$$\frac{\text{ημ}\pi+\text{ημ}\kappa}{\text{ημ}\pi-\text{ημ}\kappa}=\frac{\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)\text{συν}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}{\text{συν}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}=\frac{\text{εφ}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}{\text{εφ}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}$$

$$\frac{\text{ημ}\pi+\text{ημ}\kappa}{\text{συν}\pi+\text{συν}\kappa}=\frac{\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}{\text{συν}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}=\frac{\text{εφ}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}{P}$$

$$\frac{\text{ημ}\pi+\text{ημ}\kappa}{\text{συν}\kappa-\text{συν}\pi}=\frac{\text{συν}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}{\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}=\frac{\text{σφ}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}{P}$$

$$\frac{\text{ημ}\pi-\text{ημ}\kappa}{\text{συν}\pi+\text{συν}\kappa}=\frac{\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}{\text{συν}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}=\frac{\text{εφ}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}{P}$$

$$\frac{\text{ημ}\pi-\text{ημ}\kappa}{\text{συν}\kappa-\text{συν}\pi}=\frac{\text{συν}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}{\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}=\frac{\text{σφ}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}{P}$$

$$\frac{\text{συν}\pi+\text{συν}\kappa}{\text{συν}\kappa-\text{συν}\pi}=\frac{\text{συν}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)\,\text{συν}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}{\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)\,\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}=\frac{\text{σφ}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}{\text{εφ}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}$$

$$\frac{\text{ημ}(\pi+\kappa)}{\text{ημ}\pi+\text{ημ}\kappa}=\frac{2\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)\text{συν}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}{2\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)\text{συν}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}=\frac{\text{συν}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}{\text{συν}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}$$

$$\frac{\text{ημ}(\pi+\kappa)}{\text{ημ}\pi-\text{ημ}\kappa}=\frac{2\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)\text{συν}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}{2\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)\text{συν}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}=\frac{\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi+\kappa)}{\text{ημ}\frac{1}{2}(\pi-\kappa)}$$

Τύποι οἵτινες ἐκφράζουν τόσα θεωρήματα· ἐκ τοῦ πρώτου ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων δύο τόξων εἶναι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἰδίων ἡμιτόνων, ὡς ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν τόξων εἶναι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιδιαφορᾶς των.

λ'. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους τῶν τριῶν προηγουμένων ἄρθρων κάμωμεν $\beta=\alpha$, ἢ $\kappa=0$, θέλομεν ἔχει τὰ ἀκόλουθα ἐξαγόμενα:

$$\text{συν}^2\alpha=\tfrac{1}{2}P^2+\tfrac{1}{2}P\text{συν}2\alpha$$
$$\text{ημ}^2\alpha=\tfrac{1}{2}P^2-\tfrac{1}{2}P\text{συν}2\alpha$$
$$P+\text{συν}\pi=\frac{2\text{συν}^2\frac{1}{2}\pi}{P}$$

$$P - \sigma \upsilon \nu \pi = \frac{2 \acute{\eta} \mu^2 \frac{1}{2} \pi}{P}$$

$$\acute{\eta} \mu \, \pi = \frac{2 \acute{\eta} \mu \frac{1}{2} \pi \, \sigma \upsilon \nu \frac{1}{2} \pi}{P}$$

$$\frac{\acute{\eta} \mu \, \pi}{P + \sigma \upsilon \nu \pi} = \frac{\dot{\epsilon} \varphi \frac{1}{2} \pi}{P} = \frac{P}{\sigma \varphi \frac{1}{2} \pi}$$

$$\frac{\acute{\eta} \mu \, \pi}{P - \sigma \upsilon \nu \, \pi} = \frac{\sigma \varphi \frac{1}{2} \pi}{P} = \frac{P}{\epsilon \varphi \frac{1}{2} \pi}$$

$$\frac{P + \sigma \upsilon \nu \, \pi}{P - \sigma \upsilon \nu \pi} = \frac{\sigma \varphi^2 \frac{1}{2} \pi}{P^2} = \frac{P^2}{\epsilon \varphi^2 \frac{1}{2} \pi}$$

λα΄. Διὰ νὰ ἀναπτύξωμεν καὶ μερικοὺς τύπους ὡς πρὸς τὰς ἐφαπτομένας, ἄς θεωρήσωμεν τὴν ἔκφρασιν ἐφ $(\alpha + \beta) = \frac{P \acute{\eta} \mu (\alpha + \beta)}{\sigma \upsilon \nu (\alpha + \beta)}$, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ἀντείσαξις τῶν τιμῶν τοῦ ἡμ $(\alpha + \beta)$ καὶ συν $(\alpha + \beta)$, δίδει

$$\dot{\epsilon} \varphi \, (\alpha + \beta) = \frac{P \, (\acute{\eta} \mu \, \alpha \, \sigma \upsilon \nu \, \beta + \acute{\eta} \mu \, \beta \, \sigma \upsilon \nu \, \alpha)}{\sigma \upsilon \nu \, \alpha \, \sigma \upsilon \nu \, \beta - \acute{\eta} \mu \, \beta \, \acute{\eta} \mu \, \alpha}$$

Ἀλλὰ $\frac{\acute{\eta} \mu \, \alpha}{\sigma \upsilon \nu \alpha} = \frac{P \, \epsilon \varphi \, \alpha}{P}$ ἢ ἡμ $\alpha = \frac{\sigma \upsilon \nu \, \alpha \, \epsilon \varphi \, \alpha}{P}$ καὶ ἡμ$\beta = \frac{\sigma \upsilon \nu \, \beta \, \epsilon \varphi \, \beta}{P}$· ἀντεισάγοντες ταύτας τὰς τιμὰς καὶ διαιροῦντες ἔπειτα ὅλους τοὺς ὅρους διὰ συν α συν β, θέλομεν ἔχει

$$\dot{\epsilon} \varphi \, (\alpha + \beta) = \frac{P^2 (\dot{\epsilon} \varphi \, \alpha + \dot{\epsilon} \varphi \, \beta)}{P^2 - \epsilon \varphi \, \alpha \, \epsilon \varphi \, \beta}$$

Αὕτη εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων, ἐκφραζομένη διὰ τῶν ἐφαπτομένων ἑκάστου τούτων τῶν τόξων. Ὁμοίως ἠθέλαμεν εὕρῃ διὰ τὴν ἐφαπτομένην τῆς διαφορᾶς των

$$\dot{\epsilon} \varphi \, (\alpha - \beta) = \frac{P^2 (\dot{\epsilon} \varphi \, \alpha - \dot{\epsilon} \varphi \, \beta)}{P^2 + \dot{\epsilon} \varphi \, \alpha \, \dot{\epsilon} \varphi \, \beta}.$$

Εςω β = α, ἔχομεν διὰ τὸν διπλασιασμὸν τῶν τόξων τὸν τύπον

$$\text{ἐφ}\ 2\alpha = \frac{2\text{P}^2\ \text{ἐφ}\ \alpha}{\text{P}^2 - \text{ἐφα}},$$

καὶ ἐντεῦθεν

$$\text{σφ}\ 2\alpha = \frac{\text{P}^2}{\text{ἐφ}\ 2\alpha} = \frac{\text{P}^2}{2\ \text{ἐφ}\ \alpha} - \tfrac{1}{2}\ \text{ἐφα} = \tfrac{1}{2}\ \text{σφα} - \tfrac{1}{2}\text{ἐφα}.$$

Εςω β = 2α, θέλομεν ἔχει διὰ τὸν τριπλασιασμόν των τὸν τύπον:

$$\text{ἐφ}\ 3\alpha = \frac{\text{P}^2\ (\text{ἐφ}\ \alpha + \text{ἐφ}\ 2\alpha)}{\text{P}^2 - \text{ἐφ}\ \alpha\ \text{ἐφ}\ 2\alpha},$$

ὅςις μετὰ τὴν ἀντεισαγωγὴν τῆς τιμῆς τῆς ἐφ 2α, τρέπεται εἰς

$$\text{ἐφ}\ 3\alpha = \frac{3\text{P}^2\text{ἐφ}\ \alpha - \text{ἐφ}^3\ \alpha}{\text{P}^2 - 3\ \text{ἐφ}^2\alpha}.$$

λβʹ. Η Ανάπτυξις τῶν τριγωνομετρικῶν τύπων, θεωρουμένη καθ' ὅλην της τὴν γενικότητα, σχηματίζει ἀξιόλογον κλάδον τῆς ἀναλύσεως, περὶ τοῦ ὁποίου ἠμπορεῖ τὶς νὰ συμβουλευθῇ τὸ ἔξοχον σύγγραμμα τοῦ Εὐλήρου (Euler), ἐπιγραφόμενον introductio in analysin infinitorum (εἰσαγωγὴ εἰς τὴν τῶν Απειροςῶν ἀνάλυσιν) ἢ τὴν μετάφρασίν του ὑπὸ τοῦ Κ. Λαβεύου (Labey). Κρίνομεν ὅμως ἀναγκαῖον νὰ ἀποδείξωμεν ἀκόμη τοὺς τύπους οἱ ὁποῖοι χρησιμεύουν νὰ ἐκφράσουν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἑνὸς τόξου διὰ λειτουργίας τοῦ τόξου, τύποι τῶν ὁποίων ἡ γνῶσις ὑποτίθεται εἰς τὴν Εʹ σημείωσιν, καὶ οἱ ὁποῖοι περιπλέον εἶναι ἀναγκαῖοι διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν πινάκων.

Καὶ κατὰ πρῶτον ὑποτεθείσης τῆς ἀκτῖνος = 1, ἡ ὁποία ὑπόθεσις δὲν μεταβάλλει τὴν γενικότητα τῶν ἐξαγομένων, ἔχομεν τὸν τύπον $\text{συν}^2\text{A} + \text{ἡμ}^2\text{A} = 1$· ἄς καλέσωμεν διὰ μίαν ςιγμὴν $\text{συν}^2\text{A} + \text{ἡμ}^2\text{A} = 0$, συνάγομεν

$\text{συν}^2 A = -\text{ἡμ}^2 A$· ὅθεν $\sigma A = \pm \text{ἡμ} A \sqrt{-1}$· ἐπομένως $\sigma A + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} A$, $\text{συν} A - \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} A$ εἶναι οἱ δύο παράγοντες τοῦ πρώτου μέλους τῆς εἰρημένης ἐξισώσεως· λοιπὸν τὸ πρῶτον τοῦτο μέλος εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων κατ' ἐπίνοιαν παραγόντων· ὁμοίως διὰ ἓν ἄλλο τόξον B, ἠθέλαμεν ἔχει, $\text{συν} B + \sqrt{-}\,\text{ἡμ} B$, $\text{συν} B - \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} B$ διὰ τοὺς δύο παράγοντας τοῦ δυωνύμου $\text{συν}^2 B + \text{ἡμ}^2 B$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ὁμοῦ δύο ὁμοίους παράγοντας $\text{συν} A + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} A$, $\text{συν} B + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} B$, τὸ γινόμενόν των θέλει εἶναι $\text{συν} A\,\text{συν} B - \text{ἡμ} A\,\text{ἡμ} B + (\text{ἡμ} A\,\text{συν} B + \text{ἡμ} B\,\text{συν} A)\sqrt{-1}$, καὶ ἐπομένως ἄγεται εἰς τὴν μορφὴν $\text{συν}(A+B) + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ}(A+B)$, ἡ ὁποία εἶναι ὁμοία μὲ τὴν μορφὴν ἑκάστου τῶν παραγόντων. Εν γένει λοιπὸν ἔχομεν

$(\text{συν} A + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} A)(\text{συν} B + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} B) = \text{συν}(A+B) + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ}(A+B)$·

ἔσω $A + B = A'$, καὶ ἄς πολλαπλασιάσωμεν $\text{συν} A' + \text{ἡμ} A' \sqrt{-1}$, ἐπὶ $\text{συν}\Gamma + \text{ἡμ}\Gamma\sqrt{-1}$, εὑρίσκομεν ὡσαύτως

$$(\text{συν} A' + \text{ἡμ} A' \sqrt{-1})(\text{συν}\Gamma + \text{ἡμ}\Gamma\sqrt{-1}) = \text{συν}(A' + \Gamma) + \text{ἡμ}(A' + \Gamma)\sqrt{-1}$$

καὶ ἐπομένως

$$(\text{συν} A + \text{ἡμ} A \sqrt{-1})(\text{συν} B + \text{ἡμ} B \sqrt{-1})(\text{συν}\Gamma + \text{ἡμ}\Gamma\sqrt{-1}) = \text{συν}(A + B + \Gamma) + \text{ἡμ}(A + B + \Gamma)\sqrt{-1}.$$

Εν γένει ἔσω εἷς ἀριθμὸς ν· τόξων $A, B, \Gamma \ldots \Pi$, ἔχομεν προφανῶς τοῦτο τὸ ἐξαγόμενον

$$(\text{συν} A + \text{ἡμ} A \sqrt{-1})(\text{συν} B + \text{ἡμ} B \sqrt{-1}) \ldots (\text{συν}\Pi + \text{ἡμ}\Pi\sqrt{-1}) = \text{συν}(A + B + \Gamma + \ldots + \Pi) + \text{ἡμ}(A + B + \Gamma + \ldots + \Pi)\sqrt{-1}$$

Εἶναι ἀξιοπαρατήρητον ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν τοιούτων ποσοτήτων ἐκτελεῖται διὰ τῆς προσθέσεως τῶν τόξων, καθὼς ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς προσθέσεως τῶν λογαρίθμων των· ἐὰν τώρα εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν καλέσωμεν $A = B = \Gamma \ldots = \Pi$· συνάγομεν $A + B + \Gamma + \ldots + \Pi = \nu A$· ἐπομένως

$$(\text{συν} A + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} A)^{\nu} = \text{συν}.\, \nu A + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ}\, \nu A \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὁ τύπος οὗτος εἶναι ἀληθὴς, ὅποιον καὶ ἂν ἦναι τὸ τόξον A, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταςήσωμεν ἀντὶ $A, -A$, καὶ εὐθυμούμενοι ὅτι $\text{συν}(-A) = \text{συν} A$, $\text{ἡμ}(-A) = -\text{ἡμ} A$, συνάγομεν τοῦτον τὸν νέον τύπον

$$(\text{συν} A - \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} A)^{\nu} = \text{συν}.\nu A - \sqrt{-1}\,\text{ἡμ}\, \nu A \quad (2)$$

προσθαφαιροῦντες τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι συνέπεια τῆς ἄλλης, συνάγομεν τὰς τιμὰς τοῦ ἡμ νA καὶ συν νA: τοῦτ' ἔςι

$$\text{συν}.\nu A = \tfrac{1}{2}(\text{συν} A + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} A)^{\nu} + \tfrac{1}{2}(\text{συν} A - \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} A)^{\nu}$$

$$\text{ἡμ}.\, \nu A = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\text{συν} A + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} A)^{\nu} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\text{συν} A - \sqrt{-1}\,\text{ἡμ} A)^{\nu}$$

λγ΄. Ἐὰν τὰς αὐτὰς ποσότητας θέλωμεν νὰ ἐκφράσωμεν διὰ σειρῶν, πρέπει νὰ ἀναπτύξωμεν διὰ τοῦ τύπου τοῦ δυωνύμου $(\text{συν} A + \sqrt{-1}\,\text{ημ} A)^{\nu}$· ἐκτελοῦντες τὴν ἀνάπτυξιν ταύτην εὑρίσκομεν

$$\text{συν}^{\nu} A + \frac{\nu}{1}\text{συν}^{\nu-1} A\,\text{ἡμ} A\sqrt{-1} - \frac{\nu.\nu-1}{1.2}\text{συν}^{\nu-2} A\,\text{ἡμ}^{2} A - \frac{\nu.\nu-1.\nu-2}{1.2.3}\text{συν}^{\nu-3} A\,\text{ἡμ}^{3} A\sqrt{-1} + \frac{\nu.\nu-1.\nu-2.\nu-3}{1.2.3.4}\text{συν}^{\nu-4} A\,\text{ἡμ}^{4} A + \text{κτλ.}$$

Ὅθεν βλέπομεν ὅτι τὸ ξετύλιγμα τοῦτο σύγκειται ἀπὸ δύο ξεχωριςὰ μέρη: τὸ ἓν εἶναι πραγματικὸν καὶ προέρχεται ἀπὸ τὴν ἕνωσιν ὅλων τῶν ὅρων τῶν ἀνεξαρτήτων ἀπὸ $\sqrt{-1}$· τὸ ἄλλο κατ' ἐπίνοιαν, καὶ προέρχεται ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν ὅρων οἵτινες περιέχουν $\sqrt{-1}$· ἀπὸ ἄλλο μέρος ἐπειδὴ τὸ ξετύλιγμα τοῦτο ἐκφράζει τὴν τιμὴν τῆς ἐκφράσεως $\text{συν}.\nu A + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ}\, \nu A$· διὰ τοῦτο τὸ πραγματικὸν μέρος τῆς ἐκφράσεως πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πραγματικὸν τοῦ ξετυλίγματος, καὶ τὸ κατ' ἐπίνοιαν μὲ τὸ κατ' ἐπίνοιαν· ἔχομεν λοιπὸν

$$\sigma\upsilon\nu.\nu A = \sigma\upsilon\nu^{\nu} A - \frac{\nu.\nu-1}{1.2}\sigma\upsilon\nu^{\nu-2} A \acute{\eta}\mu^{2} A + \frac{\nu.\nu-1.\nu-2.\nu-3}{1.2.3.4}$$

$$\sigma\upsilon\nu^{\nu-4} A\, \acute{\eta}\mu^{4} A - \kappa.\tau.\lambda.$$

$$\acute{\eta}\mu.\nu A = \nu\, \sigma\upsilon\nu^{\nu-1} A \acute{\eta}\mu A - \frac{\nu.\nu-1.\nu-2}{1.2.3}\sigma\upsilon\nu^{\nu-3} A \acute{\eta}\mu^{3} A +$$

κτλ,

σειραὶ τῶν ὁποίων ὁ νόμος εἶναι εὐκατάληπτος, καὶ διὰ τῶν ὁποίων εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ἑνὸς τόξου πολλαπλασίου τοῦ α μὲ περισσοτέραν ταχύτητα παρὰ διὰ τῶν ἐργασιῶν τὰς ὁποίας ἐσημειώσαμεν εἰς τὸ κδ' ἄρθρον.

λδ'. Ἐπειδὴ ἔχομεν ἡμ.Α=συνΑεφΑ, ἐὰν εἰς τὰς ἀνωτέρω σειρὰς ἀντὶ ἡμΑ θέσωμεν ταύτην τὴν τιμὴν, καὶ ἀντὶ τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ ἡμΑ, τὰς δυνάμεις τῆς ἰδίας εὑρίσκομεν

$$\sigma\upsilon\nu.\nu A = \sigma\upsilon\nu^{\nu} A \left(1 - \frac{\nu.\nu-1}{1.2}\varepsilon\varphi^{2} A + \frac{\nu.\nu-1.\nu-2.\nu-3}{1.2.3.4}\right.$$

$$\left.\varepsilon\varphi^{4} A - \kappa\tau\lambda\right)$$

$$\acute{\eta}\mu.\nu A = \sigma\upsilon\nu^{\nu} A \left(\frac{\nu}{1}\varepsilon\varphi A - \frac{\nu.\nu-1.\nu-2}{1.2.3}\varepsilon\varphi^{3} A + \kappa\tau\lambda\right.$$

Ἔσω $\nu = \frac{\chi}{A}$. ἀντεισάγοντες ταύτην τὴν τιμὴν, καὶ φυλάττοντες μ' ὅλον τοῦτο τὸν παράγοντα συν$^{\nu}$Α, θέλομεν ἔχει.

$$\sigma\upsilon\nu.\chi = \sigma\upsilon\nu^{\nu} A\left(1 - \frac{\chi.\chi-A}{1.2.}\cdot\frac{\varepsilon\varphi^{2}\Delta}{\Delta^{2}} + \frac{\chi.\chi-A.\chi-2A.\chi-3A.}{1.2.3.4.}\right.$$

$$\left.\frac{\varepsilon\varphi^{4}\Delta}{\Delta_{4}} - \kappa\tau\lambda\right)$$

$$\acute{\eta}\mu.\chi = \sigma\upsilon\nu^{\nu} A\left(\frac{\chi}{1}.\ \frac{\varepsilon\varphi A}{A} - \frac{\chi.\chi-A.\chi-2A}{1.2.3}\cdot\frac{\varepsilon\varphi 3\Delta}{\Delta^{3}} + \kappa\tau\lambda.\right)$$

Ας σημειώσωμεν τώρα ὅτι ἐπειδὴ αἱ τρεῖς ποσότητες Α, χ καὶ ν συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $\text{ν}\text{Α}=\text{χ}$, δυνάμεθα νὰ μεταβάλλωμεν ν καὶ Α, ὥςε τὸ γινόμενόν των χ νὰ μένῃ ςαθερὸν· διότι ἐὰν λάβωμεν, παραδείγματος χάριν, διὰ Α μίαν σειρὰν τιμῶν κατ' ἀρέσκειαν, αἱ ἀντικείμεναι τιμαὶ τοῦ ν εἰς ταύτας τὰς τιμὰς τοῦ Α καὶ εἰς τὴν ςαθερὰν τιμὴν τοῦ χ, συνάγονται ἐκ τῆς σχέσεως $\text{ν}=\frac{\text{χ}}{\text{Α}}$. Ὅθεν εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους δυνάμεθα νὰ λάβωμεν Α κατ' ἀρέσκειαν. Ἐὰν ὑποθέσωμεν Α πολλὰ μικρὸν, τότε $\frac{\text{εφΑ}}{\text{Α}}$ ἤγουν ὁ λόγος τοῦ τόξου Α πρὸς τὴν ἐφαπτομένην του, πολλὰ ὀλίγον τῆς μονάδος θέλει διαφέρει, διότι ἡ ἐφαπτομένη τόξου μικροτάτου εἶναι σχεδὸν ἴση μὲ τὸ τόξον. Μ' ὅλον τοῦτο ἐν ὅσῳ τὸ τόξον δὲν εἶναι μηδὲν ἔχομεν $\text{ἐφΑ} > \text{Α}$· καὶ τοῦτο εἶναι φανερὸν· διότι (σχ. 1) τὸ τρίγωνον ΑΤΓ εἶναι πρὸς τὸν τομέα $\text{ΑΓΜ} :: \text{ΑΤ} \times \frac{1}{2}\text{ΑΓ} : \text{ΑΜ} \times \frac{1}{2}\text{ΑΓ} :: \text{ΑΤ} : \text{ΑΜ}$· καὶ ἐπειδὴ $\text{ΑΤΓ} > \text{ΑΓΜ}$, ἀκολουθεῖ ὅτι $\text{ΑΤ} > \text{ΑΜ}$· συνάγομεν λοιπὸν $\text{εφΑ} > \text{Α}$ ἢ $\frac{\text{εφΑ}}{\text{Α}} > 1$· ἐνταυτῷ ἔχομεν $\text{Α} > \text{ἡμΑ}$· καὶ τοῦτο διότι τὸ τόξον ΜΑΝ εἶναι μεῖζον τῆς χορδῆς του ΜΝ· λοιπὸν ΑΝ ἥμισυ τοῦ τόξου εἶναι μεῖζον τῆς ΜΠ ἡμισείας τῆς χορδῆς· ὅθεν ἐν ὅσῳ Α δὲν εἶναι μηδὲν ἔχομεν $\text{Α} > \text{ἡμΑ}$· ἐπειδὴ δὲ $\text{ἐφΑ} = \text{εφΑ}$· διὰ τοῦτο $\frac{\text{ἐφΑ}}{\text{Α}} < \frac{\text{ἐφΑ}}{\text{ἡμΑ}}$, ἢ $\frac{\text{ἐφΑ}}{\text{Α}} < \frac{1}{\text{συνΑ}}$· ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι ὁ λόγος $\frac{\text{ἐφΑ}}{\text{Α}}$ πάντοτε περιέχεται μεταξὺ τῶν ὁρίων 1 καὶ $\frac{1}{\text{συνΑ}}$· καὶ ὅτι ἀκαταπαύςως τείνει πρὸς τὴν μονάδα ὅσον συνΑ πλησιάζει πρὸς αὐτὴν, ἢ ὅσον τὸ τόξον Α πλησιάζει νὰ γένῃ πάσης δεδομένης ποσότητος ἔλασσον· ὅταν λοιπὸν

Α φθάσῃ εἰς τοῦτο τὸ ὅριον, τότε ὁ λόγος $\frac{\varepsilon\varphi A}{A}$ ἀκριβῶς εἶναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα: μὲ ἄλλους ὅρους ὅταν $A=0$, τότε $\sigma\upsilon\nu A=1$· καὶ $\frac{\varepsilon\varphi A}{A}=1$. Κάμνοντες λοιπὸν $A=0$, θέλομεν ἔχει

$$\sigma\upsilon\nu\chi=\sigma\upsilon\nu^{\nu}A\left(1-\frac{\chi^2}{1\cdot 2\cdot}+\frac{\chi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{\chi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\kappa\tau\lambda\right)$$

$$\eta\mu\chi=\sigma\upsilon\nu^{\nu}A\left(\chi-\frac{\chi^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\chi^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\kappa\tau\lambda\right)$$

Μένει νὰ ἴδωμεν τὶ γίνεται $\sigma\upsilon\nu^{\nu}A$, ὅταν Α σμικρύνῃ μᾶλλον ἐπὶ μᾶλλον, καὶ τέλος γένῃ μηδὲν. Τώρα ἔχομεν

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 A}=\delta\iota\alpha^2 A=1+\varepsilon\varphi^2 A\cdot\ \lambda o\iota\pi\grave{o}\nu\ \sigma\upsilon\nu A=(1+\varepsilon\varphi^2 A)^{-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\lambda o\iota\pi\grave{o}\nu\ \sigma\upsilon\nu^{\nu}A=(1+\varepsilon\varphi^2 A)^{-\frac{\nu}{2}}=1-\frac{\nu}{2}\varepsilon\varphi^3 A+\frac{\nu.\nu+2}{2\cdot 4}\varepsilon\varphi^4 A$$

— κτλ. ἀντὶ ν ἀττεισάγοντες τὴν τιμήν του $\frac{\chi}{A}$, θέλομεν ἔχει

$$\sigma\upsilon\nu^{\nu}A=1-\frac{\chi}{2}A.\frac{\varepsilon\varphi^2 A}{A^2}+\frac{\chi.\chi+2A}{2\cdot 4}A^2.\frac{\varepsilon\varphi^4 A}{A^4}--\kappa\tau\lambda.$$

Ἐὰν τώρα ἐννοήσωμεν ὅτι Α ἀδιακόπως σμικρύνει, ἐν ᾧ χ μένει τὸ αὐτὸ, ἡ τιμὴ τοῦ $\sigma\upsilon\nu^{\nu}A$ ἀδιακόπως πλησιάζει πρὸς τὴν μονάδα· καὶ τέλος, ὅταν $A=0$, τότε $\sigma\upsilon\nu^{\nu}A=1$· ἐπειδὴ $\frac{\varepsilon\varphi A}{A}$ εἰς τὴν ἰδίαν ὑπόθεσιν $=1$. Λοιπὸν ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\sigma\upsilon\nu\chi=1-\frac{\chi^2}{1\cdot 2}+\frac{\chi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{\chi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\kappa\tau\lambda.$$

$$\eta\mu\chi=\chi-\frac{\chi^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\chi^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\kappa\tau\lambda.$$

διὰ τῶν ὁποίων ἠμποροῦμεν νὰ λογαριάσωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον ἑνὸς τόξου ὅταν ἔχωμεν τὸ μῆκός του δεδομένον εἰς μέρη τῆς ἀκτῖνος εἰλημμένης ὡς μονάδος.

Σημείωσις. Εἶναι ἀξιοσημείωτον ὅτι τὸ ξετύλιγμα τοῦ συνημιτόνου περιέχει τὰς ἀρτίας δυνάμεις τοῦ τόξου· ἐκεῖνο δὲ τοῦ ἡμιτόνου τὰς περιττάς. Τῷ ὄντι ὅταν τὸ τόξον ἀλλάσσῃ σημεῖον καὶ ἀπὸ θετικὸν γίνεται ἀρνητικὸν, τὸ ἡμιτονόν του πάσχει τὴν ἰδίαν μεταβολήν· πλὴν φυλάττει τὴν ἰδίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν, ὅταν τὸ τόξον ἄλλην μεταβολὴν δὲν πάσχῃ παρὰ τὴν τοῦ σημείου. Επρεπε λοιπὸν καὶ τὸ ξετύλιγμα τοῦ ἡμιτόνου νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἰδιότητα. Τώρα τοῦτο ἀκολουθεῖ ὅταν τὸ ξετύλιγμα περιέχῃ μόνον περιττὰς δυνάμεις τοῦ τόξου· ἐξ ἐναντίας ὅταν τὸ τόξον μεταβάλλῃ σημεῖον, τὸ συνημίτονον ὄχι μόνον φυλάττει τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν, ἀλλὰ καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον. Εκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ ξετύλιγμα τοῦ συνημιτόνου ἔπρεπε νὰ περιέχῃ μόνον ἀρτίας δυνάμεις τοῦ τόξου.

λε΄. Αἱ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι τιμαὶ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου ἠμποροῦν νὰ ἐκφρασθοῦν μὲ τρόπον σύντομον, διὰ τῶν ἐκθετικῶν. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εὐθυμηθῶμεν ὅτι ἐὰν ε παριςάνῃ τὸν ἀριθμὸν τοῦ ὁποίου ὁ ὑπερβολικὸς λογάριθμος εἶναι ἡ μονὰς, ἔχομεν

$$\varepsilon^{\omega} = 1 + \frac{\omega}{1} + \frac{\omega^2}{1.2} + \frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{\omega^4}{1.2.3.4} + \text{κτλ.}$$

Ἐὰν, εἰς τοῦτον τὸν τύπον γένῃ $\omega = \chi\sqrt{-1}$, προκύπτει

$$\varepsilon^{\chi\sqrt{-1}} = 1 + \frac{\chi\sqrt{-1}}{1} - \frac{\chi^2}{1.2} - \frac{\chi^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{\chi^4}{1.2.3.4}$$

$$+ \frac{\chi^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \text{κτλ.}$$

παρομοίως ἀλλάσσοντες τὸ σημεῖον τοῦ $\sqrt{-1}$,

$$\varepsilon^{-\chi\sqrt{-1}} = 1 - \frac{\chi\sqrt{-1}}{1} - \frac{\chi^2}{1\cdot 2} + \frac{\chi^3\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\chi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\chi^5\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{κτλ.}$$

Εντεῦθεν ἐξάγομεν προσθαφαιροῦντες

$$\frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{-1}} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{\chi^2}{1\cdot 2} + \frac{\chi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{κτλ.}$$

$$\frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{-1}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \chi - \frac{\chi^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\chi^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{κτλ.}$$

σειραὶ τῶν ὁποίων τὰ δεύτερα μέλη εἶναι αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ διὰ συνχ καὶ ἡμχ. Λοιπὸν ἔχομεν

$$\text{συν}\chi = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{-1}} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{-1}}}{2}, \quad \text{ἡμ}\chi = \frac{\varepsilon^{\chi\sqrt{-1}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

ἐντεῦθεν, $\dfrac{\varepsilon^{\chi\sqrt{-1}} - \varepsilon^{-\chi\sqrt{-1}}}{\varepsilon^{\chi\sqrt{-1}} + \varepsilon^{-\chi\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}\,.\dfrac{\text{ἡμ}\chi}{\text{συν}\chi} = \sqrt{-1}\,\text{ἐφ}\chi$,

τύπος τοῦ ὁποίου ἐκάμαμεν χρῆσιν εἰς τὴν Δ' σημείωσιν.

Οἱ αὐτοὶ τύποι δίδουν $\varepsilon^{\chi\sqrt{-1}} = \text{συν}\chi + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ}\chi$, $\varepsilon^{-\chi\sqrt{-1}} = \text{συν}\chi - \sqrt{-1}\,\text{ἡμ}\chi$· λοιπὸν διαιροῦντες τὴν μίαν διὰ τῆς ἄλλης εὑρίσκομεν, $\varepsilon^{2\chi\sqrt{-1}} = \dfrac{\text{συν}\,\chi + \sqrt{-1}\,\text{ἡμ}\,\chi}{\text{συν}\,\chi - \sqrt{-1}\,\text{ἡμ}\,\chi} = \dfrac{1 + \sqrt{-1}\,\text{ἐφ}\chi}{1 - \sqrt{-1}\,\text{ἐφ}\chi}$, ἢ λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἑκάστου μέλους, $2\chi\sqrt{-1} = \text{λογ}\cdot\left(\dfrac{1 + \sqrt{-1}\,\text{ἐφ}\chi}{1 - \sqrt{-1}\,\text{ἐφ}\chi}\right)$.

Αλλ' εἶναι γνωστὸν ὅτι λογ. $\left(\dfrac{1+\omega}{1-\omega}\right) = 2\omega + \tfrac{2}{3}\omega^3 + \tfrac{2}{5}\omega^5$ + κτλ. ἀντὶ ω θέτοντες λοιπὸν $\sqrt{-1}\,\text{ἐφ}\chi$, καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέρη διὰ $2\sqrt{-1}$, εὑρίσκομεν

$$\chi = \dot{\epsilon}\varphi\chi - \tfrac{1}{3}\,\dot{\epsilon}\varphi^3\chi + \tfrac{1}{5}\,\dot{\epsilon}\varphi^5\chi - \tfrac{1}{7}\dot{\epsilon}\varphi^7\chi + \text{ κτλ.}$$

Τύπος ἁπλούςατος, χρήσιμος διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ μήκους ἑνὸς τόξου ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ὁποίου εἶναι γνωςή, καὶ μικροτέρα μονάδος· διότι ὅταν αὕτη ἦναι μείζων μονάδος, οἱ ὅροι τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς γίνονται πολλὰ μεγάλοι, καὶ ἡ σειρὰ δὲν εἶναι ποσῶς κατιοῦσα· καὶ τέλος γίνονται ἄπειροι ὅταν ἐφχ $= \infty$, καὶ τότε ἡ σειρὰ δὲν εἶναι οὐδεμιᾶς χρήσεως.

λϛʹ. Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς ἀνωτέρω τύπους εἰς τὴν προσδιόρισιν τοῦ ἡμιτόγου καὶ συνημιτόνου ἑνὸς τόξου τὸ ὁποῖον δίδεται εἰς μοίρας καὶ μέρη τῆς μοίρας, πρέπει νὰ ἔχωμεν τὸ μῆκος τούτου τοῦ τόξου ἐκπεφρασμένον διὰ μερῶν τῆς ἀκτῖνος, ἤ, ὅπερ ταὐτὸν, τὸν λόγον τούτου τοῦ τόξου πρὸς τὴν ἀκτῖνα. Τώρα, οὔσης τῆς ἀκτῖνος 1, ἡ ἡμιπεριφέρεια ἢ τὸ τόξον τῶν $200^{\circ} =$ 3. 14159265358979 32. Ἔςω ὁ ἀριθμὸς οὗτος $= \pi$· ἐπειδὴ ἓν τόξον ὁσωνδήποτε μοιρῶν περιέχεται εἰς τὸν τύπον $\frac{\mu}{\nu} \cdot 100^{\circ}$, διὰ τοῦτο τὸ μῆκος τούτου τοῦ τόξου συνάγεται ἀπὸ τοῦ τύπου $\frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\pi}{2}$· ἐὰν λοιπὸν εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους κάμωμεν $\chi = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{\pi}{2}$, ἀκολούθως θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ π, καὶ λογαριάσωμεν τοὺς συντελεςὰς μέχρι δεκαὲξ δεκαδικῶν, θέλομεν ἔχει τοὺς ἀκολούθους τύπους.

$\text{ἡμ}\left(\frac{\mu}{\nu} \cdot 100^{\circ}\right) =$	$\text{συν}\left(\frac{\mu}{\nu} \cdot 100^{\circ}\right) =$
$1.\,5707963267948966\,\frac{\mu}{\nu}$	$1.\,0000000000000000$
$-0.\,6459640975062463\,\frac{\mu^3}{\nu^3}$	$-1.\,2337005501361698\,\frac{\mu^2}{\nu^2}$
$+0.\,0796926262461670\,\frac{\mu^5}{\nu^5}$	$+0.\,2536695079010480\,\frac{\mu^4}{\nu^4}$

$$-0.0046817541353187\frac{\mu^7}{\nu^7}$$
$$+0.0001604411847874\frac{\mu^9}{\nu^9}$$
$$-0.0000035988432352\frac{\mu^{11}}{\nu^{11}}$$
$$+0.0000000569217292\frac{\mu^{13}}{\nu^{13}}$$
$$-0.0000000006688035\frac{\mu^{15}}{\nu^{15}}$$
$$+0.0000000000060669\frac{\mu^{17}}{\nu^{17}}$$
$$-0.0000000000000438\frac{\mu^{19}}{\nu^{19}}$$
$$+0.0000000000000003\frac{\mu^{21}}{\nu^{21}}$$

$$-0.0208634807633530\frac{\mu^6}{\nu^6}$$
$$+0.0009192602748394\frac{\mu^8}{\nu^8}$$
$$-0.0000252020423731\frac{\mu^{10}}{\nu^{10}}$$
$$+0.0000004710874779\frac{\mu^{12}}{\nu^{12}}$$
$$-0.0000000063866031\frac{\mu^{14}}{\nu^{14}}$$
$$+0.0000000000656596\frac{\mu^{16}}{\nu^{16}}$$
$$-0.0000000000005294\frac{\mu^{18}}{\nu^{18}}$$
$$+0.0000000000000034\frac{\mu^{20}}{\nu^{20}}$$

Τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων ἐκ τοῦ μηδενὸς μέχρι τῶν 50^o συμπεριλαμβάνουν τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων ἐπέκεινα τῶν 50^o μέχρι 100^o· διότι ἔχομεν ἡμ $(50^o+\omega)=$συν $(50^o-\omega)$ καὶ συν $(50^o+\omega)$ $=$ημ$(50^o-\omega)$· ὅθεν γνωρίζοντες τὰ συνημίτονα τῶν τόξων ἐκ τοῦ ο μέχρι 50^o γνωρίζομεν τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων ἐπέκεινα τῶν 50^o μέχρι 100^o· καὶ παρομίως γνωρίζοντες τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων ἐκ τοῦ ο ἄχρι 50^o ἔχομεν τὰ συνημίτονα τῶν τόξων ἐπέκεινα τῶν 50^o μέχρι τῶν 100^o· ὥςε βλέπομεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ λογαριάσωμεν τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ ο καὶ 50^o, διὰ νὰ ἔχωμεν τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων τῶν περιεχομένων μεταξὺ ο καὶ 100^o· ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι εἰς τοὺς τύπους οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰς τιμὰς τοῦ ἡμ. $\frac{\mu}{\nu}\,100^o$ καὶ συν. $\frac{\mu}{\nu}\,100^o$, πάντοτε ἠμποροῦμεν νὰ ὑποθέσωμεν $\frac{\mu}{\nu}<\frac{1}{2}$· τοτ' ἔςὶ νὰ δώσωμεν τιμὰς εἰς $\frac{\mu}{\nu}$ περιεχομένας μεταξὺ ο καὶ $\frac{1}{2}$· ὥςε αἱ σειραὶ θέλουν εἶναι τόσον κατιοῦσαι ἢ συγκύπτουσαι (convergentes), ὥςε ἀρκεῖ νὰ λογαριασθῇ μικρότατος ἀριθμὸς ὅρων, ὅταν μάλιςα δὲν ἦναι χρεία πολλῶν δεκαδικῶν.

Ἐὰν κάμωμεν διαδοχικῶς $\frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{10}, = \frac{2}{10}, = \frac{3}{10}, = \frac{4}{10}, = \frac{5}{10}$,

θέλομεν εὕρη τὰ ἀκόλουθα ἐξαγόμενα:

ἡμ 10^0 = συν 90^0 = o. 156434465040231
ἡμ 20^0 = συν 80^0 = o. 309016994374947
ἡμ 30^0 = συν 70^0 = o. 453990499739547
ἡμ 40^0 = συν 60^0 = o. 587785252292473
ἡμ 50^0 = συν 50^0 = o. 707106781186548
ἡμ 60^0 = συν 40^0 = o. 809016994374947
ἡμ 70^0 = συν 30^0 = o. 891006524188368
ἡμ 80^0 = συν 20^0 = o. 951056516295154
ἡμ 90^0 = συν 10^0 = o. 987688340595138
ἡμ 100^0 = συν 0^0 = 1. 000000000000000.

τὰ ὁποῖα συμφωνοῦν μὲ τοὺς ἀλγεβρικοὺς τύπους τοῦ ἀρ. 22. εὑρίσκομεν παρομοίως, κάμνοντες $\frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{100}$ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ ἡμ 1^0, τὴν ὁποίαν εὕρομεν εἰς ἄρ. 26. καὶ ἡ μεγάλη εὐκολία μὲ τὴν ὁποίαν φθάνομεν εἰς ταῦτα τὰ ἐξαγόμενα δεικνύει τὸ ἔξοχον τῆς μεθόδου.

Περὶ τῆς κατασκευῆς τῶν πινάκων τῶν ἡμιτόνων.

λζ΄. Οἱ ὠφέλιμοι σοφοὶ εἰς τοὺς ὁποίους χρεωςεῖται ἡ πρώτη κατασκευὴ τῶν πινάκων τῶν ἡμιτόνων, ἐθεμελίωσαν τοὺς ὑπολογισμούς των ἐπὶ εὐφυῶν μεθόδων, πλὴν τῶν ὁποίων ἡ ἐφαρμογὴ ἦτον πολλὰ ἐπίπονος. Η