ἀπέναντι γωνία Β. Ἀκολούθως, αἱ πλευραὶ α καὶ γ δίδονται ἀπὸ τὰς ἀναλογίας ἡμ. Β : Ρ : : β : α, Ρ : σφ Β : : ϐ : γ.

Λύσις τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἐν γένει.

Εςωσαν Α, Β, Γ, αἱ τρεῖς γωνίαι προτεθέντος τινὸς εὐθυγράμμου τριγώνου, καὶ α, ϐ, γ αἱ ἀμοιβαίως εἰς ταύτας ἀπέναντι πλευραί: τὰ διάφορα προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ἤθελε ζητεῖται ἡ προσδιόρισις τριῶν τούτων τῶν ποσοτήτων διὰ μέσου τῶν ἄλλων τριῶν, πάντοτε ἠμποροῦν νὰ ἀναχθοῦν εἰς τὰς ἀκολούθους τέσσαρας περιςάσεις.

ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

νγ΄. Δοθείσης τῆς πλευρᾶς α καὶ δύο τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ϐ καὶ γ.

Αἱ δύο γνωςαὶ γωνίαι κάμνουν γνωςὴν τὴν τρίτην, ἀκολούθως αἱ δύο πλευραὶ β καὶ γ εὑρίσκονται διὰ τῶν ἀναλογιῶν (μδ΄).

ἡμ Α : ἡμ Β : : α : β.
ἡμ Α : ἡμ Γ : : α : γ.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

νδ΄. Δοθεισῶν τῶν δύο πλευρῶν α καὶ ϐ, μετὰ τῆς γωνίας Α ἀπέναντι μιᾶς τούτων τῶν πλευρῶν, νὰ εὑρεθῶσιν ἡ τρίτη πλευρὰ γ καὶ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι Β καὶ Γ.

Η γωνία Β εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀναλογίας

α : β : : ἡμ Α : ἡμ Β.

Εςω Μ ἡ ὀξεῖα γωνία τῆς ὁποίας τὸ ἡμίτονον $= \frac{ϐ\,ἡμ.Α}{α}$.

ἐπειδὴ ἡμ Μ = ἡμ (200° — Μ)· διὰ τοῦτο δυνατὸν νὰ ληφθῇ Β = Μ ἢ Β = 200° — Μ. Ἀλλ' αἱ δύο αὗται λύσεις δὲν ἔχουν χώραν παρ' ὁσάκις εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα καὶ ϐ > α. Ἐὰν δὲ ἡ γωνία Α ἦναι ἀμβλεῖα, ἐπειδὴ B δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἦναι, διὰ τοῦτο εἰς ταύτην τὴν περίστασιν δὲν ὑπάρχει παρὰ μία λύσις· καὶ ἐὰν ἐν ᾧ A ἦναι ὀξεῖα ἡ β ἦναι μικροτέρα τῆς α, οὐδὲ τότε ὑπάρχουν δύο λύσεις· διότι τότε $M < A$, καὶ ἐὰν ληφθῇ $B = 200^o - M$, ἤθελε προκύψει $A + B > 200^o$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον· ἐὰν $\alpha = \beta$, τότε δὲν ὑπάρχει ἀκόμη παρὰ μία μόνη λύσις.

Γνωστῶν τῶν γωνιῶν A καὶ B, συνάγεται ἡ τρίτη Γ. Ακολούθως ἡ τρίτη πλευρὰ γ δίδεται ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν

$$\text{ἡμ}\, A : \text{ἡμ}\, \Gamma :: \alpha : \gamma.$$

Δυνατὸν ἀκόμη νὰ συναχθῇ κατ' εὐθεῖαν ἡ γ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\text{συν}A}{P} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$, ἥτις δίδει $\gamma = \frac{\beta\,\text{συν}A}{P} \pm \sqrt{\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2\,\text{ἡμ}^2 A}{P^2}\right)}$. Αλλ' ἡ τιμὴ αὕτη δὲν ἠμπορεῖ νὰ λογαριασθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων εἰ μὴ μὲ τὸ μέσον μιᾶς συμβοηθητικῆς γωνίας M ἢ B, τὸ ὁποῖον καταντᾷ εἰς τὴν ἀνωτέρω λύσιν.

ΤΡΙΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

νέ. Δοθεισῶν δύο πλευρῶν α καὶ β μετὰ τῆς περιεχομένης γωνίας Γ, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι A καὶ B καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ γ.

Γνωστῆς τῆς γωνίας Γ, γίνεται γνωστὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν $A + B = 200^o - \Gamma$, καὶ τὸ ἡμιάθροισμά των $\frac{1}{2}(A + B) = 100^o - \frac{1}{2}\Gamma$. Ακολούθως ἡ ἡμιδιαφορὰ τῶν αὐτῶν γωνιῶν λογαριάζεται διὰ τῆς ἀναλογίας (μη'),

$$\alpha + \beta : \alpha - \beta :: \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(A + B) \text{ ἢ } \text{σφ}\,\tfrac{1}{2}\Gamma : \text{ἐφ}\,\tfrac{1}{2}(A - B)$$

ἔνθα ὑποτίθεται $\alpha > \beta$, καὶ ἐπομένως $A > B$.

Εὑρεθείσης τῆς ἡμιδιαφορᾶς $\frac{1}{2}(A - B)$, ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸ ἡμιάθροισμα $\frac{1}{2}(A + B)$, θέλει προσδιορισθῇ ἡ μείζων γωνία A· ἐὰν, ἐξ ἐναντίας, ἀφαιρεθῇ, θέλει προσδιορισθῇ ἡ ἐλάσσων γωνία Β· διότι ἐὰν Α καὶ Β παριςάνωσιν ὁποιαςδήποτε ποσότητας, πάντοτε ἔχομεν

$$A = \tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}(A - B)$$
$$B = \tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}(A - B).$$

Ἀφ' οὗ γνωσθῶσιν αἱ γωνίαι Α καὶ Β, ἡ τρίτη πλευρὰ γ προσδιορίζεται ἐκ τῆς ἀναλογίας

$$\text{ἡμ}\, A : \text{ἡμ}\, \Gamma :: \alpha : \gamma.$$

νϛ΄. Εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ὑπολογισμοὺς ἀκολουθεῖ συχνάκις νὰ ἦναι γνωςαὶ δύο πλευραὶ α καὶ β διὰ τῶν λογαρίθμων των· τότε διὰ νὰ μὴ ἤμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ζητήσωμεν τοὺς ἀνταποκρινομένους ἀριθμούς, ζητοῦμεν μόνον τὴν γωνίαν φ διὰ τῆς ἀναλογίας $\beta : \alpha :: P : \text{ἐφ}.\varphi$. Η γωνία φ θέλει εἶναι μεγαλητέρα ἀπὸ 50°, διότι ὑποτίθεται $\alpha > \beta$· ἀφαιροῦντες λοιπὸν ἀπὸ φ, 50°, κάμνομεν τὴν ἀναλογίαν $P : \text{εφ}\,(\varphi - 50^\circ) :: \text{σφ}\, \tfrac{1}{2}\Gamma : \text{ἐφ}\, \tfrac{1}{2}(A - B)$, ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν ὡς ἀνωτέρω τὴν τιμὴν τῆς $\tfrac{1}{2}(A - B)$, ἀκολούθως τὰς τιμὰς τῶν δύο γωνιῶν.

Η λύσις αὕτη θεμελιοῦται ἐπὶ τοῦ ὅτι $\text{ἐφ}\,(\varphi - 50^\circ) = \frac{P^2 \text{ἐφ}.\varphi - P^2 \text{ἐφ} 50^\circ}{P^2 + \text{ἐφ}.\varphi \text{ἐφ} 50^\circ}$. Ἀλλὰ $\text{ἐφ}.\varphi = \frac{\alpha P}{\beta}$ καὶ $\text{ἐφ}\, 50^\circ = P$· λοιπὸν $\text{ἐφ}\,(\varphi - 50^\circ) = \frac{P(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta}$· λοιπὸν $\alpha + \beta : \alpha - \beta :: P : \text{ἐφ}\,(\varphi - 50^\circ) :: \text{σφ}\, \tfrac{1}{2}\Gamma : \text{ἐφ}\, \tfrac{1}{2}(A - B)$.

Οσον διὰ τὴν τρίτην πλευρὰν γ, ἠμπορεῖ κατ' εὐθεῖαν νὰ εὑρεθῇ διὰ τῆς ἐξισώσεως $\frac{\text{συν}\Gamma}{P} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$, ἥτις δίδει $\gamma = \sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma}{P}\right)}$. Ἀλλ' ἡ τιμὴ αὕτη δὲν εἶναι ἐπιτήδειον νὰ λογαριασθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων, ἐκτὸς ὅταν οἱ παριςανόμενοι ὑπὸ α, β, καὶ συνΓ ἀριθμοὶ ἦναι ἁπλούςατοι.

Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὴν τιμὴν τῆς γ ὑπὸ ἄλλην μορφήν· ἐπειδὴ $\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\Gamma = \frac{1}{2}P^2 - \frac{1}{2}P\,\text{συν}\Gamma$, διὰ τοῦτο συν $\Gamma = \frac{P^2 - 2\,\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\Gamma}{P}$· ἡ ἀντεισαγωγὴ ταύτης τῆς τιμῆς εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον, τὸν τρέπει εἰς $\sqrt{\left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{4\alpha\beta\,\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\Gamma}{P^2} - \frac{2\alpha\beta P^2}{P^2}\right)} = \sqrt{\left((\alpha-\beta)^2 + \frac{4\alpha\beta\,\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\Gamma}{P^2}\right)}$· ἀλλ' ἐπειδὴ $P^2 = \text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\Gamma + \text{συν}^2\,\frac{1}{2}\Gamma$· διὰ τοῦτο ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης τοῦ δευτέρου μελους ἄγεται εἰς

$$\frac{(\alpha-\beta)^2\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\Gamma + (\alpha-\beta)^2\text{συν}^2\,\frac{1}{2}\Gamma + 4\alpha\beta\,\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\Gamma}{P^2} =$$

$$(\alpha+\beta)^2\frac{\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\Gamma}{P^2} + (\alpha-\beta)^2\,\frac{\text{συν}^2\,\frac{1}{2}\Gamma}{P^2}.$$ λοιπὸν τέλος πάντων,

$$\gamma = \sqrt{\left((\alpha-\beta)^2 + \frac{4\alpha\beta\,\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\Gamma}{P^2}\right)} = \sqrt{\left((\alpha+\beta)^2\frac{\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\Gamma}{P^2} + (\alpha-\beta)^2\,\frac{\text{συν}^2\,\frac{1}{2}\Gamma}{P^2}\right)}.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι μάλιςα ὠφέλιμοι, ὅταν οὔσης τῆς γωνίας Γ μικροτάτης καθὼς καὶ $\alpha-\beta$, θέλομεν νὰ λογαριάσωμεν γ μὲ πολλὴν ἀκρίβειαν. Η τελευταία δεικνύει ὅτι γ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι $(\alpha+\beta)\,\frac{\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\Gamma}{P}$, καὶ $(\alpha-\beta)\,\frac{\text{συν}\,\frac{1}{2}\Gamma}{P}$· καὶ τοῦτο ἠμποροῦμεν ἀκόμη νὰ εὕρωμεν διὰ τῆς ἀκολούθου ἁπλουςάτης κατασκευῆς.

Εςω ΑΒΓ (σχ. 6) τὸ προτεθὲν τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν τὰς δύο πλευρὰς ΓΒ = α, ΓΑ = β, καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν Γ· ἐκ τῆς ςιγμῆς Γ ὡς ἐκ κέντρου μὲ ἀκτῖνα ΓΒ ἴσην μὲ τὴν μεγαλητέραν τῶν δύο δεδομένων πλευρῶν, ἂς γράψωμεν περιφέρειαν ἥτις συναπαντᾷ εἰς Δ καὶ Ε τὴν προεκβολὴν τῆς πλευρᾶς ΓΑ· ἂς ἐπιζεύξωμεν ΒΔ, ΒΕ, καὶ ἂς ἄξωμεν τὴν ΑΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΔ. Η γωνία ΔΒΕ ὡς ἐγγεγραμμένη ἐν τῇ ἡμιπεριφερείᾳ εἶναι ὀρθή· διὰ τοῦτο αἱ γραμμαὶ ΑΖ, ΒΕ εἶναι παράλληλοι, καὶ ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν ΒΖ : ΑΕ : : ΔΖ : ΑΔ : : συν Δ : Ρ. Ὡσαύτως εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΖ ἔχομεν, ΑΖ : ΔΑ : : ἡμ. Δ : Ρ. Αντεισάγοντες λοιπὸν τὰς τιμὰς ΔΑ = ΔΓ + ΓΑ = α + β, ΑΕ = ΓΕ − ΓΑ = α − β, Δ = ½ Γ, θέλομεν ἔχει

$$ΑΖ = \frac{(α+β) ἡμ\ \frac{1}{2} Γ}{Ρ},\ ΒΖ = \frac{(α-β) συν\ \frac{1}{2} Γ}{Ρ}.$$

Η τρίτη λοιπὸν πλευρὰ ΑΒ τοῦ προτεθέντος τριγώνου εἶναι τῷ ὄντι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΖ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι $(α+β)\frac{ἡμ\ \frac{1}{2} Γ}{Ρ}$ καὶ $(α-β)\frac{συν\ \frac{1}{2} Γ}{Ρ}$. ἐὰν εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον ζητήσωμεν τὴν γωνίαν ΑΒΖ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ΑΖ, καὶ ἀπ' αὐτὴν ἀφαιρέσωμεν τὴν γωνίαν ΓΒΔ = ½ Γ, θέλομεν ἔχει τὴν γωνίαν Β τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Εντεῦθεν βλέπομεν ὅτι ἡ λύσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν τὰς δύο πλευρὰς α καὶ β καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν Γ, ἀνάγεται ἀμέσως εἰς τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΖ, εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν τὰς δύο πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας, δηλαδή: $ΑΖ = (α+β)\frac{ἡμ\ \frac{1}{2} Γ}{Ρ}$ καὶ $ΒΖ = (α-β)\frac{συν\ \frac{1}{2} Γ}{Ρ}$. Οὕτω, διὰ τῆς κατασκευῆς ταύτης, ἠμπορούσαμεν νὰ μὴ συντρέξωμεν εἰς τὴν πρότασιν τοῦ ἀρ. 47 διὰ τὴν λύσιν τῆς τρίτης περιστάσεως.

ΤΕΤΑΡΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

νζ. Δοθεισῶν τῶν τριῶν πλευρῶν α, β, γ, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τρεῖς γωνίαι Α, Β, Γ.

Η γωνία Α ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς α, εὑρίσκεται διὰ τοῦ τύπου $συν\ Α = Ρ \cdot \frac{β^2+γ^2-α^2}{2βγ}$, καὶ παρομοίως προσδιορίζονται αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι. Πλὴν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὴν αὐτὴν περίςασιν δι᾽ ἑνὸς τύπου πλέον ἐπιτηδείου διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμόν.

Ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν τὸν τύπον $P^2 - P\,\text{συν}\,A = 2\,\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,A$, καὶ ἀντεισάξωμεν εἰς αὐτὸν τὴν τιμὴν τοῦ συνA, θέλομεν ἔχει $2\,\text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,A = P^2.\,\frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\beta\gamma}{2\beta\gamma} = P^2.\,\frac{\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2}{2\beta\gamma}$ $= P^2.\,\frac{(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)}{2\beta\gamma}$. Λοιπὸν $\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\,A = P\sqrt{\left(\frac{(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)}{4\beta\gamma}\right)}$. Ἔςω, συντομίας χάριν, $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = \pi$, ἢ $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, θέλομεν ἔχει $\alpha + \beta - \gamma = 2\pi - 2\gamma$, $\alpha - \beta + \gamma = 2\pi - 2\beta$· λοιπὸν

$$\text{ἡμ}\,\frac{1}{2}\,A = P\sqrt{\left(\frac{(\pi - \beta)(\pi - \gamma)}{\beta\gamma}\right)}.$$

Τύπος ὅςις δίδει τὴν ἀναλογίαν

$$\beta\gamma : (\pi - \beta)\,(\pi - \gamma) :: P^2 : \text{ἡμ}^2\,\frac{1}{2}\,A$$

καὶ εἶναι εὐκολολογάριαςος διὰ τῶν λογαρίθμων. Γνωρίζοντες τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμ $\frac{1}{2}\,A$, γνωρίζομεν $\frac{1}{2}\,A$, ἑπομένως τὴν ζητουμένην γωνίαν A ἥτις εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ $\frac{1}{2}\,A$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἠμπορούσαμεν νὰ πράξωμεν διὰ κάθε μίαν τῶν ἄλλων δύο γωνιῶν B καὶ Γ.

Ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι τύποι οἱ ὁποῖοι ἐπίσης λύουν τὸ ζήτημα. Καὶ ἐν πρώτοις ὁ τύπος $P^2 + P\,\text{συν}\,A = 2\,\text{συν}^2\,\frac{1}{2}\,A$ δίδει $\text{συν}^2\frac{1}{2}A = P^2.\,\frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma - \alpha^2}{4\beta\gamma} = P^2.\,\frac{(\beta + \gamma)^2 - \alpha^2}{4\beta\gamma}$ $= P^2.\,\frac{(\beta + \gamma - \alpha)(\beta + \gamma + \alpha)}{4\beta\gamma}$. Ἀλλὰ κάμνοντες πάντοτε $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, ἔχομεν $\beta + \gamma - \alpha = 2\pi - 2\alpha$· λοιπὸν

$$\text{συν}\,\frac{1}{2}\,A = P\sqrt{\left(\frac{(\pi - \alpha)\,\pi}{\beta\gamma}\right)}.$$

Ακολούθως ἡ συμπλοκὴ τῆς τιμῆς ταύτης μὲ ἐκείνην τοῦ ἡμ $\frac{1}{2}$ Α δίδει ἄλλον τινὰ τύπον· διότι ἐπειδὴ ἐφ $\frac{1}{2}$ Α $=\frac{\text{Ρήμ. } \frac{1}{2} \text{ Α}}{\text{συν } \frac{1}{2} \text{ Α}}$, συνάγεται

$$\text{ἐφ } \frac{1}{2} \mathrm{A} = \mathrm{P} \sqrt{\left(\frac{\pi-\beta \,.\, \pi-\gamma}{\pi \,.\, \pi-\alpha} \right)}.$$

Παραδείγματα τῆς λύσεως τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων.

νη΄. Παράδειγμα Α΄. Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ζητεῖται τὸ ὕψος οἰκοδομῆς τινὸς ΑΒ, τῆς ὁποίας ὁ ποῦς εἶναι προσιτός. σχ. 7.

Αφ᾽ οὗ μετρήσωμεν ἐπὶ τῆς γῆς, τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν περίπου κατὰ ςάθμην (de niveau), βάσιν τινὰ ΑΔ ἥτις νὰ μὴ ἦναι οὔτε πολλὰ μεγάλη οὔτε πολλὰ μικρὰ ὡς πρὸς τὸ ὕψος ΑΒ, ςένομεν εἰς Δ τὸν πόδα τοῦ κύκλου ἢ τοῦ ὁποιουδήποτε ἐργαλείου διὰ τοῦ ὁποίου πρέπει νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν ΒΓΕ, τὴν σχηματιζομένην ἀπὸ τὴν ὁριζόντειον γραμμὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τοῦ φωτὸς ΓΒ διευθυνομένην πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς οἰκοδομῆς· ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι εὕρομεν ΑΔ ἢ ΓΕ $=67.84$ μέτρα καὶ τὴν γωνίαν ΒΓΕ $=45^\circ 64'$· διὰ νὰ προσδιορίσωμεν ΒΕ, πρέπει νὰ λύσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓΕ εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν τὴν γωνίαν Γ καὶ τὴν προσκειμένην πλευρὰν ΕΓ. Οὕτω κατὰ τὴν Δ΄ περίςασιν, κάμνομεν τὴν ἀναλογίαν Ρ : ἐφ $45^\circ 64'$ :: 67.84 : ΒΕ.

Λ. ἐφ $45^\circ 64'$	9. 9403263
Λ. 67. 84	1. 8314858
ἄθροισμα — λογ. Ρ = ...	1. 7718121

Ο λογάριθμος οὗτος ἀνταποκρίνεται εἰς 59. 130, οὕτως ἔχομεν ΒΕ $=59^{\mu}, 13$. Προσθέτοντες εἰς ΒΕ τὸ ὕψος τοῦ ἐργαλείου ΓΔ ἢ ΑΕ τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν $1^{\mu}.12$, θέλομεν ἔχει τὸ ζητούμενον ὕψος ΑΒ $=60^{\mu}.25$.

Ἐὰν εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον ΒΕΓ θέλωμεν νὰ γνωρίσωμεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, κάμνομεν τὴν ἀναλογίαν συν $45^{\circ}64'$: Ρ : : 67, 84 : ΒΓ

Λ. Ρ + Λ. 67. 84 . . . . . 11. 8314858
Λ. συν 45° 64′ 9. 8772784
Διαφορά . . . . . . 1. 9542074 = Λ.ΒΓ

Λοιπὸν ΒΓ $=89^{\mu}.993$.

Σ. Κ. Ἐὰν δὲν ἐφαίνετο εἰ μὴ ἡ κορυφὴ τῆς οἰκοδομῆς ἢ τοῦ ὁποιουδήποτε τόπου τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ὕψος, ἤθελε προσδιορισθῇ τὸ διάστημα ΒΓ ὡς ῥηθήσεται εἰς τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα: τὸ διάστημα τοῦτο καὶ ἡ γνωστὴ γωνία ΒΓΕ ἀρκοῦν διὰ τὴν λύσιν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΓΕ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΒΕ αὐξηνθεῖσα ἀπὸ τὸ ὕψος τοῦ ἐργαλείου, θέλει εἶναι τὸ ζητούμενον ὕψος.

νθ′. Παράδειγμα Β′. Διὰ νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς γῆς (σχ. 8) τὸ διάστημα τῆς στιγμῆς Α ἀπὸ ἀπρόσιτόν τι ἀντικείμενον Β, μετρεῖται βάσις τις ΑΔ καὶ αἱ δύο προσκείμεναι γωνίαι ΒΑΔ, ΑΔΒ. Ας ὑποθέσωμεν ὅτι εὑρέθη ΑΔ $=588^{\mu}.45$, ΒΑΔ $=115^{\circ}48'$ καὶ ΒΔΑ $=40^{\circ}\ 8'$· ἐν πρώτοις συνάγεται ἡ τρίτη γωνία ΑΒΔ $=44^{\circ}44'$· καὶ ἐκ τῆς ἀναλογίας ἡμ ΑΒΔ : ἡμ ΑΔΒ : : ΑΔ : ΑΒ προσδιορίζεται ἡ ΑΒ.

Λ ΑΔ 2. 7697096
Λ. ἡμ ΑΔΒ 9. 7699689
Αθροισμα 12.5396785
Λ. ἡμ ΑΒΔ 9.8080314
Λ. ΑΒ 2. 7316471

Λοιπὸν τὸ ζητούμενον διάστημα ΑΒ $=539^{\mu}.07$

Ἐὰν, δι' ἄλλο ἀπρόσιτον ἀντικείμενον Γ, ἤθελον εὑρεθῇ αἱ γωνίαι ΓΑΔ $= 39^\circ 17'$, ΑΔΓ $= 132^\circ 83'$· ἤθελε συναχθῇ ὁμοίως τὸ διάστημα ΑΓ $= 1202^{\mu}.32$.

ξ'. Παράδειγμα Γ'. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ διαστήματος μεταξὺ δύο ἀπροσίτων ἀντικειμένων Β καὶ Γ (σχ. 8), προσδιορίζονται αἱ ΑΒ, ΑΓ, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα καὶ ἐνταυτῷ συνάγεται ἡ περιεχομένη γωνία ΒΑΓ $=$ ΒΑΔ $-$ ΔΑΓ (1). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εὑρέθη ΑΒ $= 539^{\mu}.07$ καὶ ΑΓ $= 1202^{\mu}.32$ καὶ ἡ γωνία ΒΑΓ $= 76^\circ 31'$· διὰ τὴν προσδιόρισιν τῆς ΒΓ, πρέπει νὰ λυθῇ τὸ τρίγωνον ΒΑΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι γνωσταὶ δύο πλευραὶ, καὶ ἡ περιεχομένη γωνία. Πρέπει λοιπὸν, κατὰ τὴν τρίτην περίστασιν, νὰ γένῃ χρῆσις τῆς ἀναλογίας $\text{ΑΓ} + \text{ΑΒ} : \text{ΑΓ} - \text{ΑΒ} :: \text{εφ}\,\frac{\text{Β}+\text{Γ}}{2} : \text{εφ}\,\frac{\text{Β}-\text{Γ}}{2}$, ἡ ὁποία, διὰ τῆς ἀντεισαγωγῆς τῶν μερικῶν δοθέντων, τρέπεται εἰς

$$1741.39 : 663.25 :: \text{εφ}\,61^\circ 84' \tfrac{1}{2} : \text{εφ}\,\frac{\text{Β}-\text{Γ}}{2}.$$

Λ. 663. 25	2.8216773
Λ. ἐφ $61^\circ 84' \frac{1}{2}$	10.1654748
Ἄθροισμα	12.9871521
Λ. 1741. 39	3.2408960
Λ. εφ $\frac{\text{Β}-\text{Γ}}{2}$	9.7462561
Λοιπὸν . . . . $\frac{\text{Β}-\text{Γ}}{2} =$	$32^\circ 37',8$
Ἀλλὰ . . . . $\frac{\text{Β}+\text{Γ}}{2} =$	$61^\circ 84',5$

(1) Δυνατὸν αἱ τέσσαρες στιγμαὶ Α, Β, Γ, Δ νὰ μὴ εὑρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τότε ἡ γωνία ΒΑΓ δὲν ἤθελε εἶναι πλέον ἡ διαφορὰ μεταξὺ ΒΑΔ καὶ ΔΑΓ καὶ ἔπρεπε νὰ εὑρεθῇ ἀμέσως ἡ τιμὴ ταύτης τῆς γωνίας· μετὰ τοῦτο, ἡ ἐργασία ἤθελεν εἶναι ἡ αὐτή. Ο. Σ.

Λοιπὸν . . . . $B = 94^\circ 22',3$
καὶ . . . . $\Gamma = 29^\circ 46',7$

Τώρα τὸ διάστημα ΒΓ προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν ἡμ Β : ἡμ Α : : ΑΓ : ΒΓ ἢ

$$\text{ἡμ}\ 94^\circ 22'.3 : \text{ἡμ}\ 76^\circ 31' :: 1202^{\mu}.32 : \text{ΒΓ}.$$

Λ. 1202, 32	3. 0800200
Λ. ἡμ 76°31′	9. 9692099
Ἄθροισμα	13.0492299
Λ. ἡμ 94°22′.3	9. 9982096
Λ. ΒΓ	3. 0510203

Λοιπὸν τὸ ζητούμενον διάστημα ΒΓ $= 1124^{\mu}.66$.

ξα′. **Παράδειγμα Δ′.** Δοθεισῶν τριῶν στιγμῶν Α, Β, Γ ἐπὶ τῆς χάρτης τόπου τινὸς, νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις τετάρτης στιγμῆς Μ ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἤθελον μετρηθῇ αἱ γωνίαι ΑΜΒ, ΑΜΓ· αἱ τέσσαρες δὲ στιγμαὶ ὑποτίθενται ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. (σχ. 9).

Ἐπὶ τῆς ΑΒ ἄς γραφθῇ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΜΔΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ΒΜΑ· ἐπὶ τῆς ΑΓ ἄς γραφθῇ παρομοίως τμῆμα κύκλου τὸ ΑΜΓ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ ΑΜΓ· τὰ δύο τόξα θέλουν τμηθῇ εἰς Α καὶ Μ, καὶ ἡ στιγμὴ Μ θέλει εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι αἱ μὲν στιγμαὶ τοῦ τόξου ΑΜΔΒ εἶναι αἱ μόναι ἀπὸ τὰς ὁποίας ἠμπορεῖ τὶς νὰ ἴδῃ τὴν ΑΒ ὑπὸ γωνίαν ἴσην τῇ ΑΜΒ· αἱ δὲ τοῦ τόξου ΑΜΓ εἶναι αἱ μόναι ἀπὸ τὰς ὁποίας ἠμπορεῖ τὶς νὰ ἴδῃ τὴν ΑΓ ὑπὸ γωνίαν ἴσην τῇ ΑΜΓ· λοιπὸν ἡ στιγμὴ Μ, κοινὴ τομὴ τῶν δύο τούτων τόξων, εἶναι ὡσαύτως ἡ μόνη ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἠμπορεῖ τις νὰ ἴδῃ ἐνταυτῷ τὴν ΑΒ καὶ ΑΓ ὑπὸ τὰς γωνίας ΑΜΒ, ΑΜΓ. Πρόκειται τώρα νὰ λογαριασθῇ τριγωνομετρικῶς ἡ θέσις τῆς στιγμῆς Μ, κατὰ ταύτην τὴν κατασκευήν.

Εςωσαν τὰ δοθέντα $AB = 2500^{\mu}$, $A\Gamma = 7000^{\mu}$, $B\Gamma = 9000^{\mu}$, $AMB = 30^{o}80'$, $AM\Gamma = 121^{o}40'$. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι γνωςαὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ, προσδιορίζεται ἡ γωνία ΒΑΓ (νζ′) διὰ τοῦ τύπου $\eta\mu^{2}\frac{1}{2}A = P^{2}.\frac{6750.2250}{2500.7000}$; ἐκ τοῦ ὁποίου $2\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ \frac{1}{2}\ A = 19.9384483$, $\lambda o\gamma\ \eta\mu\ \frac{1}{2}\ A = 9.9692241$, $\frac{1}{2}\ A = 76^{o}31'.5$ καὶ τελος $A = 152^{o}63'$. Ας ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΑΔ καὶ ἂς ἐπιζευχθῇ ἡ ΔΒ· εἰς τὸ τρίγωνον ΒΑΔ ὀρθογώνιον εἰς Β ἡ πλευρὰ $BA = 2500$, καὶ ἡ ἀπέναντι γωνία $B\Delta A = BMA = 30^{o}80'$· ὅθεν προκύπτει ἡ ὑποτείνουσα $A\Delta = \frac{BA \times P}{\eta\mu B\Delta A} = 5374^{\mu}.6$. Αχθείσης ὡσαύτως τῆς διαμέτρου ΑΕ καὶ τῆς ΓΕ ἐπιζευχθείσης, θέλει σχηματισθῇ τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΓΑΕ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι γνωςὴ ἡ πλευρὰ $A\Gamma = 7000$ καὶ ἡ προσκειμένη γωνία $\Gamma AE = AM\Gamma - 100^{o} = 21^{o}40'$· ὅθεν συνάγεται $AE = \frac{P \times A\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma AE} = 7415^{\mu}$.

Εὰν τώρα ἀχθῶσιν αἱ ΜΔ, ΜΕ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΜΔ, ΑΜΕ εἶναι ὀρθαὶ, ἡ γραμμὴ ΔΜΕ, θέλει εἶναι εὐθεῖα. Μένει λοιπὸν νὰ λυθῇ τὸ τρίγωνον ΔΑΕ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γραμμὴ ΑΜ, τῆς ὁποίας πρέπει νὰ προσδιορισθῇ ἡ θέσις καὶ μέγεθος, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ. Τώρα εἰς τοῦτο τὸ τρίγωνον ἡ πλευρὰ $A\Delta = 5374.6$, $AE = 7415$, καὶ ἡ περιεχομένη γωνία $\Delta AE = BA\Gamma + \Gamma AE - \Delta AB = 104^{o}83'$. Εντεῦθεν συνάγεται ἡ γωνία $A\Delta E = 56^{o}93'$· καὶ τέλος ἀπὸ το ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΑΜ, $AM = 4160^{\mu}.83$. Τὸ διάςημα τοῦτο καὶ ἡ γωνία $BAM = 112^{o}27'$ προσδιορίζουν κατὰ πάντα τὴν θέσιν τῆς ςιγμῆς Μ.

Σημείωσις. Εὰν θέλωμεν νὰ λογαριάσωμεν τὰ αὐτὰ παραδείγματα διὰ τῶν πινάκων τῶν κατασκευασμένων κατὰ τὴν παλαιὰν διαίρεσιν τοῦ κύκλου, πρέπει νὰ τρέψωμεν ὡς ἀκολούθως τὴν ἔκφρασιν τῶν δεδομένων ἢ προσδιοριζομένων γωνιῶν· τοῦ λοιποῦ ὅλαι αἱ λογαριθμικαὶ τιμαὶ καὶ αἱ τιμαὶ τῶν πλευρῶν μένουν αἱ αὐταί.

Παράδειγμα α'. Γωνία δεδομένη ΒΓΕ $= 41^\circ 4' 33''.6$, ἢ ἁπλῶς ΒΓΕ $= 41^\circ 4' 30''$, διότι εἰς τὰς τοιαύτας ἐργασίας μερικὰ δεύτερα περισσότερον ἢ ὀλιγώτερον, δὲν ἐπιῤῥέουν ἐπαισθητῶς ἐπὶ τῶν προσδιοριζομένων διαστημάτων.

Πα. β'. Γωνίαι δεδομέναι ΒΑΔ $= 103^\circ 55' 55''.2$, ΒΔΑ $= 36^\circ 4' 19''.2$, ΑΒΔ $= 39^\circ 59' 45''.6$, ΓΑΔ $= 35^\circ 15' 10''.8$, ΑΔΓ $= 119^\circ 32' 49''.2$.

Πα. γ'. Γωνία δεδομένη ΒΑΓ $= 68^\circ 40' 44''.4$,

Γωνία συναγομένη $\frac{1}{2}(B+\Gamma) = 55^\circ 39' 37''.8$.
Γωνίαι προσδιοριζόμεναι $\frac{1}{2}(B-\Gamma) = 29^\circ 8' 24''.7$
$B = 84^\circ 48' 2''.5$, $\Gamma = 26^\circ 31' 13''.1$.

Πα. δ'. Γωνίαι δεδομέναι ΑΜΒ $= 27^\circ 43' 12''$, ΑΜΓ $= 109^\circ 15' 36''$, γωνίαι προσδιοριζόμεναι Α $= 137^\circ 22' 1''.2$, ΔΑΕ $= 94^\circ 20' 49''$, ΒΑΜ $= 101^\circ 2' 34''.8$.

Σημείωσις τοῦ μεταφραστοῦ. Τὸ ἐμβαδὸν κάθε εὐθυγράμμου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο προσεχῶν πλευρῶν του πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τῶν ἰδίων πλευρῶν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ (σχ. 4) ἢ τὸ ΑΒΓ (σχ. 5). ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας Α ἂς κατεβασθῇ ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Γνωστὸν εἶναι ὅτι ἐὰν κληθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἢ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου τῶν δύο τριγώνων Ε αὕτη θέλει ἰσοῦται μὲ $\frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2}$. Ἀλλὰ καὶ εἰς τὰς δύο περιστάσεις τὸ ὀρθογώνιοντρίγωνον ΑΔΒ δίδει (μζ') Ρ : ἡμ Β :: ΑΒ : ΑΔ, ὅθεν $A\Delta = \frac{AB \text{ἡμ} B}{P}$· λοιπὸν $E = \frac{B\Gamma}{2} \times \frac{AB \text{ἡμ} B}{P}$. Κληθεί-

σης τῆς ΑΒ $=\gamma$, τῆς ΒΓ $=\alpha$, τῆς ΑΓ $=\beta$ καὶ τῆς Ρ $=1$,
θέλει εἶναι $E=\frac{\alpha\gamma\,\dot{\eta}\mu B}{2}=\frac{\alpha\beta\,\dot{\eta}\mu\Gamma}{2}=\frac{\gamma\beta\,\dot{\eta}\mu A}{2}$. Λοιπὸν κ.τ.λ.

Εντεῦθεν, ἐπειδὴ 2ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ὁποῖον ἔχει διὰ προσεχεῖς πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΒΓ, δηλαδὴ τὰς δύο προσεχεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, συνάγεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τοιούτου παραλληγράμμου ἰσοῦται μὲ αγ ἡμ Β, καὶ ἐν γένει τὸ ἐμβαδὸν κάθε παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον δύο προσεχῶν πλευρῶν του καὶ τοῦ ἡμιτόνου τῆς περιεχομένης ὑπ' αὐτῶν γωνίας·

Εκρινα ἀναγκαῖον νὰ ὑποσυνάψω ἐνταῦθα τὰ δύο ταῦτα θεωρήματα, ἐπειδὴ συχνάκις ἀπαντῶνται εἰς τὰς ἐφαρμογάς.

Αρχαὶ διὰ τὴν λύσιν τῶν σφαιρικῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

ξβʹ. Εἰς κάθε σφαιρικὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἡ ἀκτὶς εἶναι πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ὑποτεινούσης, ὡς τὸ ἡμίτονον μιᾶς τῶν πλαγίων γωνιῶν πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

Εσω ΑΒΓ (σχ. 10) τὸ σφαιρικὸν προτεθὲν τρίγωνον, Α ἡ ὀρθὴ γωνία του. Β καὶ Γ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι τὰς ὁποίας καλοῦμεν γωνίας πλαγίας, καὶ αἱ ὁποῖαι μ' ὅλον τοῦτο ἠμποροῦν νὰ ἦναι ὀρθαὶ ἡ μία ἢ ἄλλη, ἢ καὶ αἱ δύο ἐνταυτῷ· λέγω ὅτι θέλομεν ἔχει τὴν ἀναλογίαν Ρ : ἡμ ΒΓ : : ἡμ Β : ἡμ ΑΓ.

Απὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας Ο, ἂς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ἂς ληφθῇ ἀκολούθως ἡ ΟΖ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῶν πινάκων, καὶ ἀπὸ τὴν στιγμὴν Ζ ἂς ἀχθῇ ἡ ΖΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ· ἡ γραμμὴ ΖΔ θέλει εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΟΑΒ, ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθὴ, καὶ οὕτω τὰ δύο ἐπίπεδα ΟΑΒ, ΟΑΓ εἶναι