καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης ἰσοῦται μὲ $4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2$, αὐτὴ δὲ, ὡς ἀνωτέρω, μὲ $16\pi.(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma)$· διὰ τοῦτο

$$\omega=\sqrt{\pi.(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma)}.$$

Ὅθεν βλέπομεν ὅτι γνωρίζοντες τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειάν του, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν του, ἀπὸ τὸ ἡμιάθροισμα τοῦτο νὰ ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς ἑκάστην τῶν πλευρῶν, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τρία ὑπόλοιπα, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ τρία ταῦτα ὑπόλοιπα ἀναμεταξύ των καὶ μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν. Η τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου θέλει εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου·

24. Η ἐξίσωσις (3) τοῦ ἀριθμοῦ 23 προσδιορίζει τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς λειτουργίαν τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ εὕρωμεν τύπον ὅςις νὰ μᾶς προσδιορίζῃ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Εἶναι γνωςὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρόν του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· καλοῦντες ρ τὴν τοιαύτην ἀκτῖνα, 2π τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου, καὶ ω τὸ ἐμβαδόν του ἔχομεν

$$\omega=\pi\rho\text{· ὅθεν } \rho=\frac{\omega}{\pi}=\sqrt{\frac{(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma)}{\pi}}.$$

25. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΓ′ (σχ. ιϛ). Ας ἄξωμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ $=\beta$, καὶ ἄς λάβωμεν αὐτὴν ὡς βάσιν τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΓ′· ἔςωσαν υ καὶ υ′ τὰ ὕψη τῶν δύο τούτων τριγώνων· τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{1}{2}\upsilon\beta$, τοῦ δευτέρου $\frac{1}{2}\upsilon'\beta$· ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράπλευρον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων τριγώνων, διὰ τοῦτο $\frac{1}{2}\beta(\upsilon+\upsilon')$ ἐκφράζει τὸ τοιοῦτον ἐμβαδόν.

Αλλως. Εσω ΑΒΓΔ ὁποιονδήποτε τετράπλευρον (σχ. ιγ΄)· ἄς κατεβασθῶσιν ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ $=$ α, αἱ κάθετοι ΔΕ $=$ υ, ΓΖ $=$ υ΄· ἄς γένη ΛΕ $=$ β, καὶ ΒΖ $=$ β΄· ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΓΖΕΔ εἶναι τραπέζιον, διὰ τοῦτο τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{2}(\upsilon+\upsilon')(\alpha-\beta-\beta')$. Περιπλέον, ΑΔΕ $= \frac{1}{2}\beta\upsilon$, ΓΒΖ $= \frac{1}{2}\beta'\upsilon'$. Λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τούτων ἐμβαδῶν ἢ τὸ ὅλον ἐμβαδὸν ΑΒΓΔ $= \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\times\upsilon' + \frac{1}{2}(\alpha-\beta')\upsilon$.

Η ἐξίσωσις αὕτη, τῆς ὁποίας ἡ ἐφαρμογὴ εἶναι εὔκολὸς, δὲν ἀνήκει εἰς τὴν περίστασιν καθ' ἥν μία τῶν καθέτων πίπτει ἐκτὸς τοῦ τετραπλεύρου· πλὴν ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ταύτην τὴν περίστασιν ἐξίσωσις συνάγεται ἀπὸ αὐτὴν, τρεπομένου β εἰς $-\beta$ καὶ β΄ εἰς $-\beta'$.

25· ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ ἀχθῇ ἡ ΕΖ κάθετος εἰς τὴν βάσιν ΑΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. ιγ΄) ὥστε τὰ τρίγωνα ΑΕΖ, ΑΒΓ νὰ ἔχουν μεταξύ των λόγον δεδομένον μ πρὸς ν.

Εσωσαν β καὶ χ αἱ βάσεις ΑΓ, ΑΕ· υ καὶ ψ τὰ ὕψη ΒΔ, ΕΖ· τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΑΕΖ εἶναι $\frac{1}{2}\beta\upsilon$, $\frac{1}{2}\chi\psi$· ὅθεν $\frac{\chi\psi}{\beta\upsilon} = \frac{\mu}{\nu}$. Αλλως τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΕΖ, ΑΒΔ δίδουν $\frac{\psi}{\upsilon} = \frac{\chi}{\kappa}$, καλουμένου ΑΔ $= \kappa$· λοιπὸν ἀπαλείφοντες ψ, εὑρίσκομεν $\chi = \sqrt{\left(\frac{\kappa\beta\mu}{\nu}\right)}$. Εὰν $\chi > \kappa$ ἢ ΑΔ, ἡ στιγμὴ Ε ἔπρεπε νὰ εὑρίσκεται πρὸς τὴν Θ, ἐκεῖθεν τῆς Δ: τότε ἡ κάθετος εἰς τὴν ΑΓ χωρίζει τρίγωνον τὸ ὁποῖον δὲν περιέχεται πλέον εἰς ΑΒΓ: ἡ περίστασις αὕτη ἀκολουθεῖ ὅταν $\beta\mu > \kappa\nu$,

$$\text{ἢ} \quad \frac{\mu}{\nu} > \frac{\kappa}{\beta} = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΓ}}.$$

26. Γνωρίζοντες (σχ. ιδ΄) τὴν πλευρὰν ΑΒ $= \alpha$ ἑνὸς κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ἄς ζητήσωμεν τὴν

$ΑΓ = χ$ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Ἡ ΓΟ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ δίδει $\overline{ΑΓ}^2 = ΓΙ \times 2ΓΟ$. Παριστάνοντες διὰ ω τὴν ἀκτῖνα ΟΙ τοῦ εἰς τὸ δεδομένον πολύγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου, ἔχομεν

$\overline{ΓΙ}^2 = Ρ - ω$, καὶ $\overline{ΟΙ}^2 = \overline{ΑΟ}^2 - \overline{ΑΙ}^2$: λοιπὸν

$$χ^2 = 2Ρ(Ρ - ω), \text{ καὶ } ω^2 = Ρ^2 - \tfrac{1}{4}α^2.$$

Κάμνοντες, π.χ, $α = Ρ$, ἥτις εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου, εὑρίσκομεν $Ρ\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$ διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου δωδεκαγώνου. Ὁμοίως $α = Ρ\sqrt{3}$ (πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου) δίδει $χ = Ρ$ διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ ἑξαγώνου, κτλ.

Δυνάμεθα ὡσαύτως νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν $ΕΖ = ψ$ ἑνὸς κανονικοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου, γνωρίζοντες τὴν πλευρὰν $ΑΒ = α$, τοῦ ἐγγεγραμμένου τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πλευρῶν. Διότι τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΟΙ, ΕΟΓ δίδουν,

$$\frac{ΟΙ}{ΟΓ} = \frac{ΑΙ}{ΕΓ}, \text{ ἢ } \frac{ω}{Ρ} = \frac{α}{ψ}.$$

λοιπὸν

$$ψ = \frac{αΡ}{ω} \text{ καὶ } ω^2 = Ρ^2 - \tfrac{1}{4}α^2.$$

Οὕτως $α = Ρ\sqrt{2}$ δίδει $ω = \tfrac{1}{2}Ρ\sqrt{2}$ καὶ $ψ = 2Ρ$ διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου· $α = Ρ\sqrt{3}$ δίδει, διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, $ψ = 2Ρ\sqrt{3}$, ἢ τὸ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου.

27. Διὰ τῶν τύπων τοῦ ἀνωτέρω ἀριθμοῦ εὔκολον εἶναι νὰ συναχθῇ ὁ ὡς ἔγγιστα λόγος π τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον, ἢ ἡ ἡμιπεριφέρεια π τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ἡ μονάς. Πρὸς τοῦτο ἂς θέσωμεν $Ρ = 1$· οἱ ἀνωτέρω τύποι ἄγονται εἰς

$$χ = \sqrt{(2 - 2ω)},\quad ω = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}α^2)},\quad ψ = \frac{α}{ω}.$$

Κάμνοντες $\alpha = 1$, ἔχομεν διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου δωδεκαγώνου $\chi = \sqrt{(2-\sqrt{3})} = 0,517638$. Ἐὰν ἐκ νέου κάμωμεν $\alpha = 0,5176$, εὑρίσκομεν $\chi = 0,261053$ διὰ την πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου 24 πλευρῶν. Καὶ οὕτως ἐφεξῆς.

Η αὐτὴ ἐργασία συνεχισθεῖσα τέσσαραις φοραῖς δίδει, π. χ. . . . 0,065438 διὰ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου 96 πλευρῶν· θέτοντες ἀντὶ α ταύτην τὴν τιμὴν εἰς ω καὶ ψ, ἔχομεν τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου· καὶ πολλαπλασιάζοντες διὰ 48, ἔχομεν διὰ τὰς ἡμιπεριμέτρους τούτων τῶν πολυγώνων, 3,1392 καὶ 3,1410. Επειδὴ ἡ ἡμιπεριφέρεια π περιέχεται μεταξὺ τούτων τῶν ὁρίων, θέλομεν ἔχει λοιπὸν $\pi = 3,14\ldots$ μὴ λαμβάνοντες παρὰ τὰ κοινὰ δεκαδικά.

Διὰ νὰ εὕρωμεν μεγαλητέραν προσέγγισιν, ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια τόσον περισσότερον πλησιάζει εἰς τὰς περιμέτρους τῶν πολυγώνων, ὅσον περισσότερον πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν των, πρέπει νὰ συντρέξωμεν εἰς πολύγωνα μεγαλητέρου ἀριθμοῦ πλευρῶν. Ας ὑποθέσωμεν ὅτι ἐλογαριάσαμεν τὴν πλευρὰν α ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου ν πλευρῶν· θέλομεν ἔχει διὰ τὴν ἡμιπερίμετρον τούτου $\frac{1}{2}\alpha\nu$· καὶ ἐπειδὴ $\psi = \frac{\alpha}{\omega}$, διὰ τοῦτο ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου εἶναι

$$\frac{\frac{1}{2}\nu\alpha}{\omega} = \frac{\frac{1}{2}\nu\alpha}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\alpha\right)\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)}}.$$

Εκ τούτων τέλος συνάγεται ὁ ἀριθμὸς π.

27. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δεδομένων δύο ςιγμῶν Α καὶ Β (σχ. ιε΄) καὶ μιᾶς εὐθείας ΔΔ΄, νὰ γράψωμεν κύκλον ὅςις νὰ διέρχεται διὰ τῶν δύο τούτων ςιγμῶν καὶ νὰ ἅπτεται τῆς εὐθείας.

Επειδὴ τρία σημεῖα προσδιορίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς κύκλου, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν ςιγμὴν Δ τῆς ἀφῆς. Ας προεκβληθῆ λοιπὸν ἡ ΑΒ πρὸς τὸ Γ, καὶ ἄς γένῃ ΓΔ $=\chi$, ΓΙ $=\alpha$, ΙΒ $=\beta$, οὔσης Ι τῆς ςιγμῆς τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ. Επειδὴ ἡ ἐφαπτομένη ΓΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς διατεμνούσης ΓΒ καὶ τοῦ ἐκτὸς μέρους ΓΑ, διὰ τοῦτο $\chi^2=\Gamma A\times\Gamma B$· ἀλλὰ $\Gamma A=\Gamma I-AI=\alpha-\beta$· καὶ $\Gamma B=\Gamma I+\Gamma B=\alpha+\beta$· λοιπὸν $\chi^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ ὅθεν $\chi=\sqrt{(\alpha^2-\beta^2)}$· διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ταύτην τὴν τιμὴν, ἐπὶ τῆς ΓΙ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμικύκλιον, λαμβάνομεν ΙΕ $=$ ΙΒ· ἡ ΓΕ θέλει εἶναι ἡ τιμὴ τῆς χ· διότι $\overline{\Gamma E}^2=\overline{\Gamma I}^2-\overline{IE}^2=\alpha^2-\beta^2$· ἡ τιμὴ αὕτη φερομένη ἐκ τῆς Ε εἰς Δ διὰ τόξου κύκλου ἐκ τοῦ κέντρου Γ μὲ ἀκτῖνα ΓΕ γραφομένου, δίδει τὴν ςιγμὴν τῆς ἀφῆς Δ.

Εξ αἰτίας τοῦ διπλοῦ σημείου τῆς τιμῆς τῆς χ, ὑπάρχει μία δευτέρα ςιγμή Δ′ πληροῦσα εἰς τὸ ζήτημα· δηλαδὴ ὑπάρχουν δύο κύκλοι οἵτινες διέρχονται ἀπὸ τὰς δύο ςιγμὰς Α καὶ Β, καὶ ἅπτονται τῆς εὐθείας ΔΔ′, ὁ μὲν εἰς τὴν ςιγμὴν Δ, ὁ δὲ εἰς τὴν Δ′. Διὰ νὰ ἦναι δὲ αἱ δύο αὗται λύσεις πραγματικαὶ, πρέπει $\alpha>\beta$, ἤ ΓΙ $>$ ΙΒ ἤ $>$ ΙΑ: καὶ τῷ ὄντι ἐὰν ἡ ςιγμὴ Γ ἔπιπτε, π.χ, εἰς Γ′ μεταξὺ Α καὶ Ι, ἡ εὐθεῖα ΔΔ′ δὲν ἠμποροῦσε πλέον νὰ ἦναι ἐφαπτομένη.

28. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δεδομένων δύο παραλλήλων ΑΕ, ΒΖ (σχ. ις′) καὶ τῆς καθέτου εἰς αὐτὰς ΑΒ, νὰ ἄξωμεν μίαν διατέμνουσαν ΕΖ ὥςε ΑΓ ἡμίσεια τῆς ΑΒ νὰ ἦναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν τμημάτων ΑΕ, ΒΖ. Εςωσαν, ΑΕ $=\chi$, ΒΖ $=\psi$, ΑΓ $=\alpha$· ἔχομεν, ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως, $\chi:\alpha::\alpha:\psi$· ὅθεν $\chi\psi=\alpha^2$: τὸ πρόβλημα εἶναι λοιπὸν ἀπροσδιό-

μιςον (*), καὶ αἱ λύσεις ἀναρίθμητοι. Κατὰ διαφόρους τρόπους ἠμπορούσαμεν νὰ εὕρωμεν ταύτας τὰς λύσεις, πλὴν ὁ ἀκόλουθος εἶναι ὁ ἁπλούςερος καὶ ὡραιότερος.

Ἀπὸ τὴν ςιγμὴν Γ μέσον τῆς ΑΒ ἄς ὑψωθῇ μία κάθετος· ἔςω Δ ἡ συναπάντησις τῆς ζητουμένης γραμμῆς ΕΖ μὲ ταύτην τὴν κάθετον, καὶ ἄς κληθῇ $ΓΔ = ρ$. Εἰς τὴν ςιγμὴν Δ ἄς ὑψωθῇ ἐπὶ τῆς ΓΔ ἡ κάθετος ΙΙ′. Τὰ δύο τρίγωνα ΕΔΙ, ΙΔΖ εἶναι φανερὰ ἴσα· ἀκολούθως $Ι'Ζ = ΙΕ$· ὅθεν $ψ = ΒΖ = ΒΙ' + Ι'Ζ = ρ + ΕΙ$, καὶ $χ = ΑΙ - ΕΙ = ρ - ΕΙ$. Διὰ τοῦτο $ψ + χ = 2ρ$. Ἀντεισάγοντες τὴν τιμὴν τοῦ $ψ = 2ρ - χ$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $α^2 = χψ$, εὑρίσκομεν $χ^2 - 2ρχ = -α^2$· ἐδῶ ρ σημειώνει μίαν κατ' ἀρέσκειαν ποσότητα, καὶ ἔχομεν $χ = ρ \pm \sqrt{(ρ^2 - α^2)}$· ἐπειδὴ διὰ νὰ ἦναι ἡ τιμὴ τῆς χ πραγματικὴ πρέπει $ρ > α$ ἤ $= α$· ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ςιγμὴ Δ πρέπει νὰ ληφθῇ ὥςε $ρ > α$ ἤ $= α$· εἰς τὴν πρώτην ὑπόθεσιν αἱ δύο τιμαὶ τῆς χ εἶναι πραγματικαὶ, καὶ ἀκολούθως καὶ αἱ δύο τιμαὶ τῆς ψ· διὰ νὰ τὰς κατασκευάσωμεν γράφομεν ἐκ τοῦ κέντρου Δ μὲ ἀκτῖνα $ΓΔ > ΑΓ$ κύκλον ὅςις τέμνει τὴν παράλληλον ΑΖ′ εἰς δύο ςιγμὰς Ε καὶ Ζ′, καὶ τὴν παράλληλον ΒΖ εἰς δύο ςιγμὰς Ε′ καὶ Ζ· αἱ γραμμαὶ ΑΕ, ΑΖ′ εἶναι αἱ δύο τιμαὶ τῆς χ· διότι $ΑΕ = ΑΙ - ΕΙ = ρ - \sqrt{(ρ^2 - α^2)}$, καὶ $ΑΖ' = ΑΙ + ΙΖ' = ρ + \sqrt{(ρ^2 - α^2)}$· παρομοίως αἱ δύο τιμαὶ τῆς ψ εἶναι ΒΕ′ καὶ ΒΖ· ὥςε αἱ δύο εὐθεῖαι ΕΖ καὶ Ε′Ζ′ πληροῦσιν εἰς τὰς συνθήκας τοῦ προβλήματος· κάθε ἄλλο κέντρον Δ δίδει ὁμοίως δύο λύσεις.

(*) Ἄν καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν 5 εἶπα ὅτι θέλει ἀρκεσθῶ εἰς μόνον τὰ προβλήματα τὰ ὁποῖα ἄγουν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μὲ μίαν ἄγνωςον, μ' ὅλον τοῦτο ἀπεφάσισα νὰ θέσω τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα διὰ τὴν ἁπλότητά του, καὶ νὰ ἴδωσιν οἱ νέοι πῶς ἡ Ἀλγεβρα δεικνύει τὴν ἀπροσδιορισίαν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων.

Οταν δὲ $\rho=\alpha$· τότε αἱ δύο τιμαὶ τῆς χ ἄγονται εἰς μίαν μόνον ἴσην μὲ ρ· καὶ ὁ γραφόμενος κύκλος ἐκ τοῦ κέντρου Δ μὲ ἀκτῖνα $\Gamma\Delta=\rho=\alpha$· ἅπτεται τῶν δύο παραλλήλων, καὶ ἡ εὐθεῖα ἥτις πληροῖ εἰς τὸ ζήτημα εἶναι ἡ ΙΙ΄ ἢ ἡ εὐθεῖα ἥτις ἑνόνει τὰς δύο ςιγμὰς τῆς ἁφῆς

Οταν τέλος $\rho<\alpha$· ἡ τιμὴ τῆς χ γίνεται κατ' ἐπίνοιαν· τοῦτο δεικνύει καὶ ἡ κατασκευή· διότι εἰς ταύτην τὴν περίςασιν ὁ γραφόμενος κύκλος ἐκ τοῦ κέντρου Δ μὲ ἀκτῖνα μικροτέραν τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ δὲν τέμνει πλέον τὰς δύο παραλλήλους.

29. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Εκ τῆς ςιγμῆς Α (σχ. ιζ΄) νὰ ἀχθῇ μία χορδὴ ΒΑΔ, ὥςε τὰ τμήματα ΒΑ, ΑΔ νὰ ἔχουν μεταξύ των λόγον δεδομένον $=\frac{\mu}{\nu}$.

Ας ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΘΑΗ· ἔςω $\Gamma\Theta=\rho$, $\Gamma A=\beta$, $A\Delta=\chi$· ἔχομεν $\Theta A\times AH=BA\times A\Delta$, ὅθεν $\rho^2-\beta^2=\chi.BA$· ἀλλ' ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως, $BA=\frac{\mu\chi}{\nu}$· λοιπὸν $\frac{\mu\chi^2}{\nu}=\rho^2-\beta^2$. Ας κάμωμεν $\rho^2-\beta^2=\kappa^2$, καὶ θέλομεν ἔχει $\chi=\sqrt{\frac{\nu\kappa^2}{\mu}}$, ποσότης εὐκολοκατασκεύαςος. Ημποροῦμεν νὰ δώσωμεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφὴν $\chi=\frac{\kappa}{\mu}\sqrt{(\mu\nu)}$, καὶ ἔπρεπε νὰ εὕρωμεν μίαν μέσην καὶ μίαν τετάρτην ἀνάλογον· διότι καλοῦντες $\mu\nu=\psi^2$, ἔχομεν $\chi=\frac{\kappa\psi}{\mu}$· πλὴν εἶναι προτιμητέα ἡ ἀκόλουθος κατασκευή. Ας ἀντικαταςήσωμεν ἀντὶ τοῦ λόγου $\frac{\mu}{\nu}$ τὸν λόγον δύο τετραγώνων: ἐπὶ μιᾶς ἀπροσδιορίςου γραμμῆς (σχ. ιη΄), ἂς λάβωμεν ΔΖ καὶ ΖΕ εἰς τρόπον ὥςε $\frac{\Delta Z}{ZE}=\frac{\mu}{\nu}$· ἂς γράψωμεν τὸ ἡμικύκλιον ΔΑΕ, ἔπειτα ἂς ἄξωμεν τὴν ΑΖ κάθετον ἐπὶ τῆς ΔΕ, καὶ ἂς ἐπιζεύξωμεν τὰς χορδὰς ΑΔ, ΑΕ· θέλομεν ἔχει $\frac{ΑΔ^2}{ΑΕ^2} = \frac{ΑΖ}{ΖΚ} = \frac{μ}{ν}$· διότι τὰ τμήματα τῆς ὑποτεινούσης ΔΕ εἶναι πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΑΕ· οὕτως $χ = \frac{κ \times ΑΕ}{ΑΔ}$: ἄς λάβωμεν λοιπὸν ΑΒ=κ ἐπὶ τῆς ΑΔ, τὴν ὁποῖαν προεκβάλλομεν ἐὰν ἦναι ἀναγκαῖον· ἐκ τῆς στιγμῆς Β ἄς ἄξωμεν τὴν παράλληλον ΒΓ τῇ ΔΕ, καὶ ΑΓ θέλει εἶναι ἡ τιμὴ τῆς χ· διότι ἔχομεν κ : ΑΔ : : ΑΓ : ΑΕ· ὅθεν $ΑΓ = \frac{κ \times ΑΕ}{ΑΔ} = χ$.

30. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δεδομένου ἑνὸς πολυγώνου νὰ κατασκευάσωμεν ἕν ἄλλο ὅμοιον, καὶ τὰ ἐμβαδά των νὰ ἦναι εἰς γνωστὸν λόγον μ πρὸς ν. Ας καλέσωμεν Α μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ δεδομένου πολυγώνου, χ τὴν ἄγνωστον ὁμολογόντης· ἐπειδὴ ἐξ ἑνὸς μέρους τὰ ἐμβαδὰ πρέπει νὰ ἦναι : : μ : ν, ἐκ δὲ τοῦ ἄλλου : : $Α^2 : χ^2$· διὰ τοῦτο $\frac{Α}{χ^2} = \frac{μ}{ν}$· ὅθεν $χ = Α\sqrt{\frac{ν}{μ}}$· ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ λόγου $\frac{μ}{ν}$ τὸν λόγον δύο τετραγώνων $α^2$ καὶ $β^2$· ἔχομεν $χ = \frac{Α \times β}{α}$· ἥτις παριστάνει μίαν τετάρτην ἀνάλογον, ἥ κατασκευάζομεν αὐτὴν ὡς ἀνωτέρω. Γνωστοῦ τοῦ μήκους τῆς χ, ἄλλο δὲν μένει παρὰ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς χ νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον ὅμοιον μὲ τὸ δεδομένον.

31. Ας ζητήσωμεν ἕν σχῆμα Χ ὅμοιον μὲ ἕν ἄλλο Π καὶ ἰσοδύναμον μὲ ἕν τρίτον Κ. Π καὶ Κ εἶναι δεδομένα· ἄς λάβωμεν μίαν πλευρὰν Α τοῦ Π, καὶ ἔσω χ ἡ ἄγνωστος ὁμόλογός της· ἔχομεν $\frac{Π}{Χ} = \frac{Α^2}{χ^2}$· ὅθεν $\frac{Π}{Κ} = \frac{Α^2}{χ^2}$

διότι X=K· ἔςωσαν M καὶ N αἱ πλευραὶ δύο ἰσοδυνάμων τετραγώνων μὲ Π καὶ K· συνάγομεν $\frac{M}{N} = \frac{\Lambda}{\chi}$· λοιπὸν χ εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τῶν M, N, καὶ Λ.

Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα εἶναι ἱκανὰ νὰ δείξουν πόσης ὠφελείας πρόξενος εἶναι ἡ εἴσαξις τοῦ ὑπολογισμοῦ εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς ἐκτάσεως. Τὸ πᾶν συνίςαται νὰ τεθῆ τὸ γεωμετρικὸν πρόβλημα εἰς ἐξίσωσιν, εἰς τὸ ὁποῖον φθάνει τινὰς ὅταν ξεσκεπάσῃ τὰς σχέσεις αἵτινες ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀγνώςων καὶ δεδομένων· ἔπειτα ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως καὶ ἡ κατασκευὴ τῶν τιμῶν τῆς ἀγνώςου, δίδει τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ.