ΠΡΑΓΜΑΤΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ.

Αντικείμενον τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι ἡ λύσις τῶν τριγώνων, τουτ' ἔστιν, ἡ προσδιόρισις τῶν γωνιῶν καὶ πλευρῶν των διά τινος ἱκανοῦ ἀριθμοῦ δεδομένων.

Εἰς μὲν τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα ἀρκεῖ ἡ γνῶσις τριῶν ἀπὸ τὰ ἓξ μέρη των διὰ τὴν προσδιόρισιν τῶν ἄλλων τριῶν, φθάνει μόνον μεταξὺ τούτων τῶν μερῶν νὰ ὑπάρχῃ μία πλευρά. Διότι ἐὰν ἐδίδοντο αἱ τρεῖς γωνίαι, φανερὸν ὅτι ὅλα τὰ ὅμοια τρίγωνα ἤθελον πληροῖ εἰς τὸ ζήτημα. Εἰς δὲ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα τρία ὁποιαδήποτε δοθέντα, γωνίαι ἢ πλευραὶ, ἀρκοῦν πάντοτε διὰ τὴν προσδιόρισιν τοῦ τριγώνου· διότι εἰς τὰ τοιαῦτα τρίγωνα δὲν θεωρεῖται τὸ ἀπόλυτον μέγεθος τῶν πλευρῶν, ἀλλὰ μόνον ὁ λόγος των πρὸς τὸ τεταρτημόριον, ἢ ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν τὸν ὁποῖον περιέχουν.

Εἴδομεν εἰς τὰ προβλήματα τὰ προσηρτημένα εἰς τὸ Β' βιβλίον τῆς Γεωμετρίας, τίνι τρόπῳ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα, ὅταν γνωρίζωμεν τρία ἀπὸ τὰ μέρη των· ἀπὸ δὲ τὰς προτάσεις ΚΔ' καὶ ΚΕ' τοῦ Ε' βιβλίου ἠμπορεῖ τις ἐπίσης νὰ λάβῃ μίαν ἰδέαν τῶν κατασκευῶν διὰ τῶν ὁποίων εἶναι δυνατὸν νὰ λυθῶσιν αἱ ἀνάλογοι περιστάσεις τῶν σφαιρικῶν τριγώνων. Ἀλλ' αἱ κατασκευαὶ αὗται, ἀκριβεῖς μὲν εἰς τὴν θεωρίαν, μετρίαν ὅμως προσέγγισιν εἰς τὴν πρᾶξιν ἤθελον δώσει (1), διὰ τὴν ἀτέλειαν τῶν ἐργαλείων τῶν ὁποίων ἀπαι-

(1) Πρέπει τῷ ὄντι νὰ διακρίνωμεν τὰ σχήματα τὰ ὁποῖα μόνον χρησιμεύουν εἰς τὸ νὰ διευθύνουν τὸν συλλογισμὸν διὰ τὴν ἀπόδειξιν ἑνὸς θεωρήματος ἢ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος, ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται διὰ τὴν γνῶσιν μερικῶν τῶν διαστάσεών των. Τὰ πρῶτα πάντοτε ὑποτίθενται ἀκριβῆ· τὰ δεύτερα, ἐὰν δὲν χαραχθοῦν ἀκριβῶς, δίδουν ἐξαγόμενα ψευδῆ. Ο. Σ.

τοῦν τὴν χρῆσιν: καλοῦνται δὲ γραφικαὶ μέθοδοι. Εκ τοῦ ἐναντίου, αἱ τριγωνομετρικαὶ μέθοδοι, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀνεξάρτητοι κάθε μηχανικῆς ἐργασίας, δίδουν τὰς λύσεις μὲ ὅσον δύναταί τις νὰ ἐπιθυμήσῃ βαθμὸν ἀκριβείας: θεμελιοῦνται δὲ ἐπὶ τῶν γραμμῶν αἱ ὁποῖαι ὀνομάζονται ἡμίτονα, συνημίτονα, ἐφαπτόμεναι, κ.τ.λ. διὰ τῶν ὁποίων ἔφθασαν οἱ Μαθηματικοὶ εἰς τὸ νὰ ἐκφράσουν μὲ τρόπον ἁπλούστατον τὰς μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων σχέσεις.

Εν πρώτοις θέλομεν ἐκθέσει τὰς ἰδιότητας τούτων τῶν γραμμῶν καὶ τοὺς ἐκ τούτων προκύπτοντας ἀρχικοὺς τύπους, οἱ ὁποῖοι εἶναι εἰς μεγάλην χρῆσιν εἰς ὅλα τὰ μέρη τῆς Μαθηματικῆς, καὶ ἐνταυτῷ δίδουν μέσα τελειοποιήσεως εἰς τὴν Αλγεβρικὴν ἀνάλυσιν. Ακολούθως θέλομεν τοὺς ἐφαρμόσει εἰς τὴν λύσιν τῶν εὐθυγράμμων καὶ σφαιρικῶν τριγώνων.

Διαίρεσις τῆς περιφερείας.

α΄. Εως ἐσχάτως οἱ Γεωμέτραι ἐκ συνθήκης ἐδιαιροῦσαν τὴν περιφέρειαν εἰς 360 ἴσα μέρη μοίρας λεγόμενα, τὴν μοῖραν εἰς 60 λεπτὰ, τὸ λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα κ. τ. λ. Ο τρόπος οὗτος τῆς διαιρέσεως ἐπαῤῥησίαζε μὲν κἄποιας εὐκολίας εἰς τὴν πρᾶξιν, διὰ τὸν μέγαν ἀριθμὸν τῶν διαιρετῶν τοῦ 360: πλὴν τῷ ὄντι ὑπέκειτο εἰς τὰς δυσκολίας τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν, καὶ συχνάκις ἐμπόδιζε τὴν ταχεῖαν ἐκτέλεσιν τῶν ὑπολογισμῶν.

Οἱ δὲ σοφοὶ οἱ ἐφευρόντες τὸ νέον σύστημα τῶν σαθμῶν καὶ μέτρων, ἐστοχάσθησαν ὅτι ἤθελεν εἶναι μεγάλης ὠφελείας πρόξενος ἡ εἴσαξις τῆς δεκαδικῆς διαιρέσεως εἰς τὴν καταμέτρησιν τῶν γωνιῶν. Επομένως ἐθεώρησαν ὡς ἀρχικὴν μονάδα τὸ τέταρτον μέρος τῆς περιφερείας ἢ τὸ τεταρτημόριον, μέτρον τῆς ὀρθῆς γωνίας, καὶ ἐδιαίρεσαν ταύτην τὴν μονάδα εἰς 100 ἴσα μέρη μοίρας αὐτὰ ὀνομάσαντες, τὴν μοῖραν εἰς 100 λεπτὰ, καὶ τὸ λεπτὸν εἰς 100 δεύτερα.

Εἰς τὸ ἑξῆς θέλομεν μεταχειρίζεσθαι τὴν νέαν εἴτε δεκαδικὴν διαίρεσιν τῆς περιφερείας· ἐπειδὴ ὅμως οἱ τριγωνομετρικοὶ πίνακες, ὅσοι ἐλογαριάσθησαν κατὰ ταύτην τὴν διαίρεσιν, δὲν εἶναι ἀκόμη τόσον διεσπαρμένοι, θέλομεν προσθέτει εἰς τὰ παραδείγματα, τὰ ἐξαγόμενα τὰ ὁποῖα δίδουν οἱ ὑπολογισμοὶ κατὰ τὴν παλαιὰν, ἢ ἑξηκονταδικὴν (sexagesimale) διαίρεσιν τῆς περιφερείας γινόμενοι. Η διαφορὰ δὲν ὑπάρχει διόλου εἰς τὴν τιμὴν τῶν πλευρῶν, ἀλλὰ μόνον εἰς τὴν τιμὴν ἢ μᾶλλον εἰς τὴν διὰ μοιρῶν ἔκφρασιν τῶν γωνιῶν καὶ τῶν τόξων.

β΄. Αἱ μοῖραι, λεπτὰ καὶ δεύτερα σημειόνονται διὰ τῶν χαρακτήρων ^{o}, $'$, $''$: Οὕτως ἡ ἔκφρασις $16^{o}6'75''$, παριςάνει τόξον ἢ γωνίαν 16 μοιρῶν 6 λεπτῶν 75 δευτέρων.

Τὸ τόξον τοῦτο ἀναφερόμενον εἰς τὸ τεταρτημόριον εἰλημμένον ὡς μονάδα, ἐκφράζεται διὰ 0,160675. Ενταῦθα βλέπομεν ὅτι ἡ μετρουμένη γωνία ἀπὸ τοῦτο τὸ τόξον, εἶναι πρὸς τὴν ὀρθὴν :: 160675:1000000· λόγος ὅςις ὄχι μὲ τόσην εὐκολίαν συνάγεται ἀπὸ τὰς ἐκφράσεις τὰς ὁποίας δίδει ἡ παλαιὰ διαίρεσις τῆς περιφερείας.

Τὰ τόξα καὶ αἱ γωνίαι ἐκφράζονται ἀδιαφόρως εἰς τὸν ὑπολογισμὸν δι᾽ ἀριθμῶν μοιρῶν, λεπτῶν καὶ δευτέρων. Οὕτως τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἢ τὸ τεταρτημόριον θέλομεν σημειόνει διὰ 100^{o}, δύο ὀρθὰς γωνίας ἢ τὴν ἡμιπεριφέρειαν διὰ 200^{o}, τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας ἢ τὴν ὅλην περιφέρειαν διὰ 400^{o}· καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

γ΄. Ο,τι μένει ἀφαιρεθείσης μιᾶς γωνίας ἢ ἑνὸς τόξου ἀπὸ 100^{o} καλεῖται συμπλήρωμα ταύτης τῆς γωνίας ἢ τούτου τοῦ τόξου· οὕτως τὸ συμπλήρωμα μιᾶς γωνίας 25° 40′ εἶναι 74° 60′. Τὸ συμπλήρωμα μιᾶς γωνίας 12° 1′ 62″ εἶναι 87° 95′ 38″.

Εν γένει, ἐὰν Α παριςάνῃ γωνίαν ἢ τόξον ὁποιονδήποτε, 100°—Α εἶναι τὸ συμπλήρωμα ταύτης τῆς γωνίας ἢ τούτου τοῦ τόξου. Οθεν βλέπομεν ὅτι ἐὰν ἡ γωνία ἢ τὸ δεδομένον τόξον, ἦναι μείζων τῶν 100°, τὸ συμπλήρωμά της εἶναι ἀρνητικόν. (1). Οὕτως τὸ συμπλήρωμα τῶν 160° 84′ 10″ εἶναι — 60° 84′ 10″. Εἰς ταύτην τὴν περίςασιν, τὸ συμπλήρωμα θετικῶς λαμβανόμενον, εἶναι ἡ ποσότης ἥτις πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὴν γωνίαν ἢ τὸ δεδομένον τόξον, διὰ νὰ προκύψῃ ὑπόλοιπον ἴσον μὲ 100°.

Επειδὴ αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ὁμοῦ λαμβανόμεναι κάμνουν μίαν ὀρθήν· ἕπεται ὅτι ἡ μία εἶναι συμπλήρωμα τῆς ἄλλης.

δ′. Παραπλήρωμα μιᾶς γωνίας ἢ ἑνὸς τόξου εἶναι τὸ ἐναπομένον ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν ταύτης τῆς γωνίας ἢ τούτου τοῦ τόξου ἀπὸ 200°, τιμῆς δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἢ μιᾶς ἡμιπεριφερείας. Οὕτως ἐὰν Α παριςάνῃ ὁποιονδήποτε τόξον ἢ ὁποιανδήποτε γωνίαν, 200°—Α εἶναι τὸ παραπλήρωμά του.

Επειδὴ εἰς κάθε τρίγωνον αἱ τρεῖς γωνίαι ὁμοῦ κάμνουν 200°, ἕπεται ὅτι μία γωνία ἐκ τῶν τριῶν εἶναι τὸ παραπλήρωμα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

---

(1) Δι᾽ ἀρνητικὸν συμπλήρωμα πρέπει νὰ ἐννοῶμεν ἓν τόξον τὸ ὁποῖον μετρεῖται κατὰ μίαν ἔννοιαν ἀντίθετον ἐκείνης εἰς τὴν ὁποίαν μετρεῖται ὅταν πρὸ αὐτοῦ δὲν ἔχῃ οὐδὲν σημεῖον. Οὕτως ἐπειδὴ τὸ συμπλήρωμα ΜΔ′ ἐκτιμᾶται ἐκ τῆς Δ πρὸς τὴν Μ′ ἤγουν κατ᾽ ἀντίθετον ἔννοιαν τῆς ΜΔ, λέγεται ἀρνητικόν. Οταν λοιπὸν λέγωμεν ὅτι τὸ συμπλήρωμα ἑνὸς τόξου μείζονος τῶν 100° ἦναι ἀρνητικόν, πρέπει μὲ τὴν λέξιν ἀρνητικὸν νὰ ἐννοῶμεν ὅτι ἐκτιμᾶται κατὰ μίαν ἔννοιαν ἀντίθετον ἐκείνης κατὰ τὴν ὁποίαν ἤθελεν ἐκτιμηθῇ ἐὰν τὸ τόξον ἦτον μικρότερον τῶν 100° (βλέπε καὶ εἰσαγω: 8. Σημεί.). Ο. Μ.

Αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων, τόσον εὐθυγράμμων ὅσον καὶ σφαιρικῶν καὶ αἱ πλευραὶ τούτων τῶν τελευταίων, ἔχουν πάντοτε τὰ παραπληρώματά των θετικά· διότι δὲν ὑπερβαίνουσι τὰς 200° μοίρας.

Γενικαὶ γνώσεις περὶ τῶν ἡμιτόνων, συνημιτόνων, ἐφαπτομένων, κ.τ.λ.

έ. Τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου ΑΜ τοῦ ὁποίου ἡ μὲν στιγμὴ Α λέγεται ἀρχὴ, ἡ δὲ στιγμὴ Μ ἄκρον· εἶναι ἡ φερομένη κάθετος ἀπὸ τὸ ἄκρον Μ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ἥτις διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν Α. σχ. 1.

Ἐὰν εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΓΑ ὑψωθῇ ἡ κάθετος ΑΤ ἕως οὗ νὰ συναπαντήσῃ τὴν ἀκτῖνα ΓΜ ἥτις διέρχεται ἀπὸ τὸ ἄκρον Μ προεκβληθεῖσαν, ἡ γραμμὴ ΑΤ οὕτως προσδιοριζομένη, καλεῖται ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΜ· ἡ δὲ ΓΤ μέρος τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης ἀπὸ τὸ κέντρον Γ καὶ τὸ ἄκρον Μ, ἥτις ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ τελειόνει εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἐφαπτομένης τοῦ τόξου, καλεῖται διατέμνουσα τοῦ τόξου ΑΜ ἢ τῆς γωνίας ΑΓΜ. (1)

Αἱ τρεῖς αὗται γραμμαὶ ΜΠ, ΑΤ, ΓΤ, ἀπὸ τὸ τόξον ΑΜ ἐξαρτώμεναι, καὶ διὰ τοῦ ἰδίου καὶ τῆς ἀκτῖνος πάντοτε προσδιοριζόμεναι, σημειοῦνται οὕτως: ΜΠ=ἡμ ΑΜ, ἢ ἡμ ΑΓΜ, ΑΤ=ἐφ ΑΜ, ἢ ἐφ ΑΓΜ, ΤΓ=δια ΑΜ, ἢ δια ΑΓΜ.

---

(1) Βλέπομεν ἐνταῦθα ὅτι αἱ λέξεις διατέμνουσα καὶ ἐφαπτομένη ἐκλαμβάνονται εἰς διαφορετικὴν ἔννοιαν ἀπὸ ἐκείνην ἥτις εἰς αὐτὰς δίδεται εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς Γεωμετρίας. Εἰς τὸ μέρος τοῦτο τῶν Μαθηματικῶν, ἡ διατέμνουσα καὶ ἡ ἐφαπτομένη εἶναι ἀπροσδιόριστοι εὐθεῖαι, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν τέμνει τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἅπτεται αὐτοῦ· ἀλλ' εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν αἱ αὐταὶ ὀνομασίαι ἐφαρμόζονται πάντοτε εἰς γραμμὰς προσδιορισμένου μεγέθους: ὅταν ἠμπορῇ νὰ ἀκολουθήσῃ ὁμωνυμία, αἱ τελευταῖαι αὗται καλοῦνται Τριγωνομετρικαὶ ἐφαπτόμεναι καὶ διατέμνουσαι. Ο. Μ.

ϛʹ. Ἀφ' οὗ ληφθῇ τὸ τόξον ΑΔ ἴσον μὲ τεταρτημόριον, ἐὰν ἐκ τῶν στιγμῶν Μ καὶ Δ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν εἶναι τὸ ἄκρον τοῦ τόξου ΜΔ, ἡ δὲ ἄλλη ἡ ἀρχή του, ἀχθῶσιν αἱ γραμμαὶ ΜΚ, ΔΣ κάθετοι εἰς τὴν ἀκτῖνα ΓΔ, ἡ μὲν περατουμένη εἰς ταύτην τὴν ἀκτῖνα, ἡ δὲ εἰς τὴν ἀκτῖνα ΓΜ προεκβληθεῖσαν· αἱ γραμμαὶ ΜΚ, ΔΣ καὶ ΓΣ παρομοίως θέλουν εἶναι τὸ ἡμίτονον, ἐφαπτομένη, καὶ διατέμνουσα τοῦ τόξου ΜΔ, συμπληρώματος τοῦ τόξου ΑΜ. Καλοῦνται δὲ, χάριν συντομίας, συνημίτονον, συνεφαπτομένη καὶ συνδιατέμνουσα τοῦ τόξου ΑΜ· τίποτε ἄλλο λοιπὸν δὲν εἶναι τὸ συνημίτονον, ἡ συνεφαπτομένη, καὶ ἡ συνδιατέμνουσα ἑνὸς τόξου, παρὰ τὸ ἡμίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καὶ ἡ διατέμνουσα τοῦ συμπληρώματος τοῦ τόξου· σημειόνονται δὲ ὡς ἀκολούθως: ΜΚ = συν ΑΜ, ἢ συν ΑΓΜ, ΔΣ = σφ ΑΜ ἢ σφ ΑΓΜ, ΓΣ = σδ ΑΜ, ἢ σδ ΑΓΜ. Ἐν γένει, ἐὰν Α παριστάνῃ ὁποιονδήποτε τόξον ἢ ὁποιανδήποτε γωνίαν, ἐπειδὴ 100°—Α παριστάνει τὸ συμπλήρωμά του καὶ, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὸ συνημίτονον, ἡ συνεφαπτομένη καὶ συνδιατέμνουσα ἑνὸς τόξου, εἶναι τὸ ἡμίτονον ἡ ἐφαπτομένη καὶ διατέμνουσα τοῦ συμπληρώματος· ἔχομεν συν Α = ἡμ (100°—Α), σφΑ = ἐφ(100°—Α), σδΑ = δια(100°—Α).

Τὸ τρίγωνον ΜΚΓ, ἐκ τῆς κατασκευῆς, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΓΠΜ, οὕτως ἔχομεν ΓΠ = ΜΚ· λοιπὸν εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΠΜ, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα, αἱ δύο πλευραὶ ΜΠ, ΓΠ εἶναι τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον τοῦ τόξου ΑΜ: ἠμποροῦμεν λοιπὸν ἀκόμη νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ συνημίτονον ἑνὸς τόξου εἶναι τὸ μέρος τῆς διαμέτρου τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τοῦ ποδὸς τοῦ ἡμιτόνου. Ὅσον διὰ τὰ τρίγωνα ΓΑΤ, ΓΔΣ, αὐτὰ εἶναι ὅμοια μὲ τὰ ἴσα τρίγωνα ΓΠΜ, ΓΚΜ, καὶ οὕτως εἶναι ὅμοια μεταξύ των.

Ἐντεῦθεν ἀμέσως θέλομεν συνάξει τοὺς μεταξὺ τῶν γραμμῶν τὰς ὁποίας ὡρίσαμεν διαφόρους λόγους· ἀλλὰ πρότερον πρέπει νὰ ἴδωμεν τὴν ὁδὸν κατὰ τὴν ὁποίαν προβαίνουν αὗται αἱ γραμμαὶ, ὅταν τὸ τόξον εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρονται αὐξάνῃ ἐκ τοῦ μηδενὸς μέχρι 200°.

ζ΄. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἓν ἄκρον τοῦ τόξου μένει ςαθερὸν εἰς Α, καὶ ὅτι τὸ ἄλλο σημειωμένον διὰ Μ, διατρέχει διαδοχικῶς ὅλην τὴν ἔκτασιν τῆς ἡμιπεριφερείας ἐκ τῆς Α μέχρι τῆς Β κατὰ τὴν ἔννοιαν ΑΔΒ.

Ὅταν ἡ ςιγμὴ Μ ἦναι ἑνωμένη μὲ τὴν Α, ἢ ὅταν τὸ τόξον ΑΜ ἦναι μηδὲν, τὰ τρία σημεῖα Τ, Μ, Π ταυτίζονται μὲ τὴν ςιγμὴν Α· ὅθεν βλέπομεν ὅτι τὸ ἡμίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη τόξου μηδενὸς εἶναι μηδὲν, καὶ ὅτι τὸ συνημίτονον τοῦ αὐτοῦ τόξου, καθὼς καὶ ἡ διατέμνουσά του, ἰσοῦται μὲ τὴ ἀκτῖνα. Σημειόνοντες λοιπὸν διὰ Ρ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, θέλομεν ἔχει,

$$\text{ἡμ}\ 0=0,\ \text{ἐφ}\ 0=0,\ \text{συν}\ 0=\text{Ρ},\ \text{δια}\ 0=\text{Ρ}$$

η΄. Ἀναλόγως ὁποῦ ἡ ςιγμὴ Μ προχωρεῖ πρὸς τὴν Δ, τὸ ἡμίτονον αὐξάνει, καθὼς ἦτε ἐφαπτομένη καὶ διατέμνουσα· ἀλλὰ τὸ συνημίτονον, ἡ συνεφαπτομένη καὶ ἡ συνδιατέμνουσα σμικρύνουν. Ὅταν ἡ ςιγμὴ Μ εὑρεθῇ εἰς τὸ μέσον τοῦ ΑΔ, ἢ ὅταν τὸ τόξον ΑΜ ἦναι 50°, καθὼς καὶ τὸ συμπλήρωμά του ΜΔ, τὸ ἡμίτονον ΠΜ εἶναι ἴσον μὲ τὸ συνημίτονον ΜΚ ἢ ΓΠ, καὶ τὸ τρίγωνον ΓΠΜ, ἐπειδὴ γίνεται ἰσοσκελὲς, δίδει τὴν ἀναλογίαν ΜΠ : ΓΜ :: 1 : $\sqrt{2}$, ἢ ἡμ 50° : Ρ :: 1 : $\sqrt{2}$. Λοιπὸν ἡμ 50° $=$ συν 50° $= \frac{\text{Ρ}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\text{Ρ}\sqrt{2}$. Εἰς τὴν αὐτὴν περίςασιν τὸ τρίγωνον ΓΑΤ γίνεται ἰσοσκελὲς καὶ ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΓΔΣ· ὅθεν βλέπομεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη καὶ συνεφαπτομένη τῶν 50° ἰσοῦνται καὶ αἱ δύο μὲ τὴν ἀκτῖνα, καὶ οὕτως ἔχομεν ἐφ 50° $=$ σφ 50° $=$ Ρ.

θ'. Εξακολουθοῦντος τοῦ τόξου ΑΜ νὰ αὐξάνῃ, τὸ ἡμίτονον αὐξάνει ἕως οὗ ἡ ςιγμὴ Μ φθάσῃ εἰς Δ: τότε τὸ μὲν ἡμίτονον ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα; τὸ δὲ συνημίτονον μὲ μηδέν. Εχομεν λοιπὸν ἡμ $100^o = Ρ$ καὶ συν $100^o = o$· καὶ δυνάμεθα νὰ σημειόσωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι συνέπεια ἐκείνων τὰς ὁποίας εὑρήκαμεν διὰ τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ τόξου μηδενός· διότι ἐπειδὴ τὸ συμπλήρωμα τῶν 100^o εἶναι μηδὲν, ἔχομεν ἡμ $100^o =$ συν $o^o = Ρ$ καὶ συν $100^o =$ ἡμ $o^o = o$.

Οσον διὰ τὴν ἐφαπτομένην, αὐτὴ αὐξάνει ταχύτατα ἀναλόγως ὁποῦ ἡ ςιγμὴ Μ πλησιάζει πρὸς τὴν Δ· καὶ τέλος ὅταν φθάσῃ εἰς Δ, δὲν ὑπάρχει πλέον κυρίως ἐφαπτομένη, διότι αἱ γραμμαὶ ΑΤ, ΓΔ, οὖσαι παράλληλοι, δὲν ἠμποροῦν νὰ συναπαντηθοῦν. Τοῦτο δὲ ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τῶν 100^o εἶναι ἄπειρος, καὶ γράφομεν ἐφ $100^o = \infty$.

Επειδὴ τὸ συμπλήρωμα τῶν 100^o εἶναι μηδὲν, ἔχομεν ἐφ $o = $ σφ 100^o καὶ σφ $o =$ ἐφ 100^o. Λοιπὸν σφ $o = \infty$ καὶ σφ $100^o = o$.

ι'. Εξακολουθούσης τῆς ςιγμῆς Μ νὰ προχωρῇ ἀπὸ τὴν Δ πρὸς τὴν Β, τὰ μὲν ἡμίτονα σμικρύνουν τὰ δὲ συνημίτονα αὐξάνουν. Οὕτως βλέπομεν ὅτι τὸ τόξον ΑΜ' ἔχει δι' ἡμίτονον Μ'Π' καὶ διὰ συνημίτονον Μ'Κ ἢ ΓΠ'. Αλλὰ τὸ τόξον Μ'Β εἶναι παραπλήρωμα τοῦ ΑΜ', ἐπειδὴ ΑΜ' + Μ'Β ἰσοῦται μὲ ἡμιπεριφέρειαν· ἄλλως ἐὰν ἀχθῇ ἡ Μ'Μ παράλληλος τῇ ΑΒ, φανερὸν ὅτι τὰ τόξα ΑΜ, ΒΜ', τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ παραλλήλων, θέλουν εἶναι ἴσα, καθὼς καὶ αἱ κάθετοι ἢ τὰ ἡμίτονα ΜΠ, Μ'Π'. Λοιπὸν τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου ἢ μιᾶς γωνίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμίτονον τοῦ παραπληρώματος τούτου τοῦ τόξου ἢ ταύτης τῆς γωνίας.

Τὸ τόξον ἢ ἡ γωνία A ἔχει διὰ παραπλήρωμα $200°—$ A : οὕτως ἔχομεν ἐν γένει

$$ἡμ\ A = ἡμ\ (200°—A).$$

Η αὐτὴ ἰδιότης ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ ἀκόμη διὰ τῆς ἐξισώσεως ἡμ $(100° + B) =$ ἡμ $(100°—B)$, ὄντος B τοῦ τόξου ΔΜ ἢ του ἴσου του ΔΜ΄.

ια΄. Τὰ αὐτὰ τόξα ΑΜ΄, ΑΜ τὰ ὁποῖα εἶναι παραπλήρωμα τὸ ἓν τοῦ ἄλλου, καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσα ἡμίτονα, ἔχουν καὶ συνημίτονα ἴσα ΓΠ΄, ΓΠ· ἀλλὰ πρέπει νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ συνημίτονα ταῦτα διευθύνονται κατ' ἀντιθέτους ἐννοίας. Η διαφορὰ αὕτη τῆς θέσεως εἰς τὸν ὑπολογισμὸν ἐκφράζεται διὰ τῆς ἀντιθέσεως τῶν σημείων: ὥςε ἐὰν θεωρηθῶσιν ὡς θετικὰ, ἢ ἔχοντα πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον +, τὰ σηνημίτονα τῶν τόξων μικροτέρων τῶν $100°$, πρέπει νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀρνητικὰ ἢ ἔχοντα πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον —, τὰ συνημίτονα τῶν τόξων μεγαλητέρων τῶν $100°$. Εχομεν λοιπὸν ἐν γένει

$$συν\ A = —\ συν\ (200°—A).$$

ἢ συν $(100° + A) = —$ συν $(100°—A)$· τοῦτ' ἔςιν, τὸ συνημίτονον ἑνὸς τόξου ἢ μιᾶς γωνίας μεγαλητέρου τῶν $100°$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ συνημίτονον τοῦ παραπληρώματός του, ἀρνητικῶς λαμβανόμενον.

Επειδὴ τὸ συμπλήρωμα ἑνὸς τόξου μεγαλητέρου τῶν $100°$ εἶναι ἀρνητικὸν (γ΄), δὲν εἶναι θαυμαςὸν ἐὰν τὸ ἡμίτονον τοῦ συμπληρώματος τούτου ἦναι ἀρνητικόν· πλὴν διὰ νὰ αἰσθητοποιήσωμεν ἔτι μᾶλλον ταύτην τὴν ἀλήθειαν, ἂς ζητήσωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ διαςήματος τῆς ςιγμῆς A ἀπὸ τὴν κάθετον ΜΠ. Εὰν κάμωμεν τὸ τόξον ΑΜ=χ, θέλομεν ἔχει ΓΠ=συνχ, καὶ τὸ ζητούμενον διάστημα ΑΠ $=$ Ρ — συνχ. Ο αὐτὸς τύπος πρέπει νὰ ἐκφράζῃ τὸ διάστημα τῆς στιγμῆς Α ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΜΠ, ὁποιονδήποτε εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ τόξου ΑΜ, ἡ ἀρχὴ τοῦ ὁποίου εἶναι εἰς τὴν στιγμὴν Α. Ας ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι ἡ στιγμὴ Μ φθάνει εἰς Μ′, ὥστε χ σημειόνει τὸ τόξον ΑΜ′, θέλομεν ἔχει ἀκόμη εἰς ταύτην τὴν στιγμὴν ΑΠ′ $=$ Ρ — συνχ· λοιπὸν συνχ $=$ Ρ — ΑΠ′ $=$ ΑΓ — ΑΠ′ $=$ — (ΑΠ′ — ΑΓ) $=$ — ΓΠ′· τοῦτο δεικνύει ὅτι συνχ εἶναι τότε ἀρνητικόν· καὶ ἐπειδὴ ΓΠ′ $=$ ΓΠ $=$ συν $(200^{\circ} - χ)$, ἔχομεν συνχ $=$ — συν $(200^{\circ} - χ)$, ὡς ἤδη εὑρήκαμεν.

Εντεῦθεν βλέπομεν ὅτι μία ἀμβλεῖα γωνία ἔχει τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ τὸ αὐτὸ συνημίτονον μὲ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ἥτις χρησιμεύει εἰς αὐτὴν ὡς παραπλήρωμα, μὲ ταύτην μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι τὸ συνημίτονον τῆς ἀμβλείας γωνίας πρέπει νὰ ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον —. Οὕτως ἔχομεν ἡμ $150^{\circ} =$ ἡμ $50^{\circ} = \frac{1}{2}Ρ\sqrt{2}$, καὶ συν $150^{\circ} = -$ συν $50^{\circ} = -\frac{1}{2}Ρ\sqrt{2}$.

Οσον διὰ τὸ τόξον ΑΔΒ ἴσον μὲ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, τὸ ἡμίτονόν του εἶναι μηδὲν, καὶ τὸ συνημίτονόν του ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα ἀρνητικῶς εἰλημμένην· ἔχομεν λοιπὸν ἡμ $200^{\circ} = 0$, καὶ συν $200^{\circ} = -$ Ρ. Τοῦτο παρομοίως συνάγεται καὶ ἐκ τῶν τύπων ἡμ Α $=$ ἡμ $(200^{\circ} - Α)$, καὶ συν Α $= -$ συν $(200^{\circ} - Α)$, ὅταν γένῃ Α $= 200^{\circ}$.

ιβ′. Ας ἐξετάσωμεν τώρα τί γίνεται ἡ ἐφαπτομένη ἑνὸς τόξου ΑΜ′ μεγαλητέρου τῶν 100°. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν, πρέπει νὰ προσδιορισθῇ ἀπὸ τὴν συνδρομὴν τῶν γραμμῶν ΑΤ, ΓΜ′· ἐπειδὴ αἱ γραμμαὶ αὗται κάμνουσι γωνίας μὲ τὴν ΑΓ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁποίων εἶναι μεῖζον δύο ὀρθῶν, διὰ τοῦτο δὲν συναπαντῶνται κατὰ τὴν ἔννοιαν ΑΤ, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς ΑΥ· ὅθεν βλέπομεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἑνὸς τόξου μεγαλητέρου τῶν 100° εἶναι ἀρνητική. Παρατηροῦντες δὲ ὅτι ΑΥ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ΑΝ (σχ. 1) παραπληρώματος τοῦ ΑΜ′ (διότι ΝΑΜ′ εἶναι ἡμιπεριφέρεια), συνάγομεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη ἑνὸς τόξου ἢ μιᾶς γωνίας μεγαλητέρου τῶν 100^{o} εἶναι ἴση μὲ τὴν τοῦ παραπληρώματός του ἀρνητικῶς εἰλημμένην, εἰς τρόπον ὥστε

$$\text{ἐφ}\,A = -\text{ἐφ}\,(200^{o} - A)$$

Τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὴν συνεφαπτομένην παριστανομένην ὑπὸ ΔΣ′, ἥτις εἶναι ἴση καὶ ἀντίθετος μὲ τὴν συνεφαπτομένην ΔΣ τοῦ ΑΜ. Ἔχομεν λοιπὸν ὡσαύτως

$$\text{σφ}\,A = -\text{σφ}\,(200^{o} - A).$$

Λοιπὸν αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ συνεφαπτόμεναι εἶναι ἀρνητικαί, καθὼς τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα, ἀπὸ 100^{o} μέχρι 200^{o}. Καὶ εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο ὅριον, ἔχομεν ἐφ $200^{o} = 0$ καὶ σφ $200^{o} = -$ σφ $0^{o} = -\infty$.

ιγ′. Εἰς μὲν τὴν Τριγωνομετρίαν δὲν θεωροῦνται τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα, κ.τ.λ. τόξων ἢ γωνιῶν μεγαλητέρων τῶν 200^{o}· διότι πάντοτε μεταξὺ 0 καὶ 200^{o} περιέχονται αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων τόσον εὐθυγράμμων ὅσον καὶ σφαιρικῶν, καὶ αἱ πλευραὶ τούτων τῶν τελευταίων. Πλὴν εἰς τὰς διαφόρους ἐφαρμογὰς τῆς Γεωμετρίας, δὲν εἶναι σπάνιον νὰ θεωρηθῶσι τόξα μεγαλήτερα τῆς ἡμιπεριφερείας, καὶ ἐνταυτῷ περιέχοντα πολλὰς περιφερείας. Εἶναι λοιπὸν ἀναγκαῖον νὰ εὕρωμεν τὴν ἔκφρασιν τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τούτων τῶν τόξων, ὁποιονδήποτε καὶ ἂν ἦναι τὸ μέγεθός των.

Ἐν πρώτοις ἂς παρατηρήσωμεν ὅτι δύο ἴσα τόξα καὶ σημείων ἐναντίων ΑΜ, ΑΝ, ἔχουν ἴσα ἡμίτονα καὶ σημείων ἐναντίων ΜΠ, ΠΝ, ἐν ᾧ τὸ συνημίτονον ΓΠ εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ δύο. Ἔχομεν λοιπὸν ἐν γένει

$$\text{ἡμ}\,(-\chi) = -\text{ἡμ}\chi$$
$$\text{συν}\,(-\chi) = \text{συν}\chi,$$

Τύποι οἱ ὁποῖοι χρησιμεύουν εἰς τὸ νὰ ἐκφράσουν τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τόξων ἀρνητικῶν.

Ἐκ τοῦ 0^{o} μέχρι 200^{o} τὰ ἡμίτονα εἶναι πάντοτε θετικὰ, ὡς κείμενα ἀπὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου ΑΒ· ἐπέκεινα τῶν 200^{o} ἕως 400^{o} τα ἡμίτονα εἶναι ἀρνητικὰ, ὡς κείμενα ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ταύτης τῆς διαμέτρου. Ἔσω ΑΒΝ′$=$χ τόξον μεγαλήτερον τῶν 200^{o}, τὸ ἡμίτονόν του Π′Ν′ εἶναι ἴσον μὲ ΠΜ ἡμίτονον τοῦ τόξου ΑΜ$=$χ-200^{o}· λοιπὸν ἔχομεν ἐν γένει

$$\text{ἡμ}\chi = -\text{ἡμ}(\chi - 200^{o})$$

Δηλαδὴ τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου μείζονος τῶν 200^{o} εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπεροχῆς του ἐπάνω εἰς 200^{o} ἀρνητικῶς λαμβανόμενον.

Ὁ ἀνωτέρω τύπος δίδει τὰ ἡμίτονα τῶν τόξων μεταξὺ 200^{o} καὶ 400^{o} διὰ τῶν ἡμιτόνων μεταξὺ 0^{o} καὶ 200^{o}· διότι ἡ ὑπεροχὴ ἑνὸς τόξου περιεχομένου μεταξὺ 200^{o} καὶ 400^{o} ἐπάνω εἰς 200^{o} περιλαμβάνεται μεταξὺ 0 καὶ 200^{o}· ὅταν δὲ τὸ τόξον χ ἰσοῦται μὲ 400^{o}, τότε ὁ τύπος δίδει ἡμ $400^{o} = -$ἡμ$200^{o} = 0$· καὶ τῷ ὄντι εἶναι φανερὸν ὅτι ὅταν ἕν τόξον ἰσοῦται μὲ τὴν ὅλην περιφέρειαν τὰ δύο ἄκρα του ταυτίζονται, καὶ τὸ ἡμίτονον ἄγεται εἰς μηδέν.

Ἐπίσης εἶναι κατάδηλον ὅτι ἐὰν εἰς ὁποιονδήποτε τόξον ΑΜ προσεθῇ μία ἢ περισσότεραι περιφέρειαι, ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ ἄκρον τοῦ ἀθροίσματος εἶναι τὰ αὐτὰ μὲ τὰ τοῦ τόξου ΑΜ· ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι τὸ τοιοῦτον ἄθροισμα ἔχει τὸ αὐτὸ ἡμίτονον μὲ τὸ τόξον ΑΜ. Ἐὰν λοιπὸν Π σημειόνῃ ἀκεραίαν περιφέρειαν ἢ 400^{o}, θέλομεν ἔχει

$$\text{ἡμ}\chi = \text{ἡμ}(\Pi + \chi) = \text{ἡμ}(2\Pi + \chi) = \text{ἡμ}(3\Pi + \chi) \text{ κτλ.}$$

τὸ αὐτὸ ὑπάρχει διὰ τὸ συνημίτονον, ἐφαπτομένην, κτλ.

Τώρα ὅποιον καὶ ἂν ἦναι τὸ προτεθὲν τόξον, εὐκόλως βλέπομεν ὅτι τὸ ἡμίτονόν του ἠμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ, μὲ ἁρμόδιον σημεῖον, διὰ τοῦ ἡμιτόνου ἑνὸς τόξου μικροτέρου τῶν 100^{o}· διότι τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου χ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου ὁποῦ μένει ὅταν ἀπὸ τὸ τόξον χ ἀφαιρεθῶσι τοσάκις 400^{o} ὁσάκις περιέχονται· καλοῦντες λοιπὸν τὸ τοιοῦτον ὑπόλοιπον ψ, θέλομεν ἔχει ἡμχ = ἡμψ· καὶ ἐπειδὴ ψ περιλαμβάνεται μεταξὺ 0^{o} καὶ 400^{o}, ἐὰν ἦναι μεῖζον 200^{o}, κάμνομεν $\psi = 200^{o} + \omega$· ω σημειόνει ὅ,τι πρέπει νὰ προσεθῇ εἰς 200^{o} διὰ νὰ προκύψῃ ψ. Λοιπὸν ἡμψ = ἡμ $(200^{o} + \omega)$ = — ἡμ$(200^{o} + \omega - 200^{o})$ = — ἡμω. Τώρα ἐπειδὴ ω εἶναι ἔλασσον τῶν 200^{o}, διὰ τοῦτο βλέπομεν ὅτι τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου ὁποιουδήποτε εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου μικροτέρου τῶν 200^{o}· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ τύπου ἡμ$(100^{o} + \chi)$ = ἡμ$(100 - \chi)$ συνάγεται ὅτι τὰ ἡμίτονα τόξων μεγαλητέρων τῶν 100^{o} κρέμανται ἀπὸ τὰ ἡμίτονα τόξων μεταξὺ 0 καὶ 100^{o}· ἕπεται ὅτι τὰ ἡμίτονα ὁποιωνδήποτε τόξων κρέμανται ὁμοίως ἀπὸ τὰ ἡμίτονα τόξων μεταξὺ 0 καὶ 100^{o}.

ιδʹ. Τὰ συνημίτονα ἄγονται πάντοτε εἰς τὰ ἡμίτονα διὰ τοῦ τύπου συνA = ἡμ$(100^{o} - A)$, ἢ διὰ τοῦ τύπου συνA = ἡμ$(100^{o} + A)$· ὅθεν ἠξεύροντες νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰ ἡμίτονα εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς περιςάσεις, ἠξεύρομεν ὡσαύτως νὰ ἐκτιμήσωμεν τὰ συνημίτονα. Τοῦ λοιποῦ, βλέπομεν ἀπὸ τὸ σχῆμα ὅτι τὰ ἀρνητικὰ συνημίτονα χωρίζονται ἀπὸ τὰ θετικὰ διὰ τῆς διαμέτρου ΔΕ, ὥςε ὅλα τὰ τόξα τῶν ὁποίων τὸ ἄκρον πίπτει ἀριςερόθεν τῆς ΔΕ, ἔχουν θετικὸν συνημίτονον, ἐν ᾧ ἐκεῖνα τῶν ὁποίων τὸ ἄκρον πίπτει δεξιόθεν ἔχουν ἀρνητικόν.

Οὕτως ἀπὸ 0^{o} ἕως 100^{o} τὰ συνημίτονα εἶναι θετικά, ἀπὸ 100^{o} ἕως 300^{o} εἶναι ἀρνητικά, ἀπὸ 300^{o} ἕως 400^{o} ξαναγίνονται θετικά· καὶ μετὰ μίαν ἀκεραίαν περιςροφήν, λαμβάνουσι τὰς αὐτὰς τιμὰς ὁποῦ καὶ εἰς τὴν προηγουμένην, διότι ἔχομεν ὡσαύτως συν$(400^{o} + \chi)$ = συνχ.

Μετὰ ταύτας τὰς ἐξηγήσεις, εὐκόλως βλέπομεν ὅτι τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τόξων πολλαπλασίων τοῦ τεταρτημορίου, ἔχουν τὰς ἀκολούθους τιμάς:

ἡμ $0^\circ = 0$	ἡμ $100^\circ = P$	συν $0^\circ = P$	συν $100^\circ = 0$
ἡμ $200^\circ = 0$	ἡμ $300^\circ = -P$	συν $200^\circ = -P$	συν $300^\circ = 0$
ἡμ $400^\circ = 0$	ἡμ $500^\circ = P$	συν $400^\circ = P$	συν $500^\circ = 0$
ἡμ $600^\circ = 0$	ἡμ $700^\circ = -P$	συν $600^\circ = -P$	συν $700^\circ = 0$
ἡμ $800 = 0$	ἡμ $900^\circ = P$	συν $800^\circ = P$	συν $900^\circ = 0$
κτλ.	κτλ.	κτλ.	κτλ.

Ἐν γένει ἐὰν K σημειόνῃ ἀκέραιον ἀριθμὸν ὁποιονδήποτε, θέλομεν ἔχει:

ἡμ $2K.\ 100^\circ = 0$	συν $(2K+1).\ 100^\circ = 0$
ἡμ $(4K+1).\ 100^\circ = P$	συν $4K.\ 100^\circ = P$
ἡμ $(4K-1).\ 100^\circ = -P$	συν $(4K+2).\ 100^\circ = -P$

Τὰ ὅσα εἴπομεν περὶ τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ παραλείψωμεν κάθε μερικὴν ἔρευναν ἐπάνω εἰς τὰς ἐφαπτομένας, συνεφαπτομένας, κ.τ.λ. τῶν τόξων μεγαλητέρων τῶν 200°· διότι, καθὼς θὰ ἴδωμεν ἀπὸ τοὺς τύπους τοὺς ὁποίους ἀμέσως θέλομεν ἐκθέσει, αἱ τιμαὶ τούτων τῶν ποσοτήτων καὶ τὰ σημεῖα τῶν εὐκόλως συνάγονται ἀπὸ τὰς τιμὰς καὶ σημεῖα τῶν ἡμιτόνων καὶ συνημιτόνων τῶν ἰδίων τόξων.

Θεωρήματα καὶ τύποι ἀναφερόμενα εἰς τὰ ἡμίτονα, συνημίτονα, ἐφαπτομένας κ.τ.λ.

ιε΄. Τὸ ἡμίτονον ἑνὸς τόξου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς ἥτις ὑποτείνει τόξον διπλάσιον.

Διότι ἡ ἀκτὶς ΓΑ, κάθετος εἰς ΜΝ, τέμνει δίχα τὴν χορδὴν ΜΝ καὶ τὸ ὑποτεινόμενον τόξον ΜΑΝ· λοιπὸν ΜΠ, ἡμίτονον τοῦ τόξου ΜΑ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς χορδῆς ΜΝ ἥτις ὑποτείνει τὸ τόξον ΜΑΝ, διπλάσιον τοῦ ΜΑ.