Μετὰ ταύτας τὰς ἐξηγήσεις, εὐκόλως βλέπομεν ὅτι τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τόξων πολλαπλασίων τοῦ τεταρτημορίου, ἔχουν τὰς ἀκολούθους τιμάς:

ἡμ $0^\circ = 0$	ἡμ $100^\circ = P$	συν $0^\circ = P$	συν $100^\circ = 0$
ἡμ $200^\circ = 0$	ἡμ $300^\circ = -P$	συν $200^\circ = -P$	συν $300^\circ = 0$
ἡμ $400^\circ = 0$	ἡμ $500^\circ = P$	συν $400^\circ = P$	συν $500^\circ = 0$
ἡμ $600^\circ = 0$	ἡμ $700^\circ = -P$	συν $600^\circ = -P$	συν $700^\circ = 0$
ἡμ $800 = 0$	ἡμ $900^\circ = P$	συν $800^\circ = P$	συν $900^\circ = 0$
κτλ.	κτλ.	κτλ.	κτλ.

Ἐν γένει ἐὰν Κ σημειόνῃ ἀκέραιον ἀριθμὸν ὁποιονδήποτε, θέλομεν ἔχει:

ἡμ $2K . 100^\circ = 0$	συν $(2K+1) . 100^\circ = 0$
ἡμ $(4K+1) . 100^\circ = P$	συν $4K . 100^\circ = P$
ἡμ $(4K-1) . 100^\circ = -P$	συν $(4K+2) . 100^\circ = -P$

Τὰ ὅσα εἴπομεν περὶ τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ παραλείψωμεν κάθε μερικὴν ἔρευναν ἐπάνω εἰς τὰς ἐφαπτομένας, συνεφαπτομένας, κ.τ.λ. τῶν τόξων μεγαλητέρων τῶν 200°· διότι, καθὼς θὰ ἴδωμεν ἀπὸ τοὺς τύπους τοὺς ὁποίους ἀμέσως θέλομεν ἐκθέσει, αἱ τιμαὶ τούτων τῶν ποσοτήτων καὶ τὰ σημεῖά των εὐκόλως συνάγονται ἀπὸ τὰς τιμὰς καὶ σημεῖα τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν ἰδίων τόξων.

Θεωρήματα καὶ τύποι ἀναφερόμενα εἰς τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα, ἐφαπτομένας κ.τ.λ.

ιε'. Τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς ἥτις ὑποτείνει τόξον διπλάσιον.

Διότι ἡ ἀκτὶς ΓΑ, κάθετος εἰς ΜΝ, τέμνει δίχα τὴν χορδὴν ΜΝ καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ΜΑΝ· λοιπὸν ΜΠ, ἡμίτονον τοῦ τόξου ΜΑ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς ΜΝ ἥτις ὑποτείνει τὸ τόξον ΜΑΝ, διπλάσιον τοῦ ΜΑ.

Η χορδὴ ἥτις ὑποτείνει τὸ ἕκτον μέρος τῆς περιφερείας ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα· ὅθεν ἐπειδὴ $\frac{400^\circ}{12}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τόξου $\frac{400^\circ}{6}$, ἔχομεν ἡμ $\frac{400^\circ}{12}$ ἢ ἡμ $33^\circ\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$Ρ, τοῦτ' ἔστι τὸ ἡμίτονον τοῦ τριτημορίου τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος. (1)

ιϛʹ. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμιτόνου ἑνὸς τόξου πλέον τὸ τετράγωνον τοῦ συνημιτόνου του ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος, ὥστε ἔχομεν ἐν γένει ἡμ.^{2}Α + συν^{2}Α = Ρ^2. (ἐνταῦθα ἡμ.^{2}Α σημειόνει τὸ τετράγωνον τοῦ ἡμ.Α, καὶ παρομοίως συν^{2}Α τὸ τετράγωνον τοῦ συνΑ).

Η ἰδιότης αὕτη ἀμέσως προκύπτει ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΠΜ, ὅπου ἔχομεν $\overline{\text{ΠΜ}}^2 + \overline{\text{ΓΠ}}^2 = \overline{\text{ΓΜ}}^2$.

Εντεῦθεν ἕπεται ὅτι δοθέντος τοῦ ἡμιτόνου ἑνὸς τόξου εὑρίσκεται τὸ συνημίτονόν του, καὶ τ' ἀνάπαλιν, διὰ τῶν τύπων συνΑ $= \pm\sqrt{(\text{Ρ}^2 - \text{ἡμ}^2\text{Α})}$, ἡμ.Α $= \pm\sqrt{(\text{Ρ}^2 - \text{συν}^2\text{Α})}$. Τὸ διπλοῦν σημεῖον τούτων τῶν τύπων προέρχεται ἐκ τοῦ ὅτι τὸ αὐτὸ ἡμίτονον ΠΜ ἀνήκει εἰς δύο τόξα ΑΜ, ΑΜʹ, τῶν ὁποίων τὰ συνημίτονα ΓΠ, ΓΠʹ εἶναι ἴσα καὶ σημείων ἐναντίων, καθὼς τὸ αὐτὸ συνημίτονον ΓΠ ἀνήκει εἰς δύο τόξα ΑΜ, ΑΝ, τῶν ὁποίων τὰ ἡμίτονα ΜΠ, ΠΝ εἶναι παρομοίως ἴσα καὶ σημείων ἐναντίων.

Οὕτω, φερ' εἰπεῖν, ἀφ' οὗ εὑρέθη ἡμ. $33^\circ\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$Ρ, συνάγεται συν $33^\circ\frac{1}{3}$ ἢ ἡμ $66^\circ\frac{2}{3} = \sqrt{(\text{Ρ}^2 - \frac{1}{4}\text{Ρ}^2)} = \sqrt{\frac{3}{4}\text{Ρ}^2}$ $= \frac{1}{2}\text{Ρ}\sqrt{3}$.

---

(1) Εκ τούτου εὐκόλως κατασκευάζεται τὸ τριτημόριον τῆς ὀρθῆς γωνίας ἢ τοῦ τεταρτημορίου· διότι πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν ἀκτῖνα ΓΔ εἰς δύο ἴσα μέρη· ἐκ τῆς στιγμῆς τῆς ἡμισείας νὰ ἄξωμεν μίαν παράλληλον τῆς ἀκτῖνος ΓΑ· ἡ στιγμὴ ὅπου αὕτη συναπαντᾷ τὸ τεταρτημόριον εἶναι τὸ ἄκρον τοῦ τριτημορίου του, οὔσης τῆς ἀρχῆς αὐτοῦ εἰς Α. Ο. Μ.

ιζ΄. Δοθέντος τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τοῦ τόξου Α, ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἐφαπτομένην, διατέμνουσαν, συνεφαπτομένην καὶ συνδιατέμνουσαν τοῦ ἰδίου τόξου διὰ τῶν ἀκολούθων τύπων:

$$\text{ἐφ}A = \frac{P\,\text{ἡμ}A}{\text{συν}A},\ \text{δια}A = \frac{P^2}{\text{συν}A},\ \text{σφ}A = \frac{P\,\text{συν}A}{\text{ἡμ}A},\ \text{σδ}A = \frac{P^2}{\text{ἡμ}A}.$$

Τῷ ὄντι τὰ ὅμοια τρίγωνα ΓΠΜ, ΓΑΤ, ΓΔΣ δίδουν τὰς ἀναλογίας:

$$\Gamma\Pi : \Pi M :: \Gamma A : AT \text{ ἢ } \text{συν}A : \text{ἡμ}A :: P : \text{ἐφ}A = \frac{P\,\text{ἡμ}A}{\text{συν}A}$$

$$\Gamma\Pi : \Gamma M :: \Gamma A : \Gamma T \text{ ἢ } \text{συν}A : P :: P : \text{δια}A = \frac{P^2}{\text{συν}A}$$

$$M\Pi : \Gamma\Pi :: \Gamma\Delta : \Delta\Sigma \text{ ἢ } \text{ἡμ}A : \text{συν}A :: P : \text{σφ}A = \frac{P\,\text{συν}A}{\text{ἡμ}A}$$

$$\Pi M : \Gamma M :: \Gamma\Delta : \Gamma\Sigma \text{ ἢ } \text{ἡμ}A : P :: P : \text{σδ}A = \frac{P^2}{\text{ἡμ}A}$$

Ἐκ τῶν ὁποίων συνάγονται οἱ περὶ ὧν ὁ λόγος τύποι· παρατηροῦμεν δὲ ὅτι οἱ δύο τελευταῖοι τύποι ἠμποροῦν νὰ συναχθοῦν ἀπὸ τοὺς δύο πρώτους τιθεμένου ἁπλῶς $100 - A$ ἀντὶ Α.

Οἱ τύποι οὗτοι δίδουν τὰς τιμὰς καὶ τὰ ἴδια σημεῖα τῶν ἐφαπτομένων, διατεμνουσῶν, κ.τ.λ. διὰ κάθε τόξον τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὸν τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον· καὶ ἐπειδὴ ὁ προοδευτικὸς νόμος (la loi progressive) τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων, κατὰ τὰ διάφορα τόξα εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται, ἱκανῶς ἀνεπτύχθη εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον, δὲν μένει τίποτε νὰ ἐπιθυμήσῃ τὶς ἐπάνω εἰς τὸν νόμον τὸν ὁποῖον ἀκολουθοῦν παρομοίως αἱ ἐφαπτόμεναι, διατέμνουσαι, κ.τ.λ.

Ἠμποροῦμεν ὡσαύτως διὰ τῶν τύπων τούτων νὰ βεβαιώσωμεν πολλὰ ἐξαγόμενα τὰ ὁποῖα ἀνωτέρω εὑρέθησαν πρὸς τὰς ἐφαπτομένας. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν κάμωμεν $A=100^o$, θέλομεν ἔχει ἡμ$A=P$, καὶ συν$A=o$, λοιπὸν ἐφ $100^o=\frac{P^2}{o}$, ἔκφρασις σημειόνουσα ἄπειρον ποσότητα· διότι P^2 διαιρούμενον δι' ἐλαχίστης ποσότητος, δίδει πηλίκον μεγαλώτατον· λοιπὸν P^2 διὰ μηδενὸς διαιρούμενον δίδει πηλίκον μεῖζον πάσης πεπερασμένης ποσότητος. Καὶ ἐπειδὴ μηδὲν ἠμπορεῖ νὰ ληφθῇ μὲ τὸ σημεῖον $+$ ἢ μὲ τὸ σημεῖον $-$, θέλομεν ἔχει τὴν ἀμφίβολον τιμὴν ἐφ $100^o=\pm\infty$.

Εςω προσέτι $A=200^o-B$, θέλομεν ἔχει ἡμ$A=$ἡμB, καὶ συν$A=-$συνB· λοιπὸν ἐφ $(200^o-B)=\frac{P\text{ἡμ}B}{-\text{συν}B}=-\frac{P\text{ἡμ}B}{\text{συν}B}=-$ἐφ$B$, τὸ ὁποῖον συμφωνεῖ μὲ τὸ ἄρθρον. ιβ.

ιη'. Οἱ τύποι τοῦ προηγουμένου ἄρθρου, συμπλεκόμενοι μεταξύ των καὶ μὲ τὴν ἐξίσωσιν ἡμ$^2A+$συν$^2A=P^2$, δίδουν ἄλλους τινὰς ἀξίους προσοχῆς.

Επειδὴ $P^2=P^2$ καὶ ἐφ$^2A=\frac{P^2\text{ἡμ}^2A}{\text{συν}^2A}$, συνάγομεν διὰ τῆς προσθέσεως $P^2+\text{ἐφ}^2A=P^2+\frac{P^2\text{ἡμ}^2A}{A^2}=\frac{P^2(\text{ἡμ}^2A+\text{συν}^2A)}{\text{συν}^2A}=\frac{P^4}{\text{συν}^2A}$ καὶ ἐπειδὴ $\frac{P^4}{\text{συν}^2A}=\text{δια}^2A$· ἔπεται ὅτι $P^2+\text{ἐφ}^2A=\text{δια}^2A$, τύπος ὅςις ἀμέσως συνάγεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΤ· ὡσαύτως ἐκ τῶν τύπων ἢ ἐκ τοῦ ὀρθονίου τριγώνου ΓΔΣ ἤθελε συναχθῇ ὅτι $P^2+\text{σφ}^2A=\text{σδ}^2A$.

Τέλος, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μεταξύ των τοὺς τύπους ἐφ$A=\frac{P\text{ἡμ}A}{\text{συν}A}$, σφ$A=\frac{P\text{συν}A}{\text{ἡμ}A}$, θέλομεν ἔχει ἐφ$A\times$σφ$A=P^2$, τύπος ὅςις δίδει σφ$A=\frac{P^2}{\text{ἐφ}A}$ καὶ ἐφ$A=\frac{P^2}{\text{σφ}A}$· καὶ δι' ἕν ἄλλο τόξον B, σφ$B=\frac{P^2}{\text{ἐφ}B}$· Λοιπὸν σφA : σφB ::

$\frac{P^2}{\sigma\varphi A} : \frac{P^2}{\sigma\varphi B}$ · ἐπειδὴ δὲ δύο κλάσματα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι ἐν ἀντιπεπονθότι λόγῳ τῶν παρανομαστῶν των, ἕπεται ὅτι αἱ συνεφαπτόμεναι δύο τόξων εἶναι εἰς ἀντιπεπονθότα λόγον τῶν ἐφαπτομένων των, ὥστε ἔχομεν τὴν ἀναλογίαν σφA : σφB : : ἐφB : ἐφA.

Ὁ τύπος οὗτος σφA × ἐφB = P^2, συνάγεται ἀμέσως ἀπὸ τὴν σύγκρισιν τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΑΤ, ΓΔΣ, τὰ ὁποῖα δίδουν ΑΤ : ΓΑ : : ΓΔ : ΔΣ, ἢ ἐφA : P : : P : σφA

ιϑ΄. Δοθέντος τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου δύο τόξων α καὶ β, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τούτων τῶν τόξων, διὰ τῶν ἀκολούθων τύπων:

$$\text{ἡμ}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{ἡμ}\alpha\ \text{συν}\beta + \text{ἡμ}\beta\ \text{συν}\alpha}{P}$$

$$\text{ἡμ}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta - \text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha}{P}$$

$$\text{συν}\,(\alpha+\beta) = \frac{\text{συν}\,\alpha\ \text{συν}\beta - \text{ἡμ}\,\alpha\ \text{ἡμ}\beta}{P}$$

$$\text{συν}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{συν}\alpha\ \text{συν}\beta + \text{ἡμ}\alpha\ \text{ἡμ}\beta}{P}$$

Ἔςω ἡ ἀκτὶς ΑΓ = Ρ, τὸ τόξον ΑΒ = α, τὸ τόξον ΒΔ = β, καὶ ἑπομένως ΑΒΔ = α + β. Ἐκ τῶν ςιγμῶν Β καὶ Δ ἄς κατεβασθῶσιν αἱ κάθετοι ΒΕ, ΔΖ ἐπὶ τὴν ΑΓ· ἐκ τῆς ςιγμῆς Δ ἄς ἀχθῇ ἡ ΔΙ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, τέλος ἐκ τῆς ςιγμῆς Ι ἄς ἀχθῇ ἡ μὲν ΙΚ΄ κάθετος ἡ δὲ ΙΛ παράλληλος τῇ ΑΓ. σχ. 2.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα ΒΓΕ, ΙΓΚ΄ δίδουν τὰς ἀναλογίας

$$\Gamma B : \Gamma I : : BE : IK' \text{ ἢ } P : \text{συν}\beta : : \text{ἡμ}\alpha : IK' = \frac{\text{ἡμ}\alpha\ \text{συν}\beta}{P}$$

$$\Gamma B : \Gamma I : : \Gamma E : \Gamma K' \text{ ἢ } P : \text{συν}\beta : : \text{συν}\alpha : \Gamma K' = \frac{\text{συν}\alpha\ \text{συν}\beta}{P}$$

Τὰ τρίγωνα ΔΙΛ, ΓΒΕ, ἔχοντα τὰς πλευρὰς καθέτους τὴν κάθε μίαν εἰς τὴν κάθε μίαν, εἶναι ὅμοια καὶ δίδουν τὰς ἀναλογίας

$$\Gamma B : \Delta I :: \Gamma E : \Delta \Lambda \text{ ἢ } P : \text{ἡμ}\beta :: \text{συν}\alpha : \Delta\Lambda = \frac{\text{συν}\alpha \ \text{ἡμ}\beta}{P}$$

$$\Gamma B : \Delta I :: BE : I\Lambda \text{ ἢ } P : \text{ἡμ}\beta :: \text{ἡμ}\alpha : I\Lambda = \frac{\text{ἡμ}\,\alpha \ \text{ἡμ}\beta}{P}$$

Ἀλλ' ἔχομεν

$IK' + \Delta\Lambda = \Delta Z = \text{ἡμ}(\alpha+\beta)$, καὶ $\Gamma K' - I\Lambda = \Gamma Z = \text{συν}(\alpha+\beta)$. Λοιπὸν

$$\text{ἡμ}(\alpha+\beta) = \frac{\text{ἡμ}\alpha\text{συν}\beta + \text{ἡμ}\beta\text{συν}\alpha}{P}$$

$$\text{συν}(\alpha+\beta) = \frac{\text{συν}\alpha\ \text{συν}\beta - \text{ἡμ}\,\alpha\ \text{ἡμ}\beta}{P}.$$

Εὔκολον ἤθελεν εἶναι ἀπὸ τοὺς δύο τούτους τύπους νὰ συναχθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ ἡμ $(\alpha-\beta)$ καὶ συν $(\alpha-\beta)$· δυνάμεθα ὅμως νὰ τοὺς εὕρωμεν κατ' εὐθεῖαν διὰ τοῦ ἰδίου σχήματος. Τῷ ὄντι, ἐὰν προεκβληθῇ τὸ ἡμίτονον ΔΙ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς Μ, θέλομεν ἔχει ΒΜ = ΒΔ = β, καὶ ΜΙ = ΙΔ = ἡμβ. Ἀπὸ τὴν στιγμὴν Μ ἄς ἀχθῇ ἡ μὲν ΜΠ κάθετος ἡ δὲ ΜΝ παράλληλος τῇ ΑΓ· ἐπειδὴ ΜΙ = ΔΙ, ἔχομεν ΜΝ = ΙΛ, καὶ ΙΝ = ΔΛ. Ἀλλὰ $IK' - IN = M\Pi = \text{ἡμ}(\alpha-\beta)$, καὶ $\Gamma K' + MN = \Gamma\Pi = \text{συν}(\alpha-\beta)$· λοιπὸν

$$\text{ἡμ}(\alpha-\beta) = \frac{\text{ἡμ}\alpha\text{συν}\beta - \text{ἡμ}\beta\text{συν}\alpha}{P}$$

$$\text{συν}(\alpha-\beta) = \frac{\text{συν}\alpha\text{συν}\beta + \text{ἡμ}\,\alpha\ \text{ἡμ}\beta}{P}$$

Οὗτοι εἶναι οἱ τύποι τοὺς ὁποίους ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

Ἠμποροῦσε τινὰς νὰ νομίσῃ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις δὲν εἶναι τόσον γενική, ἐπειδὴ τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἠκολουθήσαμεν ὑποθέτει τὰ τόξα α καὶ β, καὶ τὸ ἄθροισμά των μικρότερα τῶν 100°· ἐπομένως ὅτι οἱ ἀποδειχθέντες τύποι δὲν ὑπάρχουσι παρὰ διὰ τόξα μικρότερα τῶν 100° καὶ τῶν ὁποίων ἐπίσης τὸ ἄθροισμα εἶναι μικρότερον τῶν 100°· πλὴν ἐν πρώτοις ἄνευ δυσκολίας ἡ ἀπόδειξις ἐκτείνεται εἰς τὴν περίστασιν καθ' ἣν α καὶ β ὄντων μικροτέρων τῶν 100°, τὸ ἄθροισμά των εἶναι μεῖζον τῶν 100°· ἐπομένως ὅτι οἱ τύποι ὑπάρχουν διὰ τόξα μικρότερα μὲν τῶν 100°, πλὴν τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι μεῖζον τῶν 100°· ἐπειδὴ καὶ εἰς ταύτην τὴν περίστασιν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀνωτέρω κατασκευὴν· μόνον ἐπειδὴ ἡ στιγμὴ Ζ πίπτει ἐπὶ τῆς προεκβολῆς τῆς ΑΓ, ἄλλο τὶ δὲν ἔχομεν νὰ μεταβάλλωμεν εἰς τὴν ἀπόδειξιν παρὰ νὰ λάβωμεν συν $(\alpha+\beta)=-\Gamma Z$· πλὴν ἐπειδὴ ἐνταυτῷ $\Gamma Z = I\Lambda - \Gamma K'$, διὰ τοῦτο ἔχομεν πάντοτε συν $(\alpha+\beta)=\Gamma K'-I\Lambda$, ἢ Rσυν$(\alpha+\beta)=$συνα συνβ $-$ ἡμα ἡμβ.

Ας ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ἡ ἀκρίβεια τῶν τύπων

$$R\text{ἡμ}(\alpha+\beta)=\text{ἡμ}\alpha\ \text{συν}\beta+\text{ἡμ}\beta\ \text{συν}\alpha.$$

$$R\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συν}\alpha\ \text{συν}\beta-\text{ἡμ}\alpha\ \text{ἡμ}\beta$$

ἀπεδείχθη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν α καὶ β, μικροτέρας τῶν ὁρίων Α καὶ Β, λέγω ὅτι οἱ τύποι οὗτοι ὑπάρχουν δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν τόξων α καὶ β μικροτέρας τῶν ὁρίων $100°+$ Α καὶ Β.

Τῷ ὄντι ὁποιονδήποτε εἶναι τὸ τόξον χ, ἔχομεν ἐν γένει,

$$\text{ἡμ}(100°+\chi)=\text{συν}\chi$$

$$\text{συν}(100°+\chi)=-\text{ἡμ}\chi.$$

Διότι ἄς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον ὅτι χ εἶναι μικρότερον τῶν 100°, ἴσον, φερ' εἰπεῖν, μὲ τὸ τόξον ΑΜ· ἐκ τοῦ ἄκρου Μ καὶ τοῦ κέντρου Γ ἄς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΜΓΜ″ καὶ ἐπὶ ταύτης ἡ κάθετος διάμετρος Μ′ΓΜ‴· φανερὸν εἶναι ὅτι ΜΜ′ ἰσοῦται μὲ τεταρτημόριον· λοιπὸν ΑΜ $+$ ΜΜ′ $=\chi+100°$ ἢ $100°+\chi$. Τὸ ἡμίτονον τοῦ ΑΜ εἶναι ἡ κάθετος ΜΠ, τὸ δὲ συνημίτονον ἡ ΓΠ· τὸ ἡμίτονον τοῦ ἀθροίσματος εἶναι ἡ κάθετος Μ'Π', τὸ δὲ συνημίτονον ἡ ΓΠ'. Τώρα τὰ τρίγωνα ΓΠΜ, ΓΜ'Π' εἶναι ἴσα· διότι ἡ ΜΓ = ΓΜ'; περιπλέον ἡ γωνία ΠΜΓ = τῇ γωνίᾳ Μ'ΓΠ' καὶ ἡ ΠΓΜ = ΓΜ'Π'· λοιπὸν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα· ἀκολούθως ἡ Μ'Π' = ΠΓ· καὶ ἡ ΜΠ = ΓΠ'· λοιπὸν ἡμ $(100^o + \chi)$ = συνχ, καὶ συν $(100^o + \chi)$ = —ἡμχ. Εσω τώρα χ = ΑΔΜ'· ἐπομένως $100 + \chi$ = ΑΔΜ'Μ''· ἀποδεικνύομεν, ὡς ἀνωτέρω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΜ'Π', ΓΜ''Π'' εἶναι ἴσα· λοιπὸν ΓΠ'' = Μ'Π' καὶ Μ''Π'' = ΓΠ'· ὅθεν ἡμ $(100^o + \chi)$ = συνχ, καὶ συν $(100^o + \chi)$ = —ἡμχ· ἐξακολουθοῦντες οὕτω ἀποδεικνύομεν τοὺς ἀνωτέρω τύπους διὰ κάθε τιμὴν τοῦ τόξου χ· οἱ τύποι λοιπὸν οὗτοι εἶναι γενικοί. σχ. 18.

Τούτου τεθέντος, ἔσω $\chi = \mu + \beta$, θέλομεν ἔχει

$$ἡμ(100^o + \mu + \beta) = συν(\mu + \beta)$$
$$συν(100^o + \mu + \beta) = -ἡμ(\mu + \beta).$$

Αλλά, ἐξ ὑποθέσεως, γνωρίζομεν τὰς τιμὰς τοῦ συνημιτόνου καὶ ἡμιτόνου τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων, ἐν ὅσῳ ταῦτα τὰ τόξα εἶναι ἐντὸς τῶν ὁρίων Α καὶ Β· λοιπὸν ἠξεύρομεν τὰς τιμὰς τῶν δευτέρων μελῶν τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ἐν ὅσῳ μ καὶ β δὲν ὑπερβαίνουν τὰ ὅρια Α καὶ Β· ὑποτεθέντος τούτου, ἔχομεν:

$$Rἡμ(100^o + \mu + \beta) = συν\,\mu\,συν\beta - ἡμ.\,\mu\,ἡμ\beta$$
$$Rσυν(100^o + \mu + \beta) = -ἡμ.\,\mu\,συν\beta - συν.\,\mu\,ἡμ\beta$$

Εσω $100^o + \mu = \alpha$· ἐπειδὴ ἡμ$(100 + \mu)$ = συνμ, καὶ συν$(100^o + \mu)$ = —ἡμ.μ, ἔπεται ὅτι συνμ = ἡμα καὶ ἡμ.μ = —συνα· ἀντεισάγοντες λοιπὸν ταύτας τὰς τιμὰς εἰς τὰς προηγουμένας ἐξισώσεις, εὑρίσκομεν

$$Rἡμ(\alpha + \beta) = ἡμ\alpha\,συν\beta + συν\alpha\,ἡμ\beta$$
$$Rσυν(\alpha + \beta) = συν\,\alpha\,συν\beta - ἡμ\,\alpha\,ἡμ\beta.$$

Οθεν βλέπομεν ὅτι οἱ τύποι οὗτοι, οἱ ὁποῖοι ἀπεδείχθησαν εἰς τὰ ὅρια $\alpha < A$, $\beta < B$, ἤδη βεβαιοῦνται εἰς πλέον ἐκτεταμένα ὅρια $\alpha < 100^o + A$, $\beta < B$. Ἀλλὰ μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχοντες οἱ τύποι εἰς τὰ ὅρια $\alpha < 100^o + A$, $\beta < B$, ὑπάρχουν καὶ εἰς τὰ ὅρια $\alpha < 100^o + A$, $\beta < 100^o + B$· καὶ πάλιν ὑπάρχοντες οἱ τύποι εἰς τὰ ὅρια $\alpha < 100^o + A$, $\beta < 100^o + B$, ὅτι ὑπάρχουν καὶ εἰς τὰ ὅρια $\alpha < 200^o + A$, $\beta < 100^o + B$, καὶ νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὸν τρόπον τοῦτον τοῦ συλλογίζεσθαι ἀπροσδιορίστως· καὶ οὕτω συνάγομεν τὴν γενικότητα τῶν τύπων, ἢ ὅτι ὑπάρχουν διὰ ὁποιανδήποτε τιμὴν τῶν τόξων α καὶ β· διότι, ἐπειδὴ εἶναι βέβαιον ὅτι οἱ τύποι οὗτοι ὑπάρχουν διὰ τιμὰς τῶν τόξων α καὶ β μικροτέρας τῶν 100^o, δηλαδὴ περιεχομένας ἐντὸς τοῦ ὁρίου 100^o· ἐκ τῆς εἰρημένης ἀποδείξεως ἀκολουθεῖ ὅτι ὑπάρχουν διὰ τιμὰς τῶν τόξων α καὶ β ἐντὸς τοῦ ὁρίου 200^o· καὶ ἐκ τῆς ἰδίας ἀκόμη ὅτι ὑπάρχουν διὰ τιμὰς τῶν α καὶ β ἐντὸς τοῦ ὁρίου 300^o καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Αφ᾽ οὗ ἀπεδείχθη ἡ γενικότης τῶν δύο τούτων τύπων εὔκολον νὰ συναχθῇ ἡ τῶν ἄλλων δύο. Διότι ἐπειδὴ τὸ τόξον α σύγκειται ἀπὸ δύο ἄλλα $\alpha - \beta$ καὶ β, ἔχομεν ἐκ τῶν ἀποδειχθέντων τύπων,

$$R\,\text{ἡμ}\alpha = \text{ἡμ}(\alpha-\beta)\,\text{συν}\beta + \text{συν}(\alpha-\beta)\,\text{ἡμ}\beta$$
$$R\,\text{συν}\alpha = \text{συν}(\alpha-\beta)\,\text{συν}\beta - \text{ἡμ}(\alpha-\beta)\,\text{ἡμ}\beta$$

Καὶ θεωροῦντες ὡς ἀγνώστους εἰς ταύτας τὰς δύο ἐξισώσεις $\text{ἡμ}(\alpha-\beta)$, $\text{συν}(\alpha-\beta)$, καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ἀπάλειψιν εὑρίσκομεν ὅτι

$$R\,\text{ἡμ}(\alpha-\beta) = \text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta - \text{ἡμ}\beta\,\text{συν}\alpha$$
$$R\,\text{συν}(\alpha-\beta) = \text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{ἡμ}\alpha\,\text{ἡμ}\beta$$

Επειδὴ δὲ οἱ τύποι ἐκ τῶν ὁποίων οὗτοι ἐσυνάχθησαν ὑπάρχουν διὰ κάθε τιμὴν τῶν τόξων α καὶ β, λοιπὸν καὶ οἱ συναχθέντες ὑπάρχουν ἐπίσης διὰ κάθε τιμὴν τῶν τόξων α καὶ β: εἶναι δηλαδὴ ἐπίσης γενικοὶ ὡς οἱ πρῶτοι

κ΄. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους τοῦ προηγουμένου ἄρθρου γένῃ β=α, ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος θέλουν δώσει

$$ημ2α=\frac{2ημασυνα}{P},\quad συν2α=\frac{συν^2α-ημ^2α}{P}.$$

Διὰ τῶν τύπων τούτων εὑρίσκεται τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τόξου διπλασίου, ὅταν ἦναι γνωστὸν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ ἁπλοῦ τόξου, ἀκολούθως οἱ τύποι οὗτοι χρησιμεύουν διὰ τὸν διπλασιασμὸν ἑνὸς τόξου. (*).

Ἀντιστρόφως διὰ νὰ διαιρέσωμεν τόξον δεδομένον α εἰς δύο ἴσα μέρη, ἂς θέσωμεν εἰς τοὺς αὐτοὺς τύπους, ἀντὶ τοῦ α, $\frac{1}{2}α$, θέλομεν ἔχει

$$ημα=\frac{2ημ\frac{1}{2}ασυν\frac{1}{2}α}{P},\quad συνα=\frac{συν^2\frac{1}{2}α-ημ^2\frac{1}{2}α}{P}$$

ἐκ τῶν ὁποίων συνάγομεν

$$2ημ\tfrac{1}{2}ασυν\tfrac{1}{2}α=Pημα\ (1),\quad συν^2\tfrac{1}{2}α-ημ^2\tfrac{1}{2}α=Pσυνα\ (2)$$

περιπλέον ἔχομεν $συν^2\frac{1}{2}α+ημ^2\frac{1}{2}α=P^2$ (3)

Τώρα προσθέτοντες εἰς τὴν (3) τὴν (2) καὶ ἐκ τῆς ἰδίας ἀφαιροῦντές την, ἔπειτα ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν ἐξαγομένων, εὑρίσκομεν,

$$ημ\tfrac{1}{2}α=\sqrt{(\tfrac{1}{2}P^2-\tfrac{1}{2}Pσυνα)}$$
$$συν\tfrac{1}{2}α=\sqrt{(\tfrac{1}{2}P^2+\tfrac{1}{2}Pσυνα)}$$

τύποι οἱ ὁποῖοι προσδιορίζουν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τῆς ἡμισείας ἑνὸς τόξου διὰ λειτουργίας τοῦ συνημιτόνου τοῦ ὅλου τόξου.

(*) Τὸ μὲν ἡμίτονον ἑνὸς τόξου διπλασίου ἄλλου δεδομένου κατασκευάζεται, ὡς ἐκ τῶν τύπων βλέπομεν, ἐὰν ζητηθῇ μία τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν P, 2ημα, συνα, τὸ δὲ συνημίτονον, ἐὰν ζητηθῇ μία τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γραμμῶν. P, συνα+ημα, συνα−ημα. Μετὰ τὴν κατασκευὴν τῶν γραμμῶν τούτων εὐκόλως κατασκευάζεται τὸ τόξον εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκουν. Ο. Μ.

Οὕτω κάμνοντες $\alpha = 100^\circ$, ἢ $\sigma\upsilon\nu\alpha = 0$, ἔχομεν $\dot{\eta}\mu\, 50^\circ = \sigma\upsilon\nu 50^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}P^2} = P\sqrt{\tfrac{1}{2}}$· ἀκολούθως ἐὰν κάμωμεν $\alpha = 50^\circ$, ἐπειδὴ $\sigma 50^\circ = P\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, θέλομεν ἔχει $\dot{\eta}\mu\, 25^\circ = P\sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}$, καὶ $\sigma\upsilon\nu 25^\circ = P\sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}$.

κα΄. Ημποροῦμεν ὡσαύτως νὰ εὕρωμεν τύπους προσδιορίζοντας τὰς τιμὰς τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου τῆς ἡμισείας ἑνὸς τόξου διὰ λειτουργίας τοῦ ἡμιτόνου τοῦ ὅλου τόξου, καὶ τοῦτο θέλει εἶναι ὠφέλιμον εἰς πολλὰς περιςάσεις. Διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς τύπους τούτους ἄς προσθέσωμεν ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ προηγουμένου ἄρθρου τὴν (1) καὶ τὴν (3), καὶ θέλομεν ἔχει

$$(\sigma\upsilon\nu\, \tfrac{1}{2}\alpha + \dot{\eta}\mu\, \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = P^2 + P\dot{\eta}\mu\, \alpha \cdot \text{ ἐπομένως}$$

$$\sigma\upsilon\nu\, \tfrac{1}{2}\alpha + \dot{\eta}\mu\, \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{(P^2 + P\dot{\eta}\mu\alpha)} \;\ldots\; (4)$$

ἀφαιροῦντες δὲ ἐκ τῆς (3) τὴν (1) συνάγομεν

$$(\sigma\upsilon\nu\, \tfrac{1}{2}\alpha - \dot{\eta}\mu\, \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = P^2 - P\dot{\eta}\mu\alpha \cdot \text{ ἐπομένως}$$

$$\sigma\upsilon\nu\, \tfrac{1}{2}\alpha - \dot{\eta}\mu\, \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{(P^2 - P\dot{\eta}\mu\alpha)} \;\ldots\; (5)$$

Ηδη προσθαφαιροῦντες τὴν (4) καὶ (5) εὑρίσκομεν

$$\dot{\eta}\mu\, \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2 + P\dot{\eta}\mu\alpha)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2 - P\dot{\eta}\mu\alpha)}$$

$$\sigma\upsilon\nu\, \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2 + P\dot{\eta}\mu\alpha)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(P^2 - P\dot{\eta}\mu\alpha)}.$$

Τύποι οἱ ὁποῖοι προσδιορίζουν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τῆς ἡμισείας ἑνὸς τόξου διὰ λειτουργίας τοῦ ἡμιτόνου τοῦ ὅλου τόξου.

Τοὺς δύο τούτους τύπους ἠμποροῦμεν νὰ βεβαιώσωμεν ἐκ τῶν ὑςέρων· ἐπειδὴ ἄς ὑψώσωμεν τὸν πρῶτον εἰς τετράγωνον, εὑρίσκομεν $\dot{\eta}\mu^2\, \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{4}(P^2 + P\dot{\eta}\mu\alpha) + \tfrac{1}{4}(P^2 - P\dot{\eta}\mu\alpha) - \tfrac{1}{2}\sqrt{(P^4 - P^2\dot{\eta}\mu^2\alpha)} = \tfrac{1}{2}P^2 - \tfrac{1}{2}P\sigma\upsilon\nu\alpha$· ὁμοίως ἠθέλαμεν ἔχει $\sigma\upsilon\nu^2\, \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}P^2 + \tfrac{1}{2}P\sigma\upsilon\nu\alpha$: ἐξαγόμενα τὰ ὁποῖα συμφωνοῦν μὲ τὰς τιμὰς τοῦ $\dot{\eta}\mu\, \tfrac{1}{2}\alpha$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\, \tfrac{1}{2}\alpha$ τὰς ὁποίας εὕρομεν εἰς τὸπροηγούμενον ἄρθρον. Πρέπει ὅμως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ἐὰν συνα ἦτον ἀρνητικὸν, τὸ ῥιζικὸν $\sqrt{(P^2 - P\dot{\eta}\mu\alpha)}$ ἔπρεπε νὰ ληφθῇ μὲ σημεῖον ἐναντίον εἰς τὰς τιμὰς τοῦ ἡμ$\frac{1}{2}\alpha$ καὶ συν$\frac{1}{2}\alpha$, τοῦτο δὲ ἤθελε τρέψει τὴν μίαν τιμὴν εἰς τὴν ἄλλην.

κβ΄. Διὰ τῶν τύπων τούτων, εὔκολον νὰ προσδιορισθῇ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ὅλων τῶν δεκάτων τοῦ τεταρτημορίου.

Καὶ ἐν πρώτοις ἔσω ἡμ$20^{\circ} = \chi$· ἐπειδὴ τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης διπλάσιον τόξον χορδῆς, ἕπεται ὅτι 2χ εἶναι ἡ χορδὴ τῶν 40°, ἢ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου· ἀλλ' ἡ πλευρὰ αὕτη ἰσοῦται μὲ τὸ μεῖζον τμῆμα τῆς ἀκτῖνος διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (Γεωμε. βιβλ. 4, πρό. 5)· ἐὰν λοιπὸν γένῃ ἡ ἀκτὶς ἴση μὲ 1, θέλομεν ἔχει $1 : 2\chi :: 2\chi : 1 - 2\chi$. Εντεῦθεν $4\chi^2 = 1 - 2\chi$· καὶ λύοντες τὴν δευτεροβάθμιον ταύτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν χ ἢ ἡμ$20^{\circ} = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$.

Η τιμὴ αὕτη ὑψωθεῖσα εἰς τετράγωνον, δίδει ἡμ$^2 20^{\circ}$ $= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}$· λοιπὸν $1 -$ ἡμ$^2 20^{\circ}$, ἢ συν$^2 20^{\circ} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$.

Αλλὰ συν$^2\alpha -$ ἡμ$^2\alpha =$ συν2α, λοιπὸν συν40° ἢ ἡμ$60^{\circ} = \frac{4 + 4\sqrt{5}}{16} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Ηδη ἐὰν εἰς τοὺς τύπους τοῦ ἀρ. κα΄ γένῃ $P = 1$, $\alpha = 20^{\circ}$, καὶ ἡμ$\alpha = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$, θέλει συναχθῇ

$$\text{ἡμ}10^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 + \sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$$
$$\text{συν}10^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 + \sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}.$$

Εὰν μετὰ ταῦτα εἰς τοὺς ἰδίους τύπους κάμωμεν $\alpha = 60^{\circ}$, καὶ ἡμ$\alpha = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$, θέλομεν ἔχει,

$$\text{ἡμ}30^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 - \sqrt{5})}$$
$$\text{συν}30^{\circ} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(3 - \sqrt{5})}.$$

Διὰ τῶν τιμῶν τούτων καὶ ἐκείνων τοῦ ἡμ50° καὶ ἡμ 100°, δυνατὸν νὰ σχηματισθῇ ὁ ἀκόλουθος πίναξ.

ἡμ0° = συν100° = 0.
ἡμ10° = συν90° = $\frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})}-\frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
ἡμ20° = συν80° = $\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$
ἡμ30° = συν70° = $\frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$
ἡμ40° = συν60° = $\frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$
ἡμ50° = συν50° = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
ἡμ60° = συν40° = $\frac{1}{4}\sqrt{(1+\sqrt{5})}$
ἡμ70° = συν30° = $\frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})}+\frac{1}{4}\sqrt{(3-\sqrt{5})}$
ἡμ80° = συν20° = $\frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$
ἡμ90° = συν10° = $\frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})}+\frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
ἡμ100° = συν0° = 1

Αἱ τιμαὶ αὗται ἠμποροῦν ἀκόμη νὰ ἁπλουςευθῶσι (se simplifier), διότι ἔχομεν $\sqrt{(3+\sqrt{5})}=\frac{1}{2}\sqrt{10}+\frac{1}{2}\sqrt{2}$ καὶ $\sqrt{(3-\sqrt{5})}=\frac{1}{2}\sqrt{10}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$· ὅθεν βλέπομεν ὅτι θεωροῦντες ὡς γνωςὰς $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, καὶ $\sqrt{10}$, δὲν μένει νὰ κάμωμεν παρὰ τέσσαρας ἐξαγωγὰς τετραγωνικῶν ῥιζῶν διὰ νὰ ἔχωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων ὅλων τῶν πολλαπλασίων τόξων τῶν 10°.

κγ΄. Ἀπὸ τοὺς τύπους τούτους ἐξάγονται δύο ἀξιοσημείωτοι συνέπειαι. 1.ον ἐπειδὴ 2ἡμ40° εἶναι ἡ χορδὴ τῶν 80°, ἢ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου, διὰ τοῦτο ἡ πλευρὰ αὕτη ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$· καὶ τὸ τετράγωνόν της μὲ $\frac{10-2\sqrt{5}}{4}$. Η πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου = 2ἡμ 20° = $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$, τὸ τετράγωνόν της = $\frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})$. ἀλλὰ $\frac{1}{4}(10-2\sqrt{5})=1+\frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})$. Λοιπὸν τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος πλέον τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ δεκαγώνου, ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου.

Εντεῦθεν ἕπεται ὅτι γνωρίζοντες τὴν ἀκτῖνα ἑνὸς κύκλου καὶ τὴν πλευρὰν τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου· διότι ἡ πλευρὰ αὕτη ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου ἤθελον εἶναι αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

2.ον Μεταξὺ τῶν ἡμιτόνων τῶν περιττῶν δεκαδικῶν διαιρέσεων τοῦ τεταρτημορίου, ὑπάρχει ἡ ἀκόλουθος σχέσις

$$\text{ἡμ}90^\circ + \text{ἡμ}30^\circ + \text{ἡμ}10^\circ = \text{ἡμ}50^\circ + \text{ἡμ}70^\circ,$$

αἱ δὲ ἄρτιαι διαιρέσεις δίδουν παρομοίως $\text{ἡμ}60^\circ = \text{ἡμ}20^\circ + \frac{1}{2}$. Πλὴν οἱ τύποι οὗτοι εἶναι μερικαὶ περιστάσεις, καὶ ἠμποροῦμεν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὁσωνδήποτε μοιρῶν εἶναι τόξον τι χ, ἔχομεν $\text{ἡμ}(100^\circ-\chi) + \text{ἡμ}(20^\circ+\chi) + \text{ἡμ}(20^\circ-\chi) = \text{ἡμ}(60^\circ-\chi) + \text{ἡμ}(60^\circ+\chi)$.

Τῷ ὄντι, ἐὰν προσθέσωμεν τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον τύπον τοῦ ιθʹ ἄρθρου, εὑρίσκομεν $\text{ἡμ}(\alpha+\beta) + \text{ἡμ}(\alpha-\beta) = 2\text{ἡμ}\alpha\,\text{συν}\beta$· ὁ τύπος οὗτος δίδει,

$$\text{ἡμ}(20^\circ+\chi) + \text{ἡμ}(20^\circ-\chi) = 2\text{ἡμ}20^\circ\text{συν}\chi$$
$$\text{ἡμ}(60^\circ+\chi) + \text{ἡμ}(60^\circ-\chi) = 2\text{ἡμ}60^\circ\text{συν}\chi$$

Λοιπὸν, ἐπειδὴ $\text{ἡμ}60^\circ - \text{ἡμ}20^\circ = \frac{1}{2}$, καὶ $\text{συν}\chi = \text{ἡμ}(100-\chi)$, αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις ἀφαιρεθεῖσαι ἡ μία τῆς ἄλλης δίδουν $\text{ἡμ}(60^\circ+\chi) + \text{ἡμ}(60^\circ-\chi) - \text{ἡμ}(20^\circ+\chi) - \text{ἡμ}(20^\circ-\chi) = \text{ἡμ}(100^\circ-\chi)$· τύπος ἐκ τοῦ ὁποίου συνάγεται ὁ τῶν περιττῶν διαιρέσεων γενομένου $\chi=10^\circ$· ὁ δὲ τῶν ἀρτίων, γενομένου $\chi=0$, καὶ ἐν γένει ὁ τύπος οὗτος εἶναι χρήσιμος διὰ τὴν βεβαίωσιν τῶν πινάκων τῶν ἡμιτόνων.

κδʹ. Ἐὰν εἰς τὸν πρῶτον καὶ τρίτον τῶν τύπων τοῦ ἄρθρου ιθʹ, γένῃ $\beta=2\alpha$, θέλει συναχθῇ.

$$\text{ἡμ}3\alpha = \frac{\text{ἡμ}2\alpha\text{συν}\alpha + \text{συν}\,2\alpha\,\text{ἡμ}\alpha}{\text{P}}, \quad \text{συν}3\alpha = \frac{\text{συν}\,2\alpha\text{συν}\alpha - \text{ἡμ}2\alpha\text{ἡμ}\alpha}{\text{P}}$$

ἀντεισάγοντες εἰς τοὺς τύπους τούτους, ἀντὶ τοῦ ἡμ2α καὶ συν2α, τὰς εἰς τὸ κ΄ ἄρθρον εὑρεθείσας τιμάς, καὶ ἁπλουστεύοντες τὰ ἐξαγόμενα διὰ μέσου τῆς ἐξισώσεως $\text{ἡμ}^2\alpha + \text{συν}^2\alpha = P^2$, εὑρίσκομεν

$$\text{ἡμ}3\alpha = 3\text{ἡμ}\alpha - \frac{4\text{ἡμ}^3\alpha}{P^2}$$

$$\text{συν}3\alpha = \frac{4\text{συν}^3\alpha}{P^2} - 3\text{συν}\alpha.$$

Οἱ τύποι οὗτοι οἵτινες χρησιμεύουν διὰ τὸν τριπλασιασμὸν τῶν τόξων, ἠμποροῦν ὡσαύτως νὰ χρησιμεύσουν καὶ διὰ τὴν τριτομήν των ἢ τὴν εἰς τρία ἴσα μέρη διαίρεσίν των. Τῷ ὄντι ἐὰν γένῃ $\text{ἡμ}\,3\alpha = \gamma$ καὶ $\text{ἡμ}\,\alpha = \chi$, θέλει προκύψει ἡ ἐξίσωσις $\gamma P^2 = 3P^2\chi - 4\chi^3$, διὰ τῆς ὁποίας προσδιορίζεται ἡ τιμὴ τῆς χ. Ὅθεν βλέπομεν ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς τριτομῆς τῆς γωνίας, ἀναλυτικῶς θεωρούμενον, εἶναι τοῦ τρίτου θαθμοῦ.

Ἐὰν εἰς τοὺς ἰδίους τύπους τοῦ ἄρθρου ιθ΄, κάμωμεν διαδοχικῶς $\beta = 3\alpha$, $\beta = 4\alpha$, κτλ. θέλομεν ἔχει τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων 4α, 5α, κτλ. ἐν γένει, δηλαδή, τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν πολλαπλασίων τοῦ α. Ἀντιστρόφως οἱ τύποι οἱ ὁποῖοι χρησιμεύουν διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν τόξων, δίδουν τὰς ἐξισώσεις διὰ τὴν διαίρεσιν δεδομένου τόξου εἰς ἴσα μέρη· τοῦτ᾽ ἔστι διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ ἡμα ἢ συνα γνωστοῦ τοῦ ἡμνα ἢ συν.να.

κε΄. Ἂς ἀναπτύξωμεν ἀκόμη τὰς τιμὰς τοῦ ἡμ5α καὶ συν5α, καὶ πρὸς τοῦτο ἂς λάβωμεν τοὺς τύπους

$$\text{ἡμ}(3\alpha + 2\alpha) = \frac{\text{ἡμ}\,3\alpha\;\text{συν}\,2\alpha + \text{συν}\,3\alpha\;\text{ἡμ}\,2\alpha}{P}$$

$$\text{συν}(3\alpha + 2\alpha) = \frac{\text{συν}\,3\alpha\;\text{συν}\,2\alpha - \text{ἡμ}\,3\alpha\;\text{ἡμ}\,2\alpha}{P}$$

Ἐὰν ἀντεισάξωμεν τὰς ἤδη εὑρεθείσας τιμὰς εἰς τὰ ἄρθρα κ΄ καὶ κδ΄, θέλομεν ἔχει, μετὰ τὰς ἀναγωγάς,

$$ἡμ 5α = 5ἡμα - \frac{20ἡμ^3α}{p^2} + \frac{16ἡμ^5α}{p^4}$$

$$συν5α = 5συνα - \frac{20συν^3α}{p^2} + \frac{16συν^5α}{p^4}$$

Ὅθεν βλέπομεν ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς πεντατομῆς τῆς γωνίας ἤθελεν εἶναι τοῦ ε΄ βαθμοῦ, καὶ οὕτως τοῦ ζ, ια΄, ιγ΄ διὰ τὰς διαιρέσεις τῆς γωνίας εἰς ἑπτὰ, ἕνδεκα, δεκατρία ἴσα μέρη, κτλ.

κϛ΄. Ας ζητηθῇ, παραδείγματος χάριν, ἡ ὡς ἔγγιστα τιμὴ τοῦ $ἡμ 1^o$ μέχρι δεκαπέντε δεκαδικῶν, τὸ ὁποῖον ζήτημα ἠμπορεῖ νὰ ἦναι ὠφέλιμον διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν πινάκων τῶν ἡμιτόνων. Η εἰς ἄρθ. κβ΄ εὑρεθεῖσα ἔκφρασις τοῦ $ἡμ 10^o$, ἀναχθεῖσα εἰς δεκαδικὰ, ὑποτεθείσης τῆς ἀκτῖνος $P = 1$, δίδει $ἡμ 10^o = 0.1564344650402 31$· ἐντεῦθεν, διὰ τοῦ τύπου τοῦ ἀρ κα΄, συνάγεται $ἡμ 5^o = 0.0784590957278 45$.

Εςω τώρα $ἡμ 1^o = χ$, πρέπει, διὰ νὰ εὕρωμεν χ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$16χ^5 - 20χ^3 + 5χ = 0.078459095727845.$$

Ἐὰν, συντομίας χάριν, κάμωμεν τὸ δεύτερον μέλος $= γ$, θέλομεν ἔχει περίπου $5χ - 20χ^3 = γ$, καὶ $χ = \frac{1}{5}γ + 4(\frac{1}{5}γ)^3$. Ἀλλὰ $\frac{1}{5}γ = 0.01569181 91$ καὶ $4(\frac{1}{5}γ)^3 = 0.000015456$· ἔχομεν λοιπὸν διὰ πρώτην προσέγγισιν, $χ = 0.015707275$, τιμὴ ἥτις εἶναι ἐσφαλμένη εἰς τὸ ὄγδοον δεκαδικὸν ψηφίον. Διὰ νὰ ἔχωμεν μίαν ἀκριβεςέραν, καλοῦμεν $χ = 0.0157073 + ψ$· ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν προτεθεῖσαν ἐξίσωσιν, καὶ παραμελοῦντες τὸ τετράγωνον καὶ τὰς ἄλλας δυνάμεις τοῦ ψ, θέλομεν ἔχει $0.0784590094249 27 + 4.9852017ψ = 0.078459095727845$· ὅθεν $ψ = 0.0000000173118207$, καὶ

$$χ \text{ ἢ } ἡμ 1^o = 0.0157073173118207.$$

Ἀπὸ τὸ ἡμίτονον τῆς 1^o ἢ τῶν $100'$, ἤθελον παρομοίως συναχθῆ τὰ ἡμίτονα τῶν $50'$, τῶν $10'$, τῶν $5'$, καὶ τέλος τὸ τοῦ $1'$.

κζ'. Ἀπὸ τοὺς τύπους τοῦ ιθ' ἄρθρου ἐξάγονται πάμπολλαι συνέπειαι, ἐκ τῶν ὁποίων ἀρκεῖ νὰ ἀναφέρωμεν τὰς μᾶλλον ἐν χρήσει· ἐν πρώτοις ἐξάγονται οἱ ἀκόλουθοι τέσσαρες τύποι,

$$\text{ἡμ}\,\alpha\ \text{συν}\beta = \tfrac{1}{2}P\ \text{ἡμ}(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}P\ \text{ἡμ}(\alpha-\beta)$$
$$\text{ἡμ}\,\beta\ \text{συν}\alpha = \tfrac{1}{2}P\ \text{ἡμ}(\alpha+\beta) - \tfrac{1}{2}P\ \text{ἡμ}(\alpha-\beta)$$
$$\text{συν}\,\alpha\ \text{συν}\beta = \tfrac{1}{2}P\text{συν}(\alpha-\beta) + \tfrac{1}{2}P\text{συν}(\alpha+\beta)$$
$$\text{ἡμ}\,\alpha\ \text{ἡμ}\beta = \tfrac{1}{2}P\text{συν}(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}P\text{συν}(\alpha+\beta)$$

Χρήσιμοι διὰ τὴν τροπὴν ἑνὸς γινομένου πολλῶν ἡμιτόνων ἢ συνημιτόνων, εἰς ἡμίτονα καὶ συνημίτονα γραμμικὰ ἢ πολλαπλασιαζόμενα μόνον ἐπὶ σαθερῶν.

κη'. Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους τούτους γένῃ $\alpha+\beta=\pi$, $\alpha-\beta=\varkappa$, καὶ τοῦτο δίδει $\alpha=\frac{\pi+\varkappa}{2}$, $\beta=\frac{\pi-\varkappa}{2}$, θέλει συναχθῆ,

$$\text{ἡμ}\,\pi + \text{ἡμ}\,\varkappa = \frac{2}{P}\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\pi+\varkappa)\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\pi-\varkappa)$$

$$\text{ἡμ}\,\pi - \text{ἡμ}\,\varkappa = \frac{2}{P}\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\pi-\varkappa)\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\pi+\varkappa)$$

$$\text{συν}\pi + \text{συν}\,\varkappa = \frac{2}{P}\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\pi+\varkappa)\text{συν}\,\tfrac{1}{2}(\pi-\varkappa)$$

$$\text{συν}\,\varkappa - \text{συν}\,\pi = \frac{2}{P}\,\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\pi+\varkappa)\text{ἡμ}\,\tfrac{1}{2}(\pi-\varkappa)$$

Νέοι τύποι τοὺς ὁποίους συχνάκις μεταχειριζόμεθα εἰς τοὺς τριγωνομετρικοὺς ὑπολογισμοὺς διὰ νὰ ἀνάξωμεν δύο ὅρους εἰς ἕνα μόνον.

κθ'. Τέλος ἀπὸ τοὺς τελευταίους τούτους, διαιροῦντες καὶ ἀποβλέποντες εἰς τὸ ὅτι $\frac{\text{ἡμ}\,\alpha}{\text{συν}\alpha}=\frac{\text{ἐφ}\,\alpha}{P}=\frac{P}{\text{σφ}\alpha}$, συνάγομεν τοὺς ἀκολούθους: