ΔΙΑΣΑΦΗΣΙΣ.

Εἰς τὴν ἐπίτομον θεωρίαν τὴν ὑπὸ τοῦ Κυρίου Λακροᾶ ἐκτεθεῖσαν εἰς τὸ Συμπλήρωμα τῆς Αλγέβρας του, ἐπάνω εἰς τὴν σημείωσιν τοῦ Κυρίου Λαγρανδίου, εἰς τὴν ὁποίαν ἀποδεικνύεται, πῶς διὰ τῶν λειτουργιῶν τῶν ῥιζῶν ἐξισώσεως τινὸς ἐπιλύονται αἱ ἐξισώσεις τοῦ βρου. γτου. καὶ δτου. βαθμοῦ, καὶ ὅτι ἀδύνατον διὰ ταύτης τῆς μεθόδου, εἴτε δὶ ἄλλης τινὸς ἕως τοῦ νῦν γνωςῆς, νὰ λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δτου.

Παρατηροῦντες τὸν σκοπὸν τῆς μεθόδου τοῦ Κυρίου Λαγρανδίου, διὰ τῆς ὁποίας ἐλύσαμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ β.ρου γ.του καὶ δ.του βαθμοῦ, βλέπομεν, ὅτι πρέπει κατὰ μὲν πρῶτον νὰ σχηματισθῇ λειτουργία τὶς, περιεκτικὴ ὅλων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεω, πολλαπλασιαζομένων μὲ τὰς ῥίζας τῆς μονάδος, τὰς ὁποίας συνάγομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ ἰδίου βαθμοῦ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἥτις ἔχει δύο ὅρους, ὁ δεύτερος τῶν ὁποίων εἶναι, - ι, τουτέςιν ἡ μὲν πρώτη ῥίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως μὲ τὴν πρώτην ῥίζαν τῆς μονάδος, ἡ δὲ δευτέρα μὲ τὴν δευτέραν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Εἰς τὴν Ἐξίσωσιν παραδ. χάριν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\chi^2 + \pi \chi + \kappa = o$ ἐλάβομεν τὴν λειτουργίαν $\chi' - \chi''$. ὅπου χ', χ'' εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως, καὶ ι, - ι, αἱ ῥίζαι τῆς μονάδος, τὰς ὁποίας συνάγομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\psi^2 - \iota = o$, Παρομοίως εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^3 + \pi\chi + \kappa = o$ ἐλάβομεν τὴν λειτουργίαν $\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi'''$, ὅπου χ', χ'', χ''', εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, καὶ ι, α, α^2 εἶναι αἱ τρεῖς ῥίζαι τῆς μονάδος τὰς ὁποίας συνάγομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\psi^3 - \iota = o$ Καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4 + \pi\chi^2 + \kappa\chi + \rho = o$ ἐλάβομεν τὴν λειτουργίαν $\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{\text{ιv}}$, ὅπου πάλιν χ', χ'', χ''', $\chi^{\text{ιv}}$ εἶναι αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, καὶ ι, α, α^2, α^3 εἶναι αἱ τέσσαρες ῥίζαι τῆς μονάδος, τὰς ὁποίας συνάγομεν ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\psi^4 - \iota = o$.

Λοιπὸν διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ πέμπτου βαθμοῦ τουτέστι τὴν $\chi^5 + \pi\chi^3 + \kappa\chi^2 + \rho\chi + \sigma = o$, πρέπει νὰ λάβωμεν τὰς ῥίζας ταύτης τῆς ἐξισώσεως, τὰς ὁποίας καλοῦμεν χ', χ'', χ''' $\chi^{\text{ιv}}$, χ^{v}, καὶ ἐκείνας τῆς $\psi^5 - \iota = o$, αἱ ὁποῖαι εἶναι α^1, α^2, α^3, α^4, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἀκόλουθον λειτουργίαν, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν τ'.

$$\tau' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{\text{ιv}} + \alpha^4\chi^{\text{v}}$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ αὕτη ἡ λειτουργία δὲν εἶναι συμμετρικὴ, εἰς πᾶσαν γινομένην μετάθεσιν τῶν ῥιζῶν προκύπτει διαφορετική τις τιμὴ, καὶ διὰ τοῦτο ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἐξίσωσιν βαθμοῦ τοιούτου, ὁποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων τῶν ῥιζῶν ἢ τῶν ἐκθετῶν τῶν συντελεστῶν, οἱ ὁποῖοι τὰς πολλαπλασιάζουν, τουτέστι τῶν, 0, 1, 2, 3, 4. Καὶ ἐπειδὴ ἐν γένει ἀπὸ πέντε ποσότητας προκύπτουν τόσαι μεταθέσεις ὅσας δηλοῖ ὁ ἀριθμὸς 5. 4. 3. 2. 1. = 120, ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἐκ τῆς ὁποίας ἐξήρτηνται αἱ 120 λειτουργίαι, αἵτινες σχηματίζονται διὰ τῶν διαφόρων μεταθέσεων τῶν ῥιζῶν τῆς δοθεί- ἐξισώσεως, ἢ τῶν ἐκθετῶν τῶν συντελεστῶν τῶν πολλαπλασιαζόντων ταύτας τὰς ῥίζας εἰς τὴν ἄνω εἰρημένην λειτουργίαν, θέλει εἶσθαι τοῦ 120.τοῦ βαθμοῦ, τουτέστι σχηματίζεται ἐκ τοῦ γινομένου 120: παραγόντων τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Καλοῦντες λοιπὸν τὴν ἄγνωστον ταύτης τῆς ἐξισώσεως τ, παῤῥησιάζομεν τὴν ζητουμένην ἐξίσωσιν οὕτως,

$$\tau^{120} + A\tau^{119} + B\tau^{118} \ldots + E\tau^{115} \ldots \Delta\tau^{110} \ldots + H\tau^{105} \ldots Z\tau^{100} \ldots + M\tau^{3} \ldots \Upsilon = 0.$$

Οἱ παράγοντες οἱ ὁποῖοι σχηματίζουσι ταύτην τὴν ἐξίσωσιν, εἶναι

$$(\tau - (\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{iv} + \alpha^4\chi^{v}))$$

(τ = ἡ δευτέρα λειτουργία)

— — — — — — — —

— — — — — — — —

(τ — ἡ ἑκατοςὴ εἰκοςὴ λειτουργία)

Εκάςη τῶν 120 λειτουργιῶν ἔχει τὸν δεύτερον ὅρον εἰς κάθε παράγοντα τοῦ πρώτου βαθμοῦ, διάφορον τῶν ἄλλων. Επειδὴ δὲ 120 διαφορετικαὶ λειτουργίαι σχηματίζονται ὡς ἐδείξαμεν ἄνωθεν, καὶ μεταξὺ τούτων ὑπάρχουσι μερικαὶ, συντελεςὴν ἔχουσαι εἰς τὸν πρῶτον ὅρον τὸ α^0 ὅπερ ἐςὶ, μονάδα, διὰ νὰ γνωρίσωμεν πόσαι εἶναι μεταξὺ αὐτῶν, ὅσαι ἔχουν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον συντελεςὴν τὴν μονάδα, καὶ διαφέρουν μόνον κατὰ τοὺς τῶν ἄλλων ὅρων, τουτέςιν εἰς τὴν μετάθεσιν τῶν ἐκθετῶν, συλλογιζόμεθα οὕτως. Αἱ ζητούμεναι λειτουργίαι σχηματίζονται ἐκ τῆς πρώτης, μεταθετομένων τῶν ἐκθετῶν τοῦ α ἐκτὸς τοῦ πρώτου τουτέςι, τῶν 1, 2, 3, 4. Λοιπὸν ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων τεσσάρων ποσοτήτων ἀνὰ τέσσαρας τὴν φορὰν ἐκφράζεται διὰ 4. 3. 2. 1 = 24. Εκ τούτου ἔπεται ὅτι μεταξὺ τῶν 120 λειτουργιῶν ὑπάρχουσιν 24: αἵτινες ἔχουν συντελεςὴν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον τὴν μονάδα ἢ α^0. καλοῦντες τὴν πρώτην τ', τ'', τ''' . . . $\tau^{(24)}$ θέλομεν ἔχειν.

$$\tau' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{iv} + \alpha^4\chi^{v},\ \tau'' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha^2\chi^{iv} + \alpha^4\chi^{iv},\ \tau''' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha^4\chi^{iv} + \alpha^2\chi^{v},\ \tau^{iv} \ldots,\ \tau^{(24)}$$
(τὴν 24.την)

Θέτοντες εἰς τὴν αὐτὴν ὁριζόντειον γραμμὴν τὰς εἰκοσιτέσσαρας ταύτας ἐξισώσεις, καὶ μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζοντες ἑκάστην τούτων διὰ τοῦ α, α^2, α^3, α^4, θέλομεν σχηματίσειν μὲ τὴν πρώτην ὁριζοντείους γραμμὰς πέντε, ἑκάστην σύνθετον ἐξ εἰκοσιτεσσάρων ἐξισώσεων, οὕτως, ὥστε ὁ ἀριθμὸς ὅλων τῶν ἐξισώσεων, εἶναι 120. Ἐπειδὴ δὲ τὰ δεύτερα μέλη τῶν εἰκοσιτεσσάρων ἐξισώσεων τῆς πρώτης ὁριζοντείου γραμμῆς σχηματίζονται ἀπὸ τὰς εἰκοσιτέσσαρας προειρημένας ἀνίσους λειτουργίας τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἄρα καὶ τὰ ἐξ αὐτῶν γινόμενα διὰ τοῦ α, α^2, α^3, α^4 εἶναι ἄνισα, τουτέστι τὰ δεύτερα μέλη τῶν προειρημένων 120 ἐξισώσεων, εἶναι 120 ἄνισοι λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Λοιπὸν ἡ ἐκ τοῦ γινομένου τῶν εἰρημένων ἐξισώσεων σχηματιζομένη ἐξίσωσις εἶναι τοῦ 120.$^{\text{του}}$ βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι παῤῥησιάζουν τὰς τιμὰς τῶν 120 λειτουργιῶν, καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἶναι τὸ αὐτὸ, ὁποιανδήποτε εἶν' ἡ τάξις των, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἀνὰ πέντε τοὺς παράγοντας τουτέστι τοὺς ἐκ τῆς αὐτῆς λειτουργίας πολλαπλασιασμένης διὰ α^0, α^1, α^2, α^3, α^4, σχηματισθέντας, καὶ ἐντεῦθεν τὸ γινόμενον τῶν 120 παραγόντων τρέπεται εἰς ἓν ἄλλο εἰκοσιτεσσάρων μόνον, ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος συντίθεται ἐκ τοῦ γινομένου πέντε ἄλλων παραγόντων τουτέστι.

$$(\tau-\tau')(\tau-\alpha\,\tau')(\tau-\alpha^2\,\tau')(\tau-\alpha^3\,\tau')(\tau-\alpha^4\,\tau')$$
$$(\tau-\tau'')(\tau-\alpha\,\tau'')(\tau-\alpha^2\,\tau'')(\tau-\alpha^3\,\tau'')(\tau-\alpha^4\,\tau'')$$
— — — — — — — — — — — — — —
$$(\tau-\tau^{(24)})(\tau-\alpha\,\tau^{(24)})\,.\,.\,.\,.\,.\,(\tau-\alpha^4\,\tau^{(24)})=0$$ καὶ ἐπειδὴ $(\tau-\tau')(\tau-\alpha\,\tau')\,.\,.\,.\,(\tau-\alpha^4\,\tau')=\tau^5-\tau'^5$ καὶ παρομοίως ἐκ τῶν δευτέρων προκύπτει $\tau^5-\tau''^5$, κτ. διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον τῶν 120 παραγόντων θέλει ἐκφρασθῆν τοιουτοτρόπως.

$$(\tau^5-\tau'^5)(\tau^5-\tau''^5)(\tau^5-\tau'''^5)\,.\,.\,.\,(\tau^5-\tau^{(24)5})=0$$

καλοῦντες δὲ $\theta = \tau^5$, ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον ἐξίσωσιν $(\theta - \tau'^5)(\theta - \tau''^5) \ldots (\theta - \tau^{(24)}5) = 0$, ἢ $\theta^{24} + A\theta^{23} + B\theta^{22} \ldots \rho\theta + \upsilon = 0$ Τουτέστιν ἡ ἐξίσωσις τοῦ 120: βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι παῤῥησιάζουσι τὰς τιμὰς τῶν 120 λειτουργιῶν, αἵτινες σχηματίζονται ἀπὸ τὰς μεταθέσεις τῶν πέντε ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐτράπη εἰς ἐξίσωσιν 24του βαθμοῦ, εἰς θ. αἱ δὲ ῥίζαι αὐτῆς εἶναι αἱ εἰκοσιτέσσαρες λειτουργίαι εἰς τὰς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος ἔχει διὰ συντελεστὴν α^0, τουτέστι τὴν μονάδα. ὅμως ἑκάστη τῶν λειτουργιῶν τούτων ὑψόνεται εἰς τὴν πέμπτην δύναμιν, ἐπειδὴ θέλ' εἶν' ἴσον μὲ τ^5, καὶ τ^5 ἴσον μὲ τ'^5, ἤτοι $(\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{IV} + \alpha^4\chi^{V})^5$ θεωροῦντες τώρα πόσαι εἶναι μεταξὺ τούτων τῶν εἰκοσιτεσσάρων λειτουργιῶν ἐκεῖναι, εἰς τὰς ὁποίας ὁ δεύτερος ὅρος ἔχει διὰ συντελεστὴν τὸ α, καὶ μόνον εἰς τὴν μετάθεσιν τῶν ἄλλων ἐκθετῶν διαφέρει τουτέστιν εἰς 2, 3, 4, εὑρίσκομεν $3.\ 2.\ 1 = 6$. δηλαδὴ

$(\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{IV} + \alpha^4\chi^{V})^5$, $(\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha^2\chi^{IV} + \alpha^4\chi^{V})^5$ — — — — — —

γράφοντες εἰς ὁριζόντειον γραμμὴν ταύτας τὰς ἓξ λειτουργίας καὶ ἀντεισάγοντες εἰς ἑκάστην τούτων ἀντὶ τοῦ α, τὸ α^2, α^3, α^4, σχηματίζομεν ἄλλας τρεῖς ὁριζοντείους γραμμὰς, ἑκάστην σύνθετον ἀπὸ ἓξ λειτουργίας, τουτέστιν ὁμοῦ αἱ τέσσαρες ὁριζόντειοι γραμμαὶ περιέχουν 24 λειτουργίας, καὶ ἔχουν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον συντελεστὴν τὸ α^0 ἤτοι τὴν μονάδα, δηλαδὴ εἶναι αἱ εἰκοσιτέσσαρες τοῦ θ τιμαὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ εἰκοστοῦ τετάρτου βαθμοῦ. Αὕτη δὲ ἡ ἐξίσωσις σχηματίζεται ὑπὸ τοῦ γινομένου τῶν εἰκοσιτεσσάρων παραγόντων τοῦ πρώτου βαθμοῦ, καὶ ὁ πρῶτος ὅρος ἑκάστου σχηματίζεται ἐκ τοῦ θ. ὁ δὲ δεύτερος εἶναι μία τῶν 24ρων: ἄνω εἰρημένων λειτουργιῶν τουτέστιν, $(\alpha^0\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{IV} + \alpha^4\chi^{V})^5$ καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ, ὅπως καὶ ἂν ταχθῶσιν οὗτοι, σχηματίζομεν λοιπὸν ἀπὸ τὰς τέσσαρας καὶ εἴκοσιν ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τὰς ἄνω εἰρημένας 4 ὁριζοντείους γραμμὰς, τοὺς 24: παράγοντας, ὡς ἐδῶ ἀκολουθεῖ.

$$\theta-(\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{\text{IV}} + \alpha^4\chi^{\text{V}})^5$$
$$\theta-(\chi' + \alpha^2\chi'' + \alpha^4\chi''' + \alpha\chi^{\text{IV}} + \alpha^3\chi^{\text{V}})^5$$
$$\theta-(\chi' + \alpha^3\chi'' + \alpha\chi''' + \alpha^4\chi^{\text{IV}} + \alpha^2\chi^{\text{V}})^5$$
$$\theta-(\chi' + \alpha^4\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha^2\chi^{\text{IV}} + \alpha\chi^{\text{V}})^5$$

$$\theta-(\chi + \alpha\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha\chi^{\text{IV}} + \alpha^4\chi^{\text{V}})$$
$$\theta-(\chi' + \alpha^2\chi'' + \alpha^3\chi''' + \alpha^4\chi^{\text{IV}} + \alpha^3\chi^{\text{V}})$$
$$\theta-(\chi' + \alpha^2\chi'' + \alpha\chi''' + \alpha^4\chi^{\text{IV}} + \alpha^2\chi^{\text{V}})$$
$$\theta-(\chi' + \alpha^4\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{\text{IV}} + \alpha\chi^{\text{V}})$$

$$\theta-(..)^5,\ \theta-(..)^5,\ \theta-(..)^5,\ \theta-(..)^5$$
$$\theta-(..)^5,\ \theta-(..)^5,\ \theta-(..)^5,\ \theta-(--)^5,$$
$$\theta-(..)^5,\ \theta-(..)^5,\ \theta-(--)^5,\ \theta-(--)^5,$$
$$\theta-(--)^5,\ \theta-(--)^5,\ \theta-(--)^5,\ \theta-(--)^5,$$

Τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον θέλει μᾶς δώσειν τὴν ἄνω εἰρημένην ἐξίσωσιν τοῦ 24 βαθμοῦ εἰς θ, καὶ ἐπειδὴ ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι τῶν παραγόντων ἡ τάξις, εἰς τὸ τοιοῦτο γινόμενον, θέλομεν ἔχειν πάντοτε τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν, πολλαπλασιάζομεν ἀνὰ τέσσαρας τοὺς παράγοντας (διότι τόσοι ἐσχηματίσθησαν ἐκ τοῦ ἰδίου παράγοντος) ἀντεισάγοντες εἰς αὐτοὺς ἀντὶ τοῦ α, τὸ α^2, α^3, α^4, (καλοῦμεν δὲ τὴν λειτουργίαν ἥτις σχηματίζει τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πρώτου παράγοντος εἰς τὴν πρώτην ὁριζόντειον γραμμὴν θ', καὶ τὰς ἐξ αὐτῆς συναγομένας διὰ τῆς ἀντεισαγωγῆς ἀντὶ τοῦ α, τοῦ α^2, α^3, α^4, θ'', θ''', θ^{IV}). Οὕτως ἡ ἐξίσωσις τοῦ εἰκοσοῦ τετάρτου βαθμοῦ θέλει εἶσθαι τὸ γινόμενον ἐξ παραγόντων, ἕκαςος τῶν ὁποίων εἶναι σύνθετος ἀπὸ τέσσαρας τοῦ πρώτου βαθμοῦ παράγοντας, δηλαδὴ ἀπὸ ἕξ τοῦ δ.ρω: ὥςε ὁμὲν πρῶτος τούτων εἶναι $(\theta-\theta')(\theta-\theta'')(\theta-\theta'''(\theta-\theta^{IV})$, καὶ ἐπειδὴ τὸ θ', τὸ ὁποῖον παῤῥησιάζει τὴν πρώτην τῶν ἕξ λειτουργιῶν αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τῶν τεσσάρων ὁριζοντείων γραμμῶν δύναται νὰ παῤῥησιάσῃ τὴν δευτέραν καὶ τὴν τρίτην, καὶ οὕτως ἐφεξῆς ἕως εἰς τὴν ἕκτην, διὰ τοῦτο τὸ θ' εἶναι δεκτικὸν ἕξ τιμῶν. παρομοίως καὶ τὸ θ'', θ''', θ^{IV}, ὥςε οἱ συντελεςαὶ τῆς ἐξισώσεως τοῦ τετάρτου βαθμοῦ ἤτοι τῆς $(\theta-\theta')(\theta-\theta'')(\theta-\theta''')(\theta-\theta^{IV})=o$ εἶναι δεκτικοὶ ἕξ τιμῶν. ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ τοιοῦτοι συντελεςαὶ εἶναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν θ', θ'', θ''', θ^{IV} ὡς ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, διὰ τοῦτο ἐξήρτηνται ἀπὸ ἐξίσωσιν τοῦ ἕκτου βαθμοῦ. Καλοῦντες λοιπὸν τὰς ἕξ τιμὰς τοῦ συντελεςοῦ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς ἐξισώσεως

$$(\theta-\theta')\ (\theta-\theta'')\ (\theta-\theta''')\ (\theta-\theta^{IV})=o$$

T', T'', T''', T^{IV}, T^{V}, T^{VI}, καὶ T τὴν ἄγνωςον τῆς ἐξισώσεως ἐξ ἧς προσδιορίζονται αὗται αἱ ἕξ τιμαὶ, ἐκφράζομεν τὴν τοιαύτην ἐξίσωσιν οὕτως

$$(T-T')(T-T'')(T-T''')(T-T^{IV})(T-T^{V})(T-T^{IV})=o$$

Λοιπὸν πρέπει νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν τοῦ ἕκτου βαθμοῦ, διὰ νὰ γνωρίσωμεν τοὺς συντελεςὰς μιᾶς ἄλλης ἐξισώσεως τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, καὶ τότε προσδιορίζοντες τὰς τέσσαρας τιμὰς τοῦ θ τοῦ τέςι θ', θ'', θ''' καὶ θ^{IV} θέλομεν εὑρεῖν τὰς πέντε ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως τοῦ πέμπτου βαθμοῦ κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον. Επειδὴ ὑποθέτομεν θ', θ'', θ''', θ^{IV} γνωςὰ, ἔχομεν

$$\theta'=(\chi'+\alpha\chi''+\alpha^2\chi'''+\alpha^3\chi^{IV}+\alpha^4\chi^{V})^5$$

$$\theta'' = (\chi' + \alpha^2 \chi'' + \alpha^4 \chi''' + \alpha\chi^{IV} + \alpha^3 \chi^{V})^5$$
$$\theta''' = (\chi' + \alpha^3 \chi'' + \alpha\chi''' + \alpha^4 \chi^{IV} + \alpha^2 \chi^{V})^5$$
$$\theta^{IV} = (\chi' + \alpha^4 \chi'' + \alpha^3 \chi''' + \alpha^2 \chi^{IV} + \alpha\chi^{V})^5$$

ἢ $\sqrt[5]{\theta'} = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2 \chi''' + \alpha^3 \chi^{IV} + \alpha^4 \chi^{V}$

ἢ $\sqrt[5]{\theta''} = \chi' + \alpha^2 \chi'' + \alpha^4 \chi''' + \alpha\chi^{IV} + \alpha^3 \chi^{V}$

ἢ $\sqrt[5]{\theta'''} = \chi' + \alpha^3 \chi'' + \alpha\chi'' + \alpha^4 \chi^{IV} + \alpha^2 \chi^{V}$

ἢ $\sqrt[5]{\theta^{IV}} = \chi' + \alpha^4 \chi'' + \alpha^3 \chi''' + \alpha^2 \chi^{IV} + \alpha\chi^{V}$

Καὶ ἐπειδὴ ὁ συντελεςὴς τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς γενικῆς ἐξισώσεως τοῦ πέμπτου βαθμοῦ τὸν ὁποῖον καλοῦμεν Α, ἐκφράζει τὸ ἄθροισμα τῶν ῥιζῶν, διὰ τοῦτο ἔχομεν

$$A = \chi' + \chi'' + \chi''' + \chi^{IV} + \chi^{V}$$

προσθέτοντες ταύτας τὰς ἐξισώσεις ἔχομεν $\sqrt[5]{\theta'} + \sqrt{\theta'''} + \sqrt[5]{\theta^{IV}} + A = 5\chi'$. παρομοίως πολλαπλασιάζοντες τὸ $\sqrt[5]{\theta''}$ $\sqrt{\theta''}$, $\sqrt[5]{\theta'''}$, $\sqrt[5]{\theta^{IV}}$ διὰ τὴν πρώτην δύναμιν ἢ τὴν δευτέραν ἢ τὴν τρίτην, ἢ τὴν τετάρτην τῶν ῥιζῶν α, α^2, α^3, α^4, θέλομεν προσδιορίσειν τὸ $5\chi^{V}$, $5\chi^{IV}$, $5\chi'''$, $5\chi''$. Λοιπὸν διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς πέντε ῥίζας τῆς ἐξισώσεως τοῦ πέμπτου βαθμοῦ, εἶναι ἀνάγκη, νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν ἀνωτέρου βαθμοῦ τῆς δοθείσης, ὅπερ ἐςὶν ἄτοπον.

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις εἶναι βαθμοῦ μ, τὸ δὲ μ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος, καλοῦντες τὰς ῥίζας ταύτης τῆς ἐξισώσεως χ', χ'', χ''', χ^{IV},..$\chi^{(\mu)}$

καὶ ἐκείνας τῆς ἐξισώσεως $\psi^{\mu} - 1 = 0, 1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots \alpha^{\mu-1}$ σχηματίζομεν εὐθὺς τὴν λειτουργίαν ὡς ἐκείνην τῆς ἐξισώσεως τοῦ πέμπτου βαθμοῦ τουτέςι $\tau' = \alpha^0 \chi' + \alpha' \chi'' + \alpha^2 \chi''' + \alpha^3 \chi'''' + \alpha^4 \chi^{\text{IV}} + \ldots \alpha^{\mu-1} \chi^{(\mu)}$ καὶ ἐπειδὴ εἰς ταύτην τὴν λειτουργίαν οἱ ἐκθέται τῶν συντελεςῶν τῶν ῥιζῶν οἱ ὁποῖοι τὴν συνιςῶσιν, εἶναι $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \mu-1$, τουτέςι μ ἐκθέται, μεταθέτοντές τους σχηματίζομεν $\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$ λειτουργίας μεταξὺ τῶν μ ῥιζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Λοιπὸν ἡ λειτουργία $\chi' + \alpha \chi'' + \alpha^2 \chi''' + \alpha^3 \chi^{\text{IV}} \ldots + \alpha^{\mu-1} \chi^{\mu}$ εἶναι δεκτικὴ $\mu(\mu-1)(\mu-2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$, τιμῶν, καὶ διὰ τοῦτο ἐξήρτηται ἀπὸ μίας ἐξίσωσιν βαθμοῦ $\mu(\mu-1)(\mu-2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$ καὶ καλοῦντες τὴν ἄγνωςον τῆς τοιαύτης ἐξισώσεως τ' δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν εἰρημένην ἐξίσωσιν ὡς τὸ γινόμενον $\mu(\mu-1)(\mu-2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$ παραγόντων τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἕκαςος τῶν ὁποίων ἔχει διὰ πρῶτον ὅρον τὸ τ', καὶ διὰ δεύτερον ὅρον, περιέχων ὁ μὲν πρῶτος παράγων τὴν πρώτην ἀπὸ τὰς $\mu(\mu-1)(\mu-2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$ λειτουργίας, ὁ δὲ δεύτερος παράγων τὴν δευτέραν καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Αἱ $\mu(\mu-1)(\mu-2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$ διάφοροι λειτουργίαι αἱ μὲ τὴν μετάθεσιν τῶν μ ἐκθετῶν, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, σχηματιζόμεναι, καὶ κατ' ἄλλον τρόπον σχηματίζονται. Θεωροῦμεν πόσαι εἶναι, ὅσαι συντελεςὴν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον ἔχουν τὸ α^0 ἢ τὴν μονάδα, καὶ διαφέρουν μόνον ἀπὸ τοὺς ἄλλους συντελεςάς, μεταθέτομεν δηλαδὴ εἰς τὴν πρώτην λειτουργίαν μόνον τοὺς ἐκθέτας $1, 2, 3, 4, \ldots \mu-1$, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτουν $(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$

μεταθέσεις, καὶ ἑπομένως (μ-1) (μ-2) ··· 4. 3. 2. 1 διαφόρους λειτουργίας. Θέτοντες λοιπὸν ταύτας κατ' ἐξακολούθησιν εἰς μίαν ὁριζόντειον γραμμὴν, καὶ ἑκάστην μὲ α^0, α^1, $\alpha^2 \ldots \alpha^{\mu-1}$ πολλαπλασιάζοντες, θέλομεν ἔχειν

$$\tau' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2 \chi''' + \ldots \alpha^{\mu-1} \chi^{(\mu)},$$

$$\tau'' = \chi' + \alpha\chi'' + \alpha^3 \chi''' + \alpha^2 \chi^{IV} \ldots + \alpha^{\mu-1} \chi^{(\mu)}$$

— — — — — — —

$$\alpha\tau' = \alpha\chi' + \alpha^2 \chi'' + \alpha^3 \chi''' - - - - + \chi^{(\mu)}$$

— — — — — — — — — —

— — — — — — — —

$$\alpha^{\mu-1} \tau' = \alpha^{\mu-1} \chi' + \chi'' + \alpha\chi''' + \alpha^{2\mu-1} \chi^{(\mu)}$$

καὶ οὕτως ἐφεξῆς, τουτέστι διαφόρους λειτουργίας μ διὰ κάθε μίαν ἀπὸ τὰς (μ-1) (μ-2) ···· 4. 3. 2. 1, λειτουργίας, δηλαδὴ τόσας διαφορετικὰς λειτουργίας ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς μ (μ-1) (μ-2) (μ-3) .. 4. 3. 2. 1. ὥστε ἐσχηματίσαμεν τὰς ἰδίας λειτουργίας ὡς ἄνωθεν, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἄνω εἰρημένης ἐξισώσεως, βαθμοῦ μ (μ-1) (μ-2) ···· 4. 3. 2. 1. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁποιανδήποτε τάξιν βαςάζομεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν παραγόντων, οἵτινες σχηματίζουν τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ μ (μ-1) (μ-2) ···· 4. 3. 2. 1, τὸ γινόμενον, τουτέστιν ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἡ ἰδία, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν πρῶτον ἀνὰ μ τοὺς παράγοντας τοῦ πρώτου βαθμοῦ, τοὺς σχηματισθέντας ὑπὸ τινος τῶν (μ-1) (μ-2) ···· 4. 3. 2. 1. λειτουργιῶν αἵ τινες ἔχουν συντελεστὴν τοῦ πρώτου ὅρου τὸ α^0, καὶ οὕτως ἡ ἐξίσωσις θέλει εἶσθαι τὸ γινόμενον (μ-1) (μ-2) ···· 4. 3. 2. 1, παραγόντων, τῶν ὁποίων ὁ καθεὶς εἶναι σύνθετος ἀπὸ μ παράγοντας πρώτου βαθμοῦ, δηλαδὴ ἕκαστος τῶν συνθέτων παραγόντων ἐστὶ βαθμοῦ μ. Λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις ἐκφράζεται οὕτως

$$(\tau - \tau')(\tau - \alpha\tau')(\tau - \alpha^2\tau') \ldots$$

$$(\tau - \alpha^{\mu-1}\tau') \times (\tau - \tau'')\,(\tau - \alpha\tau'') \dots$$

$$\dots (\tau - \alpha^{\mu-1}\tau'') \times \dots\dots = 0$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἕκαςος παράγων τοῦ μ βαθμοῦ ἄγεται εἰς $\tau^{\mu} - \tau'^{\mu}$, $\tau^{\mu} - \tau''^{\mu}$ καὶ οὕτως, ἐφεξῆς, διὰ τοῦτο ἡ ἐξίσωσις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ οὕτως

$(\tau^{\mu} - \tau'^{\mu}) \times (\tau^{\mu} - \tau''^{\mu}) \times (\tau^{\mu} - \tau'''^{\mu}) \times \dots = 0$ καλοῦντες $\tau^{\mu} = \theta$, ἔχομεν $(\theta - \tau'^{\mu}) \times (\theta - \tau''^{\mu}) \times \dots 0$

καὶ ἐπειδὴ τὸ θ εἶναι εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, οἱ δὲ παράγοντες τῆς ἐξισώσεως εἰς θ εἶναι

$$\mu\,(\mu-1)\,(\mu-2) \dots 4.\ 3.\ 2.\ 1$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις βαθμοῦ $\mu\,(\mu-1)\,(\mu-2) \dots 4.\ 3.\ 2.\ 1$, εἰς τ, ἐτράπη εἰς μίαν ἄλλην, ἔχουσαν ὡς ἄγνωςον τὴν θ βαθμοῦ $(\mu-1)\,(\mu-2)\,(\mu-3) \dots 4.\ 3.\ 2.\ 1$ καὶ ἐπειδὴ $\theta = \tau^{\mu}$, καὶ $\tau^{\mu} = \tau'^{\mu}$, καὶ $\tau'^{\mu} = (\chi' + \alpha\chi' \dots + \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)})^{\mu}$ ἄρα μία ῥίζα τῆς ἐξισώσεως εἰς θ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν θ', παῤῥησιάζει τὴν $(\chi' + \alpha\chi'' \dots + \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)})^{\mu}$, τουτέςι

$$\theta' = (\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^{2}\chi''' \dots + \alpha^{\mu-1}\chi^{(\mu)})^{\mu}$$

Ἐὰν τώρα θεωρήσωμεν εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τῶν ἄνω εἰρημένων μ ὁριζοντείων γραμμῶν μεταξὺ τῶν $(\mu-1)\,(\mu-2)\,(\mu-3) \dots 4.\ 3.\ 2.\ 1$, πόσαι λειτουργίαι εὑρίσκονται, εἰς τὰς ὁποίας ὁ συντελεςὴς τοῦ πρώτου ὅρου εἶναι τὸ α^{0}, καὶ ἐκεῖνος τοῦ δευτέρου ὅρου εἶναι τὸ α, καὶ διαφέρουν μόνον εἰς τὰς μεταθέσεις τῶν ἄλλων ἐκθετῶν τουτέςιν 2, 3, 4, . . μ-1, θέλομεν εὑρεῖν, τόσας ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς $(\mu-2)\,(\mu-3)\,(\mu-4) \dots 4.\ 3.\ 2.\ 1$ ἐὰν γράψωμεν ταύτας κατ' ἐξακολούθησιν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ὁριζόντειον γραμμὴν μετὰ ταῦτα ἀντεισάζωμεν ἐν ἑκάςῃ τούτων ἀντὶ τοῦ α τὸ α^2, α^3, α^4 ... $\alpha^{\mu-1}$, θέλομεν σχηματίσειν ἀποῦ μὲ τὴν πρώτην ὁριζόντειον γραμμὴν τόσας ὁριζοντείους γραμμὰς, ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς $\mu-1$, τῶν ὁποίων ἑκάςη εἶναι σύνθετος ἀπὸ $(\mu-2)(\mu-3)\ldots 4.3.2.1$, λειτουργίας διαφόρους ὥςε ὅλαι αὗται αἱ λειτουργίαι θέλουν εἶναι τόσαι, ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς $(\mu-1)(\mu-2)\ldots 4.3.2.1$. δηλαδὴ εἶναι αἱ $(\mu-1)(\mu-2)\ldots 4.3.2.1$ ῥίζαι τῆς ἄνω εἰρημένης ἐξισώσεως βαθμοῦ $(\mu-1)\ldots 4.3.2.1$. ὡς ἄγνωςον ἐχούσης τὴν θ· ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων τῶν σχηματιζόντων τὴν εἰς θ ἐξίσωσιν εἶναι πάντοτε τὸ αὐτὸ, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν ἦναι εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἡ τάξις τῶν παραγόντων, διὰ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τοὺς, εἰρημένους παραγόντας ἀνὰ $\mu-1$ τὴν φορὰν τουτέςιν ἐκείνους, οἵτινες ἐσχηματίσθησαν ἀντεισαγομένων ἐν ἑκάςῃ λειτουργίᾳ τῆς πρώτης γραμμῆς τῶν ὁριζοντείων $\mu-1$ γραμμῶν, ἀντὶ τοῦ α, τῶν α^2, α^3, α^4 ... $\alpha^{\mu-1}$, ὥςε καλοῦντες θ' τὴν πρώτην λειτουργίαν τῆς εἰρημένης πρώτης ὁριζοντίου γραμμῆς, καὶ θ'', θ''', θ^{IV}, ... $\theta^{(\mu-1)}$ τὰς λειτουργίας ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἐξ αὐτῆς ἐσχηματίσθησαν ἀντεισαγομένων ἀντὶ τοῦ α τῶν α^2, α^3, α^4 ... $\alpha^{\mu-1}$, ἡ ἐξίσωσις βαθμοῦ $(\mu-1)(\mu-2)\ldots 4.3.2.1$ ἥτις ἔχει τὴν ἄγνωςον θ, ἐκφράζεται διὰ τοῦ γινομένου τῶν

$$(\mu-2)(\mu-3)\ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$$

συνθέτων παραγόντων, ἑκάςου ὄντος εἰς βαθμὸν $\mu-1$ δηλαδὴ

$$(\theta-\theta')(\theta-\theta'')\ldots(\theta-\theta^{(\mu-1)})(\theta-)\ldots=0$$

Καὶ ἐπειδὴ θ' δύναται νὰ παῤῥησιάσῃ τόσον τὴν πρώτην λειτουργίαν τῆς πρώτης τῶν ἄνω εἰρημένων ὁριζοντείων γραμμῶν, ὅσον τὴν δευτέραν, ἢ τὴν τρίτην καὶ οὕτως ἐφεξῆς, (τὸ αὐτὸ δὲ ἀκολουθεῖ καὶ θ'', ἐπάνω εἰς τὴν δευτέραν γραμμὴν τὴν ὁριζόντειον, καὶ οὕτως διὰ θ''', θ^{IV} ... $\theta^{(\mu-1)}$ διὰ τὰς ἄλλας ὁριζοντείους γραμμάς. Διὰ τοῦτο ἕπεται ὅτι θ', θ'', θ'''. . . $\theta^{(\mu-1)}$, εἶναι ἕκαςον δεκτικὸν τόσων τιμῶν ὅσας ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς $(\mu-2)\ (\mu-3) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$, ὅςτις παῤῥησιάζει τὰς λειτουργίας τὰς ὁποίας περιέχει ἑκάςη ὁριζόντειος γραμμή. καὶ ἐπειδὴ τῶν θ', θ''. . . $\theta^{(\mu-1)}$ αἱ συμμετρικαὶ λειτουργίαι παῤῥησιάζουν τοὺς συντελεςὰς τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ $\mu-1$ εἰς θ, οἱ τοιοῦτοι συντελεςαὶ εἶναι δεκτικοὶ τιμῶν

$$(\mu-2)\ (\mu-3) \ldots\ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$$

δηλαδὴ ἐξήρτηνται ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ

$$(\mu-2)\ (\mu-3) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$$

Καλοῦντες T', T'', καὶ ἐφεξῆς τὰς τιμὰς τοῦ συντελεςοῦ τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ $\mu-1$ εἰς θ καὶ τὴν ἄγνωςον τῆς ἄνω εἰρημένης ἐξισώσεις T, θέλομεν ἔχειν τὴν ἐξίσωσιν

$$(T-T')\ (T-T'')\ (T-T''') \times \ldots\ldots = 0$$

βαθμοῦ

$$(\mu-2)\ (\mu-3) \ldots\ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1.$$

Λοιπὸν διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ μ, πρέπει πρῶτον νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ $(\mu-2)\ (\mu-3) \ldots\ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$ καὶ καὶ μετὰ ταῦτα μίαν ἐξίσωσιν βαθμοῦ $\mu-1$.

Πρέπει τώρα νὰ ἐξετάσωμεν, τίνι τρόπῳ σχηματίζονται οἱ συντελεςαὶ τῶν ἐξισώσεων, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν πρώτη βαθμοῦ $(\mu-1)\ (\mu-2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$ ἔχει ὡς ἄγνωςον τὴν θ, ἡ δὲ δευτέρα βαθμοῦ $(\mu\ 2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$, ἔχει ὡς ἄγνωςον τὴν T. ἐπειδὴ εἰς τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ $\mu\ (\mu-1)\ (\mu-2) \ldots 4.\ 3.\ 2.\ 1$, ἥτις εἶχε διὰ ἄγνωςον τ, ὁ ἐκθέτης ταύτης τῆς ἀγνώςου εἰς ὅλους τοὺς ὅρους ἐξισώσεως ἦτοι πολλαπλάσιος τοῦ μ καὶ ἀντεισάξαντες ἀντὶ τοῦ τ^{μ} τὴν θ ηὕραμεν τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ (μ-1) (μ-2) (μ-3) . . . 4. 3. 2. Ὅθεν καὶ οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισσεως εἰς τ, εἶν' οἱ ἴδιοι συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως εἰς θ, ἐπειδὴ ἐκεῖνοι τῆς ἐξισώσεως εἰς τ σχηματίζονται ἀπὸ συμμετρικὰς λειτουργίας τῶν ῥιζῶν ταύτης τῆς ἐξισώσεως, τουτέστιν ἀπὸ τὰς μ (μ-1) (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1 λειτουργίας $\chi' + \alpha\chi'' . . + \alpha^{\mu-1}\, \chi^{(\mu)}$ τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης, αἵτινες ἄγονται εἰς (μ-1) (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1 λειτουργίας $(\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + . . . \alpha^{\mu-1}\, \chi^{(\mu)})^{\mu}$ καὶ εἶν' αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ (μ-1) (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1, ὡς ἄγνωστον ἐχούσης τὴν θ, τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ εἶναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν της, τουτέστι τῶν σχηματιζομένων μὴ συμμετρικῶν λειτουργιῶν τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης, καὶ ἐπειδὴ εἰς κάθε συντελεστὴν τῆς ἐξισώσεως εἰς θ εὑρίσκονται ὅλαι αἱ μὴ συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης, διὰ τοῦτο ἕκαστος συντελεστὴς τῆς ἐξισώσεως εἰς θ σύγκειται ἀπὸ συμμετρικὰς λειτουργίας τῶν ῥιζῶν τῆς δοθείσης, καὶ ἐκφράζεται διὰ μέσου τῶν συντελεστῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Εἰς δὲ τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ (μ-2) (μ-3) (μ-4) . . . 4. 3. 2. 1 εἰς Τ, οἱ συντελεσταὶ εἶναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν ταύτης τῆς ἐξισώσεως καὶ ἐπειδὴ ἡ ἄγνωστος Τ εἶναι δεκτικὴ τόσων τιμῶν, ὅσων εἶναι ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ (μ-1) εἰς θ, αἱ ὁποῖαι τιμαὶ εἶναι ὡς ἄνω εἴπομεν (μ-2) (μ-3) (μ-4) . . 4. 3. 2. 1, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν πρώτη σχηματίζεται ἐκ τῶν πρώτων τιμῶν τοῦ $\theta' + \theta'' + \theta''' + . . \theta^{(\mu-1)}$ ἡ δὲ δευτέρα ἐκ τῶν δευτέρων τιμῶν, $\theta' + \theta'' + . . . \theta^{\mu-1}$ τιμῶν, καὶ οὕτως ἐφεξῆς, δηλαδὴ ἀπὸ μ-1 ῥίζας τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ (μ-1) (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1, ἥτις ἔχει ὡς ἄγνωστος τὴν θ, λοιπὸν οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως εἰς Τ εἶναι συμμετρικαὶ λειτουργίαι τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως εἰς θ, καὶ διὰ τοῦτο ἐκφράζονται διὰ μέσου τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ

(μ-1) (μ-2) 4. 3. 2. 1

εἰς θ. οἱ δὲ συντελεσταὶ ταύτης ὡς ἀνωτέρω ἀπεδείξαμεν ἐκφράζονται διὰ μέσου τῶν συντελεστῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἄρα οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως βαθμοῦ (μ-2) (μ-3) (μ 4) . . . 4. 3. 2. 1 εἰς Υ ἐκφράζονται διὰ μέσου τῶν συντελεστῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἀφ' οὗ λοιπὸν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ (μ-2) (μ-3) . . . . 4. 3. 2. 1 εἰς Υ καὶ προσδιορίσωμεν μίαν ῥίζαν παραδείγματος χάριν τὴν Κ, τότε ἡ ἐξίσωσις βαθμοῦ μ-1 εἰς θ ἔχει τὸν συντελεστὴν τοῦ δευτέρου ὅρου γνωστόν, τὴν ὁποίαν ἐκφράζομεν οὕτως

$$\theta^{\mu-1} + K\theta^{\mu-2} + P\theta^{\mu-3} \dots\dots + \upsilon = 0.$$

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς ἄλλους ταύτης συντελεστάς, τουτέστι P . . . υ, διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν βαθμοῦ (μ-1) (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1 εἰς θ, διὰ τῆς $\theta^{\mu-1} + K\theta^{\mu-2} + P\theta^{\mu-3} \dots + \upsilon = 0$ καὶ θέλομεν εὕρειν ὡς εἰς τὰ στοιχεῖα τόσας μερικὰς ἐξισώσεις ὅσοι εἰσὶν οἱ ἀπροσδιόριστοι συντελεσταὶ P . . . υ, τοὺς ὁποίους θέλομεν προσδιορίσειν.

Μ' ὅλον ὅτι εἶναι δυνατὸν νὰ εὕρωμεν τοὺς συντελεστὰς ὅλων τῶν ἄνω εἰρημένων ἐξισώσεων, ἡ πρᾶξις εἶναι τόσον ἐπίπονος, ὥστε σχεδὸν τὸ ζήτημα κατασταίνεται ἀδύνατον καὶ ἀγκαλὰ ὁ περίφημος Λαγράγγιος ἔδωκεν ἓν νέον τέχνευμα διὰ νὰ προσδιορίζωνται, δὲν ἠθέλησε νὰ τοὺς προσδιορίσῃ οὔτε εἰς τὰς ἐκ τοῦ πέμπτου βαθμοῦ συναγομένας. Ας ἐξηγήσωμεν λοιπὸν τὸ εἰρημένον τέχνευμα, καὶ ἂς δώσωμεν ὅσον εἶναι δυνατὸν σαφήνειαν καὶ εἰς αὐτό.

Ἐπειδὴ $\theta' = (\chi' + \alpha\chi'' + \alpha^2\chi''' + \alpha^3\chi^{iv} + \dots\dots \alpha^{(\mu-1)}\chi^{(\mu)})^{\mu}$ ἐκτυλίσσοντες τὸ πολυώνυμον τοῦτο, καὶ καλοῦντες 1, $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \dots\dots \alpha^{\mu-1}$ τὰς ῥίζας τῆς $\psi^{\mu-1} - 1 = 0$ ἐξισώσεως, προσέτι τοὺς τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ α συντελεστὰς, ξ, ξ', ξ'' . . . .

$\overset{(\mu-1)}{\xi}$, θέλομεν ἔχειν $\theta' = \xi + \xi'\alpha + \xi''\alpha^2 + \xi'''\alpha^3 + \overset{(\mu-1)}{\xi}\alpha^{\mu-1}$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ θ' ἔχει (μ-2) (μ-3) . . . . 4. 3. 2. 1 τιμὰς, διὰ τοῦτο $\xi, \xi', \xi'' \ldots \overset{(\mu-1)}{\xi}$ ἔχει ἕκαστον (μ-2) . . . 4. 3. 2. 1 τιμὰς, ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν τὸ α = 1 ἡ λειτουργία $(\chi' + \alpha\chi'' \ldots + \alpha^{\mu-1}\overset{(\mu)}{\chi})^\mu$ τρέπεται εἰς $(\chi' + \chi'' + \chi''' \ldots + \overset{(\alpha)}{\chi})^\mu$ τουτέστιν εἰς τὸν συντελεστὴν τοῦ δευτέρου ὅρου τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ὑψωμένον εἰς τὴν δύναμιν μ. καὶ καλοῦντες αὐτὸν Α, καὶ τὴν τιμὴν τῆς θ', ἥτις ἀνήκει, ὅταν $\alpha^0 = 1$, $\theta^{(o)}$ θέλομεν ἔχειν

$$\overset{(o)}{\theta} = \xi + \xi + \xi'' \ldots + \overset{(\mu-1)}{\xi} = \overset{\mu}{A}$$

$$\text{καὶ } \xi = \overset{\mu}{A} - \xi' - \xi'' - \xi''' \ldots\ldots \overset{(\mu-1)}{\xi}$$

$$\text{ὥστε } \theta' = \overset{\mu}{A} - \xi' - \xi'' - \xi''' \ldots \overset{(\mu-1)}{\xi} +$$

$$\xi'\alpha + \xi''\alpha^2 \ldots + \overset{(\mu-1)}{\xi}\alpha^{(\mu-1)}, \text{ ἤγουν}$$

$$\theta' = A^\mu + (\alpha - 1)\xi' + (\alpha^2 - 1)\xi'' \ldots + (\alpha^{(\mu-1)} - 1)\overset{(\mu-1)}{\xi}$$

Αἱ τιμαὶ τῆς θ'', θ''', . . . $\overset{(\mu-1)}{\theta}$ συνάγονται ἀπὸ ἐκείνην τῆς θ' ἀφ' οὗ ἀντεισαχθῇ ἀντὶ τῆς α, ἡ α^2, α^3, $\alpha^{\mu-1}$

Παρομοίως ἔχομεν

$$\overset{\nu}{\theta} = \xi_\nu + \xi'_\nu\alpha + \xi''_\nu\alpha^2 \ldots \times \overset{(\mu-1)}{\xi_\nu}\alpha^{(\mu-1)}$$

ἔνθα τὸ ν, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὰ ξ, ξ', . . . φανερόνει ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ θ', τουτέστιν ἡ $(\chi' \times \alpha\chi'' \ldots \alpha^{\mu-1}\overset{(\mu)}{\chi})^\mu$ ὑψώθη εἰς τὸ ν καὶ ἀντεισάγοντες ἀντὶ α, τὸ α^2, $\alpha^3 \ldots \alpha^{\mu-1}$ θέλομεν ἔχειν