt{Z'''}$$

καὶ ἐπειδὴ X' πρόσθεσις, εἶναι $\chi' \chi'', \chi' + \chi'', \eta \chi' + \chi''', \eta \chi' + \chi'''$.

διὰ τοῦτο

$$\chi' + \chi'' = \pm \sqrt{Z'}$$

$$\chi' + \chi''' = \pm \sqrt{Z''}$$

$$\chi' + \chi'' = \pm \sqrt{Z''}$$

$$\text{Λοιπὸν } \chi' = \frac{1}{2} (\pm \sqrt{Z'} \pm \sqrt{Z''} \pm \sqrt{Z''})$$

Δι τι καὶ τοῦ X'' θέλουσιν δώσιν τοὺς ἰδίους τύπους διὰ τοῦ χ', χ''
θ., ἐπειδὴ τὸ a ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα.

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4 + \pi \chi^2 + \kappa \chi + \rho = 0$
διὰ τοῦ $\chi^2 \pm \sqrt{Z'}$, $\chi + K = 0$, θέλομεν εἶχειν ὑπόλοιπον

$$(\kappa + 2K\sqrt{Z'} - (\pi + Z')\sqrt{Z'})\chi + \rho - K\pi - KZ', + K^2 = 0$$

$$\text{τοῦ } \tauῆσι \kappa + 2K\sqrt{Z'} - (\pi + Z')\sqrt{Z'} = 0, K^2 - (\pi + Z')K + \rho = 0$$

καὶ

$$K = \frac{(\pi + Z')\sqrt{Z'} - \kappa}{2\sqrt{Z'}}$$

Λοιπὸν ὁ παράγων $\chi^2 + \sqrt{Z'}\chi + K$, τρέπεται εἰς

$$\chi^2 + \sqrt{Z'}\chi + \frac{(\pi + Z')\sqrt{Z'} - \kappa}{2\sqrt{Z'}} = 0$$

καὶ τὸ πηλίκον εἰς

$$\chi^2 - \sqrt{Z'}\chi + \pi + Z' - \frac{(\pi + Z')\sqrt{Z'} - \kappa}{2\sqrt{Z'}} = 0$$

ΤΕΛΟΣ.

Ημικατασκευασμένων διόρθωσις.

Σελ. 34, στίχ. 14, γρ. X' καὶ X'' — σελ. 35, στίχ. 20 γρ. τ^2
 $= (X' + \alpha X'')^2$ καὶ στίχ. 22 γρ., $\xi = X'^2 + X''^2$ καὶ ξ
 $= 2X'X''$ — σελ. 37, στίχ. 3, γρ. X', X'' ἀντὶ γ', γ'' , ξ εἰς
 X' ἀντὶ εἰς γ', ξ στίχ. 11 ἀντὶ $(\gamma'' \gamma''')$ γρ. $(\gamma'' + \gamma''')$ καὶ στίχ.
 17 γρ. ἀντὶ $(\gamma' \gamma'', (\gamma' \gamma''')$ ξ στίχ. 23, ἀντὶ $\gamma' \gamma''$ γρ. $\gamma' \gamma''$ καὶ
 στίχ. 24 ἀντὶ $\gamma' \gamma''$ γρ. $\gamma'' \gamma''$ — σελ. 38, στίχ. 1, ἀντὶ $\gamma'' \gamma''$
 γρ. $\gamma' \gamma''$, ξ στίχ. 3, ἀντὶ $\gamma' \gamma''$ γρ. $\gamma' \gamma''$. καὶ στίχ. 4, ἀντὶ γ''
 γ'' γρ. $\gamma' \gamma''$ καὶ στίχ. 5, ἀντὶ $\gamma' \gamma''$ γρ. $\gamma' \gamma''$. καὶ στίχ. 6 ἀντὶ
 $\gamma'' \gamma''$ γρ. $\gamma' \gamma''$ καὶ στίχ. 7, γρ. $(\gamma' \gamma'' \dots$ καὶ ἀντὶ $\gamma'' \gamma''$
 γρ. $\gamma' \gamma''$. καὶ στίχ. 9, ἀντὶ $\gamma''^2 \gamma''^2$ γρ. $\gamma''^2 \gamma''^2$, καὶ στίχ. 11 γρ.

$$+ 6\rho = \frac{4\pi^2 - 2\pi^2 + 4\rho + 6\rho}{2} = \pi^2 + 8\rho.$$

2

καὶ στίχ. 12, ἀντὶ $\gamma'^3 \gamma''^3$ γρ. $\gamma'^3 \gamma''^3$ ξ ἐν ἀρχῇ τοῦ 13. στίχου
 γράφει $\sigma_3 = \dots$ — σελ. 39, στίχ. 1, γρ.

$$\eta \sigma_3 = -\frac{1}{2} (9\gamma'^2 - 6\pi\rho + 2\pi^3 - 3\gamma''^2) + 3\pi\rho = \dots$$

— σελ. 40, στίχ. 4 γρ. $\gamma' + \gamma''$ ἀντὶ $\gamma' \gamma''$, $\gamma' + \gamma''$, καὶ στίχ.
 9 ἀντὶ διὰ τοῦ γ', γ'' γρ. διὰ τοῦ $\gamma', \gamma'', \gamma''', \gamma''$.