εἰς $\frac{\mu}{\nu}$ περιεχομένας μεταξὺ 0 καὶ $\frac{1}{2}$· ὥστε αἱ σειραὶ θέλουν εἶναι τόσον κατιοῦσαι ἢ συγκύπτουσαι (convergentes), ὥστε ἀρκεῖ νὰ λογαριασθῇ μικρότατος ἀριθμὸς ὅρων, ὅταν μάλιστα δὲν ἦναι χρεία πολλῶν δεκαδικῶν.

Ἐὰν κάμωμεν διαδοχικῶς $\frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{10}, = \frac{2}{10}, = \frac{3}{10}, = \frac{4}{10}, = \frac{5}{10}$,

θέλομεν εὕρῃ τὰ ἀκόλουθα ἐξαγόμενα:

ἡμ. 10^0 = συν 90^0 = 0. 156434465040231
ἡμ. 20^0 = συν 80^0 = 0. 309016994374947
ἡμ. 30^0 = συν 70^0 = 0. 453990499739547
ἡμ. 40^0 = συν 60^0 = 0. 587785252292473
ἡμ. 50^0 = συν 50^0 = 0. 707106781186548
ἡμ. 60^0 = συν 40^0 = 0. 809016994374947
ἡμ. 70^0 = συν 30^0 = 0. 891006524188368
ἡμ. 80^0 = συν 20^0 = 0. 951056516295154
ἡμ. 90^0 = συν 10^0 = 0. 987688340595138
ἡμ. 100^0 = συν 0^0 = 1. 000000000000000.

τὰ ὁποῖα συμφωνοῦν μὲ τοὺς ἀλγεβρικοὺς τύπους τοῦ ἀρ. 22. εὑρίσκομεν παρομοίως, κάμνοντες $\frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{100}$ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ ἡμ. 1^0, τὴν ὁποίαν εὕρομεν εἰς ἄρ. 26. καὶ ἡ μεγάλη εὐκολία μὲ τὴν ὁποίαν φθάνομεν εἰς ταῦτα τὰ ἐξαγόμενα δεικνύει τὸ ἔξοχον τῆς μεθόδου.

Περὶ τῆς κατασκευῆς τῶν πινάκων τῶν ἡμιτόνων.

λζ΄. Οἱ ὠφέλιμοι σοφοὶ εἰς τοὺς ὁποίους χρεωστεῖται ἡ πρώτη κατασκευὴ τῶν πινάκων τῶν ἡμιτόνων, ἐθεμελίωσαν τοὺς ὑπολογισμούς των ἐπὶ εὐφυῶν μεθόδων, πλὴν τῶν ὁποίων ἡ ἐφαρμογὴ ἦτον πολλὰ ἐπίπονος. Η ἀνάλυσις ἔπειτα ἔδωκε μεθόδους διὰ τῶν ὁποίων ἠμπόρει τὶς νὰ φθάσῃ εἰς τὸν αὐτὸν σκοπὸν μὲ περισσοτέραν ταχύτητα καὶ εὐκολίαν· πλὴν ἐπειδὴ οἱ ὑπολογισμοὶ εἶχον ἤδη γένῃ, αἱ μέθοδοι αὗται ἤθελον μείνῃ δίχως ἐφαρμογὴν, ἐὰν ἡ στερέωσις τοῦ μετρικοῦ συστήματος δὲν ἤθελε δώσει εὐκαιρίαν νὰ λογαριασθῶσιν νέοι πίνακες κατὰ τὴν δεκαδικὴν τοῦ κύκλου διαίρεσιν.

Διὰ νὰ δώσωμεν ἰδέαν τινὰ τῶν μεθόδων τὰς ὁποίας ἠμπορεῖ τὶς νὰ ἀκολουθήσῃ εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν πινάκων, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι πρόκειται νὰ λογαριάσωμεν τὰ ἡμίτονα ὅλων τῶν τόξων ἀπὸ λεπτὸν εἰς λεπτὸν ἐκ τοῦ 1 λεπτοῦ μέχρι 10000 λεπτῶν ἢ 100 μοιρῶν· τὴν ἀκτῖνα κάμνομεν $=1$, τὸ τόξον ἑνὸς λεπτοῦ καλοῦμεν α, καὶ πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου α μὲ μέγαν βαθμὸν προσεγγίσεως.

Οὔσης τῆς ἀκτῖνος 1, γνωστὸν εἶναι ὅτι ἡ ἡμιπεριφέρεια ἢ τὸ τόξον τῶν $200^o = 3.14159265358979 32$· ἂς διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον διὰ 20000· ἔχομεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου $1'$ ἢ $\alpha = 0.0001570796326 7948966$, τιμὴ ἥτις εἶναι ἀκριβὴς ἕως εἰς τὸ εἰκοστὸν δεκαδικὸν ψηφίον. Οταν ἓν τόξον ἦναι μικρότατον, τὸ ἡμίτονόν του εἶναι ἐπαισθητῶς ἴσον μὲ τὸ τόξον· οὕτως ἔχομεν περίπου ἡμ $\alpha = 0.00015707963267948966$· διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ σφάλμα τὸ ὁποῖον πράττομεν λαμβάνοντες τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου μικροτάτου διὰ τὸ ἡμίτονόν του, ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι νὰ λάβωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου διὰ τὸ ἡμίτονόν του, εἶναι νὰ λάβωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς σειρᾶς ἥτις ἐκφράζει τὴν τιμὴν τοῦ ἡμιτόνου δι' ὅλην τὴν σειράν. Τώρα ἐπειδὴ οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς ταύτης εἶναι ἐναλλὰξ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ, τὸ πραττόμενον σφάλμα ἐκτιμᾶται ἀπὸ τὸν πρῶτον τῶν ὅρων τοὺς ὁποίους παραβλέπομεν· λοιπὸν λαμβάνοντες α διὰ ἡμ. α, πράττομεν σφάλμα μικρότερον τοῦ $\frac{\alpha^3}{1.2.3}$· καὶ ἐπειδὴ $\alpha^3 < (0,00016)^3$ ἢ 0.000000000004096, καὶ τὸ ἕκτον μέρος ταύτης τῆς ποσότητος εἶναι μικρότερον ἀπὸ 0.000000000001· ἕπεται ὅτι τὸ πραττόμενον σφάλμα εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος τῆς $12^{ης}$ δεκαδικῆς τάξεως· ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἡμα δὲν διαφέρει ἀπὸ αὐτὸ τὸ τόξον α εἰς τὰ δώδεκα πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία· καὶ λοιπὸν ὅταν ληφθῇ ἡ ἀνωτέρω τιμὴ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ ἡμιτόνου ἑνὸς λεπτοῦ, αὐτὴ εἶναι ἐσφαλμένη εἰς τὸ δέκατον τρίτον δεκαδικὸν ψηφίον τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ δωδέκατον σημαντικὸν ψηφίον.

Διὰ νὰ ἔχωμεν μίαν ἀκριβεστέραν, ἀρκεῖ εἰς τοὺς τύπους τοῦ ἀρ. 36 νὰ κάμωμεν $\frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{10000}$. καὶ νὰ λάβωμεν τοὺς δύο ἢ τρεῖς πρώτους ὅρους ἑκάστης σειρᾶς· εὑρίσκομεν

$$\text{ἡμα} = 0.00015707963203352556 3$$

$$\text{συνα} = 0.999999987662994524005253$$

Η πρώτη τιμὴ εἶναι ἀκριβὴς ἕως εἰς τὸ εἰκοστὸν δεκαδικὸν καὶ ἡ δευτέρα ἕως τὸ εἰκοστὸν τέταρτον.

λη΄. Γνωρίζοντες τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου ἑνὸς λεπτοῦ σημειωμένου διὰ α, διὰ νὰ εὕρωμεν δι᾽ αὐτοῦ τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον ὅλων τῶν πολλαπλασίων τοῦ α τόξων, ἀρκεῖ εἰς τοὺς τύπους τοῦ ἀρθ. 28 νὰ κάμωμεν $\pi = \chi + \alpha$, $\kappa = \chi - \alpha$. Πράττοντες τὴν τοιαύτην ἀντεισαγωγὴν εἰς τὸν πρῶτον καὶ τρίτον, καὶ κάμνοντες πάντοτε $P = 1$, εὑρίσκομεν,

$$\text{ἡμ}(\chi+\alpha) = 2\,\text{συν}\,\alpha\,\text{ἡμ}\,\chi - \text{ἡμ}(\chi-\alpha) = 2\,\text{συν}\,\alpha.\,\text{ἡμ}\chi - 1.\,\text{ἡμ}(\chi-\alpha)$$

$$\text{συν}(\chi+\alpha) = 2\,\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\chi - \text{συν}(\chi-\alpha) = 2\,\text{συν}\,\alpha.\,\text{συν}\chi - 1.\,\text{συν}(\chi-\alpha)$$

ἐκ τῶν τύπων τούτων ἕπεται ὅτι ἐὰν ἔχωμεν μίαν σειρὰν τόξων τὰ ὁποῖα νὰ σχηματίζουν μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ἡ διαφορὰ νὰ ἦναι α, τὰ ἡμίτονά των θέλουν σχηματίζει μίαν ἀνατρέχουσαν σειρὰν (suite recurrente) τῆς ὁποίας ἡ κλίμαξ τῆς σχέσεως (échelle de relation) εἶναι 2 συν α, —1: τοῦτ' ἔςι ἀφ' οὗ λογαριάσωμεν δύο διαδοχικὰ ἡμίτονα Α καὶ Β, εὑρίσκομεν τὸ ἀκόλουθον Γ, πολλαπλασιάζοντες Β ἐπὶ 2 συν α, καὶ Α ἐπὶ —1, καὶ προσθέτοντες τὰ δύο γινόμενα· ὥςε ἔχομεν Γ=2Β συν α—Α.

Τὰ συνημίτονα τῶν ἰδίων τόξων σχηματίζουν ἐπίσης μίαν ἀνατρέχουσαν σειρὰν τῆς ὁποίας ἡ κλίμαξ τῆς σχέσεως εἶναι 2 συν α, —1· θέλομεν ἔχει λοιπὸν διαδοχικῶς,

ἡμ. 0^0 = 0	συν0 = 1
ἡμ α = ἡμ α	συν α = συν α
ἡμ. 2α = 2 συν α ἡμ α	συν 2α = 2 συν α συν α — 1
ἡμ. 3α = 2συν α ἡμ.3α — ἡμ.α	συν3α = 2συνασυν2α — συνα
ἡμ. 4α = 2συναἡμ.3α — ἡμ.2α	συν4α = 2συν α συν3α — συν2α
ἡμ. 5α = 2συναἡμ.4α — ἡμ.3α	συν5α = 2συν α συν4α — συν3α

λθʹ. Δὲν μένει πλέον παρὰ ἀφ' οὗ ἀντεισάξωμεν τὰς τιμὰς τοῦ ἡμ α καὶ συν α, νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειωμένας ἐργασίας. Ἐὰν θέλωμεν νὰ κατασκευάσωμεν πίνακας ἡμιτόνων μὲ 10 δεκαδικὰ, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὰς τιμὰς τοῦ ἡμ α καὶ συν α μὲ 16 δεκαδικὰ, τοῦτ' ἔςι:

ἡμ α = 0. 0001570796320335
συν α = 0. 9999999876629945

πλὴν ἐπειδὴ συν α πολλὰ ὀλίγον τῆς μονάδος διαφέρει, ὑπάρχει μέσον συντομίας ἀπὸ τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ὠφεληθῶμεν. Ἐςω Κ = 2(1—συν α)=0.0000000246740110, θέλομεν ἔχει 2 συν α = 2 —Κ, καὶ τοῦτο δίδει,

$$\eta\mu\,(\chi+\alpha)-\eta\mu\,\chi=\eta\mu\,\chi-\eta\mu\,(\chi-\alpha)-K\,\eta\mu\,\chi$$
$$\sigma\upsilon\nu\,(\chi+\alpha)-\sigma\upsilon\nu\,\chi=\sigma\upsilon\nu\,\chi-\sigma\upsilon\nu(\chi-\alpha)-K\sigma\upsilon\nu\chi.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ὅρου ἡμ $(\chi+\alpha)$ ἀρκεῖ να προσθέσωμεν εἰς τὸν προηγούμενον ὅρον ἡμ χ τὴν διαφορὰν ἡμ $(\chi+\alpha)$ — ἡμ χ, ἡ ὁποία πάντοτε θέλει εἶναι πολλὰ μικρά: τώρα, κατὰ τὸν τύπον, ἡ διαφορὰ αὕτη ἰσοῦται μὲ μίαν ὁμοίαν διαφορὰν ἤδη λογαριασθεῖσαν ἡμ χ — ἡμ $(\chi-\alpha)$, μεῖον τὸ γινόμενον τοῦ ἡμ χ ἐπὶ τοῦ ςαθεροῦ ἀριθμοῦ Κ. Οὗτος λοιπὸν ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἡ μόνη ἐργασία ὀλίγον τὶ μακρυνὴ τὴν ὁποίαν ἔχομεν νὰ κάμωμεν διὰ νὰ συνάξωμεν ἕν ἡμίτονον ἀπὸ δύο προηγούμενα· πλὴν πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν 1.ον ὅτι δὲν ἔχομεν χρείαν νὰ γνωρίσωμεν εἰ μὴ δεκαὲξ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ γινομένου, καὶ διὰ τοῦτο πολλὰ ὀλίγα ψηφία νὰ λογαριάσωμεν. 2.ον ὅτι τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τούτους ἠμποροῦμεν πολὺ νὰ συντομεύσωμεν σχηματίζοντες πρότερον τὰ γινόμενα τοῦ ςαθεροῦ ἀριθμοῦ 24674011ο ἐπὶ 1, 2, 3 ἕως 9· διότι διὰ τούτου τοῦ μέσου, ἀμέσως θέλομεν ἔχει τὰ μερικὰ γινόμενα τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ τὰ διάφορα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαςοῦ ἡμ χ, καὶ δὲν μένει πλέον ἄλλό τι νὰ κάμωμεν παρὰ τὴν πρόσθεσιν τούτων τῶν γινομένων, περιοριζόμενοι πάντοτε εἰς τὸ δέκατον ἕκτον δεκαδικόν.

Τὰς αὐτὰς διδασκαλίας πρέπει τὶς νὰ ἀκολουθήσῃ εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τῶν συνημιτόνων· καὶ ὅταν λογαριασθῶσι τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα ὅλων τῶν περιεχομένων τόξων μεταξὺ ο καὶ 5ο°, τότε ὁ πίναξ θέλει εἶναι πλήρης.

λθ'. Εἶναι ἀναγκαῖον, πάλιν τὸ λέγομεν, νὰ λογαριασθῶσι τὰ ἡμίτονα μὲ 16 δεκαδικὰ, δηλαδὴ μὲ πέντε ἢ ἓξ δεκαδικὰ περισσότερον ἀπὸ ὅ,τι εἶναι χρεία, ὥςε τὰ σφάλματα, τὰ ὁποῖα ἠμποροῦν νὰ πολλαπλασιασθοῦν εἰς τὴν ὁδὸν 5οοο ἐργασιῶν νὰ μὴ ἐπιῤῥεύσουν εἰς τὸ δέκατον δεκαδικὸν τῶν τελευταίων ἐξαγομένων. Τοῦ ὑπολογισμοῦ γενομένου, ἀφαιροῦνται τὰ περιττὰ δεκαδικὰ καὶ φυλάττονται εἰς τὸν πίνακα μόνον δέκα δεκαδικά.

Τοῦ λοιποῦ, ὅταν πρόκειται νὰ ἐκτελεσθῶσι τόσοι ὑπολογισμοὶ, πρέπει νὰ ζητῆται ἡ ἀλήθευσις τῶν ἐξαγομένων ὅσον τὸ δυνατὸν πολλὰ συχνά. Εἰς τὸ ἀναφερθὲν παράδειγμα ἑνὸς πίνακος λογαριαζομένου ἀπὸ λεπτὸν εἰς λεπτὸν, ἤθελεν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ λογαριασθῶσι πρότερον τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα ἀπὸ μοῖραν εἰς μοῖραν· διότι τοῦτο ἤθελεν εἶναι ὠφελιμωτάτη βεβαίωσις ἀπὸ 100 εἰς 100 ὅρους. Τώρα διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῶν ἡμιτόνων ἀπὸ μοῖραν εἰς μοῖραν, πρέπει νὰ βαλθοῦν εἰς χρῆσιν οἱ ἀκόλουθοι τύποι καὶ τιμαὶ:

$$\text{ἡμ}\,(\chi+1^{\circ})-\text{ἡμ}\,\chi=\text{ἡμ}\,\chi-\text{ἡμ}\,(\chi-1^{\circ})-\theta\cdot\text{ἡμ}\,\chi$$

$$\text{συν}\,(\chi+1^{\circ})-\text{συν}\,\chi=\text{συν}\,\chi-\text{συν}\,(\chi-1^{\circ})-\theta\,\text{συν}\,\chi$$

$$\text{ἡμ}\,1^{\circ}=0.015707317311820676$$

$$\text{συν}\,1^{\circ}=0.999876632481660599$$

$$\theta=2(1-\text{συν}\,1^{\circ})=0.000246735036678802$$

Τὰ ἡμίτονα λογαριαζόμενα ἀπὸ μοῖραν εἰς μοῖραν βεβαιόνονται καὶ αὐτὰ ἀπὸ δέκα εἰς δέκα διὰ τῶν ἤδη γνωστῶν τιμῶν τοῦ ἡμ 10°, ἡμ 20° κτλ. Τέλος ὁ ὅλος πίναξ κατασκευασθεὶς ἠμπορεῖ νὰ βεβαιωθῇ καθ' ὅσους τρόπους θέλει τὶς διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$\text{ἡμ}\,(100^{\circ}-\chi)+\text{ἡμ}\,(20^{\circ}-\chi)+\text{ἡμ}\,(20^{\circ}+\chi)=\text{ἡμ}\,(60^{\circ}-\chi)+\text{ἡμ}\,(60^{\circ}+\chi).$$

μα΄. Τὰ ἡμίτονα, ὁποῖα προκύπτουσιν ἀπὸ τοὺς ὑπολογισμοὺς τοὺς ὁποίους ἐσημειώσαμεν, ἐκφράζονται διὰ μερῶν τῆς ἀκτῖνος, καὶ καλοῦνται **φυσικὰ ἡμίτονα**· πλὴν ἐπαρατηρήθη ὅτι εἰς τὴν πρᾶξιν ἡ χρῆσις τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων ἀντὶ τῶν ἰδίων ἡμιτόνων, εἶναι ἐπωφελεστέρα. Εννοεῖται δὲ ὅτι ἀφ' οὗ τὰ ἡμίτονα ἐλογαριάσθησαν, εὔκολον ἦτον νὰ εὑρεθῶσιν οἱ λογάριθμοί των· ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ὑπόθεσις τῆς ἀκτῖνος $=$ 1 ἤθελε κατας ήσει ἀρνητικοὺς ὅλους τοὺς λογαρίθμους τῶν ἡμιτόνων, ἐπροτιμήθη ἡ ὑπόθεσις τῆς ἀκτῖνος $=$ 10000000000, τοῦτ' ἔςιν ἐπολλαπλασιάσθησαν ἐπὶ 10000000000 ὅλα τὰ ἡμίτονα τὰ εὑρεθέντα εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀκτῖνος $=$ 1· καὶ τοῦτο διότι τὸ ἡμίτονον μιᾶς γωνίας μετρουμένης εἰς κύκλον διαφορετικῆς ἀκτῖνος ἀπὸ 1, ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμίτονον τῆς ἰδίας γωνίας μετρουμένης εἰς τὸν κύκλον τῆς ἀκτῖνος 1 πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τῆς νέας ἀκτῖνος. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἡ ἀκτὶς ἢ τὸ ἡμίτονον τῶν 100°, ἥτις συχνάκις ἀπαντᾶται εἰς τοὺς ὑπολογισμοὺς, ἔχει λογάριθμον 10 μονάδας, καὶ ἔπρεπε νὰ ἦναι τόσον μικραὶ αἱ γωνίαι ὥςε νὰ μὴ ἀπαντῶνται εἰς τὴν πρᾶξιν, διὰ νὰ ἔχουν τὰ ἡμίτονά των ἀρνητικοὺς λογαρίθμους.

Αφ' οὗ εὑρεθῶσιν οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων, εὐκολώτατα συνάγονται οἱ λογάριθμοι τῶν ἐφαπτομένων δι' ἁπλῶν ἀφαιρέσεων· διότι, ἐπειδὴ $\text{ἐφ.}\ \chi = \frac{\text{Ρἡμχ}}{\text{συν}\ \chi}$, ἀκολουθεῖ ὅτι $\text{λογ. ἐφ}\ \chi = 10 + \text{λογ. ἡμ}\ \chi - \text{λογ. συν}\chi$. Οσον διὰ τοὺς λογαρίθμους τῶν διατεμνουσῶν, μὲ ἔτι ἁπλούςερον τρόπον ἤθελον εὑρεθῇ διὰ τῆς ἐξισώσεως, $\text{δια}\ \chi = \frac{\text{Ρ}^2}{\text{συν}\ \chi}$· ἐπειδὴ μὲ τόσην εὐκολίαν συνάγονται οἱ λογάριθμοι τῶν τοιούτων γραμμῶν, διὰ τοῦτο εἰς τοὺς πίνακας καταχωρίζονται μόνον οἱ λογάριθμοι τῶν ἡμιτόνων καὶ ἐφαπτομένων.

Εμενε νὰ ἐξηγήσω τὸ εἶδος τῆς παρεμβολῆς (interpolation), τῆς ὁποίας γίνεται χρῆσις, εἴτε διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ ἐφαπτομένων τόξων τὰ ὁποῖα περιέχουν κλάσματα λεπτοῦ, εἴτε διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ εἰς δεδομένον λογάριθμον ἡμιτόνου ἢ ἐφαπτομένης ἀνταποκρινομένου τόξου, ὅταν ὁ λογάριθμος οὗτος πίπτῃ μεταξὺ δύο λογαρίθμων τῶν πινάκων. Πλὴν δι' ὅλα ταῦτα ἠμπορεῖ τὶς νὰ συμβουλευθῇ τὴν ἑρμηνείαν ἀπὸ τὴν ὁποίαν οἱ πίνακες πάντοτε συντροφεύονται.

Αρχαὶ διὰ τὴν λύσιν τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων.

μβ'. Εἰς κάθε τρίγωνον ὀρθογώνιον ἡ ἀκτὶς εἶναι πρὸς τὸ ἡμίτονον μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, ὡς ἡ ὑποτείνουσα πρὸς τὴν ἀπέναντι εἰς ταύτην τὴν γωνίαν πλευράν.

Εςω ΑΒΓ τὸ προτεθὲν ὀρθογώνιον εἰς Α τρίγωνον (σχ. 3)· ἐκ τῆς ςιγμῆς Γ, ὡς ἐκ κέντρου, μὲ ἀκτῖνα τὴν ΓΔ ἴσην μὲ τὴν τῶν πινάκων, ἂς γραφθῇ τὸ τόξον ΔΕ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας Γ· ἐπὶ τῆς ΓΔ ἄς κατεβασθῇ ἡ κάθετος ΕΖ ἥτις εἶναι τὸ ἡμίτονον τῆς ἰδίας γωνίας. Τὰ τρίγωνα ΓΒΑ, ΓΕΖ εἶναι ὅμοια καὶ δίδουν τὴν ἀναλογίαν ΓΕ : ΕΖ : : ΓΒ : ΒΑ· λοιπὸν

Ρ : ἡμ Γ : : ΒΓ : ΒΑ.

μγ'. Εἰς κάθε τρίγωνον ὀρθογώνιον ἡ ἀκτὶς εἶναι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, ὡς ἡ προσκειμένη εἰς ταύτην τὴν γωνίαν πλευρὰ πρὸς τὴν ἀπέναντι.

Γραφθέντος, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον ἄρθρον, τοῦ τόξου ΔΕ, ἄς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς ΓΔ ἡ κάθετος ΔΗ ἥτις εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας Γ. Εκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΓΔΗ, ΓΑΒ συνάγεται ἡ ἀναλογία ΓΔ : ΔΗ : : ΓΑ : ΑΒ· λοιπὸν

Ρ : ἐφ Γ : : ΓΑ : ΑΒ.

μδ'. Εἰς ὁποιονδήποτε εὐθύγραμμον τρίγωνον τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

Εςω ΑΒΓ (σχ. 4) τὸ προτεθὲν τρίγωνον, ΑΔ ἡ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ΒΓ ἠγμένη κάθετος· δυνατὸν νὰ ἀκολουθήσουν δύο περιςάσεις :

1η Ἐὰν ἡ κάθετος πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ θέλουν δώσει, κατὰ τὸ ἀρ. μδʹ.

$$\text{Ρ} : \text{ἡμ Β} :: \text{ΑΒ} : \text{ΑΔ}$$
$$\text{Ρ} : \text{ἡμ Γ} :: \text{ΑΓ} : \text{ΑΔ}.$$

Ἐπειδὴ εἰς τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας τὰ ἄκρα εἶναι ἴσα, τὰ μέσα εἶναι ἀνάλογα, καὶ οὕτω

$$\text{ἡμ Γ} : \text{ἡμ Β} :: \text{ΑΒ} : \text{ΑΓ}.$$

2α Ἐὰν δὲ ἡ κάθετος πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 5), ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΔ, θέλουν συναχθῇ ἀκόμη αἱ ἀναλογίαι

$$\text{Ρ} : \text{ἡμ ΑΒΔ} :: \text{ΑΒ} : \text{ΑΔ}$$
$$\text{Ρ} : \text{ἡμ Γ} :: \text{ΑΓ} : \text{ΑΔ} :$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἡμ Γ : ἡμ ΑΒΔ :: ΑΒ : ΑΓ· πλὴν ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΑΒΓ ἢ Β, τὸ ἡμίτονον τῆς ΑΒΔ γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ τῆς ΑΒΓ ἢ Β· λοιπὸν

$$\text{ἡμ Γ} : \text{ἡμ Β} :: \text{ΑΒ} : \text{ΑΓ}.$$

μεʹ. Εἰς κάθε εὐθύγραμμον τρίγωνον τὸ συνημίτονον μιᾶς γωνίας εἶναι πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ὡς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν αἱ ὁποῖαι περιέχουν ταύτην τὴν γωνίαν μεῖον τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης πλευρᾶς, πρὸς τὸ διπλοῦν ὀρθογώνιον τῶν δύο πρώτων πλευρῶν· τοῦτ' ἔστι :

$$\text{συνΒ} : \text{Ρ} :: \overline{\text{ΑΒ}}^2 + \overline{\text{ΒΓ}}^2 - \overline{\text{ΑΓ}}^2 : 2\text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ} \text{ ἢ } \text{συνΒ} = \text{Ρ} \times \frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2 + \overline{\text{ΒΓ}}^2 - \overline{\text{ΑΓ}}^2}{2\text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ}}$$

Ἂς κατεβασθῇ ἀκόμη ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἡ κάθετος ΑΔ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

1ον Ἐὰν ἡ κάθετος αὕτη πέσῃ ἐντὸς τοῦ τριγώνου (σχ. 4), θέλει εἶναι (Γεωμ. βιβλ. 3. πρ. 12) $\overline{\text{ΑΓ}}^2 = \overline{\text{ΑΒ}}^2 + \overline{\text{ΒΓ}}^2 - 2\text{ΒΓ} \times \text{ΒΔ}$· λοιπὸν $\text{ΒΔ} = \frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2 + \overline{\text{ΒΓ}}^2 - \overline{\text{ΑΓ}}^2}{2\text{ΒΓ}}$. Ἀλλὰ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ, Ρ : ἡμ ΒΑΔ :: ΑΒ : ΒΔ· ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΒΑΔ εἶναι συμπλήρωμα τῆς Β, ἀκολουθεῖ ὅτι ἡμ ΒΑΔ = συν Β· λοιπὸν συν $\text{Β} = \frac{\text{Ρ} \times \text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}}$, ἤ, τῇ ἀντεισαγωγῇ τῆς τιμῆς τῆς ΒΔ,

$$\text{συν Β} = \text{Ρ} \times \frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2 + \overline{\text{ΒΓ}}^2 - \overline{\text{ΑΓ}}^2}{2\text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ}}$$

2ον Ἐὰν ἡ κάθετος πέσῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (σχ. 5), θέλει εἶναι $\overline{\text{ΑΓ}}^2 = \overline{\text{ΑΒ}}^2 + \overline{\text{ΒΓ}}^2 + 2\text{ΒΓ} \times \text{ΒΔ}$. (13, 3)· λοιπὸν $\text{ΒΔ} = \frac{\overline{\text{ΑΓ}}^2 - \overline{\text{ΑΒ}}^2 - \overline{\text{ΒΓ}}^2}{2\text{ΒΓ}}$. Ἀλλ' εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΔ, ἡμ ΒΑΔ, ἢ συν $\text{ΑΒΔ} = \frac{\text{Ρ} \times \text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}}$, καὶ ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΒΔ εἶναι παραπλήρωμα τῆς ΑΒΓ ἢ Β, διὰ τοῦτο (ια′) συν Β = − συν $\text{ΑΒΔ} = -\frac{\text{Ρ} \times \text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}}$· λοιπόν, τῇ ἀντεισαγωγῇ τῆς τιμῆς τῆς ΒΔ, θέλει προκύψει,

$$\text{συν Β} = \text{Ρ} \times \frac{\overline{\text{ΑΒ}}^2 + \overline{\text{ΒΓ}}^2 - \overline{\text{ΑΓ}}^2}{2\text{ΑΒ} \times \text{ΒΓ}}.$$

μς′. Ἔστωσαν Α, Β, Γ, αἱ τρεῖς γωνίαι ὁποιουδήποτε τριγώνου· α, β, γ αἱ ἀμοιβαίως ἀπέναντι τούτων πλευραί· κατὰ τὴν τελευταίαν ταύτην πρότασιν θέλομεν ἔχει συν $\text{Β} = \text{Ρ} \cdot \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$. Ἡ αὐτὴ ἀρχὴ ἐφαρμοζομένη εἰς ἑκάστην τῶν ἄλλων δύο γωνιῶν δίδει παρομοίως συν Α $= \mathrm{P}.\ \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$, συν Γ $= \mathrm{P}.\ \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$.

Οἱ τρεῖς οὗτοι τύποι ἀρκοῦν μόνοι διὰ τὴν λύσιν ὅλων τῶν προβλημάτων τῆς εὐθυγράμμου τριγωνομετρίας· διότι δίδουν τὰς ἀναγκαίας ἐξισώσεις διὰ τὴν προσδιόρισιν τριῶν ἀπὸ τὰς ἓξ ποσότητας Α, Β, Γ, α, β, γ, ὅταν αἱ ἄλλαι τρεῖς ἦναι γνωσταί. Επομένως αἱ ἤδη ἐκτεθεῖσαι ἀρχαὶ καὶ ὅσαι ἄλλαι ἠμποροῦν εἰς ταύτας νὰ προστεθοῦν πρέπει νὰ ἦναι συνέπεια τῶν τριῶν τούτων ἀρχικῶν τύπων.

Τῷ ὄντι, ἡ τιμὴ τοῦ συν Β δίδει ἡμ^{2}Β $= \mathrm{P}^2 -$ συν^{2}Β $= \mathrm{P}^2.\frac{4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2}{4\alpha^2\gamma^2} = \frac{\mathrm{P}^2}{4\alpha^2\gamma^2}(2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4)$· λοιπὸν $\frac{\text{ἡμ Β}}{\beta} = \frac{\mathrm{P}}{2\alpha\beta\gamma}\sqrt{(2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4)}$.

Επειδὴ τὸ δεύτερον μέλος εἶναι συμμετρικὴ λειτουργία τῶν α, β, γ, φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν δύο τούτων τῶν γραμμάτων κατ' ἀρέσκειαν, καὶ οὕτω θέλομεν ἔχει $\frac{\text{ἡμ Β}}{\beta} = \frac{\text{ἡμ Α}}{\alpha} = \frac{\text{ἡμ Γ}}{\gamma}$. τοῦτο δὲ ἄλλό τι δὲν εἶναι παρὰ ἡ τοῦ ἀρ. μδ' ἀρχή. Απὸ ταύτην εὐκόλως ἠθέλαμεν συνάξει τὰς ἀρχὰς τῶν ἀρ. μβ' καὶ μγ'.

μζ'. Εἰς κάθε τρίγωνον εὐθύγραμμον τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν εἶναι πρὸς τὴν διαφοράν των, ὡς ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἀπέναντι εἰς ταύτας τὰς πλευρὰς γωνιῶν, πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν αὐτῶν γωνιῶν.

Διότι (σχ. 4 καὶ 5) ἐκ τῆς ἀναλογίας ΑΒ : ΑΓ :: ἡμ Γ : ἡμ Β, συνάγεται ΑΓ + ΑΒ : ΑΓ — ΑΒ :: ἡμ Β +

ἡμ Γ : ἡμ Β — ἡμ Γ. Ἀλλὰ κατὰ τοὺς τύπους τοῦ ἀρ. κθ', ἔχομεν

$$ἡμ\,Β + ἡμ\,Γ : ἡμ\,Β - ἡμ\,Γ :: ἐφ\,\frac{Β+Γ}{2} : ἐφ\,\frac{Β-Γ}{2}$$ · λοιπὸν

$$ΑΓ + ΑΒ : ΑΓ - ΑΒ :: ἐφ\,\frac{Β+Γ}{2} : ἐφ\,\frac{Β-Γ}{2}.$$

Ἀναλογία ἥτις ἄλλο δὲν εἶναι παρὰ ἡ ἐκφωνηθεῖσα ἀρχή.

Διὰ τῶν ὀλιγαρίθμων τούτων ἀρχῶν ἠμποροῦν νὰ λυθῶσιν ὅλαι αἱ περιςάσεις τῆς εὐθυγράμμου τριγωνομετρίας.

Λύσις τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

μη'. Ἔςω Α ἡ ὀρθὴ γωνία προτεθέντος τινὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, Β καὶ Γ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι· ἔςω α ἡ ὑποτείνουσα, β ἡ ἀπέναντι εἰς τὴν γωνίαν Β πλευρὰ, καὶ γ ἡ ἀπέναντι εἰς τὴν γωνίαν Γ. Πρέπει νὰ ἔχωμεν κατὰ νοῦν ὅτι αἱ δύο γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι συμπληρώματα ἡ μία τῆς ἄλλης, καὶ οὕτω, κατὰ τὰς διαφόρους περιςάσεις, ἠμποροῦμεν νὰ λαμβάνωμεν ἡμ Γ = συν Β, ἡμ Β = συν Γ, καὶ παρομοίως ἐφ Β = σφ Γ, ἐφ Γ = σφ Β. Τούτου τεθέντος, τὰ διάφορα προβλήματα τὰ ὁποῖα δυνατὸν νὰ ἔχωμεν διὰ νὰ λύσωμεν ἐπάνω εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἀνάγονται πάντοτε εἰς τὰς ἀκολούθους τέσσαρας περιςάσεις.

ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

μθ'. Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης α καὶ μιᾶς πλευρᾶς β, νὰ εὑρεθῶσιν ἡ τρίτη πλευρὰ, καὶ αἱ ἄλλαι δύο ὀξεῖαι γωνίαι.

Η προσδιόρισις τῆς γωνίας Β, γίνεται διὰ τῆς ἀναλογίας (μϐ') α : β :: Ρ : ἡμ Β. Γνωςῆς τῆς γωνίας Β, γίνεται γνωςὸν ἐνταυτῷ καὶ τὸ συμπλήρωμά της 100° — Β = Γ, δυνατὸν δὲ καὶ κατ' εὐθεῖαν διὰ τῆς ἀναλογίας α : β :: Ρ : συν Γ νὰ προσδιορισθῇ ἡ Γ.

Οσον διὰ τὴν τρίτην πλευρὰν γ, ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ κατὰ δύο τρόπους. Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῆς γωνίας Β, δυνατὸν νὰ γένῃ ἡ ἀναλογία ($\mu\gamma'$) P : τφ B : : ϐ : γ, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ἡ τιμὴ τῆς γ· ἢ δυνατὸν νὰ συναχθῇ κατ' εὐθεῖαν ἡ τιμὴ τῆς γ, ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, ἥτις διδει $\gamma = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)}$, καὶ ἑπομένως

$$\lambda o\gamma.\ \gamma = \tfrac{1}{2}\ \lambda o\gamma.\ (\alpha + \beta) + \tfrac{1}{2}\ \lambda o\gamma.\ (\alpha - \beta).$$

ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

ν'. Δοθεισῶν τῶν δύο πλευρῶν ϐ καὶ γ τῆς ὀρθῆς γωνίας, νὰ εὑρεθῶσιν ἡ ὑποτείνουσα καὶ αἱ γωνίαι.

Η γωνία B προσδιορίζεται διὰ τῆς ἀναλογίας ($\mu\gamma'$) γ : β : : P : ἐφ B. Ἀκολούθως Γ = 100° — B. Ηθελε δὲ εὑρεθῇ κατ' εὐθεῖαν ἡ γωνία Γ διὰ τῆς ἀναλογίας β : γ : : P : ἐφ Γ.

Γνωςῆς τῆς γωνίας B, ἡ ὑποτείνουσα εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀναλογίας ἡμ B : P : : β : α· ἢ δυνατὸν νὰ προσδιορισθῇ α κατ' εὐθεῖαν διὰ τῆς ἐξισώσεως $\alpha = \sqrt{(\beta^2 + \gamma^2)}$· ἡ ἔκφρασις ὅμως αὕτη, ἐπειδὴ $\beta^2 + \gamma^2$ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἀναλυθῇ εἰς παράγοντας, δὲν εἶναι ἐπιτηδεία διὰ τὸν λογαριθμικὸν ὑπολογισμόν.

ΤΡΙΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

να'. Δοθείσης τῆς ὑποτεινούσης α καὶ μιᾶς γωνίας B, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ β καὶ γ.

Αἱ ἀναλογίαι P : ἡμ B : : α : β, P : συν B : : α : γ· δίδουν τὰς τιμὰς τῆς β καὶ γ. Οσον διὰ τὴν γωνίαν Γ, αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ συμπλήρωμα τῆς B.

ΤΕΤΑΡΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

νβ'. Δοθείσης τῆς πλευρᾶς β τῆς ὀρθῆς γωνίας μὲ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη πλευρά.

Γνωςῆς μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν γίνεται γνωςὴ ἡ ἄλλη· ὅθεν δυνατὸν νὰ ὑποτεθῶσι γνωςὰ ἡ πλευρὰ β καὶ ἡ ἀπέναντι γωνία Β. Ἀκολούθως, αἱ πλευραὶ α καὶ γ δίδονται ἀπὸ τὰς ἀναλογίας ἡμ. Β : Ρ : : β : α, Ρ : σφ Β : : ϐ : γ.

Λύσις τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων ἐν γένει.

Ἔςωσαν Α, Β, Γ, αἱ τρεῖς γωνίαι προτεθέντος τινὸς εὐθυγράμμου τριγώνου, καὶ α, ϐ, γ αἱ ἀμοιβαίως εἰς ταύτας ἀπέναντι πλευραί: τὰ διάφορα προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ἤθελε ζητεῖται ἡ προσδιόρισις τριῶν τούτων τῶν ποσοτήτων διὰ μέσου τῶν ἄλλων τριῶν, πάντοτε ἠμποροῦν νὰ ἀναχθοῦν εἰς τὰς ἀκολούθους τέσσαρας περιςάσεις.

ΠΡΩΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

νγʹ. Δοθείσης τῆς πλευρᾶς α καὶ δύο τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, νὰ εὑρεθῶσιν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ϐ καὶ γ.

Αἱ δύο γνωςαὶ γωνίαι κάμνουν γνωςὴν τὴν τρίτην, ἀκολούθως αἱ δύο πλευραὶ β καὶ γ εὑρίσκονται διὰ τῶν ἀναλογιῶν (μδʹ).

ἡμ. Α : ἡμ. Β : : α : β.
ἡμ. Α : ἡμ. Γ : : α : γ.

ΔΕΥΤΕΡΑ ΠΕΡΙΣΤΑΣΙΣ.

νδʹ. Δοθεισῶν τῶν δύο πλευρῶν α καὶ ϐ, μετὰ τῆς γωνίας Α ἀπέναντι μιᾶς τούτων τῶν πλευρῶν, νὰ εὑρεθῶσιν ἡ τρίτη πλευρὰ γ καὶ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι Β καὶ Γ.

Η γωνία Β εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀναλογίας

α : β : : ἡμ. Α : ἡμ. Β.

Ἔςω Μ ἡ ὀξεῖα γωνία τῆς ὁποίας τὸ ἡμίτονον $= \frac{ϐ\,ἡμ.Α}{α}$.

ἐπειδὴ ἡμ. Μ = ἡμ. (200° — Μ)· διὰ τοῦτο δυνατὸν νὰ ληφθῇ Β = Μ ἢ Β = 200° — Μ. Ἀλλ' αἱ δύο αὗται λύσεις δὲν ἔχουν χώραν παρ' ὁσάκις εἰς τὸν αὐτὸν καιρὸν ἡ γωνία Α εἶναι ὀξεῖα καὶ ϐ > α. Ἐὰν δὲ ἡ γωνία Α ἦναι