Η ἀρνητικὴ αὕτη τιμὴ τῆς χ ἐκφράζει ὅτι ὁ ποῦς τῆς καθέτου πίπτει εἰς ἐναντίαν θέσιν ἀπὸ τὴν ὑποτεθεῖσαν, δηλαδὴ εἰς Λ, ἀριςερόθεν τῆς Β.

15. Απὸ τὴν ἀνωτέρω διάλυσιν ἕπεται, ὅτι ἡ θετικὴ τιμὴ τῆς ἀγνώςου, ἐκφράζει ὅτι ἡ παριςανομένη ἀπὸ τὴν ἄγνωςον ταύτην γραμμὴ, πίπτει εἰς τὴν μερικὴν θέσιν ἥτις ἀπεδόθη εἰς αὐτὴν ὅταν ἐτίθετο τὸ πρόβλημα εἰς ἐξίσωσιν, ἐν ᾧ ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ ταύτης τῆς ἀγνώςου, δεικνύει ὅτι πρέπει νὰ φερθῇ εἰς ἐναντίαν θέσιν ἀπὸ τὴν εἰς αὐτὴν ἀποδοθεῖσαν. Η συνέπεια αὕτη συμφωνεῖ μὲ τὴν σημείωσιν τοῦ ἀριθ. 8.

Κατασκευὴ τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ μίαν μόνην ἄγνωςον.

16. Θέλοντες νὰ λύσωμεν γεωμετρικόν τι πρόβλημα διὰ τῆς Αλγεβρας, και σημειόνοντες διὰ χ ἄγνωςον τινα γραμμὴν, καὶ διὰ α, β, π θετικὰς ποσότητας αἱ ὁποῖαι νὰ ἐκφράζουν γνωςὰς γραμμὰς, δυνατὸν νὰ καταντήσωμεν εἰς ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μιᾶς τῶν μορφῶν,

$$χ^2 \pm 2πχ \pm αβ = 0$$

πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ῥίζας τούτων τῶν ἐξισώσεων.

17. Διὰ νὰ ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὴν ἁπλουςέραν περίςασιν, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$χ^2 = αβ, \ (*)$$

Επειδὴ ἡ ἄγνωςος χ εἶναι μέση γεωμετρικῶς ἀνάλογος μεταξὺ α καὶ β, τὴν κατασκευάζομεν λαμβάνοντες ἐπὶ

(*) Ηθέλαμεν φθάσει εἰς ταύτην τὴν ἐξίσωσιν, ἐὰν ἐζητούσαμεν τὴν πλευρὰν, χ, τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου μὲ τὸ ὀρθογώνιον αβ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ α καὶ β εἶναι δεδομέναι.

ἀπροσδιορίςου εὐθείας τὰ μέρη $\Delta A = \alpha$, $\Delta B = \beta$, (σχ. ς΄)· ἔπειτα ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου, γράφοντες τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΜΒ, καὶ ἐκ τῆς σιγμῆς Δ ὑψώνοντες μίαν κάθετον ΔΜ· ἡ τιμὴ τῆς χ θέλει εἶναι ἡ ΔΜ· διότι, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΜΑ, ΜΒ, αἱ γωνίαι, ΑΔΜ, ΑΜΒ, θέλουν εἶναι ὀρθαί· θέλομεν ἔχει λοιπόν,

$$\overline{M\Delta}^2 = \Delta A \times \Delta B = \alpha\beta = \chi^2 \text{· ὅθεν } \chi = M\Delta.$$

Ὅλαι αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\chi^2 = \alpha$, κατασκευάζονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Οὕτως, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν γραμμὴν χ, εἰς τὴν ὁμογενῆ ἐξίσωσιν,

$$\chi^2 = \frac{\alpha^4 + \gamma\delta^3}{\alpha^2 - \delta^2},$$

ἄγομεν ταύτην τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὴν μορφὴν $\chi^2 = \alpha\beta$, κάμνοντες

$$\gamma\delta^3 = \alpha\tau^3,\ \delta^2 = \alpha\mu \text{· ὅθεν } \chi^2 = \frac{\alpha^4 + \alpha\tau^3}{\alpha^2 - \alpha\mu} = \frac{\alpha(\alpha + \tau)}{\alpha(\alpha - \mu)}$$

$$= \frac{\alpha^2(\alpha + \tau)}{\alpha - \mu} = \alpha \times \frac{\alpha(\alpha + \tau)}{\alpha - \mu}$$

Τώρα $\frac{\alpha(\alpha+\tau)}{\alpha-\mu}$ ἐκφράζει μίαν τετάρτην ἀνάλογον, τὴν ὁποίαν καλῶ β· καὶ τότε $\chi^2 = \alpha\beta$· ἐξίσωσις ὁποῦ ἠξεύρομεν νὰ κατασκευάσωμεν· αἱ γραμμαὶ τ, μ, β εἶναι εὐκολοκατασκεύαςοι.

18. Εν γένει, ὅταν ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 = \frac{\pi}{\kappa}$ (*) ἦναι ὁμο-

(*) Τὰ γράμματα π, κ, συμειόνουν μονώνυμα, ἢ πολυώνυμα ἐμογενῆ.

γενὴς, διὰ νὰ παριςάνῃ ἡ ἄγνωςος χ μίαν γραμμὴν, ἢ μίαν ἐπιφάνειαν ἢ ἓν ςερεὸν, πρέπει ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαςοῦ, κατὰ δύο ἢ τέσσαρας, ἢ ἕξ μονάδας. Φερ᾽ εἰπεῖν, ἐπειδὴ μία ἐπειφάνεια ἔχει δύο διαςάσεις, ἐὰν χ σημειόνῃ μίαν ἐπιφάνειαν, δυνάμεθα νὰ τὴν παραςήσωμεν διὰ τοῦ γινομένου $\alpha\beta$· ἡ ἐξίσωσις, $\varkappa\chi^2=\pi$, ἄγεται τότε εἰς $\varkappa\alpha^2\beta^2=\pi$· τώρα ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις διὰ νὰ ἦναι ὁμογενὴς, πρέπει π νὰ περιέχῃ τέσσαρας παράγοντας περισσότερον παρὰ $\varkappa$.

19. Διὰ νὰ καταςήσωμεν ἁπλουςέραν τὴν κατασκευὴν τῆς γενικῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, $\chi^2 \pm 2\pi\chi \pm \alpha\beta=o$ κάμνομεν $\alpha\beta=\varkappa^2$, καὶ προσδιορίζομεν τὴν γραμμὴν $\varkappa$ ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν· ζητοῦντες δηλαδὴ μίαν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ α καὶ β. Η γενικὴ λοιπὸν ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δυνατὸν νὰ ἔχῃ μίαν ἀπὸ τὰς τέσσαρας μορφάς.

$$(1)\ \ldots\ \chi^2-2\pi\chi+\varkappa^2=o,\quad (2)\ \ldots\ \chi^2-2\pi\chi-\varkappa^2=o$$

$$(3)\ \ldots\ \chi^2+2\pi\chi+\varkappa^2=o,\quad (4)\ \ldots\ \chi^2+2\pi\chi-\varkappa^2=o$$

Αἱ ἐξισώσεις, (3), (4), συνάγονται ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις (1), (2) τρεπομένου χ εἰς $-\chi$· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων, (1) καὶ (2)· διότι λαμβάνοντες τὰς ῥίζας τούτων μὲ σημεῖα ἐναντία θέλομεν ἔχει τὰς ῥίζας τῶν ἐξισώσεων, (3), (4). Τούτου τεθέντος.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως (1), σημειόνομεν αὐτὰς διὰ χ' καὶ χ'', καὶ θέλομεν ἔχει·

$$\chi'=\pi+\sqrt{(\pi^2-\varkappa^2)},\quad \chi''=\pi-\sqrt{(\pi^2-\varkappa^2)}.$$

Τώρα, $\sqrt{(\pi^2-\kappa^2)}$, εἶναι μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι π, καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ κ. Εὑρίσκομεν λοιπὸν τὴν τιμὴν τούτου τοῦ ῥιζικοῦ, λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΕ, (σχ. ϛ'), ἓν μέρος ΑΒ$=$π· ἔπειτα γράφοντες ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὡς διαμέτρου, τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΜΒ, καὶ ἐκ τῆς σιγμῆς Α ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα κ, τόξον κύκλου τὸ ὁποῖον τέμνει ταύτην τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς Μ· ἐπιζευγνύοντες δὲ τὰς χορδὰς ΜΑ, ΜΒ, ἐπειδὴ ἡ γωνία ΑΜΒ εἶναι ὀρθή, ἔχομεν

$$BM=\sqrt{(\overline{AB}^2-\overline{AM}^2)}=\sqrt{(\pi^2-\kappa^2)}.$$

Ἐὰν λοιπὸν γράψωμεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν, Χ''ΜΧ', ἐκ τῆς σιγμῆς Β ὡς ἐκ κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα ΒΜ, αἱ εὐθεῖαι ΑΧ', ΑΧ'', θέλουν εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (1)· διότι,

$$BX'=BX''=BM=\sqrt{(\pi^2-\kappa^2)},$$

$$AX'=AB+BX'=\pi+\sqrt{(\pi^2-\kappa^2)}=\chi',$$

$$AX''=AB-BX''=\pi-\sqrt{(\pi^2-\kappa^2)}=\chi''$$

Οταν π ἦναι μεγαλήτερον ἀπὸ κ, τότε αἱ δύο ῥίζαι χ' καὶ χ'' εἶναι πραγματικαὶ καὶ θετικαί, καὶ δυνάμεθα νὰ τὰς κατασκευάσωμεν· διότι ἐπειδὴ ἡ διάμετρος, ΑΒ$=$π, εἶναι μεγαλητέρα τῆς χορδῆς ΑΜ$=$κ, τὸ γραφόμενον τόξον ἐκ τῆς σιγμῆς Α ὡς ἐκ κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα κ, ἐξ ἀνάγκης τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΜΒ.

Οταν π$=$κ, αἱ δύο ῥίζαι, χ', χ'', εἶναι ἴσαι μὲ π: Τοῦτο δεικνύει καὶ ἡ κατασκευή· τῷ ὄντι, ὅταν ἡ χορδὴ ΑΜ γένῃ ἴση μὲ τὴν διάμετρον ΑΒ, τὸ γραφόμενον τόξον ἐκ τῆς σιγμῆς Α, ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα κ, ἅπτεται τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΜΒ, εἰς τὴν ςιγμὴν Β· καὶ τότε ἡ ἀκτὶς ΒΜ τῆς ἡμιπεριφερείας Χ″ΜΧ′, γίνεται μηδὲν, ἡ ἡμιπεριφέρεια αὕτη καταντᾷ εἰς τὴν ςιγμὴν Β· ἑπομένως αἱ δύο ςιγμαὶ Χ′ καὶ Χ″ πίπτουν εἰς Β, καὶ

$$ΑΧ' = ΑΧ'' = ΑΒ = \pi.$$

Οταν, π ἦναι μικρότερον τοῦ κ· αἱ δύο ῥίζαι χ′ καὶ χ″ εἶναι κατ᾽ἐπίνοιαν, καὶ ἡ κατασκευὴ δεικνύει τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος· διότι τὸ γραφόμενον τόξον ἐκ τῆς ςιγμῆς Α ὡς ἐκ κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα κ, δὲν συναπαντᾷ πλέον τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΜΒ· τοῦτο ἀκόμη φανερόνει ὅτι εἰς τὸν κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ΑΒ εἶναι ἴση μὲ π, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθῇ μία χορδὴ κ, μεγαλητέρα ταύτης τῆς διαμέτρου.

Τέλος ὅταν κ=ο, αἱ ςιγμαὶ Μ, Χ″ πίπτουν εἰς Α· καὶ αἱ δύο ῥίζαι ΑΧ″ καὶ ΑΧ′ γίνονται ἡ μὲν ἴση μὲ τὸ μηδὲν, ἡ δὲ ἴση μὲ 2π· καὶ τῷ ὄντι ἐπειδὴ ἡ ἐξίσωσις(1) ἄγεται εἰς $\chi(\chi-2\pi)=0$ αἱ δύο τιμαὶ τῆς χ, εἶναι, ο καὶ 2π.

Παράδειγμα. Νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον γνωρίζοντες τὴν περίμετρον 4π καὶ τὴν ἐπιφάνειάν του κ^2. Ἐὰν καλέσωμεν χ καὶ ψ τὰς δύο προσεχεῖς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου, ἡ περίμετρός του θέλει εἶναι $2\chi+2\psi$· καὶ ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως ἰσοῦται μὲ 4π, διὰ τοῦτο $2\chi+2\psi=4\pi$· ὅθεν $\psi=2\pi-\chi$· ἐὰν λοιπὸν γνωρίσωμεν τὴν μίαν πλευρὰν, ἀφαιροῦντες αὐτὴν ἀπὸ 2π, θέλομεν ἔχει τὴν ἄλλην· ἀκολούθως ἐὰν καλέσωμεν τὴν μίαν χ, ἡ ἄλλη θέλει εἶναι $2\pi-\chi$· ἐπειδὴ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο πλευρῶν χ, καὶ $2\pi-\chi$, ἀπὸ ἄλλο δὲ μέρος ἐκφράζεται διὰ κ^2· διὰ τοῦτο ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi(2\pi-\chi)=\kappa^2 \text{ ὅθεν, } (1) \ldots \chi^2-2\pi\chi+\kappa^2=0$$

αἱ δύο ῥίζαι ταύτης τῆς ἐξισώσεως εἶναι αἱ δύο προσεχεῖς πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου· διότι λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $\chi = \pi \pm \sqrt{(\pi^2 - \kappa^2)}$· λαμβάνοντες διὰ τὴν μίαν πλευρὰν τὴν τιμὴν $\pi + \sqrt{(\pi^2 - \kappa^2)}$· ἡ ἄλλη θέλει εἶναι $2\pi - \pi - \sqrt{(\pi^2 - \kappa^2)} = \pi - \sqrt{(\pi^2 - \kappa^2)}$ ἥτις εἶναι ἡ δευτέρα ῥίζα τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἀς διαλύσωμεν τούτους τοὺς τύπους. Οταν ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης δηλαδὴ ἡ $\pi^2 - \kappa^2$ ἦναι θετικὴ, τότε αἱ δύο πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου, εἶναι πραγματικαὶ, θετικαὶ καὶ ἄνισοι· διότι ἡ φύσις τοῦ ζητήματος ἀπαιτεῖ, νὰ ἦναι αἱ ποσότητες π καὶ κ πραγματικαὶ καὶ θετικαί· κατασκευάζομεν δὲ εἰς γραμμὰς ταύτας τὰς τιμὰς, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω. Οταν δὲ $\pi^2 - \kappa^2$ ἦναι μηδὲν, αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου γίνονται ἴσαι μὲ π, καὶ τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον εἶναι ἓν τετράγωνον, ἡ πλευρὰ τοῦ ὁποίου εἶναι ἴση μὲ π. Οταν δὲ $\pi^2 - \kappa^2$ εἶναι ἀρνητικὸν, αἱ δύο πλευραὶ γίνονται κατ' ἐπίνοιαν, καὶ τὸ πρόβλημα καταφαίνεται ἀδύνατον.

Σημείωσις. Οταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi(2\pi - \chi) = \kappa^2$, π ἦναι γνωςὸν καὶ κ ἄγνωσον, τότε μένει εἰς τὴν ἐξουσίαν μας νὰ δώσωμεν τιμὰς εἰς τὴν χ· καὶ οὕτω συνάγομεν πλῆθος ὀρθογωνίων τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν αὐτὴν περίμετρον 4π· ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ τύπου $\chi = \pi \pm \sqrt{(\pi^2 - \kappa^2)}$, συνάγομεν ὅτι ἡ μεγαλητέρα τιμὴ τοῦ κκ εἶναι ππ· εἰς τὴν ὁποίαν τιμὴν ἀντίκειται ἡ τιμὴ τῆς $\chi = \pi$· διὰ τοῦτο ποριζόμεθα **ὅτι ἀπὸ ὅλα τὰ ὀρθογώνια τῆς αὐτῆς πε-**

ριμέτρου, τὸ μέγιςον, δηλαδὴ, τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἡ μεγαλητέρα, εἶναι τὸ τετράγωνον. Οταν δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\chi(2\pi-\chi)=\kappa^2$, π εἶναι ἄγνωςον καὶ κ γνωςὸν, τότε δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τιμὰς εἰς π καὶ νὰ εὕρωμεν τιμὰς διὰ χ· οὕτω συνάγομεν πλῆθος ὀρθογωνίων τῆς ἰδίας ἐπιφανείας κ^2· πλὴν ἐπειδὴ ἐκ τοῦ τύπου $\chi=\pi\pm\sqrt{(\pi^2-\kappa^2)}$ συμπεραίνομεν ὅτι π^2 δὲν ἠμπορεῖ νὰ λάβῃ μίαν τιμὴν μικροτέραν τοῦ κ^2, καὶ ἐπομένως ἡ μικροτέρα τιμὴ τοῦ π^2 εἶναι κ^2· διὰ τοῦτο πορίζόμεθα ὅτι ἀπὸ ὅλα τὰ ὀρθογώνια τῆς ἰδίας ἐπιφανείας, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν μικροτέραν περίμετρον εἶναι τὸ τετράγωνον· διότι ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου τῆς ἰδίας ἐπιφανείας ἦναι 4κ, καὶ 4κ εἶναι ἡ μικροτέρα τιμὴ τοῦ γινομένου 4π.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὰς ῥίζας, χ', χ'' τῆς ἐξισώσεως (2) λύομεν ταύτην τὴν ἐξίσωσιν· καὶ εὑρίσκομεν

$$\chi'=\pi+\sqrt{(\pi^2+\kappa^2)},\ \chi''=-(\sqrt{(\pi^2+\kappa^2)}-\pi).$$

ἡ ῥίζα χ' εἶναι θετική· ἡ δὲ ῥίζα χ'' ἀρνητική· ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς χ'' εἶναι $\sqrt{(\pi^2+\kappa^2)}-\pi$. Πρόκειταί λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὰ μήκη τῶν δύο γραμμῶν,

$$\sqrt{(\pi^2+\kappa^2)}+\pi,\ \sqrt{(\pi^2+\kappa^2)}-\pi$$

Ἐπειδὴ τὸ ῥιζικὸν ἐκφράζει τὴν ὑποτείνουσαν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι π καὶ κ, διὰ τοῦτο ἄγομεν πρὸς ὀρθὰς δύο εὐθείας, ΔΖ, ΑΕ, (σχ. ζ′)· λαμβάνομεν ΑΓ=π, ΑΒ=κ· ἐπιζευγνύομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, καὶ ἐκ τοῦ Γ ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα ΓΒ, γράφομεν τὴν ἡμιπεριφέρειαν Χ'ΒΧ''· αἱ εὐθεῖαι ΑΧ', ΑΧ'' εἶναι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ῥιζῶν χ', χ''· διότι,

$$\Gamma X' = \Gamma X'' = \Gamma B = \sqrt{(\pi^2 + \kappa^2)},$$

$$A X' = A\Gamma + \Gamma X' = \pi + \sqrt{(\pi^2 + \kappa^2)} = \chi'$$

$$A X'' = \Gamma X'' - \Gamma A = \sqrt{(\pi^2 + \kappa^2)} - \pi = -\chi''$$

Σημείωσις. Η γεωμετρικὴ κατασκευὴ δεικνύει τὴν ἀντίθεσιν τῶν σημείων τῶν δύο ῥιζῶν χ', χ''· διότι αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΧ', ΑΧ'' αἱ ὁποῖαι παριςάνουν τὰς τιμὰς τῶν ῥιζῶν χ', χ'' πίπτουν εἰς θέσιν ἀντίθετον ὡς πρὸς τὴν κοινὴν ἀρχήν των Α. Τοῦτο δὲ συμφωνεῖ μὲ τὰς σημειώσεις τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 15.

20. Η μέθοδος τὴν ὁποίαν ἐδώκαμεν, (ἀρ. 16. 19), διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ῥιζῶν τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, εἶναι ἡ πλέον φυσική· πλὴν ἐνίοτε εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῶσιν ὡραιότεραι κατασκευαί. Ιδοὺ παραδείγματα.

1.ον Παράδειγμα. Νὰ προσδιορίσωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν δεδομένων τετραγώνων. Ας σημειόσωμεν διὰ α, β, γ, τὰς πλευρὰς τῶν δεδομένων τετραγώνων, καὶ διὰ χ τὴν ἄγνωσον πλευρὰν τοῦ ζητουμένου· θέλομεν ἔχει

$$\chi^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \text{· ὅθεν } \chi = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}.$$

Τώρα διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ταύτην τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώςου ἠμποροῦσαμεν νὰ θέσωμεν $\beta^2 = \alpha\tau$, $\gamma^2 = \alpha\mu$· διότι διὰ τῶν ὑποθέσεων τούτων ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώςου ἤθελε τρεφθῇ εἰς $\sqrt{(\alpha^2 + \alpha\tau + \alpha\mu)} = \sqrt{\alpha(\alpha + \tau + \mu)}$· ἔκφρασις τὴν ὁποίαν ἠθέλαμεν κτασκευάσει ζητοῦντες μίαν μέσην γεωμετρικῶς ἀνάλογον μεταξὺ α καὶ $\alpha+\tau+\mu$· πλὴν φθάνομεν ἁπλούστερον εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ἄγοντες δύο εὐθείας ΟΑ καὶ ΟΒ πρὸς ὀρθὰς, καὶ λαμβάνοντες τὴν μὲν $OA=\alpha$, τὴν δὲ $OB=\beta$, (σχ. η΄)· ἔπειτα ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΟΒ, ἄγοντες μίαν κάθετον $BX=\gamma$. Η εὐθεῖα ΟΧ θέλει εἶναι ἡ ἔκφρασις τῆς χ δηλαδὴ ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου· διότι

$$\overline{OB}^2=\alpha^2+\beta^2,\quad \overline{OX}^2=\overline{OB}^2+\overline{BX}^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2.$$

2.ον Παράδειγμα. Εστω ἡ ἐξίσωσις,

$$\psi^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\mu^2-\nu^2-\pi^2.$$

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἄγνωστον ψ κάμνομεν

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\chi^2,\quad \mu^2+\nu^2+\pi^2=\omega^2\text{· ὅθεν }\psi=\sqrt{(\chi^2-\omega^2)}.$$

Κατὰ πρῶτον κατασκευάζομεν τὰς γραμμὰς χ, ω, ὡς εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα: δηλαδὴ τὴν γραμμὴν χ, ζητοῦντες τὴν πλευρὰν ἑνὸς τετραγώνου ἰσοδυνάμου μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$· καὶ τὴν γραμμὴν ω, ζητοῦντες τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, μ^2, ν^2, π^2. Τούτου τεθέντος, γράφομεν ἔπειτα ἐπὶ τῆς $OX=\chi$, ὡς διαμέτρου τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΟΨΧ· ἐκ τῆς στιγμῆς Χ ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα ω, γράφομεν τόξον κύκλου τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΟΨΧ εἰς στιγμήν τινὰ Ψ. Η χορδὴ, ΟΨ, θέλει εἶναι ἡ ἔκφρασις τῆς ἀγνώστου ψ, διότι

$$\overline{O\Psi}^2=\overline{OX}^2-\overline{X\Psi}^2=\chi^2-\omega^2.$$

Οταν ἡ γραμμὴ χ ἦναι μεγαλητέρα τῆς ω, τότε ἡ τιμὴ τῆς ψ εἶναι πραγματικὴ, καὶ τὸ ἐκ τῆς στιγμῆς Χ ὡς ἐκ κέντρου μὲ τὴν ἀκτῖνα ω, γραφόμενον τόξον, τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΟΨΧ· ὅταν δὲ ἡ γραμμὴ χ ἦναι μικροτέρα τῆς ω τότε ἡ τιμὴ τῆς ψ εἶναι κατ' ἐπίνοιαν, καὶ τὸ εἰρημένον τόξον δὲν τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΟΨΧ· εἰς τὴν πρώτην περίςασιν τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν, εἰς τὴν δευτέραν ἀδύνατον.

21 3.ον Παράδειγμα. Ζητεῖται νὰ διαιρεθῇ εὐθεῖα δεδομένη ἡ ΑΒ, (σχ. θ'), εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τουτέςι, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας σιγμή τις Χ', ὥςε ΑΧ' δηλαδὴ τὸ διάςημα αὐτῆς ἀπὸ τὴν σιγμὴν Α, νὰ ἦναι μέση γεωμετρικῶς ἀνάλογος μεταξὺ ΑΒ καὶ ΑΧ'.

Η ζητουμένη λοιπὸν σιγμὴ πρέπει νὰ ἦναι τοιαύτη ὥςε νὰ πληροῦται ἡ ἀναλογία

$$(1) \ldots AB : AX' :: AX' : BX'.$$

Εςωσαν, $AB = 2\alpha$, $AX' = \chi$· ὅθεν $BX' = 2\alpha - \chi$.

Η ἀναλογία (1), δίδει

$$\chi = -\alpha \pm \sqrt{[\alpha^2 + (2\alpha)^2]}.$$

Σημειόνοντες τὰς δύο ταύτας τιμὰς τῆς χ διὰ χ' καὶ χ'', θέλομεν ἔχει,

$$\chi' = \sqrt{[\alpha^2 + (2\alpha)^2]} - \alpha = +(\sqrt{5} - 1)\alpha,$$

$$\chi'' = -\sqrt{[(\alpha^2 + (2\alpha)^2]}) = -(\sqrt{5} + 1)\alpha.$$

Η τιμὴ τῆς χ' εἶναι θετικὴ καὶ μικροτέρα τῆς δεδομένης εὐθείας 2α· διότι $\sqrt{5} - 1$ εἶναι ἔλασσον τοῦ 2· ἀκολούθως $(\sqrt{5} - 1)\alpha$ ἔλασσον τοῦ 2α· ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν, $AX' = \chi' = (\sqrt{5} - 1)\alpha$· ἡ σιγμὴ Χ' ἡ ἀπέχουσα ἀπὸ Α ὅσον ἐκφράζει ἡ τιμὴ τῆς χ', εὑρίσκεται μεταξὺ Α καὶ Β. Η σιγμὴ δὲ αὕτη εἶναι πλησιεςέρα εἰς τὴν Β παρὰ εἰς τὴν Α· διότι ἐπειδὴ τὸ ἀπόςημα αὐτῆς ἀπὸ τὴν σιγμὴν Α εἶναι $(\sqrt{5} - 1)\alpha$, τὸ ἀπόςημα τῆς ἰδίας ἀπὸ τὴν Β, εἶναι $2\alpha - \alpha\sqrt{5} + \alpha = 3\alpha - \alpha\sqrt{5} = (3 -$

$\sqrt{5})\alpha$. Τώρα $3-\sqrt{5}$ εἶναι μικρότερον ἀπὸ $\sqrt{5}-1$· λοιπὸν καὶ $(3-\sqrt{5})\alpha < (\sqrt{5}-1)\alpha$. Ημποροῦμεν δὲ νὰ βεβαιωθῶμεν ὅτι ἡ οὕτως προσδιοριζομένη σιγμὴ ἔχει τὴν ζητουμένην ἰδιότητα· διότι τὰ διαστήματα $AX' = (\sqrt{5}-1)\alpha$, $BX' = (3-\sqrt{5})\alpha$, πληροῦσι εἰς τὴν ἀναλογίαν (1)· ἐπειδὴ $[(\sqrt{5}-1)\alpha]^2 = (6-2\sqrt{5})\alpha^2 = (3-\sqrt{5})\times 2\alpha^2 = \overline{AX'}^2$, καὶ $AB \times BX' = (3-\sqrt{5})\alpha \times 2\alpha = (3-\sqrt{5})\times 2\alpha^2$· λοιπὸν $\overline{AX'}^2 = AB \times BX'$.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν δὲ χ' παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ῥιζικὸν $\sqrt{[\alpha^2+(2\alpha)^2]}$ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι α καὶ 2α. Ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὸ ἄκρον B τῆς AB ὑψωθῇ μίαν κάθετος BH ἐπὶ τὴν AB, καὶ ληφθῇ ἐπὶ ταύτης τῆς καθέτου ἡ $B\Gamma = \alpha = \frac{1}{2} AB$· ἡ ὑποτείνουσα $A\Gamma$ θέλει εἶναι ἡ ἔκφρασις τοῦ ῥιζικοῦ· ὥστε χ' ἰσοῦται μὲ $A\Gamma-\alpha$ ἢ μὲ $A\Gamma - \frac{1}{2} AB$· ἐὰν λοιπὸν ἐκ τῆς σιγμῆς Γ ὡς ἐκ κέντρου, μὲ τὴν ἀκτῖνα $\Gamma B = \alpha = \frac{1}{2} A\Gamma$, γράψωμεν τὴν περιφέρειαν ΔΒΕ, ἡ ΑΔ θέλει εἶναι ἡ τιμὴ τῆς χ'· διότι $A\Delta = A\Gamma - \Delta\Gamma = A\Gamma - \frac{1}{2} AB = \sqrt{[\alpha^2 + (2\alpha)^2]} - \alpha$· ἀκολούθως φέροντες ἐκ τῆς Δ εἰς τὴν X' τὴν ΑΔ διὰ τόξου κύκλου ἐκ τῆς σιγμῆς Α μὲ ἀκτῖνα ΑΔ γεγραμμένου, θέλομεν ἔχει τὴν ζητουμένην σιγμήν. Βλέπομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι ἡ κατασκευὴ διὰ τῆς ὁποίας ἐπροσδιορίσθη ἡ σιγμὴ X' εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ ἐκείνην ἥτις δίδεται εἰς τὴν Γεωμετρίαν διὰ τὴν διαίρεσιν μιᾶς εὐθείας εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Η ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος μᾶς ἔκαμε νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τιμὴ τῆς χ μετρεῖται ἀπὸ τὴν Α πρὸς τὴν Β·

καὶ ἡ θετικὴ τιμὴ τῆς χ τὴν ὁποίαν εὑρήκαμεν ἀναχωρήσαντες εἰς ταύτης τῆς ὑποθέσεως, λύει τὸ πρόβλημα κατὰ τὴν ἔννοιαν τῆς ἐκφωνήσεώς του. Η δὲ ἀρνητικὴ τιμὴ τῆς χ δηλαδὴ ἡ χ'', πρέπει νὰ φερθῇ εἰς ἀντίθετον θέσιν, δηλδὴ ἀπὸ τὴν Α πρὸς τὴν προεκβολὴν ΑΖ τῆς ΒΑ.

Εἰς τρόπον ὥςε ἐὰν λάβωμεν $AX''=\alpha+\sqrt{[\alpha^2+(2\alpha)^2]}=(\sqrt{5}+1)\alpha=-\chi''$ (*)

ἡ ςιγμὴ Χ″ πληροῖ εἰς τὸν συνθήκην

$$(2)\quad . \; . \; AB : AX'' :: AX'' : BX''.$$

καὶ ἠμποροῦμεν νὰ βεβαιώσωμεν τοῦτο, διότι ἡ ὑπόθεσις

$$AX''=(\sqrt{5}+1)\alpha,\ \text{δίδει}\ BX''=(\sqrt{5}+3)\alpha$$

καὶ αὗται αἱ τιμαὶ καταςαίνουν τὴν ἀναλογίαν (2) ταυτοσήμαντον.

Η ἀρνητικὴ λοιπὸν τιμὴ τῆς χ, λύει τοῦτο τὸ πρόβλημα: Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς προεκβολῆς, ΑΖ μιᾶς εὐθείας $BA=2\alpha$, ςιγμή τις Χ″ ὥςε ΑΧ″ νὰ ἦναι μέση γεωμετρικῶς ἀνάλογος μεταξὺ ΑΒ καὶ ΒΧ″. Καὶ τῷ ὄντι, ἐὰν σημειώσωμεν ΑΧ″ διὰ χ, θέλομεν εὕρη ὅτι ἡ θετικὴ τιμὴ τῆς χ εἶναι $(1+\sqrt{5})\alpha$· ἡ δὲ ἀρνητικὴ $-(\sqrt{5}-1)\alpha$· ἡ μὲν πρώτη προσδιορίζει τὴν ςιγμὴν Χ′ ἥτις πληροῖ εἰς τὴν ἀναλογίαν (2)· ἡ δὲ δευτέρα τὴν ςιγμὴν Χ′ ἥτις πληροῖ εἰς τὴν ἀναλογίαν (1).

Κατὰ τὴν προηγουμένην διάλυσιν αἱ τιμαὶ χ', χ'' τῆς χ λύουν τὸ γενικὸν τοῦτο πρόβλημα: Δεδομένων δύο ςιγμῶν Α καὶ Β μιᾶς ἀπροσδιορίςου εὐθείας ΖΘ, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ ταύτης τῆς εὐθείας

(*) Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ΑΧ″, ἀρκεῖ νὰ προεκβληθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΓ μέχρι τῆς ςιγμῆς Ε, ὅπου συναπαντᾷ τὴν περιφέρειαν ΔΒΕ· ἡ εὐθεῖα ΔΕ ἐκφράζει ΑΧ″· διότι $\Delta E=\Delta\Gamma+\Gamma E=\sqrt{(\alpha^2+(2\alpha)^2)}+\alpha$.

σιγμή τις Χ ὥστε ΑΧ νὰ ἦναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ ΑΒ καὶ ΒΧ, ἢ $AB : AX :: AX : BX$ .. (3).

Τὰ δύο σημεῖα Χ′, Χ″, τὰ προσδιοριζόμενα ἐκ τῶν τύπων $BX' = (3 - \sqrt{5})\alpha$, $BX'' = (3 + \sqrt{5})\alpha$, ἔχουσι τὴν ζητουμένην ἰδιότητα· ὥστε

$$AB : AX' :: AX' : BX', \quad AB : AX'' :: AX'' : BX''$$

Επειδὴ τὰ δύο σημεῖα Χ′, Χ″ πίπτουν πρὸς τἀριστερὰ τῆς στιγμῆς Β, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ζητουμένη στιγμὴ Χ εἶναι πρὸς τἀριστερὰ τῆς Β, καὶ σημειωθῇ ΒΧ διὰ χ, αἱ δύο τιμαὶ, ΒΧ′, ΒΧ″, πρέπει νὰ ἦναι θετικαί· καὶ τῷ ὄντι ἡ ἀναλογία (3) δίδει, $\chi = (3 - \sqrt{5})\alpha = BX'$, $\chi = (3 + \sqrt{5})\alpha = BX''$

Η ζητουμένη στιγμὴ Χ δὲν ἠμπορεῖ νὰ πέσῃ εἰς τὰ δεξιὰ τῆς Β· διότι ἐὰν ἦτον ἐπὶ τῆς ΒΘ, ἠθέλαμεν ἔχει

$AB < AX$, $BX < AX$· ὅθεν $AB \times BX < AX \times AX$.

καὶ ἡ ἀναλογία (3) εἶναι ἀνύπαρκτος. Ημπορούσαμεν νὰ γνωρίσωμεν τοῦτο διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ· διότι ὑποθέτοντες ὅτι Χ πίπτει ἐπὶ τῆς ΒΘ, καὶ σημειόνοντες ΒΧ διὰ χ, ἠθέλαμεν καταντήσει διὰ τῆς ἀναλογίας (3) εἰς κατ' ἐπίνοιαν τιμὰς τῆς χ.

22. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι Ρ. σχ. ι′.

Εστωσαν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΒΑΓ, $B\Gamma = \alpha$, $A\Gamma = \beta$, $AB = \gamma$· ἂς ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΒΔ, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσιν αἱ γραμμαὶ ΑΔ, ΔΓ· ἐπειδὴ εἰς κάθε ἐγγεγραμμένον τετράπλευρον τὸ γινόμενον τῶν δύο διαγωνίων του ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν· διὰ τοῦτο τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διαγώνιος $B\Delta = 2P$, δίδει,

$$2P\beta = \gamma \times \Gamma\Delta + \alpha \times A\Delta \quad . \; . \; . \; (1)$$

Ἀπὸ δὲ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ, ΒΑΔ, συνάγομεν $\Gamma\Delta = \sqrt{(4P^2 - \alpha^2)}$, $A\Delta = \sqrt{(4P^2 - \gamma^2)}$· ἀντεισάγοντες ταύτας τὰς τιμὰς εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν,

$$2P\beta = \gamma\sqrt{(4P^2 - \alpha^2)} + \alpha\sqrt{(4P^2 - \gamma^2)} \quad . \; . \; . \; (2)$$

ἐξίσωσις, ἥτις ἐκφράζουσα μίαν σχέσιν μεταξὺ τῶν ποσοτήτων α, β, γ, P προσδιορίζει μίαν τούτων διὰ τῆς γνώσεως τῶν τριῶν ἄλλων· ὅθεν

1.ον Γνωρίζοντες τὰς χορδὰς δύο τόξων ΑΒ, ΒΓ· προσδιορίζομεν β, ἢ τὴν χορδὴν ΑΓ ἑνὸς τόξου ΑΒΓ ἴσου μὲ τὸ ἄθροισμά των. Ἐὰν τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΓ ἦναι ἴσα, τότε $\alpha = \gamma$, καὶ ἡ (2) δίδει

$$P\beta = \alpha\sqrt{(4P^2 - \alpha^2)}$$

ἐξίσωσις, ἥτις προσδιορίζει τὴν χορδὴν β ἑνὸς τόξου, ὅταν ἦναι γνωστὴ ἡ χορδὴ α τῆς ἡμισείας τούτου τοῦ τόξου.

2.ον Γνωρίζοντες τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀκτῖνα Ρ τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου. Ἐπειδὴ ἂς ὑψώσωμεν εἰς τετράγωνον τὴν (2), τὸ ἓν τῶν ῥιζικῶν ἀφανίζεται· ἂς μεταφέρωμεν ἀκολούθως τοὺς λογικοὺς ὅρους, καὶ ἐκ νέου ἂς τετραγωνίσωμεν διὰ νὰ ἐξαλειφθῇ τὸ ἄλλο ῥιζικόν· εὑρίσκομεν,

$$P = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{(4\alpha\alpha\gamma\gamma - (\alpha\alpha + \gamma\gamma - \beta\beta)^2}}$$

Ὁ τύπος οὗτος δὲν ἠμπορεῖ ὑπὸ ταύτης τῆς μορφῆς νὰ λογαριασθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων· πλὴν ἐπειδὴ ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης εἶναι ἡ διαφορὰ δύο τετραγώνων, διὰ τοῦτο ἰσοῦται μὲ $(2\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2) \times (2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2)$, ἢ $((\alpha + \gamma)^2 - \beta^2) \times (\beta^2 - (\alpha - \gamma)^2)$· ἐπειδὴ δὲ ἀκόμη

$(\alpha+\gamma)^2-\beta^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)$, καὶ $\beta^2-(\alpha-\gamma)^2=(\beta+\alpha-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)$· διὰ τοῦτο ἡ ὑπόρριζος ποσότης ἰσοῦται μὲ $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\beta-\gamma)$· λοιπὸν

$$P=\frac{\alpha\beta\gamma}{\left(\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\beta-\gamma)}\right)},$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν τὴν περίμετρον $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ συνάγομεν διαδοχικῶς

$$\begin{aligned}\alpha+\gamma-\beta&=2\pi-2\beta\\ \beta+\gamma-\alpha&=2\pi-2\alpha\\ \alpha+\beta-\gamma&=2\pi-2\gamma\end{aligned}$$

Λοιπὸν τέλος πάντων,

$$P=\frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{(\pi.(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma))}}\;.\;.\;(3)$$

23. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Γνωρίζοντες τὰς τρεῖς πλευρὰς α, β, γ ἑνὸς τριγώνου νὰ εὕρωμεν τὴν ἔκφρασιν τοῦ ἐμβαδοῦ του. σχ. ια΄.

Εςω ΒΑΓ ἕν τρίγωνον· ΒΔ τὸ ὕψος του· καλοῦντες τὸ τμῆμα $A\Delta=\chi$, ἔχομεν, ἐκ τῆς ἰδιότητος τῶν πλαγιογωνίων τριγώνων, $\overline{B\Gamma}^2=\overline{BA}^2+\overline{A\Gamma}^2-2A\Gamma\times A\Delta$, ἢ $\alpha^2=\gamma^2+\beta^2-2\beta\chi$· ἐκ τῆς ὁποίας $\chi=A\Delta=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta}$· ἀλλὰ τὸ ἀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ δίδει $B\Delta=\sqrt{(\gamma^2-\chi^2)}$· τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $=\frac{1}{2}\beta\times B\Delta$· λοιπὸν καλοῦντες τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο ω, ἔχομεν

$$\omega=\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2\right)}$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ ὑπόῤῥιζος ποσότης ἰσοῦται μὲ $4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)^2$, αὐτὴ δέ, ὡς ἀνωτέρω, μὲ $16\pi.(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma)$· διὰ τοῦτο

$$\omega=\sqrt{\pi.(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma)}.$$

Ὅθεν βλέπομεν ὅτι γνωρίζοντες τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειάν του, πρέπει νὰ λάβωμεν τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν του, ἀπὸ τὸ ἡμιάθροισμα τοῦτο νὰ ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς ἑκάστην τῶν πλευρῶν, καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τρία ὑπόλοιπα, νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ τρία ταῦτα ὑπόλοιπα ἀναμεταξύ των καὶ μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν. Η τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου θέλει εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου·

24. Η ἐξίσωσις (3) τοῦ ἀριθμοῦ 23 προσδιορίζει τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς λειτουργίαν τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ εὕρωμεν τύπον ὅςις νὰ μᾶς προσδιορίζῃ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Εἶναι γνωςὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρόν του πολλαπλασιασθεῖσαν ἐπὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου· καλοῦντες ρ τὴν τοιαύτην ἀκτῖνα, 2π τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου, καὶ ω τὸ ἐμβαδόν του ἔχομεν

$$\omega=\pi\rho\text{· ὅθεν } \rho=\frac{\omega}{\pi}=\sqrt{\frac{(\pi-\alpha)(\pi-\beta)(\pi-\gamma)}{\pi}}.$$

25. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.** Νὰ ἐκτιμήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΓ′ (σχ. ιϛ). Ας ἄξωμεν τὴν διαγώνιον ΑΓ = β, καὶ ἄς λάβωμεν αὐτὴν ὡς βάσιν τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ, ΑΓΓ′· ἔςωσαν υ καὶ υ′ τὰ ὕψη τῶν δύο τούτων τριγώνων· τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου εἶναι $\frac{1}{2}$ υβ, τοῦ δευτέρου $\frac{1}{2}$υ′β· ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράπλευρον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων τριγώνων, διὰ τοῦτο $\frac{1}{2}\beta(\upsilon+\upsilon')$ ἐκφράζει τὸ τοιοῦτον ἐμβαδόν.